

微分方程模型



微分方程是数学建模中不可或缺的重要工具,它通过描述未知函数及其导数与自变量之间的关系,为解决实际问题提供了强大的数学支持。微分方程的解通常能够反映系统随时间或空间的变化规律。微分方程模型具有如下特征。

(1) 动态性。微分方程模型能够描述变量随时间或空间的动态变化,适用于分析系统的演变规律。

(2) 普遍适用性。微分方程模型广泛应用于自然科学、社会科学、工程学等领域,能够解决多种实际问题。

(3) 精确性。微分方程模型通常通过机理分析建立,能够精确描述系统的内在规律,具有较高的科学性和准确性。

(4) 可解性。微分方程的解法已经较为完善,既有解析解法,也有数值解法等,能够满足不同问题的需求。

微分方程一般包括常微分方程(ODE)和偏微分方程(PDE),其中常微分方程涉及单个自变量的导数,适合描述系统状态随时间变化的规律,例如物体的运动轨迹或振动现象。而偏微分方程则涉及多个自变量的偏导数,适合描述系统状态随时间和空间变化的规律,例如热传导过程中的温度时空分布。在分析实际系统的某些特性随时间或空间的演变规律(如变化率)时,建立相应的微分方程模型通常是关键解决途径。

微分方程作为数学建模的核心工具,其应用领域极为广泛。在物理学中,可以描述物体运动、振动、热传导、电磁场等。在工程学中,可以用于电路设计、机械系统分析、结构力学、流体动力学等。在生物学与医学中,可以模拟种群动态、疾病传播机制、生态系统演化、药物在体内的代谢动力学、疾病治疗效果评估等。在经济学中,可以分析经济增长模式、价格波动规律、市场均衡状态等。

微分方程模型的构建同样遵循一般数学建模的基本要求与步骤,而变化率假设与推导、模型求解等环节则是其应用的关键。作为数学建模的重要工具,微分方程具有广泛的适用性,能为实际问题的解决提供科学依据。通过学习微分方程建模方法,不仅可深入理解自然与社会现象的机理,更能提升解决复杂实际问题的综合能力。

5.1 热水冷却问题

问题提出 一杯热水置于室温为 15°C 的房间内,该水最初的温度是 40°C , 2min 时降到 39.2°C ,问:

(1) 6min 时它的温度是多少?

(2) 降到 35.4℃需要多长时间?

问题分析 物理学家牛顿于 1701 年提出的牛顿冷却定律指出:将一定温度的物体放入介质中时,物体温度的变化速率正比于其与周围介质的温度差。若运用此定律求解热水冷却问题,需先针对具体场景进行合理假设,以满足定律的适用条件。

模型假设

(1) 假设房间足够大,放入一杯温度较高的热水时,室温基本不变。

(2) 水杯内各点水温总是保持一致。

模型建立 根据模型假设(1)可记室温是恒定的 m 。根据模型假设(2)可以规定物体的温度 T 只与时间 t 有关。利用牛顿冷却定律,将温度为 $T(t)$ 的物体放入常温 $m(m < T)$ 的介质中时, $T(t)$ 的变化速率正比于 $T(t)$ 与周围介质 m 的温度差,转换为数学语言可表示为

$$\frac{dT}{dt} = k(T - m). \quad (5.1)$$

其中, k 为热传导系数。

已知 $T(0) = 40, T(2) = 39.2, m = 15$,由机理分析法建立微分方程模型如下:

$$\frac{dT}{dt} = k(T - m), \quad k < 0, \quad (5.2)$$

$$T(0) = 40, \quad m = 15, \quad T(2) = 39.2.$$

模型求解 模型方程即式(5.2)为变量可分离方程,利用初始值和已知条件,可以作变量分离求得方程解析解为

$$T(t) = 25e^{-0.016262t} + 15. \quad (5.3)$$

根据式(5.3)求解问题(1): $T(6) = 25e^{-0.016262 \times 6} + 15 = 37.68$ 。同样求解问题(2): $25e^{-0.016262t} + 15 = 35.4$,则有 $t = 12.5044$,即需要时间约为 12.5min。

北太天元代码

```

clc;
clear;
shiwen = 15;
t_sta = 40;
t_test = 2;
T_test = 39.2;
numerator = T_test - shiwen;
denominator = t_sta - shiwen;
ratio = numerator / denominator;
k = log(ratio) / t_test;
T = @(t_val) shiwen + (t_sta - shiwen) * exp(k * t_val);
% 显示结果
disp('代入参数后的解析解:');
fprintf('T(t) = %.1f + ( %.1f - %.1f) * exp( %.6f * t)\n', shiwen, t_sta, shiwen, k);
% 验证计算结果
t_verify = t_test;
T_verify = T(t_verify);
fprintf('在 t = %.1f 时,计算温度为 %.2f (与测试值 %.2f 对比)\n', t_verify, T_verify, T_test);
% 求解结果
t_verify1 = 6;
T_verify1 = T(t_verify1);
fprintf('在 t = %.1f 时,计算温度为 %.2f \n', t_verify1, T_verify1);
target_T = 35.4; % 目标温度 T
if (target_T - shiwen) * (t_sta - shiwen) <= 0

```

```

% 处理温度无法达到的情况(当目标温度在环境温度另一侧时)
disp('目标温度无法达到,因为它在环境温度的另一侧');
t_result = NaN;
else
t_result = log((target_T - shiwen)/(t_sta - shiwen))/k;
end
% 显示结果
fprintf('当温度 T = %.1f 时,对应的时间 t = %.4f\n', target_T, t_result);

```

模型检验 基于给定的环境室温和热水初始温度条件,实验设计并开展了不同初始温度热水在恒定室温环境下的自然冷却过程研究。实验所获得的数据已详细记录在表 5.1 中。随后,将实验测量得到的热水温度值与数值模型的理论计算结果进行定量对比。通过分析二者的相对误差发现模型的计算结果与实验数据吻合度高。这有力地证明了该数学模型在描述此特定冷却过程中具有较高的准确性,其预测结果是可靠的。

表 5.1 室温恒定和改进后的对比数据

时间/min	实验值/℃	计算值/℃	相对误差/%
2	39.2	39.2	0.00
4	38.5	38.4	0.26
6	37.8	37.7	0.27
8	36.9	37.0	0.27
10	36.1	36.2	0.28
12	35.4	35.6	0.56

应用拓展

- (1) 全国大学生数学建模竞赛 2005 年 A 题:长江水质评价和预测。
- (2) 全国大学生数学建模竞赛 2020 年 A 题:炉温曲线。

5.2 人口增长和预测

AI 小课堂

- (1) 指数增长模型。

200 多年前英国人口学家 T. Malthus(1766—1834)调查了英国 100 多年的人口统计资料,得出了人口增长率不变的假设,并据此建立了著名的人口指数增长模型。记今年人口为 x_0 , k 年后的人口为 x_k ,年增长率为 r ,则有

$$x_k = x_0(1+r)^k. \quad (5.4)$$

显然,这个公式的基本条件是年增长率 r 保持不变。

当考察一个国家或一个较大地区的人口时, $x(t)$ 是一个很大的整数。利用微积分这一数学工具,将 $x(t)$ 视为连续、可微函数,记初始时刻的人口为 $x(0)$ 。假设人口增长率为常数 r ,即单位时间内 $x(t)$ 的增量满足微分方程:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = rx, \\ x(0) = x_0. \end{cases} \quad (5.5)$$

由这个方程很容易求解:

$$x(t) = x_0 e^{rt}. \quad (5.6)$$

其中, $r > 0$ 。此模型表示人口将按指数规律随时间无限增长, 称为指数增长模型。

历史上, 指数增长模型与 19 世纪以前欧洲一些地区人口统计数据可以很好地吻合, 迁往加拿大的欧洲移民后代人口也大致符合这个模型。另外, 用它作短期人口预测可以得到较好的结果。这是因为在这些情况下, 人口增长率是常数这个基本假设大致成立。但是长期来看, 任何地区的人口都不可能无限增长, 即指数模型不能描述也不能预测较长时期的人口演变过程, 这是因为人口增长率事实上是在不断地变化着。排除灾难、战争等特殊时期, 一般说来, 当人口较少时, 增长较快, 即增长率较大; 人口增加到一定数量以后, 增长就会慢下来, 即增长率变小, 就有了下面的阻滞增长 logistic 模型。

(2) 阻滞增长 logistic 模型。

排除灾难、战争等特殊情况, 分析人口增长到一定数量后增长率下降的主要原因。人们注意到, 自然资源、环境条件等因素对人口的增长起着阻滞作用, 并且随着人口的增加, 阻滞作用越来越大。所谓阻滞增长 logistic 模型就是考虑这个因素, 对指数增长模型的基本假设进行修改后得到的。

阻滞作用体现在对人口增长率 r 的影响上, 使得 r 随着人口数量 x 的增加而下降。若将 r 表示为 x 的函数 $r(x)$, 则它应是减函数。于是式(5.5)改为

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = r(x)x, \\ x(0) = x_0. \end{cases} \quad (5.7)$$

其中, 对 $r(x)$ 的一个最简单的假定是 $r(x)$ 为 x 的线性减函数, 即

$$r(x) = r - sx. \quad (5.8)$$

这里 r 称为固有增长率, 表示人口很少时(理论上是 $x=0$)的增长率。

为了确定系数 s 的意义, 引入自然资源和环境条件所能容纳的最大人口数量 x_m (称为人口容量)。当 $x=x_m$ 时, 人口不再增长, 即增长率 $r(x_m)=0$, 代入式(5.7)和式(5.8)得

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = r\left(1 - \frac{x}{x_m}\right)x, \\ x(0) = x_0. \end{cases} \quad (5.9)$$

式(5.9)称为阻滞增长 logistic 模型。其中, 右端的因子 x 体现人口自身的增长趋势, 因子 $\left(1 - \frac{x}{x_m}\right)$ 则体现了环境和资源对人口增长的阻滞作用。显然, x 越大, 前一因子越大, 后一因子越小, 人口增长是两个因子共同作用的结果。

如果以 x 为横轴, 以 dx/dt 为纵轴, 得到阻滞增长 logistic 模型即式(5.9)中人口变化率随人口数量变化的趋势如图 5.1 所示, 可以分析人口增速随着 x 的增加而变化的情况。如果以时间 t 为横轴, 以人口 x 为纵轴, 得到式(5.9)中人口数量随时间变化的趋势如图 5.2 所示, 从而大致地看出人口数量的变化规律, 呈 S 形增长。

因阻滞增长 logistic 模型考虑了自然资源和环境条件等因素对人口的增长起着阻滞作用, 并且随着人口的增加, 阻滞作用越来越大, 所以更多的被用来对人口进行长期的预测和分析。

问题提出 根据国家统计局发布的第七次全国人口普查数据(见表 5.2), 中国人口发展呈现什么新特点? 如何用数学模型来描述人口的增长变化, 并对人口进行科学的预测?

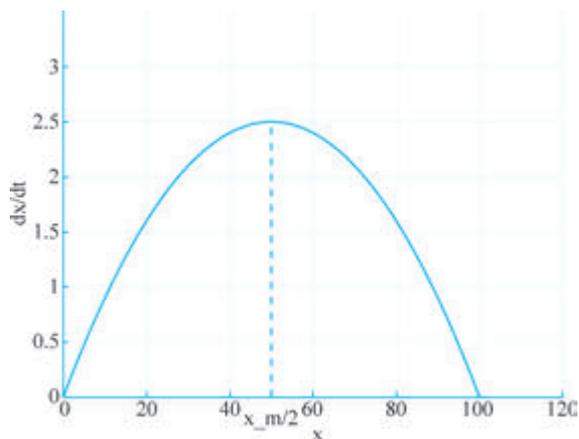


图 5.1 人口变化率随人口数量变化的趋势

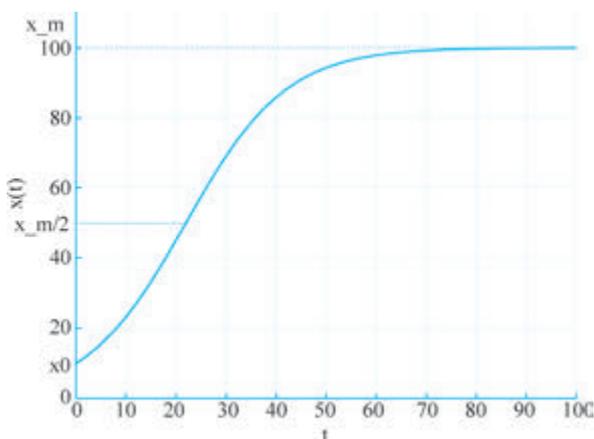


图 5.2 人口数量随时间变化的趋势

表 5.2 时间与人口(亿)的数据

年份	人口								
1980	9.8075	1989	11.2704	1998	12.4761	2007	13.2129	2016	13.8271
1981	10.0072	1990	11.4333	1999	12.5786	2008	13.2802	2017	13.9008
1982	10.1654	1991	11.5823	2000	12.6743	2009	13.3450	2018	13.9538
1983	10.3008	1992	11.7171	2001	12.7627	2010	13.4091	2019	14.0005
1984	10.4357	1993	11.8517	2002	12.8453	2011	13.4735	2020	14.1178
1985	10.5851	1994	11.9850	2003	12.9227	2012	13.5404	2021	14.1260
1986	10.7507	1995	12.1121	2004	12.9988	2013	13.6072	2022	14.1175
1987	10.9300	1996	12.2389	2005	13.0756	2014	13.6782	2023	14.0967
1988	11.1026	1997	12.3626	2006	13.1448	2015	13.7462	2024	14.0828

问题分析 为了探究中国人口增长变化情况,并完成未来人口的预测,需要选择合适的微分方程模型。从中国人口生育政策可以看到,模型需要考虑人口受到自然资源和环境的阻滞作用,本节利用阻滞增长 logistic 模型的微分方程,需要对数据预处理,并进行参数估计,得到确定模型,进而对人口进行预测。

模型假设

- (1) 增长率是人口的线性减函数。
- (2) 只考虑自然和资源对人口的阻滞影响,不考虑其他因素的影响。

模型建立 设人口数量为 $x(t)$, t 表示时间, 引入固有增长率 r 和环境资源容许的最大量 x_m 。由人口增长率与人口数之间的函数关系, 建立人口阻滞增长 logistic 模型即式(5.9)。

模型求解 模型为变量可分离方程, 可以求得方程的解析解:

$$x(t) = \frac{x_m}{1 + \left(\frac{x_m}{x_0} - 1\right) e^{-rt}}. \quad (5.10)$$

其中, 人口随着时间变化趋势为: 先呈指数增长, 当达到最大容量的一半即 $x_m/2$ 时, 自然资源和环境对人口进行阻滞, 增长率减缓, 人口缓慢增长。

根据表 5.2 中 1980—2023 年的人口数据, 采用非线性最小二乘法估计参数, 得到参数:

$$r = 0.054\ 273, \quad x_m = 14.8349.$$

将参数代入模型即式(5.10)中可得到中国人口预测模型。

模型检验 利用模型预测 2024 年人口为 14.318 亿, 和实际值 14.0828 亿比较, 相对误差为 1.67%。

模型改进 绘制中国人口增长率变化图(见图 5.3), 可知中国人口增长率不是严格意义上人口数量的线性减函数。中国国情和人口政策是息息相关的, 可以考虑中国人口生育政策、人口迁入迁出等的影响, 对模型进行改进。

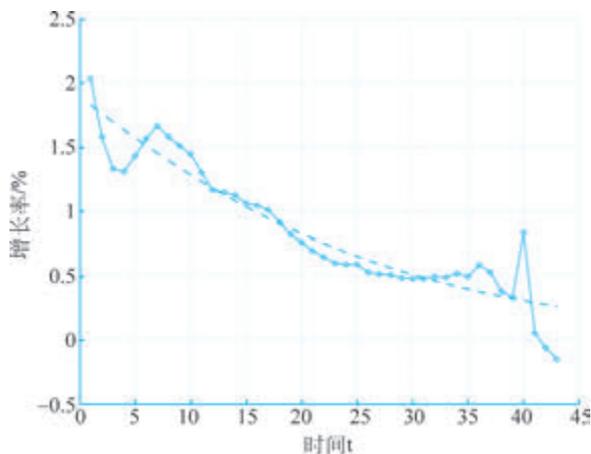


图 5.3 中国人口增长率随时间变化图

北太天元代码

```
clc
clear
year = (1980:2023)';
pop = [9.8075; 10.0072; 10.1654; 10.3008; 10.4357;
10.5851; 10.7507; 10.9300; 11.1026; 11.2704;
11.4333; 11.5823; 11.7171; 11.8517; 11.9850;
12.1121; 12.2389; 12.3626; 12.4761; 12.5786;
12.6743; 12.7627; 12.8453; 12.9227; 12.9988;
13.0756; 13.1448; 13.2129; 13.2802; 13.3450;
13.4091; 13.4735; 13.5404; 13.6072; 13.6782;
13.7462; 13.8271; 13.9008; 13.9538; 14.0005;
14.1178; 14.1260; 14.1175; 14.0967];
t = year - 1980; % 时间变量(1980年为 t = 0)
```

```

x0 = 9;
logistic = @(params, t) params(1) ./ (1 + (params(1)/x0 - 1) * exp(-params(2) * (t - params(3))));
error_fun = @(params) sum((logistic(params, t) - pop).^2);
initial_params = [15, 0.015, 20];
% 拟合模型参数
opts = optimset('MaxIter', 1e5, 'MaxFunEvals', 1e5);
best_params = fminsearch(error_fun, initial_params, opts);
K = best_params(1);
r = best_params(2);
t0 = best_params(3);
fprintf('Logistic 模型拟合参数: \n');
fprintf('环境容量 K = %.4f 亿\n', K);
fprintf('增长率 r = %.6f\n', r);
% 模型拟合效果可视化
figure;
pop1 = logistic(best_params, t);
% 计算年增长率(百分比)
growth_rate = diff(pop) ./ pop(1:end-1) * 100;
growth_rate1 = diff(pop1) ./ pop1(1:end-1) * 100;
plot(growth_rate, '-o', 'LineWidth', 2,);
hold on;
plot(growth_rate1, 'r--', 'LineWidth', 2, 'DisplayName', '拟合曲线');
xlabel('时间 t');
ylabel('增长率/%');
grid on;
set(gcf, 'color', 'w');

```

其中, $\text{best_params} = \text{fminsearch}(\text{error_fun}, \text{initial_params}, \text{opts})$ 为多元无约束无导数优化命令, 用于拟合模型参数。这里 best_params 返回拟合的参数值, error_fun 是函数句柄, initial_params 是初始值, 可以是标量、向量或矩阵, opts 是控制参数。在北太天元命令行窗口中输入 help fminsearch 可以查阅具体的命令语句。

对模型改进的方法很多, 从图 5.3 中可以看到人口增长率与人口之间不是简单的减函数关系, 可以通过改进增长率与人口之间的关系函数来改进模型。假设增长率与人口之间满足多项式分布规律, 如果进行二次多项式拟合, 则改进模型中的增长率为

$$r(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0.$$

其中, 参数 a_2, a_1, a_0 为参数。通过拟合参数, 代入得到改进后的人口模型为

$$\frac{dx}{dt} = x(-0.0169x^2 + 0.0408x + 3.0202).$$

模型比较 利用仿真数值模拟进一步检验, 发现按照阻滞增长 logistic 模型的惯性会持续增长。同时可以预测人口增速放慢。如果不进行生育计划调整, 增速将逼近 0, 人口甚至会负增长。如图 5.4 所示, 点线是阻滞增长 logistic 模型的预测情况, 圈线是基于增长率为二次多项式拟合的预测情况, 发现阻滞增长 logistic 模型比高阶多项式拟合的效果更好。

北太天元代码

```

clc
clear all
K = 14.8349;
r = 0.054273;
future_year = 2025:2035;

```

```

future_t = future_year - 1980;
future_pop = zeros(size(future_year));
t0 = -9.2272;
x0 = 9;
for i = 1:length(future_year)
future_pop1(i) = K ./ (1 + (K./x0-1) * exp(-r * (future_t(i) - t0)));
% fprintf('年份 %d 的人口预测数: %.2f\n', future_year(i), future_pop(i));
end
% 绘制人口变化趋势图
figure;
plot(future_year, future_pop1, 'b--', 'LineWidth', 2, 'MarkerSize', 6);
xlabel('年份');
ylabel('人口数/亿');
% title('2025 - 2035 年人口预测趋势(Logistic 模型)');
grid on;
hold on
a2 = -0.0169;      % x^2 项系数
a1 = 0.0408;      % x 项系数
a0 = 3.0202;      % 常数项
x0 = 9;
base_year = 2024;
t_historical = 0:44;
t_future = 45:55;
tspan = [0, 55];
ode = @(t, x) x * ( a2 * x^2 + a1 * x + a0);
options = odeset('RelTol', 1e-6, 'AbsTol', 1e-8);
[t, x] = ode45(ode, tspan, x0, options);
future_years = 2025:2035;
future_t = future_years - base_year;
future_pop = interp1(t, x, future_t);
% 绘制人口变化曲线
plot(future_years, future_pop, 'r-o',, 'LineWidth', 2, 'MarkerSize', 8); % 未来预测点
xlabel('年份');
ylabel('人口/亿');
grid on;
set(gcf, 'color', 'w');

```

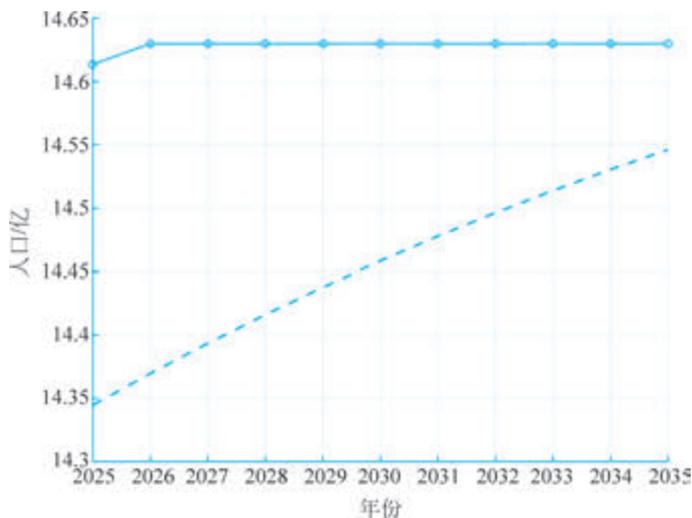


图 5.4 阻滞增长 logistic 模型和二次多项式拟合下的人口数量的预测图

模型思考 还可以用其他模型进行拟合预测：渐近回归模型(Asymptotic Regression Model, ARM)是一种用于描述系统动态行为的统计模型,在农业、生物学和工程学领域得到了广泛应用。目前 ARM 主要存在 3 种形式,其中,第一参数化形式(1st Parameterization)是描述饱和增长或衰减现象的经典模型之一,表达式如下:

$$y = a - bc^x.$$

式中, a (Asymptote)表示渐近线, x 常表示因变量(通常是时间)趋向于无穷大的最终水平或者上限。 b (Range)代表与渐近线之间的初始差值, c (Rate Constant)为速率常数,控制着 y 从初始值到渐近线的速率。

目前中国人口存在的饱和增效现象符合该模型的特点。式中的 a 可以代表人口系统在特定环境、资源和社会经济条件下的理论最大承载能力、长期稳定人口规模或饱和水平,利用该模型可以较好地拟合人口模型增长。构建出的人口预测数学模型如下:

$$y = 15.383\ 63 - 3.2655 \times 10^{31} \cdot 0.964\ 86^x.$$

读者可以对人口模型进一步进行改进求解,并比较多种模型的优缺点,建立更适合中国人口的人口预测模型,对国家人口生育政策提供科学建议。

应用拓展

- (1) 全国大学生数学建模竞赛 2007 年 A 题:中国人口增长预测。
- (2) 美国大学生数学建模竞赛 2021 年 C 题:Strategies to Analyze the Invasion of the Vespa Mandarinina: A Comprehensive Three-dimensional Model.

5.3 渔业的可持续发展

AI 小课堂

设微分方程

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \quad (5.11)$$

右端不显含自变量 t ,称为自治方程。代数方程

$$f(x) = 0, \quad (5.12)$$

的实根 $x = x_0$ 称为式(5.11)的平衡点(或奇点)。

如果存在某个邻域,使式(5.11)的解 $x(t)$ 从这个邻域内的某个 $x(0)$ 出发,满足

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x_0, \quad (5.13)$$

则称平衡点 x_0 是稳定的(稳定性理论中称渐近稳定);否则,称 x_0 是不稳定的(不渐近稳定)。

判断平衡点 x_0 是否稳定通常有两种方法。利用定义式(5.13)称为间接法。不求式(5.11)的解 $x(t)$,因而不利用式(5.13)的方法称为直接法,即一阶一维自治微分方程稳定性理论:

若 $f'(x_0) < 0$,则 x_0 对于式(5.11)是稳定的;

若 $f'(x_0) > 0$,则 x_0 对于式(5.11)是不稳定的。

在前面热水冷却和人口预测案例中,求解模型主要用的是解析解和数值模拟,下面将用微分方程稳定性理论求解问题。

问题提出 在全球范围内,捕鱼业是维持许多沿海地区经济的重要产业。然而,过度捕捞导致了鱼类资源的枯竭和海洋生态系统的破坏。纽芬兰渔场位于纽芬兰岛沿岸,由拉布拉多寒流和墨西哥湾暖流在纽芬兰岛附近海域交汇而形成,它凭借异常丰富的渔业产量有着“踩着鳕鱼群的脊背就可上岸”的美名。然而,在几个世纪的肆意捕捞之后,特别是在 20 世纪五六十

年代大型机械化拖网渔船开始在渔场作业后,纽芬兰渔场渐渐消亡,90年代之后已不可见。为解决这一生态问题,科学家和政府部门联合推行科学捕捞策略,制定捕捞限额和禁渔期政策。渔民通过遵守这些政策,不仅实现了鱼类资源的可持续利用,也改善了海洋生态环境。

如何利用数学建模思想和数学模型,理解适度捕捞和科学捕捞的科学意义,体会人与自然和谐共生的重要性,下面通过案例进行探究。

考察一个渔场,只有一种鱼(不考虑多种群的情况)。其中,鱼量在自然环境下按一定规律增长。如果捕捞量等于增长量,那么渔场鱼量将保持不变,捕捞可以持续下去。本节在捕捞情况下,建立渔场鱼量模型,分析鱼量稳定条件,体会适度捕捞和科学捕捞。

问题分析 渔场鱼量随时间在发生变化,则问题解决需要建立微分方程模型。单位时间鱼量的增长要同时考虑无捕捞情况下种群自身发展,又要考虑捕捞。无捕捞情况下,渔场鱼量会受环境、资源等因素的阻滞作用影响,且阻滞作用随鱼量的增加而增大。考虑捕捞情况时,要注意捕捞量会受到渔场鱼量、渔船数量、渔网网眼等影响。

模型假设

- (1) 在自然环境下,鱼量的增长服从阻滞增长 logistic 规律。
- (2) 单位时间的捕捞量即单位时间捕捞率,与渔场鱼量成正比,比例为 E , 又称捕捞强度。
- (3) 从整个渔业行业发展角度看,捕捞强度 E 的影响只考虑渔船数量的影响,两者之间成正比关系,比例系数为常数。

模型建立 设渔场鱼量为 x , 假设在自然环境下,鱼量的增长服从阻滞增长 logistic 规律:

$$\frac{dx}{dt} = rx \left(1 - \frac{x}{N}\right). \quad (5.14)$$

其中, r 为自然增长率, N 为环境容许下最大量。

再考虑只有捕捞的情况,鱼量是减少的,且与鱼量 x 和出海渔船数量 s 成正比,假设比例为 E , 即捕捞强度,可以得到

$$\frac{dx}{dt} = -Esx. \quad (5.15)$$

综上,在有捕捞情况下,渔场鱼量的微分方程模型为

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = rx \left(1 - \frac{x}{N}\right) - Esx, \\ x(0) = x_0. \end{cases} \quad (5.16)$$

模型求解 如果捕捞量等于增长量,那么渔场鱼量将保持不变,则捕捞量稳定,可以持续下去。稳定的鱼量满足:

$$rx \left(1 - \frac{x}{N}\right) = Esx,$$

即需要研究的是 $\frac{dx}{dt} = 0$ 时的鱼量 x 情况,我们发现它就是式(5.16)的平衡点。

在不需要寻求或预测动态过程中每个时刻的性态,而是研究某种意义下的稳定性态时,利用微分方程稳定性理论进行求解模型更方便。观察发现式(5.16)是一阶一维自治微分方程,可以直接利用前面的稳定性理论进行判定。

令

$$\frac{dx}{dt} = rx \left(1 - \frac{x}{N}\right) - Esx = f(x), \quad (5.17)$$

求 $f(x) = 0$ 的根,即方程的平衡点为

$$x_1 = \frac{N(r - Es)}{r}, \quad x_2 = 0. \quad (5.18)$$

下面判断平衡点稳定性,求平衡点处 $f'(x)$ 的值为

$$f'(x_1) = Es - r, \quad f'(x_2) = r - Es.$$

则有:

当 $Es < r$ 时, $f'(x_1) < 0, f'(x_2) > 0, x_1$ 稳定, x_2 不稳定;

当 $Es > r$ 时, $f'(x_1) > 0, f'(x_2) < 0, x_1$ 不稳定, x_2 稳定。

综上所述,当捕捞强度和渔船数量的乘积小于自然增长率时,即实行适度捕捞、科学捕捞,可以得到稳定的捕捞量,捕捞可以持续下去;当捕捞强度和渔船数量的乘积大于自然增长率时,即采用过度捕捞,最后鱼量为零,鱼群消失。

模型检验 对于微分方程模型,本书求解中用了微分方程稳定性理论,这里的检验采用仿真数值模拟,其他方法如解析解等方法可以尝试。

当固定鱼量初始值、自然增长率、最大容量和出海渔船数量后,模拟不同强度下鱼量的变化,发现有两种趋势:一种趋于稳定的非零值;一种趋于零,如图 5.5 所示。这证明了前面稳定性理论得到的结果,不论取怎样的初始状态,当捕捞强度和渔船数量的乘积小于自然增长率时,可以得到稳定的捕捞量,捕捞可以持续下去;当捕捞强度和渔船数量的乘积大于自然增长率时,即采用过度捕捞,最后鱼量为零,鱼群消失。

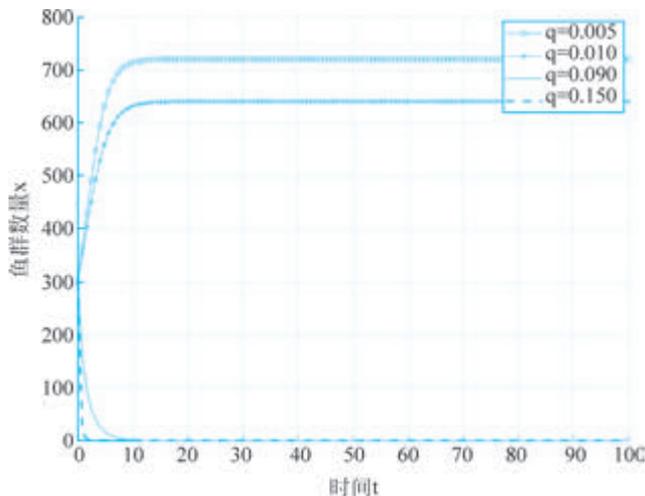


图 5.5 不同捕捞强度下仿真数值模拟结果

当固定鱼量初始值、自然增长率、最大容量和捕捞强度后,模拟不同出海渔船数量下鱼量的变化,发现有两种趋势,如图 5.6 所示。这说明不论取怎样的初始状态,当渔船数量较小时,鱼群数量有所增加;当渔船数量不断增多时,鱼群数量都逐渐减少,趋于零。

北太天元代码

```
clc
clear all
%% 不同捕捞强度下仿真数值模拟
r = 0.5;
K = 800;
s = 10;
q_values = [0.005, 0.01, 0.09, 0.15];
```

```

initial_R = 300;
t_max = 100;
dt = 0.8;
% 初始化
t = 0:dt:t_max;
R = zeros(length(t)/length(dt), length(q_values)); % 初始化鱼群数量矩阵
for i = 1:length(q_values)
R(1, i) = initial_R;
end
for i = 1:length(q_values)
q = q_values(i);
for j = 2:length(t)
dR_dt = r * R(j-1, i) * (1 - R(j-1, i) / K) - q * s * R(j-1, i);
R(j, i) = R(j-1, i) + dR_dt * dt;
% 确保鱼群数量不会变为负数
if R(j, i) < 0
R(j, i) = 0;
end
end
end
% 绘图
figure;
hold on;
colors = lines(length(q_values));
plot(t, R(:, 1), 'o-', 'Color', colors(1, :), 'LineWidth', 1, 'DisplayName', sprintf('q = %.3f',
q_values(1)));
plot(t, R(:, 2), '*-', 'Color', colors(2, :), 'LineWidth', 1, 'DisplayName', sprintf('q = %.3f',
q_values(2)));
plot(t, R(:, 3), '-', 'Color', colors(3, :), 'LineWidth', 2, 'DisplayName', sprintf('q = %.3f',
q_values(3)));
plot(t, R(:, 4), '--', 'Color', colors(4, :), 'LineWidth', 2, 'DisplayName', sprintf('q = %.3f',
q_values(4)));
xlabel('时间 t');
ylabel('鱼群数量 x');
legend show;
grid on;
hold off;
set(gcf, 'color', 'w');
%%% 不同出海渔船数量仿真
clc
clear all
r = 0.5;
N = 800;
q = 0.22;
dt = 1; % 时间步长, 这里假设为 1 单位时间
s_max = 50;
s = 1:s_max;
x = zeros(1, s_max);
x(1) = 300;
for i = 2:s_max
dx = dt * (r * x(i-1) * (1 - x(i-1) / N) - q * s(i-1) * x(i-1));
x(i) = x(i-1) + dx;
if x(i) < 0
x(i) = 0;
end
end
end

```

```

% 绘图
figure;
plot(s, x, 'r--', 'LineWidth', 2, 'DisplayName', sprintf('r = %.3f', r));
xlabel('出海渔船数量 s');
ylabel('鱼群数量 x');
hold on;
q = 0.005;
for i = 2:s_max
dx = dt * (r * x(i-1) * (1 - x(i-1) / N) - q * s(i-1) * x(i-1));
x(i) = x(i-1) + dx;
if x(i) < 0
x(i) = 0;
end
end
plot(s, x, 'bo-', 'LineWidth', 2, 'DisplayName', sprintf('r = %.3f', r));
xlabel('出海渔船数量 s');
ylabel('鱼群数量 x');
grid on;
set(gcf, 'color', 'w');

```

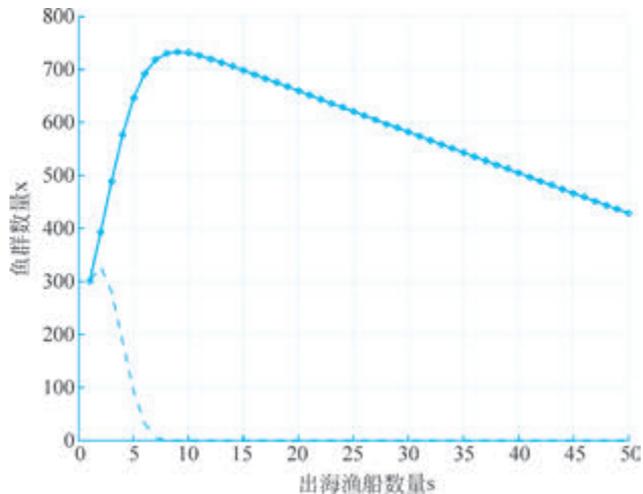


图 5.6 不同出海渔船数量下仿真数值模拟结果

本节通过建立渔场鱼量微分方程模型,分析求解验证:捕捞强度小于固有增长率,即为适度捕捞情况下,渔业可以持续发展下去。反之,验证了《吕氏春秋》中“竭泽而渔,岂不获得,而明年无鱼”。进而全面理解和应用微分方程稳定性知识求解渔业适度捕捞的实际问题,深刻理解适度捕捞和科学捕捞的数学意义,助力绿色可持续发展,促进人与自然的和谐共生。

模型思考 假设在自然环境下,鱼量的增长服从阻滞增长 logistic 规律。这里引入另一个微分方程 Gompertz 模型:

$$\frac{dx}{dt} = rx \ln \frac{N}{x}.$$

其中, r 为自然增长率, N 为环境容许下最大量。将模型进行变化得到

$$\frac{dx}{dt} = rx \ln N \left(1 - \frac{\ln x}{\ln N}\right).$$

它从结构上和阻滞增长 logistic 模型一样,由其仿真模拟图也可以说明是 S 形增长(见图 5.7)。

在其他条件不变的情况下,渔场鱼量模型为

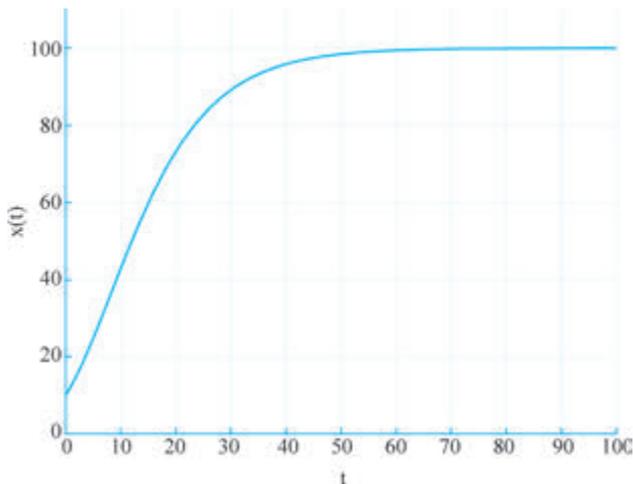


图 5.7 Gompertz 模型的变化趋势图

$$\frac{dx}{dt} = rx \ln \frac{N}{x} - Esx. \quad (5.19)$$

可以直接利用前面的稳定性理论进行判定。令

$$\frac{dx}{dt} = rx \ln \frac{N}{x} - Esx = f(x). \quad (5.20)$$

求 $f(x)=0$ 的根, 即方程的平衡点为

$$x_1 = Ne^{\frac{Es}{r}}, \quad x_2 = 0. \quad (5.21)$$

下面判断平衡点稳定性, 求平衡点处 $f'(x)$ 的值为

$$f'(x_1) = -r, \quad f'(x_2) \rightarrow +\infty.$$

则有 $f'(x_1) < 0, f'(x_2) > 0, x_1$ 稳定, x_2 不稳定。

综上所述, 渔场鱼量稳定在非零点, 但与 E, r, s 的大小无关, 读者可以利用已学的知识进行探究。

应用拓展 全国大学生数学建模竞赛 1996 年 A 题: 最优捕鱼策略。

5.4 传染病模型的改进

AI 小课堂

随着卫生设施的改善、医疗水平的提高以及人类文明的不断发展, 诸如霍乱、天花等曾经肆虐全球的传染性疾疾病已经得到有效的控制。但是一些新的、不断变异的传染病毒却悄悄向人类袭来。20 世纪 80 年代, 艾滋病毒开始肆虐全球, 至今仍在蔓延; 2003 年春来历不明的 SARS 病毒突袭人间, 给人们的生命财产带来极大的危害; 2020 年春新型冠状病毒全国爆发, 给国家经济和人们的健康带来了严重影响。长期以来, 建立传染病的数学模型来描述传染病的传播过程, 分析感染人群的变化规律, 探索预防传染病蔓延的手段等, 一直是各国政府及有关专家关注的课题。

不同类型传染病的传播过程有其各自不同的特点, 清楚这些特点需要相当多的病理知识, 这里不可能从医学的角度一一分析各种传染病的传播, 而只是按照一般的传播机理建立合理的数学模型。

1. SI 模型

SI 模型的全称是“易感者-感染者模型”(Susceptible-Infected Model),主要用于描述传染病在封闭人群中的传播过程。SI 模型将人群分为两类,即易感者(S)和感染者(I)。易感者是指尚未感染疾病但可能被传染的人群,感染者是指已经感染疾病并具有传染性的人群。 t 时刻这两类人在总人数中所占的比例分别记作 $s(t)$ 和 $i(t)$,给出如下假设。

- (1) 封闭系统: 总人数 N 为常数,即不考虑人口的出生、死亡或迁入迁出。
- (2) 接触率: 每个感染者在单位时间内接触的易感者数量为常数,记为 λ ,称为接触率。
- (3) 感染率: 当感染者与易感者接触时,易感者一定会被传染为感染者,即为 λ 。
- (4) 初始条件: 初始时刻的感染者比例为 i_0 ,其余为易感者。

根据假设,每个感染者每天可使 $Ns(t)$ 个易感者变为感染者,因为感染者人数为 $Ni(t)$,所以每天共有 $\lambda s(t)Ni(t)$ 个易感者被感染,则感染者的增加率为

$$N \frac{di}{dt} = \lambda s(t)Ni(t).$$

又因为 $s(t) + i(t) = 1$,则传染病 SI 模型为

$$\begin{cases} \frac{di}{dt} = \lambda si = \lambda i(1 - i), \\ i(0) = i_0. \end{cases} \quad (5.22)$$

将传染病 SI 模型即式(5.22)和阻滞增长 logistic 模型类比来看,发现 SI 模型实际是阻滞增长 logistic 模型,它的解为

$$i(t) = \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{i_0} - 1\right) e^{-\lambda t}}.$$

易感者和感染者随时间的变化趋势如图 5.8 所示。

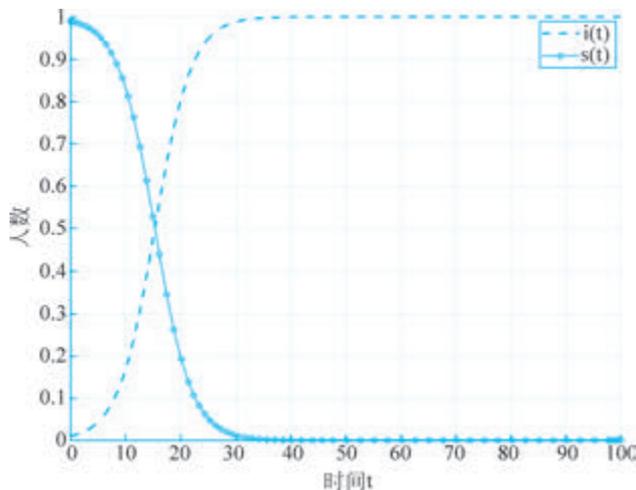


图 5.8 易感者和感染者随时间的变化趋势

由图 5.8 可知:感染者占比为一半时,变化率即增长率达到最大值,即交点处这个时刻感染者增加得最快,可以认为是医院的门诊量最大的一天,预示着传染病高潮的到来,是医疗卫生部门关注的时刻。感染者的增长与传染率成正比,因为日接触率(传染率)表示该地区的卫生水平,其越小即卫生水平越高,所以改善保健设施、提高卫生水平可以推迟传染病高潮的到来。

按照 SI 模型发展下去,所有人终将被传染,全变为感染者,显然不符合实际情况。其原因是模型中没有考虑感染者可以治愈,人群中的健康者只能变成感染者,感染者不会再变成健康者,忽略了治愈和死亡对模型的影响。

SI 模型作为传染病数学模型的基础,为研究传染病的传播规律提供了重要的理论工具,在传染病传播的初步研究中具有重要作用,可以用于预测传染病的传播趋势、评估干预措施的效果等。例如,在 2003 年 SARS 流行期间,SI 模型被用于预测中国大陆地区 SARS 的流行趋势。

但 SI 模型存在明显的缺陷,假设所有人终将被传染,全变为感染者,忽略了治愈和死亡对模型的影响。因此,SI 模型的预测结果与实际情况可能存在偏差。尽管其具有一定的局限性,但在传染病传播的初步研究中仍然具有重要的应用价值。通过进一步改进和扩展,克服 SI 模型的局限性,研究者提出了更复杂的模型,如 SIS 模型和 SIR 模型等。这些模型在 SI 模型的基础上增加了治愈和再感染的机制,使得模型更加贴近现实情况。

2. SIS 模型

有些传染病如伤风、痢疾等愈后免疫力很低,可以假定无免疫性,于是病人被治愈后变成健康者,健康者还可以被感染再变成病人,这类模型称为 SIS 模型,其全称为“易感者-感染者-易感者模型”(Susceptible-Infected-Susceptible Model)。

该模型将人群分为两类:易感者(Susceptible, S),未感染疾病但可能被感染的人群;感染者(Infected, I),已经感染疾病并具有传染性的人群。SIS 模型的核心假设是感染者在治愈后会重新回到易感者状态,即没有长期免疫力。因此,这类模型适用于那些感染后不会产生持久免疫力的疾病,例如某些呼吸道传染病(如流感)。t 时刻这两类人在总人数中所占的比例分别记作 $s(t)$ 和 $i(t)$,给出如下假设。

- (1) 封闭系统:总人数 N 为常数,即不考虑人口的出生、死亡或迁入迁出。
- (2) 接触率:每个感染者在单位时间内接触的易感者数量为常数,记为 λ ,称为接触率。
- (3) 感染率:当感染者与易感者接触时,易感者一定会被传染为感染者,即为 λ 。
- (4) 治愈率:感染者的恢复率是常数,即为 μ ,称为治愈率。病人治愈后成为仍可被感染的健康者,显然 $1/\mu$ 是这种传染病的平均传染期。
- (5) 初始条件:初始时刻的感染者比例为 i_0 ,其余为易感者, $s(t) + i(t) = 1$ 。

根据假设,每个病人每天可使 $Ns(t)$ 个健康者变为感染者,因为感染者人数为 $Ni(t)$,所以每天共有 $\lambda s(t)Ni(t)$ 个健康者被感染,但同时会有 $\mu Ni(t)$ 个感染者被治愈成为健康者,则感染者的增加率为

$$N \frac{di}{dt} = \lambda s(t)Ni(t) - \mu Ni.$$

又因为 $s(t) + i(t) = 1$,则传染病 SIS 模型为

$$\begin{cases} \frac{di}{dt} = \lambda i(1-i) - \mu i, \\ i(0) = i_0. \end{cases} \quad (5.23)$$

微分方程模型即式(5.23)的解析解可以求出,也可以不求解析解,而是通过图形分析 $i(t)$ 的变化规律。定义:

$$\sigma = \frac{\lambda}{\mu}.$$

其中, σ 是整个传染期内每个感染者有效接触的平均人数,称为接触数。SIS 模型即式(5.23)

即为

$$\begin{cases} \frac{di}{dt} = -\lambda i \left[i - \left(1 - \frac{1}{\sigma} \right) \right], \\ i(0) = i_0. \end{cases} \quad (5.24)$$

由式(5.24)可以看出 $\frac{di}{dt}$ 受 σ 的影响。可以画出在不同条件下,感染者随时间变化曲线,如图 5.9 和图 5.10 所示。

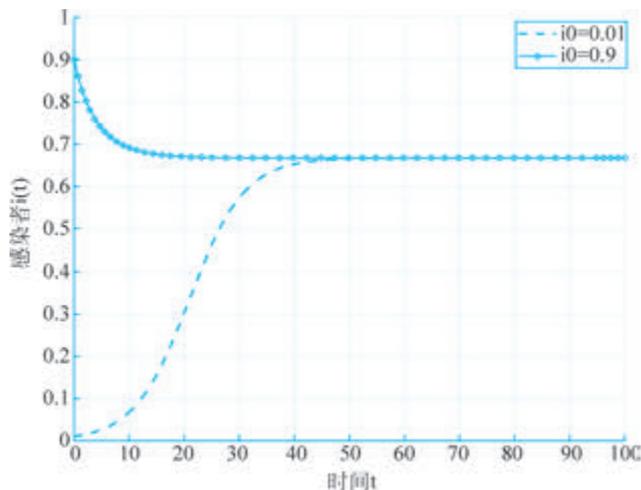


图 5.9 $\sigma > 1$ 时不同初始值感染者变化

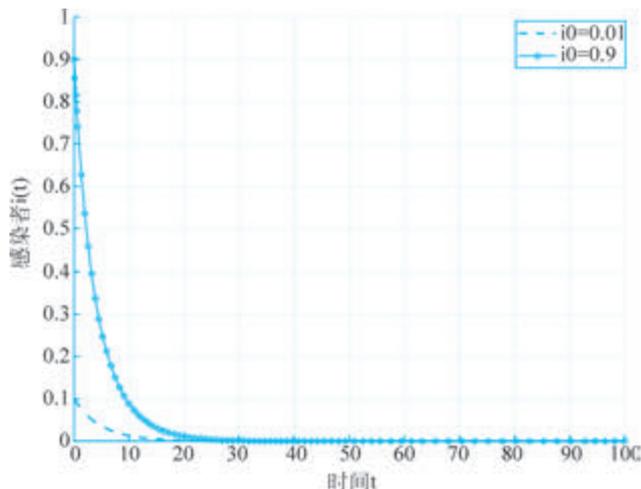


图 5.10 $\sigma \leq 1$ 时不同初始值感染者变化

不难看出,接触数 $\sigma=1$ 是一个阈值,当 $\sigma > 1$ 时, $i(t)$ 的增减性取决于 i_0 的大小(见图 5.9),但其极限值为 $1 - \frac{1}{\sigma}$; 当 $\sigma \leq 1$ 时,感染者比例 $i(t)$ 越来越小,最终趋于 0(见图 5.10),这是由于传染期内经有效接触从而使健康者变成的感染者人数不超过原来感染者数的缘故。

综上,说明:

- (1) 当 $\sigma \leq 1$ 时,疾病无法持续传播,最终会消失。
- (2) 当 $\sigma > 1$ 时,疾病会在人群中持续传播,形成地方性流行。

SIS 模型在实际应用中具有重要意义,如疾病传播规律的研究,通过模型可以预测疾病的

传播趋势和最终结果；防控措施的优化，模型可以用于评估不同防控措施的效果；政策制定时的参考，为公共卫生政策的制定提供了科学依据，例如疫苗接种策略和隔离措施的优化。

但 SIS 模型存在明显的缺陷，假设感染者治愈后无免疫力，又成为可能被感染的健康人，忽略了治愈后具有免疫力和死亡对模型的影响。因此，SIS 模型的预测结果与实际情况可能存在偏差。尽管其具有一定的局限性，但在传染病传播的初步研究中仍然具有重要的应用价值。

通过进一步改进和扩展，克服 SIS 模型的局限性，研究者提出了更复杂的模型，如 SIR 和 SEIR 模型等。这些模型在 SI 和 SIS 模型的基础上增加了治愈和再感染的机制，使得模型更加贴近现实情况。

3. SIR 模型

大多数传染病如天花、流感、肝炎、麻疹等治愈后均有很强的免疫力，所以病愈的人既非健康者(易感染者)，也非病人(已感染者)，他们已经退出传染系统。这种情况比较复杂，称为 SIR 模型，全称为“易感者-感染者-移出者模型”(Susceptible-Infected-Recovered Model)。

该模型将人群分为三类：易感者(Susceptible, S)，未感染疾病但可能被感染的人群；感染者(Infected, I)，已经感染疾病并具有传染性的人群；移出者(Recovered, R)，退出传染系统。SIR 模型的核心假设是感染者在治愈后具有长期免疫力，治愈后退出传染系统，既不是易感者也不是感染者。因此，这类模型适用于那些感染后具有持久免疫力的疾病，例如天花、麻疹等。

设 t 时刻这三类人在总人数中所占的比例分别记作 $s(t)$ 、 $i(t)$ 和 $r(t)$ ，给出如下假设。

- (1) 封闭系统：总人数 N 为常数，即不考虑人口的出生、死亡或迁入迁出。
- (2) 接触率：每个感染者在单位时间内接触的易感者数量为常数，记为 λ ，称为接触率。
- (3) 感染率：当感染者与易感者接触时，易感者一定会被传染为感染者，即为 λ 。
- (4) 治愈率：感染者的恢复率是常数，即为 μ ，称为治愈率。治愈后具有长期免疫力，退出传染系统。
- (5) 初始条件：初始时刻三类人群的比例为 i_0, s_0, r_0 ， $s(t) + i(t) + r(t) = 1$ 。

根据假设，每个感染者每天可使 $Ns(t)$ 个健康者变为感染者，因为感染者人数为 $Ni(t)$ ，所以每天共有 $\lambda s(t)Ni(t)$ 个健康者被感染，但同时会有 $\mu Ni(t)$ 个感染者被治愈成为移出者，则感染者的增加率为

$$\begin{cases} \frac{di}{dt} = \lambda is - \mu i, \\ i(0) = i_0. \end{cases} \quad (5.25)$$

易感者的增加率为

$$\begin{cases} \frac{ds}{dt} = -\lambda is, \\ s(0) = s_0. \end{cases} \quad (5.26)$$

又因为 $s(t) + i(t) + r(t) = 1$ ，则传染病 SIR 模型为

$$\begin{cases} \frac{di}{dt} = \lambda is - \mu i, \\ \frac{ds}{dt} = -\lambda is, \\ i(0) = i_0, \quad s(0) = s_0. \end{cases} \quad (5.27)$$

定义 $\sigma = \frac{\lambda}{\mu}$ ，表示整个传染期内每个感染者有效接触的平均人数，称为接触数。SIR 模型

即式(5.27)变为

$$\begin{cases} \frac{di}{dt} = \lambda i \left(s - \frac{1}{\sigma} \right), \\ \frac{ds}{dt} = -\lambda i s, \\ s(0) = s_0, \quad i(0) = i_0. \end{cases} \quad (5.28)$$

SIR 模型无法求出其解析解,采用数值计算方法进行仿真模拟,结果如图 5.11 所示。

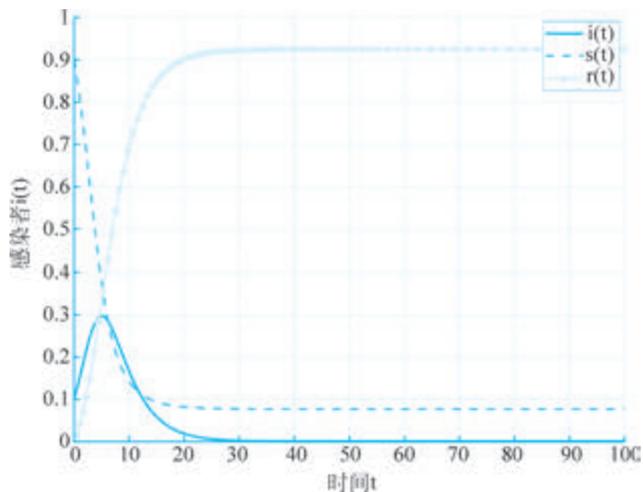


图 5.11 三类人群变化曲线图($\lambda=0.8, \mu=0.3, s_0=0.9, i_0=0.1$)

由图 5.11 可以看出,健康者 $s(t)$ 单调减小;移出者 $r(t)$ 单调增加;感染者 $i(t)$ 在 $s\sigma > 1$ 时增加,直到最大值,在 $s\sigma < 1$ 时减小。

为了分析 $i(t)$ 、 $s(t)$ 的一般变化规律,对模型进行相轨线分析。将式(5.28)转换为

$$\frac{di}{ds} = \frac{1}{\sigma s} - 1, \quad i(0) = i_0, i(0) = i_0. \quad (5.29)$$

这是一个可分离变量方程,容易求得解析解:

$$i = \frac{1}{\sigma} \ln \frac{s}{s_0} - s + (s_0 + i_0). \quad (5.30)$$

可以看出,如果仅当感染者 $i(t)$ 有一段增长的时期才认为传染病在蔓延,那么 $s\sigma = 1$, 即 $s = \frac{1}{\sigma}$ 是一个阈值。当 $s_0 > \frac{1}{\sigma}$ (即 $s\sigma > 1$) 时,随着健康者的减少,感染者增加,传染病就会蔓延。而减小传染期接触数 σ , 使得 $s_0 < \frac{1}{\sigma}$ (即 $s\sigma < 1$), 传染病就不会蔓延。

从上述分析可以看出,可以从控制初始值 s_0 和 σ 来预防、控制传染病的蔓延。一方面,在 $\sigma = \lambda/\mu$ 中,人们的卫生水平越高,日接触率 λ 越小;医疗水平越高,日治愈率 μ 越大,都可以使 σ 越小,所以提高卫生水平和医疗水平有助于控制传染病的蔓延。另一方面, $\sigma s(t) = R_t$ 是传染期内一个感染者传染的健康者的平均数,称为交换数。所以当 $s_0 < \frac{1}{\sigma}$, 即 $\sigma s_0 < 1$ 时,必有 $R_0 < 1$, 既然交换数不超过 1, 感染者 $i(t)$ 绝不会增加, 传染病不会蔓延。

综上,根据 SIR 模型的分析,当 $s_0 < \frac{1}{\sigma}$ 时传染病不会蔓延,所以为制止蔓延,除了提高卫生和医疗水平,使阈值 $1/\sigma$ 变大以外,另一个途径是降低 s_0 , 这可以通过如预防接种使群体免

疫的办法做到。

SIR 模型是在 SI 和 SIS 模型基础上的改进,其简洁的数学形式和明确的假设使其成为理论分析和实际应用的重要工具,但也存在一定的局限:忽略了人口流动、出生死亡等复杂因素,可以通过改进(如加入随机因素或扩展为 SEIR 模型),使其适用性得到显著提升。未来,随着数据驱动方法的发展,SIR 模型有望在更复杂的现实场景中发挥更大作用。

2003 年 SARS 在我国爆发初期,限于卫生部门和公众对这种疾病的认识,使其处于几乎不受制约的自然传播形式,后期随着卫生部门预防和治疗手段的不断加大,SARS 的传播受到严格控制。

模型思考 在传染病的实际传播过程中,感染率和治愈率不会是固定不变的常数,它们也在随着时间发生变化,下面将建立参数时变的 SIR 模型解决问题。

模型假设

- (1) 总人数不变。
- (2) 所有函数均为连续可导函数。
- (3) 病毒没有潜伏期,感染就发病。

模型建立 在总人数不变的条件下, $s(t)$ 、 $i(t)$ 、 $r(t)$ 分别表示第 t 天健康者、感染者、移出者(治愈与死亡之和)的数量, $\lambda(t)$ 、 $\mu(t)$ 分别表示随时间变化的日感染率和移出率(治愈率与死亡率之和)。建立参数时变的 SIR 模型为

$$\begin{cases} \frac{di}{dt} = \lambda(t)is - \mu(t)i, \\ \frac{dr}{dt} = \mu(t)i, \\ i(0) = i_0, \quad r(0) = r_0. \end{cases} \quad (5.31)$$

由于 s 远大于 i 和 r ,初始 s 几乎是常数,将 $\frac{di}{dt} = \lambda(t)is - \mu(t)i$ 简化为 $\frac{di}{dt} = \lambda(t)i - \mu(t)i$ 。

模型求解 从网上搜集到 2020 年新型冠状病毒疫情期间的较为完整数据,将日期 1 月 23 日作为第 1 天,以此类推得出每一天的确诊、治愈和死亡的累计病例数,其中感染者和移出者数量的散点图如图 5.12 和图 5.13 所示。

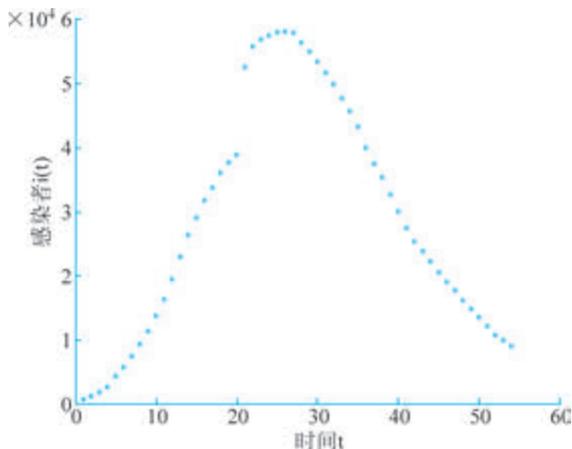


图 5.12 原始数据的感染者的散点图

为了使用模型分析预测病毒的传播,需要对实变的感染率和移出率进行分析处理。取 $i(t)$ 和 $r(t)$ 的差分 $\Delta i(t)$ 和 $\Delta r(t)$, 作为式(5.31)左端导数的近似值。先用 $dr/dt = \mu(t)i$ 估

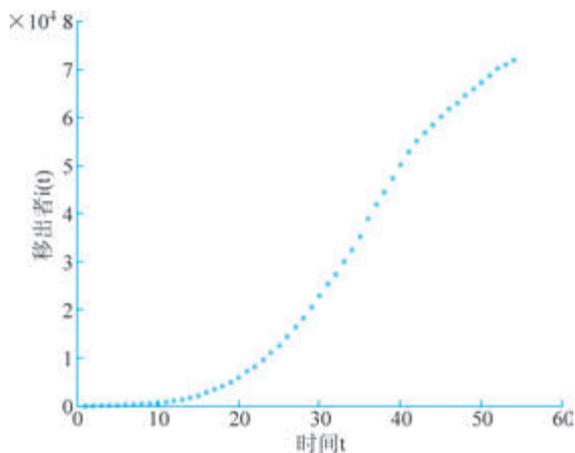
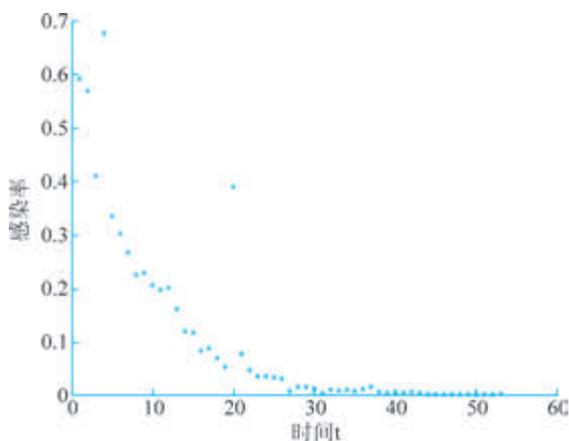
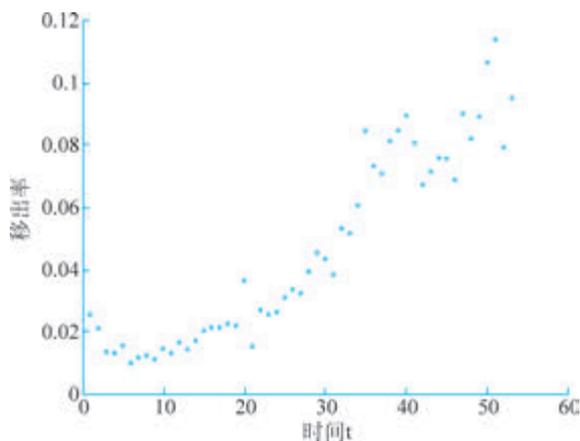


图 5.13 原始数据的移出者数量的散点图

计 $\mu(t) = \Delta r(t) / i(t)$, 再将这个结果代入 $di/dt = \lambda(t)i - \mu(t)i$, 得 $\lambda(t) = (\Delta i(t) + \Delta r(t)) / i(t)$ 。根据数据得到感染率 $\lambda(t)$ 和移出率 $\mu(t)$ 随时间变化的散点图, 如图 5.14 和图 5.15 所示。

图 5.14 感染率 $\lambda(t)$ 的散点图图 5.15 移出率 $\mu(t)$ 的散点图

下面以感染率为例, 利用日感染率数据的均值和标准差, 定义偏离阈值, 找到符合条件的

数据索引,根据索引提取到有效的日期数据和感染率数据,定义出要拟合的函数形式为 $\lambda(t) = ae^{bt}$,设置初始参数值进行非线性最小二乘拟合获取拟合后的参数,并绘制出原始数据和拟合曲线,最后进行误差分析。最终得到感染率和移出率的拟合函数为

$$\lambda(t) = 0.73761e^{-0.12802t}, \quad \mu(t) = 0.010876e^{0.044842t}. \quad (5.32)$$

其中,拟合曲线图如图 5.16 和图 5.17 所示。

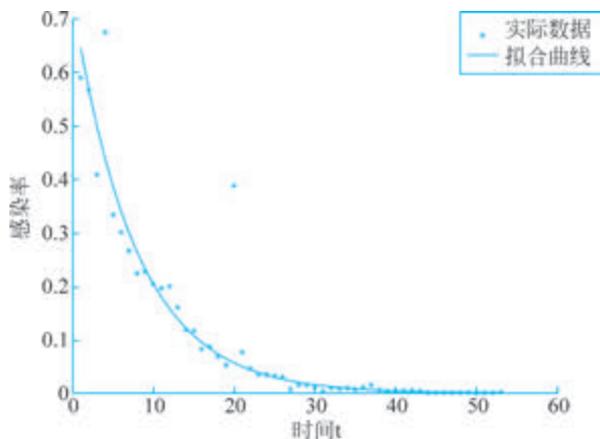


图 5.16 感染率 $\lambda(t)$ 的拟合曲线

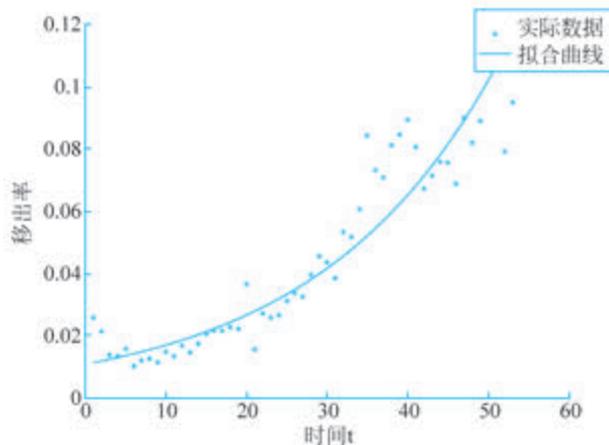


图 5.17 移出率 $\mu(t)$ 的拟合曲线

北太天元代码

```

clc
clear all
M = xlsread('新型冠状病毒感染统计数据.xlsx','B2:E55');
T = 1:size(M,1);
T = T';
r = M(:,2) + M(:,3);
i = M(:,1) - r;
dr = diff(r);
di = diff(i);
i = i(1:end-1);
r = r(1:end-1);
T = T(1:end-1);

```

```

u = dr./i;
lam = (di + dr)./i;
% //对 λ 进行指数拟合: λ(t) = a * exp(b * t)
valid_idx = find(lam > 0);
p_lam = polyfit(T(valid_idx), log(lam(valid_idx)), 1);
a_lam = exp(p_lam(2));
b_lam = p_lam(1);
lam_fit = a_lam * exp(b_lam * T);
% //对 u 进行指数拟合: u(t) = c * exp(d * t)
valid_idx_u = find(u > 0);
p_u = polyfit(T(valid_idx_u), log(u(valid_idx_u)), 1);
a_u = exp(p_u(2));
b_u = p_u(1);
u_fit = a_u * exp(b_u * T);
% //绘制感染率 λ 及其拟合曲线
figure;
plot(T, lam, ' * ', 'linewidth', 2); hold on;
plot(T, lam_fit, 'r - ', 'linewidth', 2);
% title('感染率 λ 及其指数拟合');
xlabel('时间 t');
ylabel('感染率');
legend('实际数据', '拟合曲线', 'Location', 'best');
% text(0.5, 0.9, ['拟合公式: λ = ', num2str(a_lam), ' * exp(', num2str(b_lam), ' * t)'],
'normalized');
a = num2str(a_lam)
b = num2str(b_lam)
set(gcf, 'color', 'w');
% //绘制移出率 u 及其拟合曲线
figure;
plot(T, u, ' * ', 'linewidth', 2); hold on;
plot(T, u_fit, 'r - ', 'linewidth', 2);
% title('移出率 u 及其指数拟合');
xlabel('时间 t');
ylabel('移出率');
set(gcf, 'color', 'w');
legend('实际数据', '拟合曲线', 'Location', 'best');
% text(0.5, 0.9, ['拟合公式: u = ', num2str(a_u), ' * exp(', num2str(b_u), ' * t)'], 'Units',
'normalized');
c = num2str(a_u)
d = num2str(b_u)
% //显示拟合结果
disp('感染率 λ 拟合结果:');
disp(['λ(t) = ', num2str(a_lam), ' * exp(', num2str(b_lam), ' * t)']);
disp('移出率 u 拟合结果:');
disp(['u(t) = ', num2str(a_u), ' * exp(', num2str(b_u), ' * t)']);
a1 = a_lam * exp(b_lam * 30);
b1 = a_u * exp(b_u * 30);

```

其中, $p_lam = polyfit(T(valid_idx), \log(lam(valid_idx)), 1)$ 为多项式曲线拟合命令, 通过最小二乘法找到一个一次多项式的系数使其最适合数据。这里 p_lam 返回拟合的参数值, 因为对指数函数取对数后进行的线性拟合, 所以第一个返回的参数值需要指数运算后, 得到所求参数值 $a_lam = \exp(p_lam(2))$ 。在北太天元命令窗口中输入 `help polyfit` 可以查阅具体的命令语句。

拟合得到感染率和移出率的函数之后, 将其代入 SIR 模型中, 下面利用四阶龙格-库塔方

法求解微分方程。其中。龙格-库塔公式是欧拉方法的一种推广,也是应用最广的求解常微分方程数值问题的方法,下面给出需要用到的四阶龙格-库塔公式。

$$\begin{aligned}
 y_{n+1} &= y_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \\
 k_1 &= f(x_n, y_n), \\
 k_2 &= f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{hk_1}{2}\right), \\
 k_3 &= f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{hk_2}{2}\right), \\
 k_4 &= f(x_n + h, y_n + hk_3).
 \end{aligned} \tag{5.33}$$

模型检验 运用北太天元实现上述过程得到数值解,直接将式(5.32)中的感染率和移出率带入模型求解。同时,利用差分代替微分进行估计,可以得到感染者估计值的递推公式为

$$\hat{i}(t+1) = [1 + \hat{\lambda}(t) - \hat{\mu}(t)]\hat{i}(t). \tag{5.34}$$

以感染者数量 $i(t)$ 和原始数据对比结果如图 5.18 所示,其中星线为原始数据,实线为模型利用四阶龙格-库塔公式直接求解拟合结果,圈线为差分估计即式(5.34)的拟合结果。

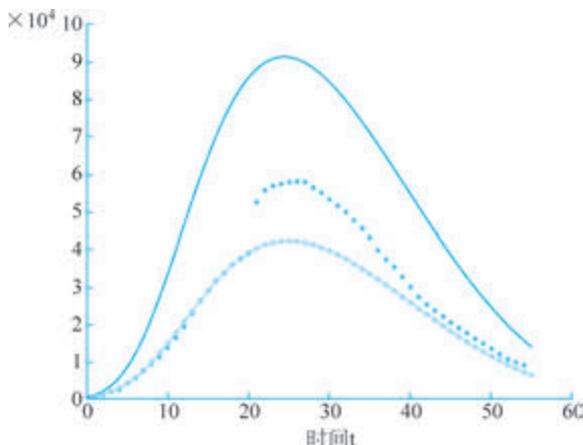


图 5.18 微分方程的数值解和原始数据对比结果

由图 5.18 发现,运用差分估计拟合结果更好,四阶的龙格-库塔公式求解的微分方程的数值解比较接近实际情况。读者可以继续分析其中原因,并对模型进行改进。

北太天元代码

```

%% 模型和实际数据的检验
clc
clear all
t0 = 0;
tf = 55;
i0 = 600;
r0 = 0;
h = 0.01;
N = (tf - t0)/h;
[t_values, i_values, r_values] = runge_kutta_method3(@dynamics, t0, [i0; r0], h, N);
figure;
plot(t_values, i_values, 'b-', 'DisplayName', 'i(t)', 'linewidth', 2);

```

```

hold on
xlabel('时间 t');
M = xlsread('新型冠状病毒感染统计数据.xlsx', 'B2:E55');
T = 1:size(M,1);
T = T';
r = M(:,2) + M(:,3);
i = M(:,1) - r;
plot(T, i, ' * ', 'linewidth', 2);
hold on
t = 1:55;
i = zeros(1, 55);
i(1) = 771;
for k = 1:tf-1
lambda = 0.73761 * exp(-0.12802 * k);
mu = 0.010876 * exp(0.044842 * k);
i(k + 1) = (1 + lambda - mu) * i(k);
end
plot(t, i, 'o-', 'linewidth', 2);
set(gcf, 'color', 'w');
function [t_values, i_values, r_values] = runge_kutta_method3(f, t0, y0, h, N)
t_values = zeros(1, N+1);
y_values = zeros(length(y0), N+1);
t_values(1) = t0;
y_values(:, 1) = y0;
for n = 1:N
k1 = h * f(t_values(n), y_values(:, n));
k2 = h * f(t_values(n) + h/2, y_values(:, n) + k1/2);
k3 = h * f(t_values(n) + h/2, y_values(:, n) + k2/2);
k4 = h * f(t_values(n) + h, y_values(:, n) + k3);
y_values(:, n+1) = y_values(:, n) + (k1 + 2*k2 + 2*k3 + k4) / 6;
t_values(n+1) = t_values(n) + h;
end
i_values = y_values(1, :);
r_values = y_values(2, :);
end
function dydt = dynamics(t, y)
i = y(1);
r = y(2);
di_dt = i * 0.73761 * exp(-0.12802 * t) - i * 0.010876 * exp(0.044842 * t);
dr_dt = i * 0.010876 * exp(0.044842 * t);
dydt = [di_dt; dr_dt];
end

```

其中, function [t_values, i_values, r_values] = runge_kutta_method3(f, t0, y0, h, N) 定义了四阶龙格-库塔公式求解函数。这里 i_values 返回四阶龙格-库塔公式的数值, f 是所求微分方程, t0、y0 是初始值, h、N 是控制步长参数。

模型再思考 新型冠状病毒的传播过程中, 发现它具有潜伏期(如 COVID-19 平均 5~6 天), 人群还分为暴露者, 传统 SIR 模型则难以准确预测病毒传播趋势。所以引入暴露者(E) 群体和潜伏期(θ), 可以构建改进的 SEIR 模型来描述新型冠状病毒(感染→潜伏→发病→康复)的传播过程, 描述其规律, 为政策制定提供科学依据。

$$\begin{cases} \frac{di}{dt} = \theta e - \mu i, \\ \frac{de}{dt} = (\lambda_1 e + \lambda_2 i)s - \theta e, \\ \frac{ds}{dt} = -(\lambda_1 e + \lambda_2 i)s, \\ \frac{dr}{dt} = \mu i. \end{cases}$$

应用拓展

- (1) 全国大学生数学建模竞赛 2003 年 A 题: SARS 的传播。
- (2) 美国大学生数学建模竞赛 2023 年 C 题: Crack the Wordle Puzzle: Word Attribute Analysis Approaches。

5.5 种群间关系模型

AI 小课堂

二阶微分方程可用两个一阶微分方程组成的方程组表示:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = f(x_1, x_2), \\ \frac{dx_2}{dt} = g(x_1, x_2). \end{cases} \quad (5.35)$$

右端不显含自变量 t , 是自治方程。代数方程组

$$\begin{cases} f(x_1, x_2) = 0, \\ g(x_1, x_2) = 0. \end{cases} \quad (5.36)$$

的实根 $x_1 = x_1^0, x_2 = x_2^0$ 称为式(5.35)的平衡点, 记作 $P_0(x_1^0, x_2^0)$ 。

如果存在某个邻域, 使式(5.35)的解 $x_1(t), x_2(t)$ 从这个邻域内的某个初始点 $(x_1(0), x_2(0))$ 出发, 满足:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x_1(t) = x_1^0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} x_2(t) = x_2^0. \quad (5.37)$$

则称平衡点 P_0 是稳定的(渐近稳定); 否则, 称 P_0 是不稳定的(不渐近稳定)。

为了用直接法讨论式(5.35)的平衡点的稳定性, 先看线性常系数方程:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = a_1 x_1 + a_2 x_2, \\ \frac{dx_2}{dt} = b_1 x_1 + b_2 x_2. \end{cases} \quad (5.38)$$

其中, 系数矩阵记作

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{bmatrix}.$$

为研究式(5.38)的唯一平衡点 $P_0(0, 0)$ 的稳定性, 假定 \mathbf{A} 的行列式 $\det \mathbf{A} \neq 0, P_0(0, 0)$ 的稳定性由式(5.38)的特征方程:

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = 0, \quad (5.39)$$

的根 λ (特征根) 决定。式 (5.39) 可以写成更加明晰的形式:

$$\begin{aligned}\lambda^2 + p\lambda + q &= 0, \\ p &= -(a_1 + b_2), \\ q &= \det \mathbf{A}.\end{aligned}\quad (5.40)$$

根据特征方程的系数 p, q 的正负很容易判断平衡点的稳定性, 准则如下:

$$\text{若 } p > 0, q > 0, \text{ 则平衡点稳定;} \quad (5.41)$$

$$\text{若 } p < 0 \text{ 或 } q < 0, \text{ 则平衡点不稳定.} \quad (5.42)$$

以上是对线性方程即式 (5.38) 的平衡点 $P_0(0,0)$ 稳定性的结论。对于一般的非线性方程即式 (5.35) 也可以用近似线性方法判断平衡点 $P_0(x_1^0, x_2^0)$ 的稳定性。由式 (5.35) 可得系数矩阵为

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} f_{x_1} & f_{x_2} \\ g_{x_1} & g_{x_2} \end{bmatrix} \Big|_{P_0(x_1^0, x_2^0)}, \quad (5.43)$$

其中, $p = -(f_{x_1} + g_{x_2})|_{P_0}, q = \det \mathbf{A}$, 根据式 (5.41) 和式 (5.42) 可以判断平衡点的稳定性。

自治系统的相轨线是相点随时间 t 变化时在相空间中留下的轨迹, 本质是系统解曲线在相空间中的投影 (消去时间参数 t 后得到的曲线)。相轨线图的核心价值是用几何图形可视化系统的长期行为, 无须求解微分方程即可分析关键性质。

自然界中不同种群之间存在着各种有趣的生存方式, 如相互竞争、相互依存、食饵-捕食者等, 而描述种群间关系也需要用微分方程来描述。下面以种群间食饵-捕食者和相互竞争关系为例, 利用微分方程模型探究其生存方式。

问题提出 20 世纪初, 意大利生物学家 D'Ancona 曾致力于鱼类种群相互制约关系的研究, 他从第一次世界大战期间地中海各港口捕获的几种鱼类捕获量占总数百分比的数据中, 无意中发现鲨鱼等的比例有明显增加, 而供其捕食的食用鱼的百分比却明显下降。由此, D'Ancona 发现了一个问题: 由于战争原因, 作为鱼饵的小鱼多起来, 鲨鱼在鱼群中的总体比例应该是不变的, 什么原因使得鲨鱼的生长要比小鱼的生长更快呢? 这一现象让他感到困惑, 为了揭开这一谜团, D'Ancona 向他的朋友、著名数学家 Volterra 求助。Volterra 通过建立一个简单的数学模型, 成功解释了这一现象。这个模型后来被称为 Volterra 食饵-捕食者模型, 成为生态学研究的基础之一。

问题分析 最简单的食饵-捕食者模型假设食饵种群 (如食用鱼) 独自生存时遵循指数增长规律, 而捕食者种群 (如鲨鱼) 的数量依赖于食饵的数量。基于以下基本假设: 食饵的增长率与捕食者数量成反比, 捕食者的增长率与食饵数量成正比, 食饵和捕食者之间存在相互制约的关系, Volterra 建立了两个微分方程, 描述了食饵和捕食者数量随时间的变化规律, 即

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_1(r - ax_2) = rx_1 - ax_1x_2, \\ \frac{dx_2}{dt} = x_2(-d + bx_1) = -dx_2 + bx_1x_2. \end{cases} \quad (5.44)$$

其中, $x_1(t)$ 为食饵的数量, $x_2(t)$ 为捕食者的数量, r 为食饵独立生存时固有增长率, a 反映捕食者掠取食饵的能力, d 为捕食者独自生存的死亡率, b 反映食饵对捕食者的供养能力。

当 $r=1, d=0.5, b=0.02, x_1(0)=30, x_2(0)=2$ 时, 取不同 a 时数值解结果如图 5.19 和图 5.20 所示, 可以猜测 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$ 是周期函数, 同时图 5.21 相轨线为封闭曲线。

这个模型是生态学和生物数学中的经典模型, 描述了捕食者与食饵种群数量的周期性波

动现象,揭示了种群之间的相互作用关系。但模型中假设的食饵种群(如食用鱼)独自生存时遵循指数增长规律,和实际自然环境中的阻滞增长 logistic 规律不相符,所以可以进一步改进,为种群间关系的研究提供了科学依据。

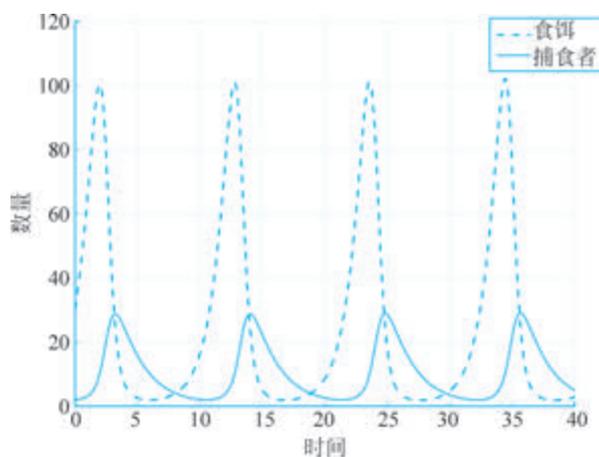


图 5.19 $a=0.1$ 时方程数值解结果

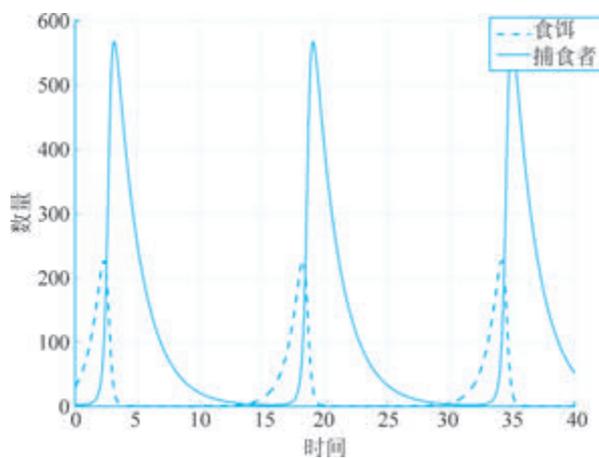


图 5.20 $a=0.01$ 时方程数值解结果

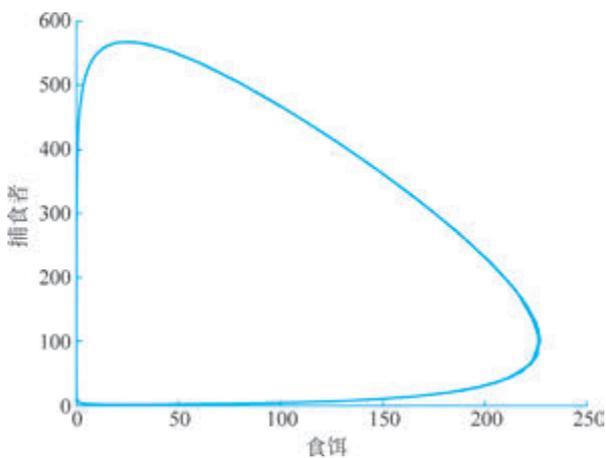


图 5.21 微分方程的相轨线图

模型假设

- (1) 食饵独自生存时遵循阻滞增长 logistic 规律。
- (2) 食饵的增长率与捕食者数量成反比,捕食者的增长率与食饵数量成正比。
- (3) 食饵和捕食者之间存在相互制约的关系。

模型建立 基于食饵独自生存时遵循阻滞增长 logistic 规律的假设,对式(5.44)进行改进得到新的食饵-捕食者模型:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = rx_1 \left(1 - \frac{x_1}{K}\right) - ax_1x_2, \\ \frac{dx_2}{dt} = -dx_2 + bx_1x_2. \end{cases} \quad (5.45)$$

其中,引入参数 K 为食饵在环境容许下的最大量。这一模型从理论上能更好地描述自然界中种群的变化规律。

模型求解 根据实际生态系统的种群数量和环境条件,选择合适的初始条件 $r=1, a=0.1, d=0.5, b=0.02, K=500, x_1(0)=30, x_2(0)=2$ 进行数值模拟,对引入 logistic 项后的微分方程的数值解进行仿真模拟,绘制种群数量随时间变化的曲线图和相平面图(见图 5.22 和图 5.23),直观地展示系统的动态行为。

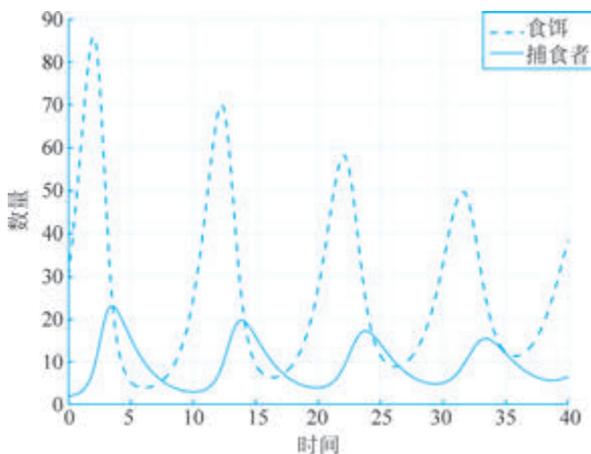


图 5.22 改进后的种群曲线图

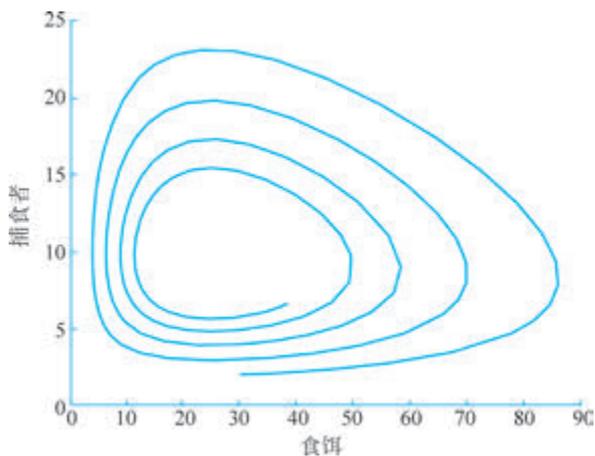


图 5.23 改进后的相轨线图

由图 5.22 和图 5.23 可知,食饵和捕食者呈波浪形变动,并逐步稳定到非零的点,并且随着时间的变化,食饵和捕食者的数量最大值在不断减小,这与食饵受捕食者的捕食和资源环境的阻滞作用而减小、捕食者因食饵数量减小也在减小的趋势是相符的。但引入 logistic 项改进后的食饵-捕食者模型不再呈周期性变化,这由相轨线图也容易得到。

北太天元代码

```

clc
clear all
r = 1; a = 0.1; d = 0.5; b = 0.02;
initial_xy = [30; 2];
tspan = [0 40];
[t, XY] = ode45(@(t, xy) pp_eq(t, xy, r, a, d, b), tspan, initial_xy);
figure
plot(t, XY(:,1), 'b--', t, XY(:,2), 'r-', 'LineWidth', 2)
xlabel('时间'); ylabel('数量'); grid on
legend('食饵', '捕食者')
set(gcf, 'color', 'w');

figure
plot(XY(:,1), XY(:,2), 'k-', 'LineWidth', 2)

xlabel('食饵'); ylabel('捕食者');
set(gcf, 'color', 'w');

function dxdy = pp_eq(t, xy, r, a, d, b)
x = xy(1); y = xy(2);
dxdy = [r * (1 - x/500) * x - a * x * y;
        -d * y + b * x * y];
end

```

其中, $[t, XY] = \text{ode45}(@(\text{t}, \text{xy}) \text{pp_eq}(\text{t}, \text{xy}, \text{r}, \text{a}, \text{d}, \text{b}), \text{tspan}, \text{initial_xy})$ 为求微分方程从 $\text{tspan}(1)$ 到 $\text{tspan}(\text{end})$ 的积分命令,用于求解微分方程的数值解。这里 XY 返回目标数值解, $@(\text{t}, \text{xy})$ 为指向被积函数的句柄, initial_xy 为初始条件。在北太天元命令行窗口中输入 help ode45 可以查阅具体的命令语句。

模型检验 利用一阶二维微分方程组稳定性理论判定平衡点的稳定性进行结果的检验。由式(5.45)求得三个平衡点 P_1 、 P_2 和 P_3 :

$$P_1(0,0), \quad P_2(K,0), \quad P_3\left(\frac{d}{b}, \frac{r}{a}\left(1 - \frac{d}{Kb}\right)\right). \quad (5.46)$$

求解模型的系数矩阵为

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} r - \frac{2r}{K}x_1 - ax_2 & -ax_1 \\ bx_2 & -d + bx_1 \end{bmatrix},$$

其中, $p = -\left(r - \frac{2r}{K}x_1 - ax_2 - d + bx_1\right)$, $q = \det \mathbf{A}$ 。

根据稳定性理论中的式(5.40)~式(5.42)判断三个平衡点的稳定性:

$P_1(0,0)$ 的 $p = d - r$, $q = -r_1d < 0$, 则平衡点不稳定;

$P_2(K,0)$ 的 $p = r + d - bK$, $q = r(d - bK)$, 当 $d - bK > 0$ 时 $p > 0$, $q > 0$, 平衡点稳定,达到最大容量的食饵供养能力不足以弥补捕食者自然死亡损耗,捕食者最终消亡,食饵达到最大

容量；当 $d - bK < 0$ 时 $q > 0$ ，平衡点不稳定；

$P_3\left(\frac{d}{b}, \frac{r}{a}\left(1 - \frac{d}{Kb}\right)\right)$ ，当 $d - bK < 0$ 时 $p > 0, q > 0$ ，平衡点稳定在非零平衡点，食饵与捕食者共存；当 $d - bK > 0$ 时，平衡点不稳定。

综上所述，可以发现，当 $d - bK > 0$ 时，稳定在平衡点 $P_2(K, 0)$ ，最大容量的食饵供养能力不足以弥补捕食者自然死亡损耗，捕食者最终消亡，食饵达到最大容量；当 $d - bK < 0$ 时，稳定在平衡点 $P_3\left(\frac{d}{b}, \frac{r}{a}\left(1 - \frac{d}{Kb}\right)\right)$ ，最大容量的食饵供养能力足以弥补捕食者自然死亡损耗，捕食者食饵达到共存的状态。这与取值 $d = 0.5, b = 0.02, K = 500$ 进行数值模拟结果（见图 5.22），最终都趋于稳定在非零平衡点是一致的。

模型思考 自然界中两个种群之间并不是只存在唯一一种关系，还可能同时存在多种关系，如鹰和蛇。鹰吃蛇为生，因此鹰和蛇之间存在食饵-捕食者关系，而鹰和蛇还都以兔为食，它们之间由于捕食同一种食物而产生竞争关系。想要描述种群间复杂关系时，需要多种模型混合使用。为了描述鹰和蛇种群间的关系，在传统的食饵-捕食者模型中引入两个同时作为捕食者的相互竞争模型。

假设两个种群独自生存时增长都受到环境资源的限制，在没有竞争和捕食的情况下，每个种群的增长可以用 logistic 增长模型来描述，其中 K_1, K_2 表示为两个种群的最大环境容纳量； α, β 表示竞争系数来描述一个种群对另一个种群竞争压力的影响； a, b 表示捕食者对食饵的捕食能力，以及食饵对捕食者的供养能力。模型假设除了竞争和捕食之外，没有其他因素影响种群动态。于是建立种群间模型为

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = r_1 x_1 \left(1 - \frac{x_1}{K_1} - \frac{\alpha x_2}{K_2}\right) - a x_1 x_2, \\ \frac{dx_2}{dt} = r_2 x_2 \left(1 - \frac{x_2}{K_2} - \frac{\beta x_1}{K_1}\right) + b x_1 x_2. \end{cases} \quad (5.47)$$

利用微分方程稳定性理论求解得到四个平衡点为 $P_1(0, 0), P_2(0, K_2), P_3(K_1, 0), P_4$ ，根据式(5.40)~式(5.42)判断发现最终两个种群稳定在非零平衡点 P_4 ，达到共存状态，如图 5.24 所示。读者可以利用微分方程的稳定性理论对其结果进行求解检验。

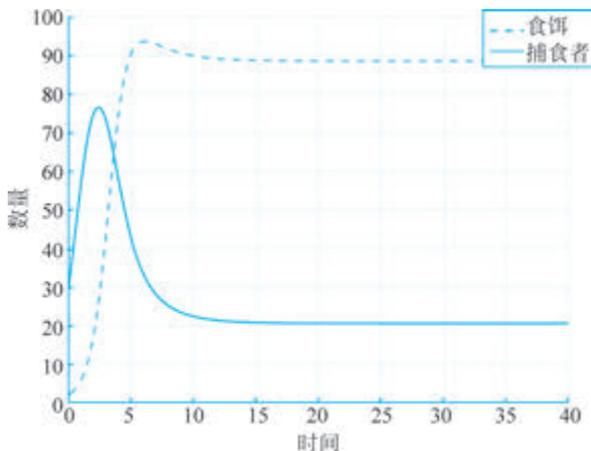


图 5.24 食饵捕食者变化图形

应用拓展 美国大学生数学建模竞赛 2019 年 A 题：Game of Ecology。

5.6 板凳龙的设计问题

问题提出 (2024年A题) 板凳龙又称“盘龙”,是浙闽地区流传的一种富有特色的传统民俗文化活动。在这一活动中,参与者将数十乃至上百条板凳首尾相连,形成一条长长的“龙”。其中,龙头在前引领方向,龙身紧随其后蜿蜒伸展,龙尾则跟随在最后,共同构成一幅壮观的圆盘状图案。而对于盘龙队能自如盘入和盘出的情况,盘龙的面积越小,行进速度就越快,观赏性就越好,所以盘龙的面积和行进速度对舞龙队来说至关重要。

某板凳龙由 223 节板凳组成,其中第 1 节为龙头,后面 221 节为龙身,最后 1 节为龙尾。龙头的板长为 341cm,龙身和龙尾的板长均为 220cm,所有板凳的板宽均为 30cm。每节板凳上均有两个孔,孔径(孔的直径)为 5.5cm,孔的中心距离最近的板头 27.5cm(见图 5.25 和图 5.26)。相邻两条板凳通过把手连接(见图 5.27)。



图 5.25 龙头的俯视图



图 5.26 龙身和龙尾的俯视图



图 5.27 板凳的正视图

舞龙队沿螺距为 55cm 的等距螺线顺时针盘入,各把手中心均位于螺线上。龙头前把手的行进速度始终保持 1m/s。初始时,龙头位于螺线第 16 圈 A 点处(见图 5.28)。请建立从初始时刻到 300s 为止,每秒整个舞龙队的位置模型(指龙头、龙身和龙尾各前把手及龙尾后把手

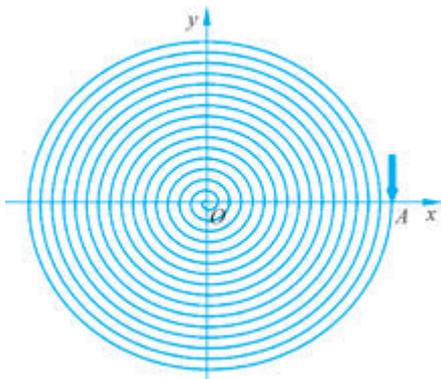


图 5.28 盘入螺线示意图

中心的位置,下同),其中“龙尾(后)”表示龙尾后把手,其余的均是前把手。同时给出 0s、60s、120s、180s、240s、300s 时,龙头前把手、龙头后面第 1、51、101、151、201 节龙身前把手和龙尾后把手的位置。

问题分析 问题的核心是构建一个运动模型,以确定板凳龙沿等距螺旋路径运动时各个把手在各时刻的位置。由等距螺旋线的特征,可以建立阿基米德螺旋线的极坐标系简化计算。鉴于龙头前把手的速度为常量,可依据速度公式推导龙头前把手的位置随时间变化的函数表达式。在此基础上,考虑相邻把手之间的几何关系,构建各把手位置坐标的递推公式。

模型假设

- (1) 忽略外力因素:外部阻力对板凳龙的运动无影响;
- (2) 忽略把手粗细,认为把手是理想无厚度的几何连接点:把手粗细只有 0.055m,与题中其余长度相比,可忽略不计;
- (3) 忽略板凳厚度,认为每一张板凳都平行于地面且在同一高度;
- (4) 每节板凳和连接的把手是刚体,不会发生形变:板凳和把手的长度、宽度等尺寸保持不变,各部分的相对位置不随时间变化。

模型建立 对于该螺旋线形盘入的运动模型,采用阿基米德螺旋线的极坐标系进行求解。在极坐标系下,龙头前把手对应的极径 r_0 和极角 θ_0 满足:

$$r_0 = \frac{d}{2\pi}\theta_0. \quad (5.48)$$

其中, $d=0.55$ 等螺距。在极坐标系下,可以根据速度公式得出龙头前把手的速度 v_0 :

$$|v_0| = \frac{d}{2\pi} \left| \frac{d\theta_0}{dt} \right| \sqrt{1 + \theta_0^2}, \quad (5.49)$$

其中, $\frac{d\theta_0}{dt} < 0$ 为极角速度, $v_0=1$ 为常量。通过分离变量,上述微分方程可变为

$$-\frac{d}{2\pi} \sqrt{1 + \theta_0^2} d\theta_0 = v_0 dt. \quad (5.50)$$

已知初始时刻龙头前把手位于螺线第 16 圈 A 点处,即 $\theta_0(t=0) = 32\pi$ 。将式(5.50)两边分别积分可得:

$$\frac{4\pi v_0 t}{d} = 32\pi \sqrt{1 + (32\pi)^2} + \ln(32\pi + \sqrt{1 + (32\pi)^2}) - \theta_0 \sqrt{1 + \theta_0^2} - \ln(\theta_0 + \sqrt{1 + \theta_0^2}). \quad (5.51)$$

该方程右边为关于 θ_0 的单调函数,所以可以解得 $\theta_0(t)$,即为龙头前把手随时间变化的极角函数。

下面需要将极坐标系转换为直角坐标系内的相应坐标:

$$\begin{aligned} x_0 &= r_0 \cos\theta_0 = \frac{d\theta_0}{2\pi} \cos\theta_0, \\ y_0 &= r_0 \sin\theta_0 = \frac{d\theta_0}{2\pi} \sin\theta_0. \end{aligned} \quad (5.52)$$

已知相邻板凳之间存在一定的几何关系,因此可以利用几何关系和龙头前把手的位置函数递推出其余各节板凳相应位置的坐标。先在极坐标系下考虑相邻板凳间的几何关系:从龙头前把手开始依次用 i 给各个把手编号,设编号为 n 的把手极坐标为 (r_n, θ_n) 。

以编号为 n 和 $n+1$ 的两个把手为例,利用三角形余弦定理,求得图 5.29 中的几何关系:

$$l^2 = r_n^2 + r_{n+1}^2 - 2r_n r_{n+1} \cos(\theta_{n+1} - \theta_n), \quad (5.53)$$

其中, l 为板凳上两孔之间的距离:

$$l = \begin{cases} 2.86, & n = 0, \\ 1.65, & n \geq 1. \end{cases} \quad (5.54)$$

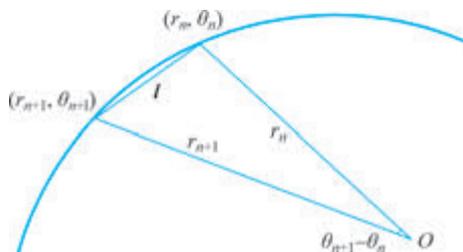


图 5.29 相邻把手的几何关系图

将极径和极角关系代入可得:

$$\left(\frac{2\pi l}{d}\right)^2 = \theta_n^2 + \theta_{n+1}^2 - 2\theta_n \theta_{n+1} \cos(\theta_{n+1} - \theta_n). \quad (5.55)$$

通过递推关系式(5.55)与 $\theta_0(t)$ 的函数表达式(5.51)即可得到 $\theta_n(t)$ 的函数表达式,将其转换为直角坐标系里的相应坐标,可得到位置坐标:

$$\begin{aligned} x_n &= r_n \cos \theta_n = \frac{d\theta_n}{2\pi} \cos \theta_n, \\ y_n &= r_n \sin \theta_n = \frac{d\theta_n}{2\pi} \sin \theta_n. \end{aligned} \quad (5.56)$$

模型求解 首先,通过求解式(5.55),求得从初始时刻到 300s 内每个时刻龙头前把手的位置信息。然后,通过极角的递推关系式(5.52)和位置坐标表达式(5.56),求出在给定的时间范围内每秒龙身各节把手的位置坐标(见表 5.3)。

表 5.3 部分把手坐标随时间变化情况

时 间 点	0s	60s	120s	180s	240s	300s
龙头 x/m	8.8000	5.7992	-4.0849	-2.9636	2.5945	4.4203
龙头 y/m	0	-5.7711	-6.3045	6.0948	-5.3567	2.3204
第 1 节龙身 x/m	8.3638	7.4568	-1.4455	-5.2371	4.8212	2.4595
第 1 节龙身 y/m	2.8265	-3.4404	-7.4059	4.3596	-3.5619	4.4025
第 51 节龙身 x/m	-9.5187	-8.6863	-5.5431	2.8905	5.9800	-6.3013
第 51 节龙身 y/m	1.3411	2.5401	6.3779	7.2493	-3.8278	0.4658
第 101 节龙身 x/m	2.9140	5.6871	5.3619	1.8988	-4.9174	-6.2377
第 101 节龙身 y/m	-9.9183	-8.0014	-7.5576	-8.4716	-6.3799	3.9360
第 151 节龙身 x/m	10.8617	6.6823	2.3888	1.0052	2.9654	7.0407
第 151 节龙身 y/m	1.8288	8.1345	9.7274	9.4248	8.3997	4.3930
第 201 节龙身 x/m	4.5551	-6.6197	-10.6272	-9.2877	-7.4572	-7.4587
第 201 节龙身 y/m	10.7251	9.0256	1.3598	-4.2467	-6.1807	-5.2634
龙尾(后) x/m	-5.3054	7.3646	10.9743	7.3839	3.2411	1.7850
龙尾(后) y/m	-10.6766	-8.7980	0.8435	7.4924	9.4693	9.3012

模型检验 通过对求解结果分析,可以得到以下规律:龙头前把手的位置关于时间均匀分布在螺线上(见图 5.30),符合题目中龙头前把手速度恒定的条件。

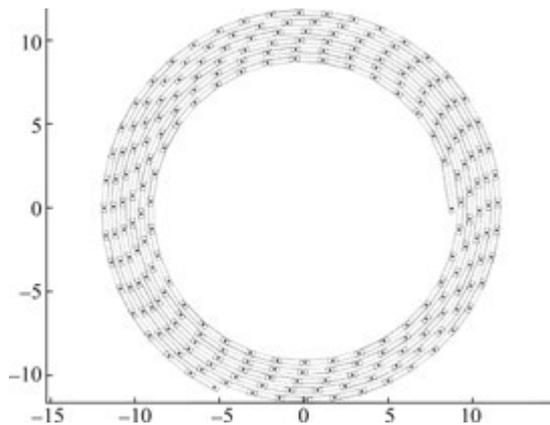


图 5.30 每个时刻龙头前把手位置

各把手坐标随时间变化不断在正负之间波动,体现了舞龙队的螺旋轨线特征,随着时间的增加,各节龙身把手以及龙尾速度均在减小,且龙身把手位置越靠后,速度减小得越多。这也符合物理运动学规律,因为板凳龙越靠近外侧,轨迹就会越接近一条直线,各节的速度也就会越来越接近。

北太天元代码

```

%%%%% 前期准备
function d = cal_d(i)
if i==1
d = 2.86;
else
d = 1.65;
end
end
function integral = cal_integral(theta)
integral = theta.*sqrt(theta.^2+1)+log(theta+sqrt(theta.^2+1));
end
function theta_n_list = cal_theta_all(theta_1,a)
theta_n_list = [theta_1];
for i = 1:223
theta_n1 = cal_theta_n1(theta_n_list(end),cal_d(i),a);
theta_n_list = [theta_n_list;theta_n1];
end
end
function theta_n1 = cal_theta_n1(theta_n,d,a)
theta_n1 = theta_n;
lambda = pi/8;
epsilon = 1e-10;
while lambda > epsilon
theta_n1 = theta_n1 + lambda;
if theta_n^2 + theta_n1^2 - 2 * theta_n * theta_n1 * cos(theta_n1 - theta_n) > d^2/a^2
theta_n1 = theta_n1 - lambda;
lambda = lambda/2;
end
end
end
function theta_t2 = cal_theta_t2(theta_t1,v,t,a,direction)

```

```
lambda = theta_t1/4;
epsilon = 1e - 12;
theta_t2 = theta_t1;
if direction == 1
obj = cal_integral(theta_t1) - v. * t/a. * 2;
while lambda > epsilon
theta_t2 = theta_t2 - lambda;
if cal_integral(theta_t2) < obj
theta_t2 = theta_t2 + lambda;
lambda = lambda/2;
end
end
elseif direction == - 1
obj = cal_integral(theta_t1) + v. * t./a. * 2;
while lambda > epsilon
theta_t2 = theta_t2 + lambda;
if cal_integral(theta_t2) > obj
theta_t2 = theta_t2 - lambda;
lambda = lambda/2;
end
end
end
function p = cal_xy(theta_n_list,a)
x_list = a. * theta_n_list. * cos(theta_n_list);
y_list = a. * theta_n_list. * sin(theta_n_list);
p = [x_list,y_list];
end
%%% 计算位置
clear all
clc
delta_pho = 0.55;
a = delta_pho/(2 * pi);
theta_1_0 = 16 * 2 * pi;
v = 1;
p = zeros(224, 301,2);
theta_mat = zeros(224, 301);
output1 = [1,2,52,102,152,202,224];
output2 = 1:60:301;
% 计算龙头在每个时间点的角度和位置
theta_t_list = zeros(1,301);
theta_t_list(1) = theta_1_0;
for i = 2:301
theta_t_list(i) = cal_theta_t2(theta_1_0, v, i - 1, a, 1);
end
% 计算各个板凳的位置并存储在矩阵中
for i = 1:301
theta_n_list = cal_theta_all(theta_t_list(i),a);
theta_mat(:, i) = theta_n_list;
p_n_list = cal_xy(theta_n_list, a);
p(:, i, :) = p_n_list;
end
result1 = p(output1, output2, :);
result1 = permute(result1, [3, 1, 2]);
result1 = reshape(result1, length(output1) * 2, length(output2),1);
disp('位置结果:');
```

```

disp(round(result1, 6));
result3 = permute(p, [3, 1, 2]);
result3 = reshape(result3, 448, 301, 1);
writematrix(round(result3, 6), 'result1.xlsx', 'Sheet', '位置', 'Range', 'B2');
% 绘制龙形初始配置的图像
figure;
scatter(p(:, 1, 1), p(:, 1, 2), 10, 'filled', 'MarkerFaceColor', 'blue');
hold on;
for i = 1:223
P = generate_dot(theta_mat(i, 1), theta_mat(i + 1, 1), a);
plot(P([1, 2], 1), P([1, 2], 2));
hold on;
plot(P([1, 3], 1), P([1, 3], 2));
hold on;
plot(P([2, 4], 1), P([2, 4], 2));
hold on;
plot(P([3, 4], 1), P([3, 4], 2));
hold on;
end
axis equal;
set(gcf, 'color', 'w');

```

模型思考 在研究运动轨迹的过程中,除了对位置的研究,还可以对速度进行求解,对式(5.55)两边分别对时间求导,整理后可得角速度的递推关系式:

$$\frac{\frac{d\theta_{n+1}}{dt}}{\frac{d\theta_n}{dt}} = -\frac{2\theta_n - 2\theta_{n+1}\cos(\theta_{n+1} - \theta_n) - 2\theta_n\theta_{n+1}\sin(\theta_{n+1} - \theta_n)}{2\theta_{n+1} - 2\theta_n\cos(\theta_{n+1} - \theta_n) + 2\theta_n\theta_{n+1}\sin(\theta_{n+1} - \theta_n)}. \quad (5.57)$$

通过式(5.49)可以求得 $\frac{d\theta_0}{dt}$,因此可以得出编号 $n+1$ 的龙身速度 v_{n+1} :

$$v_{n+1} = \frac{d}{2\pi} \left| \frac{d\theta_{n+1}}{dt} \right| \sqrt{1 + \theta_{n+1}^2}. \quad (5.58)$$

应用拓展 舞龙队在行进过程中,不相邻板凳之间不能碰撞,所以需要建立碰撞模型进行分析。这就需要给出舞龙队的停止盘入时间,也就是要判定第一次碰撞发生的时间。考虑到螺旋线的几何特征以及上述问题中得出的各把手极角变化情况,不妨假设“碰撞一定先发生于龙头所在的最内圈和其外侧相邻的一圈”,从而缩小碰撞检测区域,提高模型检测效率。

正如所做的分析,内圈板凳的极角变化速度更快,这意味着在同一时间内,内圈板凳的角度变化比外圈板凳更大。由于内圈和外圈板凳之间的相对角度变化更大,因此它们之间的相对位置变化也更快。也就是说,内圈板凳相对外圈板凳更快地靠近或远离它们原本的相对位置。而碰撞条件是两个板凳之间的距离小于某个安全阈值,显然内圈板凳的极角变化更快,它们在绕中心点旋转时,更可能相对外圈板凳迅速靠近。当内圈板凳的角度变化足够大时,它们与外圈板凳的间距就会快速缩短,从而更容易达到碰撞阈值。

针对问题:舞龙队沿上述设定的螺线盘入,请确定舞龙队盘入的终止时刻,使得板凳之间不发生碰撞(即舞龙队不能再继续盘入的时间),并给出此时舞龙队的位置和速度。读者可以基于上述对位置和速度的分析进行更深入的探究。

习题



习题答案

1. 对热水冷却问题中,室温不变进行改进。假设室温是随时间发生变化的,请建立模型探究问题。

2. 建立模型求解刑事案件作案时间问题。在 19 点 30 分时,受害人被发现了。到了 20 点 30 分时,法医来到了现场,法医测量了一下受害人的温度是 32.6°C 。过了 1h 之后,这个法医又测量了一下受害人的温度是 31.4°C 。整个过程都是在一个密闭的房间里边,这个密闭的房子的温度是 21.1°C 。现在有一个嫌疑人张某,他 17 点之前在上班,有人证明他是没有作案时间的。张某如果 17 点下班之后,从办公的地方到受害人所在的地点,一共需要 5 分钟。请分析张某是否可以排除在嫌疑人之外?

3. 某岛屿发生了大面积的环境污染,原本生活在岛屿上的某物种需迁移到附近的大陆上。大陆上该物种数量的增加与尚未迁移的物种数量有关,而随着迁移物种的增加又将导致大陆上该物种减少。在适当假设下建立大陆上该物种数量的数学模型并讨论稳定情况。

4. 在某空鱼塘中投放数量为 n_0 ,平均质量为 w_0 的鱼苗。如果不进行捕捞,则按照自限规律增长;如果进行捕捞,则捕捞能力与鱼塘中的鱼数量成正比。喂养引起的每条鱼的平均质量的增加率与鱼的平均表面积成正比,消耗引起的鱼的平均质量的减少率与鱼的平均质量成正比,分别建立鱼数量和鱼的平均质量的数学模型。

5. 蓝鲸的内禀增长率每年估计为 5%,估计蓝鲸的最大环境载量为 150 000 条,磷虾是蓝鲸喜欢的一种食物。磷虾的最大饱和种群为 $500\text{t}/\text{acre}$ ($1\text{acre}=4046.86\text{m}^2$),当缺少捕食者,环境不拥挤时,磷虾种群以每年 25% 的速率增长。磷虾 $500\text{t}/\text{acre}$ 可以提高蓝鲸 2% 的年增长率,同时 150 000 条蓝鲸将减少磷虾 10% 的年增长率。建立蓝鲸和磷虾的数学模型,刻画两个种群随时间的变化,假设初始状态为蓝鲸 5000 条,磷虾 $750\text{t}/\text{acre}$ 。

6. 在某一林场内,树木按照阻滞增长的发展趋势生长,单位时间的砍伐量与树木的数量成正比,比例系数称为砍伐强度。经济效益用从砍伐所得的收入中扣除开支后的利润来衡量,假设树木的销售单价为常数 p ,单位砍伐强度的费用是 c 。砍伐强度是时间的函数,其变化规律是:当单位时间收入大于开支时,砍伐强度增加;单位时间收入小于开支时,砍伐强度减少,即砍伐强度的变化率与经济效益成正比。建立数学模型并讨论其稳定性。



程序代码