

机器人静力学主要是研究机器人处于静平衡态时的力系简化和受力分析问题。所谓平衡态一般是以地球为参照系确定的,是指物体相对于惯性参照系处于静止或匀速直线运动的状态,即加速度为零的状态。本章主要介绍机械臂在静止状态下的受力计算分析以及广义力在不同坐标系中的转换问题。

## 5.1 引言

静力学(Statics)一词是法国数学家、力学家皮埃尔·伐里农(Pierre Varignon, 1654—1722)提出的。静力学在工程技术领域有着广泛的应用,比如建筑物的受力分析、桥梁的受力分析等。

按研究对象的不同,静力学主要分为质点静力学、刚体静力学、流体静力学三大类。机器人静力学属于刚体静力学的范畴。

按研究方法的不同,静力学问题主要有图解法和解析法。

图解法是用几何作图的方法来研究静力学问题。图解法获得的结果精确度不高,但计算速度快,所以在工程技术领域中应用较多。皮埃尔·伐里农在静力学问题的图解法方面做了大量开创性的工作。

解析法是基于平衡条件式或虚功原理用代数的方法求解未知约束的反作用力,计算精度高,是一种更具有通用性和普遍性的方法,但与图解法相比,计算速度慢。法国著名数学家、力学家拉格朗日(Joseph-Louis Lagrange, 1736—1813)是静力学解析法的奠基人。

机器人静力学研究什么问题呢?举例说明。图 5.1 所示的三指灵巧手采用指尖捏住鸡蛋静止时,一般会关注各关节的驱动力与指尖作用力之间的关系。因为指尖力量过大会捏碎鸡蛋,力量过小则捏不住鸡蛋,鸡蛋会脱落,因此这种力的传递关系对于灵巧手的设计和可靠操作非常重要。此外,会关注各手指指杆的受力情况,用以校核各指杆的刚度及计算各指杆的变形情况。

在机器人静力学研究中主要采用解析法,本章也主要介绍机器人静力学的解析方法。

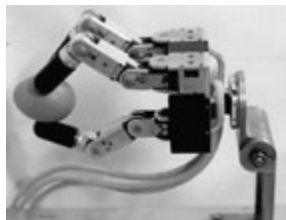


图 5.1 灵巧手捏鸡蛋

## 5.2 机械臂连杆受力与关节平衡驱动力

机械臂通常由连杆和关节依序串联而成,通过末端与外界发生力的相互作用,例如托举重物、打磨工件等,如图 5.2 所示。

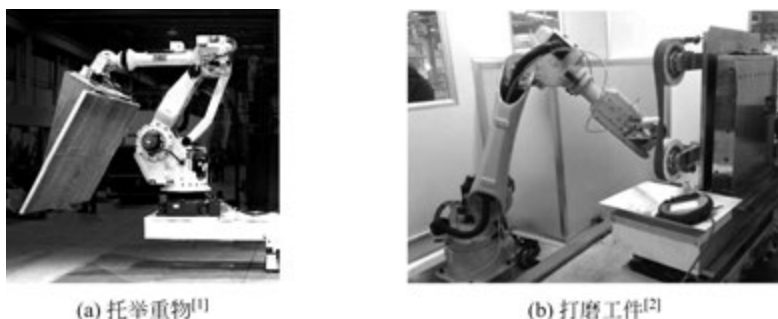


图 5.2 机械臂与外界力作用举例

静力学分析所关注的是机械臂在静止状态时的受力平衡问题,如机械臂末端与外界有力的作用时,力是如何从末端向各连杆传递的? 各关节需要施加多大的驱动力才能保持机械臂的静力平衡状态?

### 5.2.1 机械臂连杆受力计算

这里将串联机械臂的连杆当成刚体,以其中一个连杆  $i$  为对象对其进行静力分析,连杆  $i$  及其相邻连杆之间的作用力和作用力矩关系如图 5.3 所示。

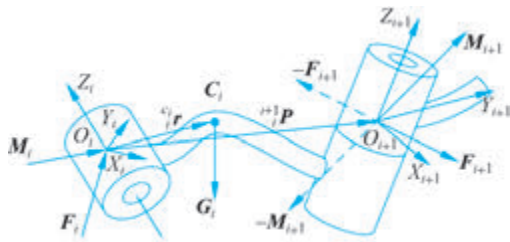


图 5.3 连杆  $i$  受力情况

图 5.3 中,在连杆  $i$  上建立了坐标系  $\{i\}$ ,在连杆  $i+1$  上建立了坐标系  $\{i+1\}$ 。通常,坐标系  $\{i\}$  和坐标系  $\{i+1\}$  分别与连杆  $i$  和连杆  $i+1$  上的 D-H 坐标系相同。

$F_i$  是连杆  $i-1$  作用在连杆  $i$  上的力, $M_i$  是连杆  $i-1$  作用在连杆  $i$  上的力矩,作用点都是坐标系  $\{i\}$  的原点  $O_i$ 。

$F_{i+1}$  是连杆  $i$  作用在连杆  $i+1$  上的力, $M_{i+1}$  是连杆  $i$  作用在连杆  $i+1$  上的力矩,作用点都是坐标系  $\{i+1\}$  的原点  $O_{i+1}$ 。

根据牛顿第三定律:两个物体之间的作用力和反作用力在同一条直线上,大小相等,方向相反,则连杆  $i+1$  作用在连杆  $i$  上的反作用力是  $-F_{i+1}$ ,连杆  $i+1$  作用在连杆  $i$  上的反力矩是  $-M_{i+1}$ 。

$G_i$  是连杆  $i$  的重力,作用在连杆质心  $c_i$  上;  ${}^c_i r$  是连杆  $i$  的质心在坐标系  $\{i\}$  中的位置矢量;  ${}^{i+1}_i P$  是表示坐标系  $\{i+1\}$  的原点  $O_{i+1}$  在坐标系  $\{i\}$  中的位置矢量。

在坐标系  $\{i\}$  中,以原点  $O_i$  为支点,连杆  $i$  处于静平衡状态,合力为零,则可得两个平衡方程:

$$\text{力平衡方程: } {}^i F_i - {}^i F_{i+1} + {}^i G_i = \mathbf{0}$$

$$\text{力矩平衡方程: } {}^i M_i - {}^i M_{i+1} - {}^{i+1}_i P \times {}^i F_{i+1} + {}^c_i r \times {}^i G_i = \mathbf{0}$$

上述两方程中,变量  ${}^i F_i, {}^i F_{i+1}, {}^i G_i, {}^i M_i, {}^i M_{i+1}$  的左上标  $i$  表示变量在坐标系  $\{i\}$  中的值。由这两个方程可得连杆  $i$  关节处受到的力和力矩的递推计算公式为:

$$\begin{cases} {}^i F_i = {}^i F_{i+1} - {}^i G_i \\ {}^i M_i = {}^i M_{i+1} + {}^{i+1}_i P \times {}^i F_{i+1} - {}^c_i r \times {}^i G_i \end{cases} \quad (5-1)$$

当机械臂的末端连杆与外界有作用力和力矩时,可以采用式(5-1)依次递推计算出从末端连杆到基座的运动链中,每个连杆关节处受到的作用力和力矩。

如果忽略掉连杆本身的重量,式(5-1)可以写成如下形式:

$$\begin{cases} {}^i F_i = {}^i F_{i+1} \\ {}^i M_i = {}^i M_{i+1} + {}^{i+1}_i P \times {}^i F_{i+1} \end{cases}$$

采用旋转矩阵,将  ${}^i F_{i+1}$  和  ${}^i M_{i+1}$  表示成从坐标系  $\{i+1\}$  中的量向坐标系  $\{i\}$  转换的形式,则上式可改写为:

$$\begin{cases} {}^i F_i = {}^{i+1}_i R \cdot {}^{i+1} F_{i+1} \\ {}^i M_i = {}^{i+1}_i R \cdot {}^{i+1} M_{i+1} + {}^{i+1}_i P \times {}^i F_i \end{cases} \quad (5-2)$$

式(5-2)就是在忽略连杆重力时,机械臂各连杆关节处受力的递推计算公式。

## 5.2.2 关节平衡驱动力计算

当机械臂处于静力平衡状态时,根据式(5-2)可求出连杆  $i$  关节处所受的力和力矩(忽略连杆重量),由此可求出关节  $i$  需要施加的平衡力或平衡力矩。下面针对旋转关节和移动关节分别做介绍。

### 1) 旋转关节平衡驱动力矩计算

如果不考虑关节中的摩擦力,旋转关节电机只需提供绕关节轴旋转的扭矩,其余各个方向的力和力矩都由关节的机械结构承受了。因此,为保持连杆  $i$  的静力平衡,旋转关节  $i$  的驱动力矩为:

$$\tau_i = {}^i M_i^T \cdot {}^i Z_i \quad (5-3)$$

式中,  ${}^i M_i \in \mathbf{R}^{3 \times 1}$ , 是连杆  $i$  关节处受到的力矩,  ${}^i Z_i \in \mathbf{R}^{3 \times 1}$ , 是坐标系  $\{i\}$  的  $Z$  轴在  $\{i\}$  系中的矢量表达,  ${}^i M_i^T$  的右上标  $T$  是转置。

下面举例说明如何计算旋转关节的平衡驱动力矩。

**例 1:** 假设连杆  $i$  处于静平衡状态,关节处所受的力矩为  ${}^i M_i = \begin{bmatrix} m_{xi} \\ m_{yi} \\ m_{zi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 20 \\ 30 \end{bmatrix}$ , 求旋转

关节  $i$  需施加的平衡驱动力矩。

**解：**依据式(5-3)，旋转关节  $i$  需施加的平衡驱动力矩为：

$$\tau_i = {}^i \mathbf{M}_i^T \cdot {}^i \mathbf{Z}_i = \begin{bmatrix} 10 \\ 20 \\ 30 \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = [10 \quad 20 \quad 30] \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 30$$

虽然式(5-3)看着很复杂,但由于  ${}^i \mathbf{Z}_i = [0 \quad 0 \quad 1]^T$ ,所以只要知道了  ${}^i \mathbf{M}_i$  在  ${}^i \mathbf{Z}_i$  轴的分量,就很容易求出旋转关节  $i$  的平衡驱动力矩。

## 2) 移动关节平衡驱动力计算

如果不考虑关节中的摩擦力,移动关节只需要提供沿  $Z$  轴方向的驱动力,其余方向的力和力矩都由关节的机械结构承受了,所以移动关节的平衡驱动力为:

$$\tau_i = {}^i \mathbf{F}_i^T \cdot {}^i \mathbf{Z}_i \quad (5-4)$$

式中,  ${}^i \mathbf{F}_i \in \mathbf{R}^{3 \times 1}$ , 是连杆  $i$  在关节处受到的力,  ${}^i \mathbf{Z}_i \in \mathbf{R}^{3 \times 1}$ , 是坐标系  $\{i\}$  的  $Z$  轴在  $\{i\}$  系中的矢量表达,  ${}^i \mathbf{F}_i^T$  的右上标  $T$  是转置。

下面举例说明如何计算移动关节的平衡驱动力。

**例 2:** 假设连杆  $i$  处于静平衡状态, 关节处所受的力  ${}^i \mathbf{F}_i = \begin{bmatrix} f_{xi} \\ f_{yi} \\ f_{zi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 20 \\ 30 \end{bmatrix}$ , 求移动关节  $i$

需施加的平衡驱动力。

**解：**依据式(5-4)，移动关节  $i$  需施加的平衡驱动力为：

$$\tau_i = {}^i \mathbf{F}_i^T \cdot {}^i \mathbf{Z}_i = \begin{bmatrix} 10 \\ 20 \\ 30 \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = [10 \quad 20 \quad 30] \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 30$$

从上述算例可以看出,移动关节的平衡驱动力就是连杆  $i$  关节处所受力  ${}^i \mathbf{F}_i$  在  ${}^i \mathbf{Z}_i$  轴的分量。

**注意：**在关节平衡驱动力/力矩的计算中,对于旋转关节计算得到的是力矩,单位是  $\text{N} \cdot \text{m}$ (牛顿·米),对于移动关节计算得到的是力,单位是  $\text{N}$ (牛顿)。

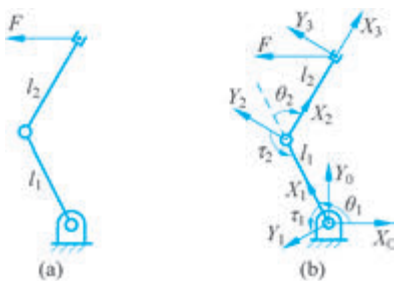


图 5.4 2R 机械臂受力平衡

**例 3:** 如图 5.4(a)所示,平面 2R 机械臂末端受到外界施加的作用力为  $F$ ,  $F$  是在机器人末端坐标系中描述的,机械臂处于静平衡状态,求各连杆关节处受到的力和力矩以及各关节需施加的平衡驱动力矩。

**解：**如图 5.4(b)所示,首先在两个关节上建立连杆坐标系  $\{1\}$  和  $\{2\}$ ,  $X_1$  和  $X_2$  分别在连杆 1 和连杆 2 上,坐标系原点分别位于两个转轴中心,  $Y_1$  和  $Y_2$  分别垂直于连杆 1 和连杆 2,  $Z_1$  和  $Z_2$  分别过原点垂直于纸面;参照坐标系  $\{2\}$ ,在机器人的末端建立坐标系的

$\{3\}$ ,坐标系  $\{3\}$  和  $\{2\}$  具有相同的姿态,最后在基座上建立参考坐标系  $\{0\}$ 。图中所有坐标系的  $Z$  轴都垂直于纸面,为了视图清晰,  $Z$  轴都未标注。

在坐标系  $\{3\}$  中,  $F$  可被表示为  $\mathbf{F} = {}^3 \mathbf{f}_3 = [f_x \quad f_y \quad 0]^T$ , 则利用式(5-2)可得连杆 2 关

节处所受的力和力矩为:

$${}^2\mathbf{f}_2 = {}^3\mathbf{R} \cdot \mathbf{F} = {}^3\mathbf{R} \cdot {}^3\mathbf{f}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \\ 0 \end{bmatrix}$$

$${}^2\mathbf{M}_2 = {}^3\mathbf{P} \times {}^2\mathbf{f}_2 = \begin{bmatrix} l_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ l_2 f_y \end{bmatrix}$$

再由式(5-2)递推出连杆 1 关节处所受的力和力矩为:

$${}^1\mathbf{f}_1 = {}^2\mathbf{R} \cdot {}^2\mathbf{f}_2 = \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 \\ s_2 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_2 f_x - s_2 f_y \\ s_2 f_x + c_2 f_y \\ 0 \end{bmatrix}$$

$${}^1\mathbf{M}_1 = {}^2\mathbf{R} \cdot {}^2\mathbf{M}_2 + {}^2\mathbf{P} \times {}^1\mathbf{f}_1 = \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 \\ s_2 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ l_2 f_y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} l_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} c_2 f_x - s_2 f_y \\ s_2 f_x + c_2 f_y \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ l_2 f_y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ l_1 s_2 f_x + l_1 c_2 f_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ l_2 f_y + l_1 s_2 f_x + l_1 c_2 f_y \end{bmatrix}$$

由于机械臂的两个关节都是旋转关节,因此采用式(5-3)求得各关节的平衡转矩为:

$$\tau_1 = l_1 s_2 f_x + l_1 c_2 f_y + l_2 f_y$$

$$\tau_2 = l_2 f_y$$

写成矩阵形式,即:

$$\begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 s_2 & l_1 c_2 + l_2 \\ 0 & l_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \end{bmatrix} \quad (5-5)$$

这样就求得了在机械臂末端施加作用力  $F$  时,各连杆关节处受到的力和力矩及各关节需提供的平衡驱动力矩。需要注意的是,本例中,作用力  $F$  是在局部坐标系 $\{3\}$ 中描述的。

**例 4:** 对于图 5.4(a)中所示的平面 2R 机械臂,如果外界作用力  $F$  是表示在机械臂的基坐标系中的,求机械臂处于静平衡态时两个关节的平衡驱动力矩。

**解:** 假设基坐标系中外界作用力  $\mathbf{F} = {}^0\mathbf{f}_3 = [{}^0f_x \quad {}^0f_y \quad 0]^T$ ,该力在机械臂末端坐标系中为  ${}^3\mathbf{f}_3 = [f_x \quad f_y \quad 0]^T$ ,则它们之间的转换关系为:

$${}^3\mathbf{f}_3 = {}^0\mathbf{R} \cdot {}^0\mathbf{f}_3 = {}^0\mathbf{R}^{-1} \cdot {}^3\mathbf{f}_3$$

坐标系 $\{0\}$ 与坐标系 $\{3\}$ 之间的姿态转换关系可描述为:坐标系 $\{0\}$ 绕  $Z_0$  轴旋转  $\theta_1$  角,变为坐标系 $\{1\}$ ,坐标系 $\{1\}$ 再绕  $Z_1$  轴旋转  $\theta_2$  角,则与坐标系 $\{2\}$ 姿态相同。因为坐标系 $\{3\}$ 与坐标系 $\{2\}$ 姿态相同,所以坐标系 $\{3\}$ 到坐标系 $\{0\}$ 的转换矩阵为:

$${}^3\mathbf{R} = {}^2\mathbf{R} = \mathbf{R}(Z, \theta_1) \cdot \mathbf{R}(Z, \theta_2) = \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 \\ s_2 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{12} & -s_{12} & 0 \\ s_{12} & c_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

式中,  $s_{12} = \sin(\theta_1 + \theta_2)$ ,  $c_{12} = \cos(\theta_1 + \theta_2)$ 。

则:

$${}^3_0\mathbf{R}^{-1} = \begin{bmatrix} c_{12} & s_{12} & 0 \\ -s_{12} & c_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

可建立如下等式:

$${}^3\mathbf{f}_3 = {}^3_0\mathbf{R}^{-1} \cdot {}^0\mathbf{f}_3 = \begin{bmatrix} c_{12} & s_{12} & 0 \\ -s_{12} & c_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} {}^0f_x \\ {}^0f_y \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \\ 0 \end{bmatrix}$$

由上式可求得:

$$\begin{bmatrix} f_x \\ f_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{12} & s_{12} \\ -s_{12} & c_{12} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} {}^0f_x \\ {}^0f_y \end{bmatrix}$$

将上述求得的  $f_x$  和  $f_y$  的值代入式(5-5), 可得:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} l_1 s_2 & l_1 c_2 + l_2 \\ 0 & l_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} l_1 s_2 & l_1 c_2 + l_2 \\ 0 & l_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_{12} & s_{12} \\ -s_{12} & c_{12} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} {}^0f_x \\ {}^0f_y \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -l_1 s_1 - l_2 s_{12} & l_1 c_1 + l_2 c_{12} \\ -l_2 s_{12} & l_2 c_{12} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} {}^0f_x \\ {}^0f_y \end{bmatrix} \end{aligned}$$

由此求得了 2R 机械臂在末端受到作用力  $F$  (基坐标系下描述) 时, 为保持静态平衡, 各关节需提供的平衡驱动力矩。

## 5.3 静力平衡方程与静力映射分析

静力平衡方程主要是建立机器人静平衡条件下末端受力与关节平衡驱动力之间的映射关系, 静力映射分析主要是分析关节空间的力与操作空间中的力之间的关联关系, 这两者都是机器人静力学分析中的重要内容。

### 5.3.1 静力平衡方程

静力平衡方程是采用虚功原理建立的。

虚功原理是分析静力学的重要原理, 也被称为虚位移原理, 是科学家 J. L. Lagrange 于 1764 年提出的, 当时他才 28 岁。该原理是: 一个原为静止的质点系, 如果约束是理想双面定常约束, 则系统继续保持静止的条件是所有作用于该系统的主动力对作用点的虚位移所做功的和为零。

虚位移指的是物体被附加的满足约束条件及连续条件的无限小可能位移。虚位移的“虚”字表明它可以与真实的结构受力而产生的真实位移无关, 可以由其他原因(如温度变化、外力系作用或其他干扰)造成的满足位移约束、连续条件的可能几何位移。由于虚位移

是无穷小位移,所以在产生虚位移过程中不会改变原受力平衡体力的作用方向与大小,即受力平衡体的平衡状态不会因产生虚位移而改变。

真实力在虚位移上做的功称为虚功。数学表示上,虚功是力矢量或力矩与虚位移的点积。对于力矩,虚功为  $W = \boldsymbol{\tau}^T \cdot \delta \boldsymbol{q}$ ; 对于力,虚功为  $W = \boldsymbol{F}^T \cdot \delta \boldsymbol{d}$ 。

针对不同的对象,虚功原理演变出不同的细分原理,如刚体体系的虚功原理、变形体系的虚功原理等。机器人静力学分析中采用的虚功原理属于刚体体系的虚功原理。刚体体系的虚功原理:假设在满足理想约束的刚体体系上作用任何的平衡力系,刚体体系发生满足约束条件的无限小位移,则主动力在位移上所做的虚功总和恒为零。功是表示能量的物理量,计量单位是焦耳(Joule),静力平衡系统中各分系统所做的虚功必须单位一致。

采用虚功原理可以将机器人操作空间中做的虚功与机器人关节空间中做的虚功建立等价关系,由此可推导机器人的静力平衡方程。

假设有一个  $n$  关节的机械臂,将机械臂末端所受到的力和力矩用一个六维矢量表示为:

$$\boldsymbol{F} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{f} \\ \boldsymbol{m} \end{bmatrix} = [f_x \quad f_y \quad f_z \quad m_x \quad m_y \quad m_z]^T$$

这里  $\boldsymbol{F}$  被称为广义力,即不细究它是力、力矩还是力和力矩的组合。 $\boldsymbol{F}$  是在基坐标系下描述的。

将各关节的驱动力表示成  $n$  维矢量:

$$\boldsymbol{\tau} = [\tau_1 \quad \tau_2 \quad \cdots \quad \tau_n]^T$$

这里也不关注它是驱动力还是驱动力矩。

对于该机械臂,将关节驱动力矢量  $\boldsymbol{\tau}$  看成系统的控制输入,末端产生的广义力  $\boldsymbol{F}$  作为系统的控制输出,采用虚功原理推导它们之间的关系。

在虚功原理中,虚位移被定义为满足机械系统的几何约束条件的无限小位移。令机械臂各关节的虚位移为  $\delta \boldsymbol{q} = [q_1 \quad q_2 \quad \cdots \quad q_n]^T$ ,则各关节所做的虚功之和为:

$$w = \boldsymbol{\tau}^T \cdot \delta \boldsymbol{q} = \tau_1 \delta q_1 + \cdots + \tau_n \delta q_n$$

令机械臂末端的虚位移为  $\boldsymbol{D} = [d_x \quad d_y \quad d_z \quad \delta_x \quad \delta_y \quad \delta_z]^T$ , $\boldsymbol{D}$  是在基坐标系下描述的,则机械臂末端所做的虚功为:

$$w = \boldsymbol{F}^T \cdot \boldsymbol{D} = f_x d_x + f_y d_y + f_z d_z + m_x \delta_x + m_y \delta_y + m_z \delta_z$$

根据虚功原理,在机械臂静平衡情况下,由任意虚位移产生的虚功和为零,即关节空间虚位移产生的虚功等于操作空间虚位移产生的虚功,由此可得:

$$\boldsymbol{\tau}^T \cdot \delta \boldsymbol{q} = \boldsymbol{F}^T \cdot \boldsymbol{D}$$

在机器人运动学中,由于  $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{J} \cdot \delta \boldsymbol{q}$ ,所以上式可表示为:

$$\boldsymbol{\tau}^T \cdot \delta \boldsymbol{q} = \boldsymbol{F}^T \cdot \boldsymbol{J} \cdot \delta \boldsymbol{q}$$

消掉  $\delta \boldsymbol{q}$ ,可得

$$\boldsymbol{\tau}^T = \boldsymbol{F}^T \cdot \boldsymbol{J}$$

消掉转置,得到机械臂的静力平衡方程为:

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{J}^T \boldsymbol{F} \quad (5-6)$$

式中, $\boldsymbol{J}^T$  被称为“力雅可比”,它建立了静力平衡条件下机械臂的末端受力与各关节驱

动力之间的映射关系。

由式(5-6)可得出两点结论:

(1) 在仅考虑机械臂关节驱动力和末端作用力的情况下,机械臂保持静平衡的条件是关节驱动力满足式(5-6);

(2) 在机械臂静力平衡状态下,机器人的力雅可比矩阵是它运动雅可比矩阵的转置。

需要注意的是,上述结论只有在忽略机械臂重力的条件下才能成立。

**例 5:** 如图 5.5 所示的 2R 机械臂,其末端受到外界施加的作用力为  $\mathbf{F}$ ,  $\mathbf{F}$  是在基坐标系下描述的,该机械臂处于静平衡状态,求各个关节的平衡驱动力矩。

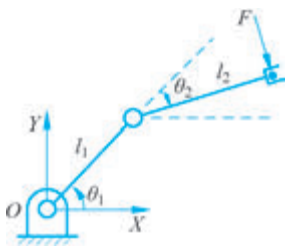


图 5.5 2R 机械臂

**解:** 如图 5.5 所示,2R 机械臂的基坐标系是  $XOY$ ,定义两个关节角  $\theta_1$  和  $\theta_2$ ,顺时针方向为负,逆时针方向为正。建立该机器人的运动学方程:

$$\begin{cases} x = l_1 \cos\theta_1 + l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \\ y = l_1 \sin\theta_1 + l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \end{cases}$$

上式微分后求得机械臂的雅可比矩阵为:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} -l_1 s_1 - l_2 s_{12} & -l_2 s_{12} \\ l_1 c_1 + l_2 c_{12} & l_2 c_{12} \end{bmatrix}$$

则力雅可比矩阵为:

$$\mathbf{J}^T = \begin{bmatrix} -l_1 s_1 - l_2 s_{12} & l_1 c_1 + l_2 c_{12} \\ -l_2 s_{12} & l_2 c_{12} \end{bmatrix}$$

则各关节的平衡驱动力矩为:

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{J}^T \cdot \mathbf{F} = \begin{bmatrix} -l_1 s_1 - l_2 s_{12} & l_1 c_1 + l_2 c_{12} \\ -l_2 s_{12} & l_2 c_{12} \end{bmatrix} \cdot \mathbf{F}$$

从上述计算可以看出,通过静力平衡方程可以很方便地求得静平衡状态下 2R 机械臂各关节的平衡驱动力,力雅可比矩阵  $\mathbf{J}^T$  可由机器人的运动学雅可比矩阵  $\mathbf{J}$  转置求得。

例 4 和例 5 求的都是 2R 机械臂的关节平衡驱动力矩,所用的方法不同,但结果是相同的。

### 5.3.2 静力映射分析

图 5.6 表示的是机器人操作空间作用力  $\mathbf{F}$  与机器人关节驱动力  $\boldsymbol{\tau}$  之间的静力映射关系。假设机器人操作空间是  $m$  维的,机器人关节空间是  $n$  维的,由于雅可比矩阵  $\mathbf{J}$  与机器

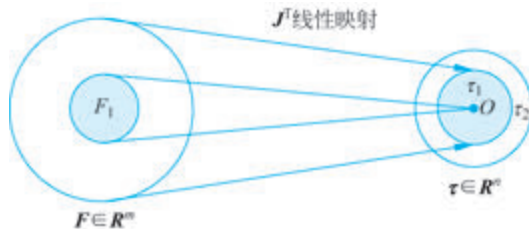


图 5.6 静力映射关系

人的位形  $q$  相关,  $J \in \mathbf{R}^{m \times n}$ ,  $q \in \mathbf{R}^n$ , 所以力雅可比矩阵  $J^T$  也是与机器人的位形  $q$  相关的,  $J^T \in \mathbf{R}^{n \times m}$ 。

静力平衡方程  $\tau = J^T F$  是从  $m$  维的操作空间到  $n$  维的关节空间的线性映射, 即对于给定的机器人末端作用力  $F$  和机器人位形  $q$ , 机器人的关节平衡驱动力  $\tau$  是唯一确定的, 但是对于给定的机器人关节驱动力  $\tau$  和机器人位形  $q$ , 机器人末端作用力  $F$  是不唯一的。机器人末端作用力  $F \in \mathbf{R}^m$  通过  $J^T$  映射出的区域设为  $\tau_1$ ,  $\tau_1$  是  $\tau$  的值域空间的子集, 而  $\tau$  的值域空间是由  $\tau_1$  和  $\tau_2$  两部分组成,  $\tau_2$  表示的是关节驱动力的余量。  $F_1$  是  $F$  的值域空间的子集, 代表的是一个特殊的力空间, 它与机器人的奇异位形相对应, 当机器人处于奇异位形时, 机器人的末端作用力与机器人关节平衡驱动力之间不能建立线性映射关系,  $F_1$  空间的所有变量都映射为  $\tau$  的零空间或零点, 即机器人处于奇异位形时, 机器人末端作用力都被机器人机构本体承受了, 并不需要关节产生平衡驱动力。

图 5.7 所示的是一个两自由度的机械臂处于奇异状态, 此时可以用很小的关节力矩平衡非常大的末端作用力  $F$ , 而且  $F$  的增大并不会导致关节驱动力矩的增大。其原因就是在奇异状态下, 机械臂末端的作用力都映射到关节驱动力矩的零点上了。



图 5.7 奇异状态

## 5.4 静力学的逆问题

机械臂处于静力平衡时, 关节驱动力  $\tau$  和外界作用力  $F$  之间的存在关系式:  $\tau = J^T F$ , 这种从外界作用力  $F$  到关节驱动力  $\tau$  之间的映射被称为静力学的原问题。静力学的逆问题是: 如果已知关节驱动力  $\tau$ , 如何求作用力  $F$ ?

很显然, 静力学的逆问题与力雅可比矩阵  $J^T$  直接相关。

(1) 如果雅可比矩阵  $J$  是方阵且  $J^T$  的逆存在, 则可直接求出静力学的逆解:

$$F = (J^T)^{-1} \cdot \tau$$

(2) 如果  $J$  不是方阵, 或  $J^T$  的逆不存在, 则  $F$  的值不确定, 即  $\tau$  与  $F$  之间无法建立直接映射关系。可采用最小二乘的方法求得  $F$  的一个特解:

$$F = (JJ^T)^{-1} J\tau$$

静力学逆解的主要用途是在机械臂设计时, 由各关节的驱动力矩推导出机械臂的静负荷。如果对机械臂的静负荷进行遍历计算, 则可以确定机械臂的静负荷的范围, 从而指导机械臂的关节驱动选型。

## 5.5 坐标变换

在机器人中, 力 (Force) 与力矩 (Torque/Moment) 也需要在不同坐标系之间进行转换, 以满足测量、分析等需求, 但由于它们的属性不同, 变换方法也不同。

### 5.5.1 力的坐标变换

力  $F$  是自由矢量, 它只有大小和方向,  $F \in \mathbf{R}^3$ , 它的三个分量是力矢量  $F$  在坐标系三

个坐标轴上的投影:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{bmatrix}$$

这三个分量与坐标系原点在哪里无关,只与坐标系的姿态相关,即坐标系平移,力  $\mathbf{F}$  不会改变。在姿态不同的坐标系中转换时,只依赖旋转矩阵。

力  $\mathbf{F}$  在两个坐标系  $A$ 、 $B$  中的坐标变换式为:

$$\mathbf{F}^B = {}^A_B\mathbf{R} \cdot \mathbf{F}^A$$

## 5.5.2 力矩的坐标变换

机器人学中,力矩有两种类型:纯力矩、力产生的力矩。

(1) 纯力矩(Pure torque)的坐标变换。

纯力矩是独立存在的“力矩向量”,它没有力臂。例如,电机输出的力矩就是纯力矩。

这里,纯力矩用  $\boldsymbol{\tau}$  表示,它可表示为三维列向量,  $\boldsymbol{\tau} \in \mathbf{R}^3$ , 它的三个分量是力矩矢量  $\boldsymbol{\tau}$  在坐标系三个坐标轴上的投影:

$$\boldsymbol{\tau} = \begin{bmatrix} \tau_x \\ \tau_y \\ \tau_z \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^3$$

例如,关节电机输出的力矩可表示为  $\boldsymbol{\tau} = [0 \ 0 \ 1.5]^T \text{ Nm}$

纯力矩矢量属于三维向量的集合,它与力的属性相同,可以做向量的加法、减法、标量乘法与线性组合。

纯力矩  $\boldsymbol{\tau}$  在坐标系变化时是纯旋转变换,与坐标系原点的位置无关。纯力矩  $\boldsymbol{\tau}$  在两个坐标系  $A$ 、 $B$  中的坐标变换式为:

$$\boldsymbol{\tau}^B = {}^A_B\mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\tau}^A$$

(2) 力产生力矩(Moment due to force)的坐标变换。

力产生力矩  $\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$ ,  $\mathbf{M} \in \mathbf{SE}(3)$ , 不是纯力矩,坐标系变化(旋转和平移)会导致矢量  $\mathbf{r}$  的变化。

假设绕某原点的力矩:

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$

该力矩  $\mathbf{M}$  在两个坐标系  $A$ 、 $B$  中的坐标变换式为:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}^B &= {}^A_B\mathbf{R} \cdot \mathbf{M}^A + \mathbf{P} \times ({}^A_B\mathbf{R} \cdot \mathbf{F}^A) \\ &= {}^A_B\mathbf{R} \cdot \mathbf{M}^A + \mathbf{S}(\mathbf{P}) \cdot {}^A_B\mathbf{R} \cdot \mathbf{F}^A \end{aligned}$$

$\mathbf{P}$  为平移向量,  $\mathbf{P} = [p_x \ p_y \ p_z]^T$ 。  $\mathbf{S}(\mathbf{P})$  为叉乘矩阵,具有下列属性:

$$\mathbf{P} \times \mathbf{V} = \mathbf{S}(\mathbf{P}) \cdot \mathbf{V}$$

$$\mathbf{S}(\mathbf{P}) = \begin{bmatrix} 0 & -p_z & p_y \\ p_z & 0 & -p_x \\ -p_y & p_x & 0 \end{bmatrix}$$

### 5.5.3 力与力矩的坐标变换

假设六维力和力矩矢量表示为广义力  $\mathbf{F}$ 。如果已知坐标系  $\{j\}$  中的广义力值为  ${}^j\mathbf{F}$ ，如何求它在另外一个坐标系  $\{i\}$  中的值  ${}^i\mathbf{F}$  呢？

下面利用虚功原理推导广义力从坐标系  $\{j\}$  到坐标系  $\{i\}$  的变换。

假设坐标系  $\{j\}$  中的虚位移和作用力分别为  ${}^j\mathbf{D}$  和  ${}^j\mathbf{F}$ ，它们在坐标系  $\{i\}$  中对应的虚位移和作用力分别为  ${}^i\mathbf{D}$  和  ${}^i\mathbf{F}$ 。

根据虚功原理：外力与等效力所做的虚功之和为零，可得：

$${}^i\mathbf{F}^T \cdot {}^i\mathbf{D} = {}^j\mathbf{F}^T \cdot {}^j\mathbf{D} \quad (5-7)$$

由微分运动的坐标变换式(4-26)可得  ${}^j\mathbf{D}$  到  ${}^i\mathbf{D}$  的转换关系为：

$${}^i\mathbf{D} = \begin{bmatrix} {}^i_j\mathbf{R}^T & -{}^i_j\mathbf{R}^T \cdot S({}^{O_j}P) \\ \mathbf{0} & {}^i_j\mathbf{R}^T \end{bmatrix} \cdot {}^j\mathbf{D}$$

则：

$${}^j\mathbf{D} = \begin{bmatrix} {}^i_j\mathbf{R} & S({}^{O_j}P) \cdot {}^i_j\mathbf{R} \\ \mathbf{0} & {}^i_j\mathbf{R} \end{bmatrix} \cdot {}^i\mathbf{D}$$

将上式代入式(5-7)，可得：

$${}^i\mathbf{F}^T \cdot {}^i\mathbf{D} = {}^j\mathbf{F}^T \cdot \begin{bmatrix} {}^i_j\mathbf{R} & S({}^{O_j}P) \cdot {}^i_j\mathbf{R} \\ \mathbf{0} & {}^i_j\mathbf{R} \end{bmatrix} \cdot {}^i\mathbf{D}$$

上面等式两边约去  ${}^i\mathbf{D}$ ，得：

$${}^i\mathbf{F}^T = {}^j\mathbf{F}^T \begin{bmatrix} {}^i_j\mathbf{R} & S({}^{O_j}P) {}^i_j\mathbf{R} \\ \mathbf{0} & {}^i_j\mathbf{R} \end{bmatrix}$$

将上式消去转置，得广义力从坐标系  $\{j\}$  到坐标系  $\{i\}$  的转换方程为：

$${}^i\mathbf{F} = \begin{bmatrix} {}^i_j\mathbf{R} & \mathbf{0} \\ {}^i_j\mathbf{R} \cdot S({}^{O_j}P) & {}^i_j\mathbf{R} \end{bmatrix} \cdot {}^j\mathbf{F} \quad (5-8)$$

式(5-8)即为两坐标系中的广义力转换公式。

式(5-8)也可简写为：

$${}^i\mathbf{F} = {}^j_i\mathbf{T}_f \cdot {}^j\mathbf{F} \quad (5-9)$$

这里， ${}^j_i\mathbf{T}_f = \begin{bmatrix} {}^i_j\mathbf{R} & \mathbf{0} \\ {}^i_j\mathbf{R} \cdot S({}^{O_j}P) & {}^i_j\mathbf{R} \end{bmatrix}$ ，被称为广义力转换矩阵。

**例 6：**如图 5.8 所示，一个带有腕部 6 维力传感器的机器人通过工具打磨工件，力传感器检测出的 6 维力为  ${}^W\mathbf{F}$ ，计算工具与工件之间的作用力。

**解：**假设腕部传感器所在的坐标系为  $\{W\}$ ，工具顶部所在的坐标系为  $\{T\}$ ，坐标系  $\{W\}$  到坐标系  $\{T\}$  的齐次变换矩阵为：

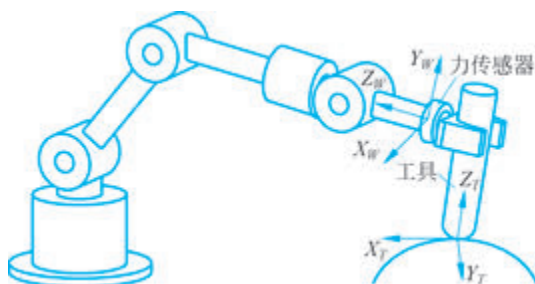


图 5.8 机器人打磨工件示意图

$${}^W_T \mathbf{T} = \begin{bmatrix} {}^W_T \mathbf{R} & {}^{WO}_T \mathbf{P} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix}$$

由矩阵  ${}^W_T \mathbf{T}$  可得到  ${}^W_T \mathbf{R}$  和  ${}^{WO}_T \mathbf{P}$ , 由  ${}^{WO}_T \mathbf{P}$  可得到  $S({}^{WO}_T \mathbf{P})$ , 再根据广义力坐标变换式(5-8), 可得工具与工件之间的作用力为:

$${}^T \mathbf{F} = \begin{bmatrix} {}^W_T \mathbf{R} & 0 \\ {}^W_T \mathbf{R} \cdot S({}^{WO}_T \mathbf{P}) & {}^W_T \mathbf{R} \end{bmatrix} \cdot {}^W \mathbf{F}$$

这种广义力的坐标变换方法可通过间接测量机器人与外界的作用力, 然后通过坐标变换的方式实现对无法直接安装力传感器的部位的力测量, 具有重要的实用价值。

## 5.6 小结

本章首先介绍了静力平衡条件下串联机械臂的连杆受力及关节平衡驱动力的计算方法, 在此基础上讨论了静力平衡方程、静力映射及静力学逆问题, 最后介绍了广义力在不同坐标系之间的转换公式。

## 习题

如图 5.9 所示的 2R 机械臂, 其末端对外界施加的作用力为  $F$ ,  $F$  是在基座坐标系下描述的。

- (1) 推导该机械臂在基坐标系下的力雅可比矩阵;
- (2) 该机械臂处于静平衡状态, 求各个关节需提供的平衡驱动力矩。

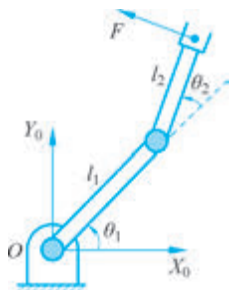


图 5.9 习题 1 图

## 参考文献

- [1] <http://www.tb enterprisesllc.com/products/material-handling/>.
- [2] [https://b2b.hc360.com/viewPics/supplyself\\_pics/82804569113.html](https://b2b.hc360.com/viewPics/supplyself_pics/82804569113.html).
- [3] 熊有伦. 机器人学[M]. 北京: 机械工业出版社, 1992.
- [4] 蔡自兴. 机器人学[M]. 北京: 清华大学出版社, 2009.
- [5] Craig J J. Introduction to Robotics: Mechanics and Control[M]. 3rd Ed. 北京: 机械工业出版社, 2005.