

第一部分

同步练习

函数与极限

1.1 内容提要

1.1.1 映射与函数

1. 映射的概念

设 X 和 Y 是两个非空集合, 如果存在一个对应法则 f , 使得对 X 中的每个元素 x , 按照法则 f , 在 Y 中有唯一确定的元素 y 与之对应, 则称 f 为从 X 到 Y 的映射, 记作 $f: X \rightarrow Y$, 并称 y 为元素 x 在映射 f 下的像, 记作 $y = f(x)$, x 称为元素 y 的一个原像, 集合 X 称为映射 f 的定义域, 记为 D_f , X 中所有元素的像组成的集合称为映射 f 的值域, 通常记为 $Z(f)$, 即 $Z(f) = \{y \mid y = f(x), x \in X\}$.

从映射的定义可以看到, 映射 f 的值域是集合 Y 的一个子集, 即 $Z(f) \subseteq Y$.

如果 $Z(f) = Y$, 则称 f 为从 X 到 Y 的满射; 若对 X 中的任意两个不同的元素 $x_1 \neq x_2$, 它们的像 $f(x_1) \neq f(x_2)$, 则称 f 为从 X 到 Y 的单射; 若 f 既是满射又是单射, 则称 f 为一一映射(或双射).

映射又称为算子, 根据集合 X 与 Y 的不同情形, 映射有不同的习惯称谓, 例如从非空集合 X 到数集 Y 的映射称为泛函, 从非空数集 X 到它自身的映射称为变换, 从非空实数集 X 到实数集 Y 的映射又称为函数.

2. 函数的概念

设 D 为一个非空实数集, 如果存在一个对应法则 f , 使得对于每一个 $x \in D$, 都能由 f 唯一确定一个实数 y 与之对应, 则称对应法则 f 为定义在实数集 D 上的一个函数, 记作 $y = f(x)$, 其中, x 称为自变量, y 称为因变量, 实数集 D 称为函数的定义域, 记为 $D(f)$ 或者 D_f . 集合 $\{y \mid y = f(x), x \in D_f\}$ 称为函数的值域, 一般记为 $Z(f)$ 或

者 Z_f .

定义域和**对应法则**是函数的两要素,值域由定义域和对应法则确定.两个函数相同的充要条件是定义域与对应法则分别相同,因此判断两个函数是否相同,只需验证函数的定义域与对应法则是否分别相同,而与自变量、因变量的符号没有关系.

如果函数没有明确给出定义域,则其定义域一般默认为使得分析表达式有意义的自变量的取值范围.

函数的表示方法主要有公式法、图示法及表格法等,其中公式法是函数关系表示的一种主要形式.

3. 分段函数

根据函数的定义,在表示函数时,并不要求在整个定义域上都用一个数学表达式来表示.事实上,在很多问题中常常遇到一些在定义域的不同子集上具有不同表达式的情况,习惯上把这类函数叫作**分段函数**.

例如**符号函数**

$$y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

是一个分段函数.

注 分段函数在其整个定义域上是一个函数,而不是几个函数.

1.1.2 函数的基本特性

函数的基本特性主要有四种,即奇偶性、单调性、周期性和有界性.

1. 奇偶性

设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称,如果对于 $\forall x \in D$, 恒有 $f(-x) = f(x)$, 则称 $f(x)$ 为**偶函数**; 如果对于 $\forall x \in D$, 恒有 $f(-x) = -f(x)$, 则称 $f(x)$ 为**奇函数**.

奇函数的图像关于坐标原点对称;偶函数的图像关于 y 轴对称.需要注意的是:函数的奇偶性是相对于对称区间而言的,因此如果函数的定义域关于原点不对称,则该函数不具有奇偶性.

奇、偶函数的一些常用结论如下:

- (1) 常函数为偶函数;
- (2) 有限个奇函数的代数和为奇函数,有限个偶函数的代数和为偶函数;
- (3) 奇函数与偶函数的乘积为奇函数;
- (4) 奇数个奇函数的乘积为奇函数,偶数个奇函数的乘积为偶函数.

2. 单调性

设函数 $f(x)$ 在某个区间 D 上有定义,对于 $\forall x_1, x_2 \in D$, 且 $x_1 < x_2$, 有:

- (1) 若 $f(x_1) < f(x_2)$, 则称函数 $f(x)$ 在区间 D 单调增加(单调递增);

(2) 若 $f(x_1) > f(x_2)$, 则称函数 $f(x)$ 在区间 D 单调减少(单调递减).

3. 周期性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D , 如果存在一个正数 T , 使得对任意一个 $x \in D$, 有 $x \pm T \in D$, 且

$$f(x+T) = f(x)$$

恒成立, 则称该函数为**周期函数**. T 称为函数 $f(x)$ 的**周期**, 满足上式的最小的正数 T_0 称为函数的**最小正周期**, 通常我们所说的函数的周期指的是函数的最小正周期.

周期函数的一些常用结论:

(1) 若 $f(x)$ 的周期为 T , 则 $f(ax+b)$ 的周期为 $\frac{T}{|a|}$ ($a \neq 0$);

(2) 若 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的周期均为 T , 则 $f(x) \pm g(x)$ 也是周期为 T 的周期函数.

4. 有界性

设函数 $f(x)$ 在集合 D 上有定义, 若存在正数 M , 使得对于 $\forall x \in D$, 恒有 $|f(x)| \leq M$, 则称函数 $f(x)$ 在 D 上**有界**, 否则称 $f(x)$ 在 D 上**无界**.

函数的有界性还可以通过另外一种形式来定义.

若存在实数 a 和 b , $a \leq b$ 使得对 $\forall x \in D$, 恒有 $a \leq f(x) \leq b$, 则称函数 $f(x)$ 在 D 上有界, 否则称 $f(x)$ 在 D 上**无界**, 其中 a 称为函数的**下界**, b 称为函数的**上界**.

1.1.3 反函数

设函数 $y = f(x)$ 的定义域为 D_f , 值域为 Z_f . 如果对于 Z_f 中的每一个 y 值, 都存在唯一的满足 $y = f(x)$ 的 $x \in D_f$ 与之对应, 这样确定的以 y 为自变量, 以 x 为因变量的函数, 称为函数 $y = f(x)$ 的**反函数**, 并记为 $x = f^{-1}(y)$. 习惯上, 一般将 $y = f(x)$ 的反函数记为 $y = f^{-1}(x)$.

显然, 反函数 $x = f^{-1}(y)$ 的定义域为 Z_f , 值域为 D_f , 且对任意的 $y \in Z_f$, 有

$$f[f^{-1}(y)] = y,$$

对任意的 $x \in D_f$, 有

$$f^{-1}[f(x)] = x.$$

单调函数一定存在反函数, 且函数与反函数具有相同的单调性.

在同一坐标系下, 函数 $y = f(x)$ 与其反函数 $x = f^{-1}(y)$ 的图像是重合的, $y = f(x)$ 与其反函数 $y = f^{-1}(x)$ 的图像关于直线 $y = x$ 对称.

1.1.4 复合函数

已知两个函数

$$\begin{aligned} y &= f(u), & u &\in D_f, & y &\in Z_f, \\ u &= g(x), & x &\in D_g, & u &\in Z_g, \end{aligned}$$

若 $D_f \cap Z_g \neq \emptyset$, 则可通过中间变量 u 将 $u=g(x)$ 代入 $y=f(u)$ 构成一个以 x 为自变量、以 y 为因变量的函数 $y=f[g(x)]$, 称 $y=f[g(x)]$ 为 $y=f(u)$ 与 $u=g(x)$ 的 **复合函数**.

1.1.5 基本初等函数与初等函数

1. 初等函数的概念

常函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数以及反三角函数共六大类函数统称为 **基本初等函数**.

由基本初等函数经有限次四则运算和(或)复合运算而得到的函数称为 **初等函数**.

2. 双曲函数与反双曲函数

$$(1) \text{ 双曲正弦 } y = \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, x \in (-\infty, +\infty);$$

$$(2) \text{ 双曲余弦 } y = \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, x \in (-\infty, +\infty);$$

$$(3) \text{ 双曲正切 } y = \operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, x \in (-\infty, +\infty);$$

$$(4) \text{ 反双曲正弦 } y = \operatorname{arsh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}), x \in (-\infty, +\infty);$$

$$(5) \text{ 反双曲余弦 } y = \operatorname{arch} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}), x \in [1, +\infty);$$

$$(6) \text{ 反双曲正切 } y = \operatorname{arth} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}, x \in (-1, 1).$$

1.1.6 极限的概念与性质

1. 数列的极限

$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = A \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0$, 存在正整数 N , 当 $n > N$ 时, 恒有 $|u_n - A| < \epsilon$ 成立.

注 在数列极限的定义中, 一方面, $\epsilon > 0$ 要多小就可以多小, 或者说可以任意地小; 另一方面, ϵ 一旦给定, 若存在一个正整数 N_0 , 使得当 $n > N_0$ 时, 恒有 $|u_n - A| < \epsilon$ 成立, 则对任意一个大于 N_0 的正整数, 都可以作为定义中的 N , 即 N 与 ϵ 有关, 但不唯一.

2. 函数的极限

$$(1) \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists X > 0, \text{ 当 } x > X \text{ 时, 恒有 } |f(x) - A| < \epsilon \text{ 成立.}$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists X > 0, \text{ 当 } x < -X \text{ 时, 恒有 } |f(x) - A| < \epsilon \text{ 成立.}$$

(3) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists X > 0$, 当 $|x| > X$ 时, 恒有 $|f(x) - A| < \varepsilon$ 成立.

(4) $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 当 $0 < x - x_0 < \delta$ 时, 恒有 $|f(x) - A| < \varepsilon$ 成立.

(5) $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 当 $0 < x_0 - x < \delta$ 时, 恒有 $|f(x) - A| < \varepsilon$ 成立.

(6) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 恒有 $|f(x) - A| < \varepsilon$ 成立.

注 上述函数极限的定义中的 X 和 δ 与 ε 有关系, 但不唯一.

3. 极限的性质

(1) (唯一性) 若极限 $\lim Y$ 存在, 则极限值唯一.

(2) (有界性) 如果 $\lim Y$ 存在, 则 Y 是局部有界的. 特别地, 若数列极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$ 存在, 则 $\{u_n\}$ 不仅是局部有界的, 而且是全局有界的.

(3) (保号性) 若极限 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, 且 $A > 0$ (或 $A < 0$), 则 $f(x)$ 在 x_0 的某个空心邻域内恒有 $f(x) > 0$ (或 $f(x) < 0$).

(4) 若极限 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, 且在 x_0 的某个空心邻域内恒有 $f(x) \geq 0$ (或 $f(x) \leq 0$), 则有 $A \geq 0$ (或 $A \leq 0$).

(5) 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = B$, 且在 x_0 的某个空心邻域内恒有 $f(x) \geq g(x)$ (或 $f(x) \leq g(x)$), 则有 $A \geq B$ (或 $A \leq B$).

注 这里的变量 Y 既可以表示数列, 也可以表示函数, 下同.

1.1.7 无穷小与无穷大

1. 无穷小的概念及其性质

以 0 为极限的变量称为**无穷小**(或**无穷小量**). 需要注意的是, 0 是一种特殊的无穷小. 无穷小的概念在整个高等数学中有着重要的作用, 需要读者引起重视.

无穷小有如下性质:

(1) 有限个无穷小的和是无穷小;

(2) 有界变量与无穷小的乘积是无穷小;

(3) $\lim Y = A \Leftrightarrow Y = A + \alpha$, 其中 α 是无穷小(与 Y 同在一个变化过程中).

2. 无穷小的阶

设 α, β 是同一变化过程中的两个无穷小, 则

(1) 若 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 0$, 则称 β 是比 α **高阶的无穷小**(或 α 是比 β **低阶的无穷小**), 记作

$\beta = o(\alpha)$.

(2) 若 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = c \neq 0$, 则称 β 是与 α 同阶的无穷小, 记作 $\beta = O(\alpha)$. 特殊地, 当 $c = 1$ 时, 称 β 与 α 是等价的无穷小, 记作 $\alpha \sim \beta$.

(3) 若 $\lim \frac{\beta}{\alpha^k} = c \neq 0, k > 0$, 则称 β 是关于 α 的 k 阶的无穷小, 记作 $\beta = O(\alpha^k)$.

3. 等价无穷小的性质

性质 1 设 α, β, γ 是同一变化过程中的无穷小, 则

- (1) 若 $\alpha \sim \beta$, 则 $\beta \sim \alpha$;
- (2) 若 $\alpha \sim \beta, \beta \sim \gamma$, 则 $\alpha \sim \gamma$.

性质 2 设 $\alpha, \beta, \bar{\alpha}$ 和 $\bar{\beta}$ 是同一变化过程中的无穷小, 且 $\alpha \sim \bar{\alpha}, \beta \sim \bar{\beta}, \lim \frac{\alpha}{\beta}$ 存在, 则 $\lim \frac{\alpha}{\beta} = \lim \frac{\bar{\alpha}}{\bar{\beta}} = \lim \frac{\alpha}{\bar{\beta}} = \lim \frac{\bar{\alpha}}{\beta}$.

4. 无穷大的概念

如果在某个变化过程中, 对于 $\forall M > 0$, 存在某个时刻, 使得在该时刻以后恒有 $|Y| > M$ 成立, 则称变量 Y 为无穷大(或无穷大量). 记作 $\lim Y = \infty$ 或 $Y \rightarrow \infty$. 具体地, 有:

- (1) $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists$ 正整数 N , 当 $n > N$ 时, 恒有 $|u_n| > M$ 成立;
- (2) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists X_0 > 0$, 当 $|x| > X_0$ 时, 恒有 $|f(x)| > M$ 成立;
- (3) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists \delta > 0$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 恒有 $|f(x)| > M$

成立.

注 由于从本质上来讲, 在相应的变化趋势下, 无穷大的极限是不存在的, 常用的极限运算法则不适用, 因此无穷大的问题往往转化为无穷小来讨论.

5. 无穷小与无穷大的关系

在自变量的同一的变化趋势下, 无穷小与无穷大有如下关系: 若变量 Y 为无穷大, 则 $\frac{1}{Y}$ 为无穷小; 若变量 Y 为无穷小($Y \neq 0$), 则 $\frac{1}{Y}$ 为无穷大.

1.1.8 极限的运算法则

1. 极限的四则运算法则

设极限 $\lim X, \lim Y$ 均存在, 则

- (1) $\lim(X \pm Y)$ 存在, 且 $\lim(X \pm Y) = \lim X \pm \lim Y$;
- (2) $\lim(X \cdot Y)$ 存在, 且 $\lim(X \cdot Y) = \lim X \cdot \lim Y$;

(3) 若 $\lim Y \neq 0$, 则 $\lim \frac{X}{Y}$ 存在, 且有 $\lim \frac{X}{Y} = \frac{\lim X}{\lim Y}$.

推论 1 若 $\lim X$ 存在, C 为常数, 则 $\lim(CX)$ 存在, 且 $\lim(C \cdot X) = C \cdot \lim X$.

推论 2 若 $\lim X$ 存在, k 为正整数, 则 $\lim X^k$ 存在, 且 $\lim(X^k) = (\lim X)^k$.

2. 复合函数的极限运算法则

设函数 $y = f[g(x)]$ 是由函数 $u = g(x)$ 与函数 $y = f(u)$ 复合而成, $y = f[g(x)]$ 在点 x_0 的某个去心邻域内有定义, 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = u_0$, $\lim_{u \rightarrow u_0} f(u) = A$, 且 $g(x)$ 在 x_0 的某个去心邻域满足 $g(x) \neq u_0$, 则

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f[g(x)] = \lim_{u \rightarrow u_0} f(u) = A.$$

1.1.9 极限存在准则与两个重要极限

1. 夹逼定理

如果变量 X, Y, Z 满足 $X \leq Y \leq Z$, 且 $\lim X = \lim Z = A$ (A 为某常数), 那么 $\lim Y$ 也存在, 且 $\lim Y = A$.

2. 单调有界准则

(1) 若数列 $\{u_n\}$ 单调且有界, 则极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$ 一定存在.

(2) 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某个左邻域内单调且有界, 则左极限 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ 一定存在.

注 对于自变量不同的变化过程 ($x \rightarrow x_0^+$, $x \rightarrow +\infty$, $x \rightarrow -\infty$), 都有相应的单调有界准则.

*****(3) [柯西(Cauchy)收敛准则] 数列 $\{u_n\}$ 收敛的充分必要条件是: 对于 $\forall \epsilon > 0$, 存在正整数 N , 使得当 $m > N$, $n > N$ 时, 有 $|x_n - x_m| < \epsilon$.

3. 数列与子数列的关系

从数列 $\{u_n\}$ 中抽取无穷多项, 在不改变原有次序的情况下构成的新数列称为数列 $\{u_n\}$ 的 **子数列**, 简称 **子列**. 记作 $\{u_{n_k}\}$: $u_{n_1}, u_{n_2}, \dots, u_{n_k}, \dots$. 其中 n_k 表示 u_{n_k} 在原数列 $\{u_n\}$ 中的位置, k 表示 u_{n_k} 在子列中的位置.

数列 $\{u_n\}$ 与子数列 $\{u_{n_k}\}$ 之间的关系.

(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = A \Leftrightarrow$ 对 $\{u_n\}$ 的任何子数列 $\{u_{n_k}\}$ 有 $\lim_{k \rightarrow \infty} u_{n_k} = A$.

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = A \Leftrightarrow$ 偶数子列 $\{u_{2k}\}$ 和奇数子列 $\{u_{2k+1}\}$ 满足 $\lim_{k \rightarrow \infty} u_{2k} = \lim_{k \rightarrow \infty} u_{2k+1} = A$.

(3) 当 $\{u_n\}$ 是单调数列时, $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = A \Leftrightarrow$ 存在某个子数列 $\{u_{n_k}\}$ 满足 $\lim_{k \rightarrow \infty} u_{n_k} = A$.

4. 海涅(Heine)定理

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow$ 对任何数列 $\{x_n\}$, $x_n \rightarrow x_0$ ($n \rightarrow \infty$), 且 $x_n \neq x_0$, 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A.$$

注 海涅定理给出了数列极限与函数极限之间的关系.

5. 两个重要公式

(1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. 该极限属于 $\frac{0}{0}$ 类型的未定式. 它可以推广到 $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha}{\alpha} = 1$.

(2) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$ 或者 $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$. 该极限属于 1^∞ 类型的未定式. 它可以

推广到 $\lim_{\alpha \rightarrow 0} (1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e$.

1.1.10 函数的连续性

函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处连续的三个等价定义为:

(1) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$;

(2) $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0$, 其中 $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$;

(3) $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 当 $|x - x_0| < \delta$ 时, 恒有 $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ 成立.

$y=f(x)$ 在某个区间内连续的定义.

如果函数 $y=f(x)$ 在区间 (a, b) 内每一点处都连续, 则称 $y=f(x)$ 在 (a, b) 内连续; 如果 $y=f(x)$ 在 (a, b) 内连续且在 a 处右连续, 则称 $y=f(x)$ 在 $[a, b)$ 上连续. 类似可以定义 $y=f(x)$ 在区间 $(a, b]$ 和 $[a, b]$ 上的连续性.

1.1.11 函数的间断点

1. 间断点的定义

若 $y=f(x)$ 在点 x_0 处出现如下三种情况之一, 则称 x_0 为 $y=f(x)$ 的间断点.

(1) $y=f(x)$ 在点 x_0 处无定义;

(2) $y=f(x)$ 在点 x_0 处有定义, 但 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 不存在;

(3) $y=f(x)$ 在点 x_0 处有定义, $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在, 但 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq f(x_0)$.

2. 间断点的类型

设 x_0 是 $f(x)$ 的间断点, 且 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ 和 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ 都存在, 则称 x_0 为 $f(x)$ 的**第**

一类间断点, 其中:

(1) **可去间断点**: $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$;

(2) **跳跃间断点**: $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$.

设 x_0 是 $f(x)$ 的间断点, 且 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ 和 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ 中至少有一个不存在, 则称 x_0

为 $f(x)$ 的第二类间断点.

特殊地, 若 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ 和 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ 中至少有一个为 ∞ , 则称 x_0 为无穷间断点. 例如 $x=0$ 是 $f(x)=e^{\frac{1}{x}}$ 的第二类间断点中的无穷间断点.

1.1.12 连续函数的性质

1. 连续函数的四则运算

若函数 $f(x)$, $g(x)$ 都在点 x_0 处连续, 则 $f(x) \pm g(x)$, $f(x)g(x)$, $\frac{f(x)}{g(x)}$ ($g(x_0) \neq 0$) 在点 x_0 处也连续.

2. 复合函数的连续性

若 $y=f(u)$ 在点 u_0 处连续, $u=g(x)$ 在点 x_0 处连续且 $u_0=g(x_0)$, 则 $y=f[g(x)]$ 在点 x_0 处连续.

3. 反函数的连续性

若 $y=f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上单调、连续, 则其反函数在相应的定义区间上单调、连续.

4. 初等函数的连续性

初等函数在其定义区间内都是连续的, 所谓的定义区间指的是包含在定义域内的区间.

1.1.13 闭区间上连续函数的性质

1. 有界性定理

如果函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 则 $f(x)$ 一定在 $[a, b]$ 上有界, 即 $\exists M > 0$, 对于 $\forall x \in [a, b]$, 都有 $|f(x)| \leq M$.

2. 最值定理

如果函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上一定存在最大值和最小值.

3. 介值定理

如果函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, m 和 M 分别为 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的最小值和最大值, 且 $M > m$, 则对介于 m 与 M 之间的任一数 C , 即 $m < C < M$, 则至少存在一点 $\xi \in (a, b)$ 使得 $f(\xi) = C$.

注 定理中的条件如果改为 $m \leq C \leq M$, 则至少存在一点 $\xi \in [a, b]$, 使得 $f(\xi) = C$.

4. 零点存在定理

如果 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 且 $f(a)f(b) < 0$, 则至少存在一点 $\xi \in (a, b)$, 使得 $f(\xi) = 0$.

1.1.14 一些重要的结论

$$(1) \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A.$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A.$$

$$(3) \lim_{n \rightarrow \infty} a^n = \begin{cases} 0, & |a| < 1, \\ 1, & a = 1, \\ \text{不存在,} & \text{其他.} \end{cases}$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0} = \begin{cases} 0, & n < m, \\ \frac{a_n}{b_m}, & n = m, \\ \infty, & n > m. \end{cases} \quad \text{其中 } a_n \neq 0, b_m \neq 0.$$

1.1.15 一些常用的公式

1. 两角和、两角差公式

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y;$$

$$\sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y;$$

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y;$$

$$\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y.$$

2. 和差化积公式

$$\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2};$$

$$\sin x - \sin y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2};$$

$$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2};$$

$$\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}.$$

3. 积化和差公式

$$\sin x \sin y = -\frac{1}{2} [\cos(x+y) - \cos(x-y)];$$

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2} [\cos(x+y) + \cos(x-y)];$$

$$\sin x \cos y = \frac{1}{2} [\sin(x+y) + \sin(x-y)].$$

4. 倍角公式

$$\sin(2x) = 2\sin x \cos x = \frac{2\tan x}{1+\tan^2 x};$$

$$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = \frac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x};$$

$$\tan(2x) = \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}.$$

5. 半角公式

$$\sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1-\cos x}{2}; \quad \cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1+\cos x}{2}.$$

6. 某些级数的部分和

$$1+2+\cdots+n = \frac{1}{2}n(n+1);$$

$$1^2+2^2+\cdots+n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1);$$

$$1^3+2^3+\cdots+n^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2.$$

7. 乘法与因式分解公式

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3;$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3;$$

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2);$$

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2);$$

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1}), \text{ 其中 } n \text{ 为正整数};$$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^{n-k} b^k = a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \cdots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + C_n^n b^n,$$

$$\text{其中 } C_n^0 = 1, C_n^k = \frac{P_n^k}{P_k^k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}, C_n^k = C_n^{n-k}.$$

8. 对数公式

$$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y; \quad \log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y;$$

$$\log_a x^b = b \log_a x; \quad \log_a x = \frac{\log_c x}{\log_c a};$$

$$a^{\log_a x} = x.$$

其中 $a > 0, a \neq 1, c > 0, c \neq 1, x > 0, y > 0$.

9. 常见的等价无穷小公式

当 $x \rightarrow 0$ 时, 有:

$$(1) \sin x \sim x; \quad (2) \arcsin x \sim x;$$

$$(3) \tan x \sim x; \quad (4) \arctan x \sim x;$$

$$(5) 1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2; \quad (6) \tan x - \sin x \sim \frac{1}{2}x^3;$$

$$(7) \log_a(1+x) \sim \frac{x}{\ln a} \quad (a > 0, a \neq 1); \quad (8) \ln(1+x) \sim x, \text{ 为式(7)的特殊情况};$$

$$(9) a^x - 1 \sim x \ln a \quad (a > 0, a \neq 1); \quad (10) e^x - 1 \sim x, \text{ 为式(9)的特殊情况};$$

$$(11) (1+x)^a - 1 \sim ax; \quad (12) \sqrt[n]{1+x} - 1 \sim \frac{x}{n}, \text{ 为式(11)的特殊情况};$$

$$(13) \sqrt{1+x} - 1 \sim \frac{x}{2}, \text{ 为式(11)的特殊情况}.$$

1.2 典型例题分析

1.2.1 题型一 函数定义域的求解

例 1.1 求函数 $y = \frac{1}{x} - \sqrt{x^2 - 4}$ 的定义域.

解 由题意, $x \neq 0$, 且 $x^2 - 4 \geq 0$, 解不等式得 $|x| \geq 2$. 所以函数的定义域为

$$D_f = (-\infty, -2] \cup [2, +\infty).$$

例 1.2 设 $f(x) = \frac{\ln(4-x)}{x-3} + \arcsin \frac{5-2\sqrt{x}}{7}$, 试求函数 $f(x)$ 的定义域.

解 由题意, 自变量 x 应满足

$$4-x > 0, \quad x-3 \neq 0, \quad -1 \leq \frac{5-2\sqrt{x}}{7} \leq 1, \quad x \geq 0,$$

解得 $0 \leq x < 4$, 且 $x \neq 3$, 从而函数 $f(x)$ 的定义域为 $D_f = [0, 3) \cup (3, 4)$.

例 1.3 设函数 $y = f(x)$ 的定义域为 $[0, 6]$, 求 $f(x+2) + f(x-2)$ 的定义域.

解 由于 $f(x)$ 的定义域为 $[0, 6]$, 因此 $f(x+2)$ 的定义域为 $0 \leq x+2 \leq 6$, 即 $x \in [-2, 4]$; $f(x-2)$ 的定义域为 $0 \leq x-2 \leq 6$, 即 $x \in [2, 8]$; 所以 $f(x+2) + f(x-2)$ 的定义域为 $[2, 4]$.

1.2.2 题型二 函数表达式的求解

例 1.4 设 $f(x) + 2f\left(\frac{1}{x}\right) = 1-x$, 且 $x \neq 0$, 求 $f(x)$ 的表达式.

解 利用函数表示法的无关特性, 令 $\frac{1}{x}=t$, 则有 $f\left(\frac{1}{t}\right)+2f(t)=1-\frac{1}{t}$, 联立方程组

$$\begin{cases} f(x)+2f\left(\frac{1}{x}\right)=1-x, \\ f\left(\frac{1}{x}\right)+2f(x)=1-\frac{1}{x}. \end{cases}$$

从而有

$$f(x)=\frac{1}{3}-\frac{2}{3x}+\frac{x}{3}.$$

例 1.5 已知 $f\left(\frac{1}{x}-x\right)=x^2+\frac{1}{x^2}+2$, $x \neq 0$, 试求 $f(x)$ 的表达式.

解 由于

$$f\left(\frac{1}{x}-x\right)=x^2+\frac{1}{x^2}+2=\left(\frac{1}{x}-x\right)^2+4,$$

令 $t=\frac{1}{x}-x$, 则 $f(t)=t^2+4$, 从而 $f(x)=x^2+4$.

1.2.3 题型三 反函数的求解

例 1.6 求 $y=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$ 的反函数.

解 令 $e^x=t$, 则 $x=\ln t$, $t>0$, 则有 $y=\frac{t-t^{-1}}{2}$, 从而

$$t^2-2yt-1=0,$$

求解一元二次方程可得 $t=y \pm \sqrt{y^2+1}$, 舍去负根, 有 $t=y+\sqrt{y^2+1}$, 即有 $e^x=y+\sqrt{y^2+1}$, 因此 $y=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$ 的反函数为 $y=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$.

例 1.7 求函数 $y=\begin{cases} 2x-4, & x \leq 0 \\ \ln(x+1), & x > 0 \end{cases}$ 的反函数.

解 当 $x \leq 0$ 时, $y=2x-4$, 从而 $x=\frac{1}{2}y+2$, $y \leq -4$; 当 $x > 0$ 时, $y=\ln(x+1)$, $x=e^y-1$, $y > 0$. 因此反函数为

$$y=\begin{cases} \frac{1}{2}x+2, & x \leq -4 \\ e^x-1, & x > 0 \end{cases}.$$

1.2.4 题型四 复合函数的求解

例 1.8 已知 $y=f(x)=\begin{cases} 1, & |x| \leq 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}$, 求 $f\{f[f(x)]\}$.

解 由于 $f[f(x)] = \begin{cases} 1, & |f(x)| \leq 1 \\ 0, & |f(x)| > 1 \end{cases}$, 所以 $f\{f[f(x)]\} = 1$.

***例 1.9** $f(x) = \begin{cases} e^x, & x < 1 \\ x, & x \geq 1 \end{cases}$, $g(x) = \begin{cases} x+3, & x < 0 \\ x-2, & x \geq 0 \end{cases}$, 求 $f[g(x)]$.

解 由题意, $f[g(x)] = \begin{cases} e^{g(x)}, & g(x) < 1 \\ g(x), & g(x) \geq 1 \end{cases}$. 下面进行分类讨论.

(1) 当 $g(x) < 1$ 时, 则

$$\begin{cases} g(x) = x+3 < 1, \\ x < 0, \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} g(x) = x-2 < 1, \\ x \geq 0, \end{cases}$$

从而有 $x < -2$ 或 $0 \leq x < 3$.

(2) 当 $g(x) \geq 1$ 时, 则

$$\begin{cases} g(x) = x+3 \geq 1, \\ x < 0, \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} g(x) = x-2 \geq 1, \\ x \geq 0, \end{cases}$$

从而有 $-2 \leq x < 0$ 或 $x \geq 3$.

综上所述

$$f[g(x)] = \begin{cases} e^{x+3}, & x < -2, \\ x+3, & -2 \leq x < 0, \\ e^{x-2}, & 0 \leq x < 3, \\ x-2, & x \geq 3. \end{cases}$$

1.2.5 题型五 函数的四种基本特性

例 1.10 设对于任意的 $x \in \mathbf{R}$ 有 $f\left(\frac{1}{2}+x\right) = \frac{1}{2} + \sqrt{f(x) - f^2(x)}$, 试求 $f(x)$ 的周期.

解 由题意可知, 对于任意的 $x \in \mathbf{R}$ 有 $f\left(\frac{1}{2}+x\right) \geq \frac{1}{2}$, 从而对于任意的 $x \in \mathbf{R}$ 有 $f(x) \geq \frac{1}{2}$. 又因为

$$\begin{aligned} f\left[\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} + x\right)\right] &= \frac{1}{2} + \sqrt{f\left(\frac{1}{2} + x\right) - f^2\left(\frac{1}{2} + x\right)} = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - f(x) + f^2(x)} \\ &= \frac{1}{2} + \sqrt{\left[\frac{1}{2} - f(x)\right]^2}, \end{aligned}$$

因此有

$$f(x+1) = \frac{1}{2} + \left[f(x) - \frac{1}{2}\right] = f(x),$$

故 $f(x)$ 的周期为 1.

例 1.11 对于任意的 $x, y \in \mathbf{R}$, 函数 $f(x)$ 满足 $f(x+y)=f(x)+f(y)$, 试讨论 $f(x)$ 的奇偶性.

解 取 $y=0$, 则有 $f(x+0)=f(x)+f(0)$, 因此有 $f(0)=0$; 取 $y=-x$, 则有

$$f(x-x)=f(x)+f(-x),$$

因此有 $f(-x)=-f(x)$, 故 $f(x)$ 为奇函数.

例 1.12 设 $f(x)=\begin{cases} x+5, & x < 1, \\ 2-3x, & x > 1, \end{cases}$ 试讨论函数 $g(x)=\frac{1}{2}[f(x)-f(-x)]$ 的奇偶性.

解 由题意, 函数 $g(x)$ 的定义域为 $\{x|x \in \mathbf{R}, x \neq 1, x \neq -1\}$, 定义域关于 $x=0$ 对称, 又因为

$$g(-x)=\frac{1}{2}[f(-x)-f(x)]=-g(x),$$

因此函数 $g(x)$ 为奇函数.

注 类似方法可以证明函数 $\frac{1}{2}[f(x)+f(-x)]$ 为偶函数, 且奇偶性与函数 $f(x)$ 的具体表达式没有关系.

例 1.13 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 和 $[b, c]$ 上单调递增, 证明 $f(x)$ 在 $[a, c]$ 上单调递增.

证 设 $x_1 < x_2$ 为 $[a, c]$ 上的任意两点.

(1) 若 $x_1, x_2 \in [a, b]$, 结论成立;

(2) 若 $x_1, x_2 \in [b, c]$, 结论成立;

(3) 若 $x_1 \in [a, b]$, $x_2 \in [b, c]$, 则 x_1, x_2 不能同时等于 b , 从而 $f(x_1) \leq f(b) \leq f(x_2)$, 且等号不能同时成立, 因此有 $f(x_1) < f(x_2)$, 结论成立.

例 1.14 证明函数 $y=\frac{x}{1+x^2}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内有界.

解 对 $\forall x \in (-\infty, +\infty)$, 都有 $|x| \leq \frac{1}{2}(1+x^2)$, 因此

$$\left| \frac{x}{1+x^2} \right| \leq \frac{1}{2},$$

故函数 $y=\frac{x}{1+x^2}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内有界.

例 1.15 证明函数 $y=x \sin x$ 在 $(0, +\infty)$ 上无界.

证 利用反证法.

假设 $y=x \sin x$ 在 $(0, +\infty)$ 上有界, 则存在 $M > 0$, 使得对 $\forall x \in (0, +\infty)$, 有

$$|x \sin x| < M,$$

取 $x=2n\pi+\frac{\pi}{2}$, 其中 n 为正整数, 从而有

$$|x \sin x| = 2n\pi + \frac{\pi}{2} < M,$$

显然当 n 足够大时, 上式不成立, 因此假设不成立, 从而函数 $y=x \sin x$ 在 $(0, +\infty)$ 上无界.

1.2.6 题型六 利用定义证明函数的极限

例 1.16 利用定义证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n + (-1)^n}{n} = 2$ 成立.

证 对于 $\forall \epsilon > 0$, 要使得

$$\left| \frac{2n + (-1)^n}{n} - 2 \right| = \frac{1}{n} < \epsilon$$

成立, 只需 $n > \frac{1}{\epsilon}$ 成立, 取 $N = \left[\frac{1}{\epsilon} \right]$, 则当 $n > N$ 时, 恒有

$$\left| \frac{2n + (-1)^n}{n} - 2 \right| < \epsilon$$

成立, 根据数列极限的定义有 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n + (-1)^n}{n} = 2$.

例 1.17 用定义证明 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-2}{x^2+3} = -\frac{1}{4}$.

证 对于 $\forall \epsilon > 0$, 考察

$$\left| \frac{x-2}{x^2+3} - \left(-\frac{1}{4}\right) \right| = \frac{|(x-1)(x+5)|}{4(x^2+3)},$$

由于 $x \rightarrow 1$, 因此不妨设 $|x-1| < 1$, 即 $0 < x < 2$, 所以有

$$\left| \frac{x-2}{x^2+3} - \left(-\frac{1}{4}\right) \right| < \frac{7}{12} |x-1| < |x-1|,$$

因此要使得 $\left| \frac{x-2}{x^2+3} - \left(-\frac{1}{4}\right) \right| < \epsilon$, 只需使得 $|x-1| < \epsilon$ 即可, 取 $\delta = \min\{1, \epsilon\}$, 则当 $0 < |x-1| < \delta$ 时, 有

$$\left| \frac{x-2}{x^2+3} - \left(-\frac{1}{4}\right) \right| < \epsilon$$

成立, 故

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-2}{x^2+3} = -\frac{1}{4}.$$

1.2.7 题型七 利用极限的四则运算法则求极限

例 1.18 求下列函数的极限:

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^3 + 2n + 1}{2n^3 + (-1)^n};$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(4x+5)^{10}(3x-1)^5}{(2x+3)^{15}};$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x - \arctan x}{3x + \arctan x};$$

$$(4) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n + 3^n}{2^{n+1} + 3^{n+1}}.$$

解 (1) 原式 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 + \frac{2}{n^2} + \frac{1}{n^3}}{2 + \frac{1}{n^3}(-1)^n} = \frac{3}{2};$

$$(2) \text{ 原式} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{(4x+5)^{10}}{x^{10}} \cdot \frac{(3x-1)^5}{x^5}}{\frac{(2x+3)^{15}}{x^{15}}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(4+\frac{5}{x}\right)^{10} \left(3-\frac{1}{x}\right)^5}{\left(2+\frac{3}{x}\right)^{15}} = \frac{4^{10} \cdot 3^5}{2^{15}} = 6^5;$$

$$(3) \text{ 原式} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 - \frac{1}{x} \arctan x}{3 + \frac{1}{x} \arctan x} = \frac{2}{3};$$

$$(4) \text{ 原式} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n + 1}{2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n + 3} = \frac{1}{3}.$$

例 1.19 求下列函数的极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x-1} + \frac{x-4}{x^3-1} \right); \quad (2) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{2+x} - \sqrt{6-x}}{x^2-3x+2}.$$

解 (1) 原式 = $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2+x+1)+(x-4)}{(x-1)(x^2+x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+2x-3}{(x-1)(x^2+x+1)}$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+3)}{(x-1)(x^2+x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+3}{x^2+x+1} = \frac{4}{3}.$$

$$(2) \text{ 原式} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{2+x} - \sqrt{6-x}}{(x-1)(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2(x-2)}{(\sqrt{2+x} + \sqrt{6-x})(x-1)(x-2)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2}{(\sqrt{2+x} + \sqrt{6-x})(x-1)} = \frac{1}{2}.$$

1.2.8 题型八 利用两个重要极限求极限

例 1.20 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \sin x}{2x + \sin(2x)}.$

解 原式 = $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \frac{\sin x}{x}}{2 + 2 \cdot \frac{\sin(2x)}{2x}} = \frac{1+1}{2+2} = \frac{1}{2}.$

例 1.21 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(2nx) - \cos(nx)}{x^2}$, 其中 n 为正整数.

解 原式 = $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{[1 - \cos(nx)] - [1 - \cos(2nx)]}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(nx)}{x^2} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(2nx)}{x^2}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sin^2 \frac{nx}{2}}{x^2} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sin^2(nx)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sin^2 \frac{nx}{2}}{\frac{4}{n^2} \cdot \left(\frac{nx}{2}\right)^2} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2n^2 \sin^2(nx)}{(nx)^2}$$

$$= \frac{n^2}{2} - 2n^2 = -\frac{3}{2}n^2.$$

例 1.22 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} [1 + \ln(1+x)]^{\frac{2}{x}}$.

解 $\lim_{x \rightarrow 0} [1 + \ln(1+x)]^{\frac{2}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} [1 + \ln(1+x)]^{\frac{1}{\ln(1+x)} \cdot \frac{2\ln(1+x)}{x}} = e^2.$

1.2.9 题型九 利用等价无穷小替换求极限

例 1.23 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^n)}{\sin^m x}$, 其中 m, n 为自然数.

解 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^n)}{\sin^m x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^n}{x^m} = \begin{cases} \infty, & n < m, \\ 1, & n = m, \\ 0, & n > m. \end{cases}$

例 1.24 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+\tan x} - \sqrt{1-\tan x}}{\tan(2x)}$.

解 原式 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\tan x}{\tan(2x)(\sqrt{1+\tan x} + \sqrt{1-\tan x})}$
 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{2x(\sqrt{1+\tan x} + \sqrt{1-\tan x})} = \frac{1}{2}.$

例 1.25 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a^x + b^x + c^x}{3} \right)^{\frac{1}{x}}$, 其中 a, b, c 均为正数.

解 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a^x + b^x + c^x}{3} \right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \exp \left\{ \frac{\ln \left(\frac{a^x + b^x + c^x}{3} \right)}{x} \right\},$

又因为

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \left(\frac{a^x + b^x + c^x}{3} \right)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \left(1 + \frac{a^x + b^x + c^x - 3}{3} \right)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x + b^x + c^x - 3}{3x} \\ &= \frac{1}{3} \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{b^x - 1}{x} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{c^x - 1}{x} \right) \\ &= \frac{1}{3} \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \ln a}{x} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \ln b}{x} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \ln c}{x} \right) \\ &= \frac{1}{3} (\ln a + \ln b + \ln c) = \frac{1}{3} \ln(abc), \end{aligned}$$

所以

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a^x + b^x + c^x}{3} \right)^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{3} \ln(abc)} = \sqrt[3]{abc}.$$

例 1.26 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{\ln(1+x^2)}}$.

解 利用第二个重要极限, 有

$$\text{原式} = \lim_{x \rightarrow 0} [1 + (\cos x - 1)]^{\frac{1}{\cos x - 1} \cdot \frac{\cos x - 1}{\ln(1+x^2)}},$$

又因为

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{\ln(1+x^2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{2}x^2}{x^2} = -\frac{1}{2},$$

所以原式 = $e^{-\frac{1}{2}}$.

1.2.10 题型十 证明极限不存在

例 1.27 求极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^x - 2^{-x}}{2^x + 2^{-x}}$.

解 由于

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2^x - 2^{-x}}{2^x + 2^{-x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - 2^{-2x}}{1 + 2^{-2x}} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2^x - 2^{-x}}{2^x + 2^{-x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2^{2x} - 1}{2^{2x} + 1} = -1,$$

左右极限存在, 但不相等, 因此极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^x - 2^{-x}}{2^x + 2^{-x}}$ 不存在.

***例 1.28** 证明 $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$ 不存在.

证 取两个子数列

$$\{x_n^{(1)}\} = \left\{ \frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}} \right\} \text{ 和 } \{x_n^{(2)}\} = \left\{ \frac{1}{n\pi} \right\},$$

显然满足

$$x_n^{(1)} \neq 0, \lim_{n \rightarrow \infty} x_n^{(1)} = 0; \quad x_n^{(2)} \neq 0, \lim_{n \rightarrow \infty} x_n^{(2)} = 0,$$

但是

$$\sin \frac{1}{x_n^{(1)}} = \sin\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sin \frac{1}{x_n^{(1)}} = 1,$$

$$\sin \frac{1}{x_n^{(2)}} = \sin(n\pi) = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sin \frac{1}{x_n^{(2)}} = 0,$$

由海涅定理可知, 极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$ 不存在.

1.2.11 题型十一 利用极限的存在准则求极限

例 1.29 设 $x_1 = 10$, $x_{n+1} = \sqrt{6+x_n}$, $n = 1, 2, \dots$, 问数列 $\{x_n\}$ 的极限是否存在? 若存在, 求其值.

解 由 $x_1 = 10$ 及 $x_2 = \sqrt{6+x_1} = 4$, 知 $x_1 > x_2$. 假设对正整数 k , 有 $x_k > x_{k+1}$, 则有

$$x_{k+1} = \sqrt{6+x_k} > \sqrt{6+x_{k+1}} = x_{k+2},$$

由数学归纳法知对一切正整数 n 都有 $x_n > x_{n+1}$, 即 $\{x_n\}$ 为单调递减数列, 又因为 $x_n > 0$, 即 $\{x_n\}$ 有下界, 因此 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在.

不妨设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$, 则有

$$A = \sqrt{6+A}, \quad A > 0,$$

解得 $A=3$.

例 1.30 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n^2+1)^{\frac{1}{2}}} + \cdots + \frac{1}{(n^n+1)^{\frac{1}{n}}} \right)$.

解 由于

$$\frac{1}{n+1} \cdot n \leq \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n^2+1)^{\frac{1}{2}}} + \cdots + \frac{1}{(n^n+1)^{\frac{1}{n}}} \right) < \frac{1}{n} \cdot n = 1,$$

且 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1$, 由夹逼定理可知, 原式 $= 1$.

例 1.31 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} (1+2^n+3^n+4^n)^{\frac{1}{n}}$.

解 由于

$$4 = (4^n)^{\frac{1}{n}} < (1+2^n+3^n+4^n)^{\frac{1}{n}} < 4^{\frac{1}{n}} \cdot 4,$$

且 $\lim_{n \rightarrow \infty} 4 \cdot 4^{\frac{1}{n}} = 4$, 由夹逼定理可得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1+2^n+3^n+4^n)^{\frac{1}{n}} = 4.$$

注 本例题的结论可以推广到一般情况, 例如求极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_1^n + a_2^n + \cdots + a_K^n)^{\frac{1}{n}},$$

其中 K 为某个正整数, $a_i > 0, i=1, \cdots, K$. 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_1^n + a_2^n + \cdots + a_K^n)^{\frac{1}{n}} = \max\{a_1, a_2, \cdots, a_K\}.$$

例 1.32 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} (1+x^n)^{\frac{1}{n}}$, 其中 $x > 0$.

解 利用例 1.31 的结论. 当 $0 < x < 1$ 时, 原式 $= 1$; 当 $x=1$ 时, 原式 $= 1$; 当 $x > 1$ 时, 原式 $= x$. 因此

$$\text{原式} = \begin{cases} 1, & 0 < x \leq 1, \\ x, & x > 1. \end{cases}$$

1.2.12 题型十二 利用极限的性质求参数值或函数的表达式

例 1.33 已知 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2+1}{x+1} - ax - b \right) = 0$, 求 a 和 b 的值.

解 由于

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2+1}{x+1} - ax - b \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(1-a)x^2 - (a+b)x + 1-b}{x+1} = 0,$$

所以 $\begin{cases} 1-a=0 \\ a+b=0 \end{cases}$, 因此 $a=1, b=-1$.

例 1.34 已知 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2+ax+b}{x^2-3x+2}=6$, 求实数 a 和 b 的值.

解 因为 $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2-3x+2)=0$, 所以 $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2+ax+b)=0$, 令

$$x^2+ax+b=(x-2)(x+k),$$

则

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2+ax+b}{x^2-3x+2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+k)}{(x-2)(x-1)} = 2+k=6,$$

所以 $k=4$, 从而 $a=2, b=-8$.

例 1.35 已知 $f(x)=x^3+\frac{\sin x}{x}+2\tan\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$, 求 $f(x)$ 的表达式.

解 令 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)=A$, 则

$$f(x)=x^3+\frac{\sin x}{x}+2A\tan\left(x-\frac{\pi}{4}\right),$$

从而

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x^3 + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} + \lim_{x \rightarrow 0} 2A \tan\left(x-\frac{\pi}{4}\right),$$

即有 $A=1+2A \cdot (-1)$, 解得 $A=\frac{1}{3}$, 因此有

$$f(x)=x^3+\frac{\sin x}{x}+\frac{2}{3}\tan\left(x-\frac{\pi}{4}\right).$$

1.2.13 题型十三 函数的连续性问题

例 1.36 讨论函数 $f(x)=\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+x}{1+x^{2n}}$ 的连续性.

解 当 $|x|<1$ 时, $f(x)=1+x$; 当 $|x|=1$ 时, $f(x)=\frac{1+x}{2}$; 当 $|x|>1$ 时, $f(x)=$

0. 从而

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x \leq -1, \\ 1+x, & -1 < x < 1, \\ 1, & x = 1, \\ 0, & x > 1. \end{cases}$$

因为 $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = f(-1) = 0$, 所以 $x=-1$ 为函数 $f(x)$ 的连续点. 又因

为 $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 0, f(1) = 1$, 所以 $x=1$ 为函数 $f(x)$ 的间断点, 综上函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,$

$1) \cup (1, +\infty)$ 内连续.

例 1.37 讨论下列函数的间断点及其类型:

$$(1) f(x) = \frac{\tan x}{x};$$

$$(2) f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1-x^2)}{x \sin x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0; \end{cases}$$

$$(3) f(x) = \frac{\arctan x}{|x(x-1)|}.$$

解 (1) 当 $x=0, x=k\pi+\frac{\pi}{2}$ ($k=0, \pm 1, \dots$) 时 $f(x)$ 没有定义, 所以

$$x = k\pi + \frac{\pi}{2} \quad (k=0, \pm 1, \dots), \quad x=0$$

都是 $f(x)$ 的间断点; 因为 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1$, 所以 $x=0$ 为 $f(x)$ 的第一类间断点中的可去间断点. 因为

$$\lim_{x \rightarrow (k\pi + \frac{\pi}{2})^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow (k\pi + \frac{\pi}{2})^-} \frac{\tan x}{x} = \infty,$$

所以 $x=k\pi+\frac{\pi}{2}$ ($k=0, \pm 1, \dots$) 为 $f(x)$ 的第二类间断点中的无穷间断点.

(2) 因为

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1-x^2)}{x \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x^2}{x^2} = -1, \quad f(0) = 0,$$

所以 $x=0$ 为 $f(x)$ 的第一类间断点中的可去间断点.

(3) 显然 $x=0$ 和 $x=1$ 是 $f(x)$ 的间断点. 因为

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\arctan x}{x(1-x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x(1-x)} = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\arctan x}{x(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{x(x-1)} = -1,$$

由于 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$, 因此 $x=0$ 是第一类间断点中的跳跃间断点. 又因为

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x \cdot |x-1|}{\arctan x} = 0,$$

因此 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \infty$, 故 $x=1$ 是第二类间断点中的无穷间断点.

例 1.38 求 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{n+2}}{\sqrt{2^{2n} + x^{2n}}}$ ($x \geq 0$) 的间断点并判断其类型.

解 当 $0 \leq x < 2$ 时, $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^n \cdot x^2}{\sqrt{1 + \left(\frac{x}{2}\right)^{2n}}} = 0,$

当 $x=2$ 时, $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+2}}{\sqrt{2^{2n} + 2^{2n}}} = 2\sqrt{2},$

$$\text{当 } x > 2 \text{ 时, } f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^2}{\sqrt{1 + \left(\frac{2}{x}\right)^{2n}}} = x^2.$$

所以

$$f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < 2, \\ 2\sqrt{2}, & x = 2, \\ x^2, & x > 2. \end{cases}$$

因为 $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 4$, $f(2) = 2\sqrt{2}$, 所以 $x = 2$ 为 $f(x)$ 的第一类间断点中的跳跃间断点.

例 1.39 设 $f(x) = \begin{cases} \frac{1 - e^{\tan x}}{\arcsin \frac{x}{2}}, & x > 0 \\ a e^{2x}, & x \leq 0 \end{cases}$ 在 $x = 0$ 处连续, 求 a 的值.

解 由于 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续, 所以

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0).$$

又因为

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - e^{\tan x}}{\arcsin \frac{x}{2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\tan x}{\frac{x}{2}} = -2, \quad f(0) = a e^0 = a,$$

所以 $a = -2$.

1.2.14 题型十四 连续函数的等式证明问题

例 1.40 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续且 $f(a) = f(b)$, 证明至少存在一点 $\xi \in (a, b)$, 使得 $f(\xi) = f\left(\xi + \frac{b-a}{2}\right)$ 成立.

证 构造辅助函数 $F(x) = f(x) - f\left(x + \frac{b-a}{2}\right)$, 则有

$$F(a) = f(a) - f\left(a + \frac{b-a}{2}\right) = f(a) - f\left(\frac{a+b}{2}\right),$$

$$F\left(\frac{a+b}{2}\right) = f\left(\frac{a+b}{2}\right) - f\left(\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}\right) = f\left(\frac{a+b}{2}\right) - f(b),$$

若 $F\left(\frac{a+b}{2}\right) = F(a) = 0$, 只需取 $\xi = \frac{a+b}{2}$; 若 $F\left(\frac{a+b}{2}\right)$ 和 $F(a)$ 都不等于零, 则二者一定异号, 由零点定理可得在 (a, b) 内至少存在一点 ξ , 使得 $F(\xi) = 0$, 即 $f(\xi) = f\left(\xi + \frac{b-a}{2}\right)$ 成立.

例 1.41 设 $f(x), g(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, $a > 0$, 且 $f(a) < g(a) + \frac{1}{a}$, $f(b) >$

$g(b) + \frac{1}{b}$, 证明在 (a, b) 内至少存在一点 ξ , 使得 $f(\xi) = g(\xi) + \frac{1}{\xi}$ 成立.

证 构造辅助函数

$$F(x) = f(x) - g(x) - \frac{1}{x},$$

则 $F(a) < 0$, $F(b) > 0$, 且 $F(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 利用零点定理可知在 (a, b) 内至少存在一点 ξ , 使得 $F(\xi) = 0$, 即 $f(\xi) = g(\xi) + \frac{1}{\xi}$ 成立.

1.3 习题精选

1. 填空题

(1) 设 $f(x) = \ln 2$, 则 $f(x+2) - f(x) =$ _____.

(2) $y = \frac{1}{\ln(2x-3)} + \arcsin(x-1)$ 的定义域为 _____.

(3) 函数 $y = \sqrt{x^2-1} + \ln(x+2)$ 的定义区间为 _____.

(4) 设 $f(x)$ 的定义域为 $(0, 1]$, 则函数 $f(\sin x)$ 的定义域为 _____.

(5) 若函数 $f(x)$ 的定义域为 $[0, 1]$, 则 $f(x^2)$ 的定义域为 _____.

(6) 设 $f(x) = \arcsin x$, $g(x) = \ln x$, 则 $f[g(x)]$ 的定义域为 _____.

(7) 已知函数 $f(x) = \sqrt{x}$, 则函数 $f\left(\frac{1}{x}\right)$ 的定义域为 _____.

(8) 设 $f(x) = 8x^3$, $f[g(x)] = 1 - e^x$, 则 $g(x) =$ _____.

(9) 已知函数 $f(x) = 1 - x^2$, 则 $f[f(x)] =$ _____.

(10) 已知 $f(x) = 3x + 1$, 则 $f^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) =$ _____.

(11) 已知 $f\left(\frac{1}{x} - 1\right) = \frac{3x+1}{2x-1}$, 则 $f(x) =$ _____.

(12) 已知 $f(x) = \begin{cases} (x-1)^2, & 1 \leq x \leq 2 \\ x-6, & 2 < x \leq 3 \end{cases}$, 则 $f(x+1) =$ _____.

(13) 函数 $y = |\cos x|$ 的周期为 _____.

(14) 对于 $\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, 当 $|x-0| < \delta$ 时, 有 $\left| \frac{f(x)}{x} - 1 \right| < \epsilon$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) =$ _____.

(15) $\lim_{x \rightarrow 0^-} e^{\frac{1}{x}} =$ _____, $\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{1}{x}} =$ _____, $\lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{x}} =$ _____.

(16) 设 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 2$, $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 5$, 则 $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) =$ _____.

(17) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(5x+1)^{40} (3x+2)^{20}}{(5x-1)^{60}} =$ _____.

(18) 设 $u_n = \frac{n}{\sqrt{n^3+n}} \sin(\sqrt{n})$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n =$ _____.

(19) $\lim_{x \rightarrow -\infty} x(\sqrt{x^2+100}+x) =$ _____.

(20) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+4}{x^2+2x} (2+\cos x) =$ _____.

(21) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{nx^2}{2} \tan \frac{2\pi}{n} =$ _____.

(22) 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(ax)}{\sin(3x)} = -2$, 则 $a =$ _____.

(23) 若当 $x \rightarrow 0$ 时, $(e^{x^2}-1)\arctan^3 x \sim x^\alpha$, 则 $\alpha =$ _____.

(24) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(x \sin \frac{1}{x} + \frac{1}{x} \sin x \right) =$ _____.

(25) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(x \sin \frac{1}{x} + \frac{1}{x} \sin x \right) =$ _____.

(26) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n + 5^{n+1}}{2^n + 5^{n+2}} =$ _____.

(27) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2^n + 4^n + 6^n} =$ _____.

(28) 设 $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + ax^2 + x + 2}{x+1} = b$ (b 为有限数), 则 $a+b =$ _____.

(29) 设 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2a}{x-1} \right)^x = e^3$, 则 $a =$ _____.

(30) $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[x]{1-2x} =$ _____.

(31) 已知 $f(x)$ 满足 $f(x) = 2x + 4\sin x \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} f(x)$, 则 $f(x) =$ _____.

(32) 已知 $f(x) = \begin{cases} 3e^x, & x < 0 \\ 2x+a, & x \geq 0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续, 则 $a =$ _____.

(33) 若函数 $f(x) = \begin{cases} 2e^x + x \sin \frac{1}{x}, & x < 0, \\ b, & x = 0, \\ a + \cos x, & x > 0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续, 则 $a =$ _____, $b =$ _____.

(34) 为使 $f(x) = \frac{\sin(2x) \ln(1+x^2)}{x^2 \arctan(3x)}$ 在 $x=0$ 处连续, 须补充定义 $f(0) =$ _____.

(35) 设函数 $f(x) = \begin{cases} (\cos x)^{\frac{1}{x}}, & x \neq 0, \\ e, & x = 0, \end{cases}$ 则间断点 $x=0$ 的类型为 _____.

(36) 函数 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3nx}{1-nx}$ 的连续区间为_____.

2. 单项选择题

(1) 函数 $y = \frac{\ln(x+1)}{\sqrt{x-1}}$ 的定义域为().

- (A) $x > -1$ (B) $x > 1$ (C) $x \geq -1$ (D) $x \geq 1$

(2) 下列函数相同的是().

(A) $f(x) = x + 2, g(x) = \frac{x^2 - x - 6}{x - 3}$

(B) $f(x) = \sin x, g(x) = \sqrt{\frac{1 - \cos(2x)}{2}}$

(C) $f(x) = 2x + 1, g(t) = 2t + 1$

(D) $f(x) = e^{\frac{1}{2}\ln x}, g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$

(3) 下列函数在 $(0, +\infty)$ 内无界的是().

(A) $y = e^{-x}$ (B) $y = \frac{x^2}{1+x^2}$

(C) $y = \sin \frac{1}{x}$ (D) $y = x \sin x$

(4) 函数 $f(x) = \ln \frac{1+x}{1-x}$ 是().

- (A) 奇函数 (B) 偶函数
(C) 非奇非偶函数 (D) 有界函数

(5) 已知 $f(x) = \begin{cases} x+1, & x < 1 \\ \sin x, & x > 1 \end{cases}$, 则 $f(x) - f(-x)$ 为().

- (A) 奇函数 (B) 偶函数
(C) 非奇非偶函数 (D) 无法确定

(6) 设 $f(x) = \begin{cases} x^2, & 0 \leq x \leq 1 \\ 2x, & 1 < x \leq 2 \end{cases}$, 则函数 $g(x) = f(x-2) + f(2x)$ 的定义域为().

- (A) 空集 (B) $[0, 2]$ (C) $[0, 4]$ (D) $[2, 4]$

(7) 下列表达式为基本初等函数的是().

(A) $y = x^2 + \cos x$ (B) $y = \begin{cases} x^2 + 2x, & x > 0, \\ e^x - 1, & x < 0; \end{cases}$

(C) $y = \ln x$ (D) $y = \sin \sqrt{x}$

(8) 函数 $y = \sin \frac{1}{x}$ 在其定义域内是().

- (A) 单调函数 (B) 无界函数
(C) 有界函数 (D) 周期函数

- (9) 当 $x \rightarrow 0$ 时, $\tan(3x)\ln(1+2x)$ 与 $\sin x^2$ 比较是()无穷小量.
 (A) 同阶但不等价 (B) 较高阶
 (C) 较低阶 (D) 等价
- (10) 当 $x \rightarrow 0$ 时, ()与 x 是等价无穷小量.
 (A) $\sin 2x$ (B) $\sqrt{1+x} - 1$
 (C) $x - \sin x$ (D) $\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}$
- (11) 当 $x \rightarrow 0^+$ 时, 与 $\sqrt{x}$ 等价的无穷小量是().
 (A) $1 - e^{\sqrt{x}}$ (B) $\ln \frac{1-x}{1-\sqrt{x}}$
 (C) $\sqrt{1+\sqrt{x}} - 1$ (D) $1 - \cos \sqrt{x}$
- (12) 对任意的 x , 总有 $\varphi(x) \leq f(x) \leq g(x)$ 且 $\lim_{x \rightarrow \infty} [g(x) - \varphi(x)] = 0$, 则 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) =$ ().
 (A) 存在且一定不等于零 (B) 存在但不一定为零
 (C) 一定不存在 (D) 不一定存在
- (13) 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(3x)}{x} = \frac{1}{2}$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(5x)}{x} =$ ().
 (A) $\frac{5}{6}$ (B) $\frac{1}{30}$ (C) $\frac{15}{2}$ (D) $\frac{3}{10}$
- (14) 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 存在, 则数列 $\{b_n\}$ 满足条件()时, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n$ 存在.
 (A) $\{b_n\}$ 有界 (B) $\{b_n\}$ 单调
 (C) $\{b_n\}$ 单调有界 (D) 不能确定
- (15) 当 $n \rightarrow \infty$ 时, $a_n = \begin{cases} \frac{n^2 + 2\sqrt{n}}{n}, & n = 2k + 1 \\ \frac{1}{n}, & n = 2k \end{cases}$ (其中 k 为正整数) 为().
 (A) 无穷大量 (B) 无穷小量 (C) 有界变量 (D) 无界变量
- (16) 当 $x \rightarrow a$ 时, $f(x)$ 为()时, 则必有 $\lim_{x \rightarrow a} (x-a)f(x) = 0$.
 (A) 有界函数 (B) 任意函数 (C) 无穷大量 (D) 不能确定
- (17) 设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 分别是同一个变化过程中的无穷大量和无穷小量, 则 $f(x) + g(x)$ 为().
 (A) 无穷小量; (B) 有界变量;
 (C) 无穷大量; (D) 不能确定.
- (18) 若函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} \sin x, & x < 0, \\ a, & x = 0, \\ x \sin \frac{1}{x} - b, & x > 0 \end{cases}$ 在 $x = 0$ 处连续, 则 a, b 的值为().

(A) $a=1, b=0$

(B) $a=1, b=-1$

(C) $a=0, b=0$

(D) $a=0, b=1$

(19) 设 $f(x), \varphi(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上有定义, $f(x)$ 为连续函数, 且 $f(x) \neq 0$, $\varphi(x)$ 有间断点, 则下列结论正确的是().

(A) $\varphi[f(x)]$ 必有间断点

(B) $\varphi[f^2(x)]$ 必有间断点

(C) $f[\varphi(x)]$ 必有间断点

(D) $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ 必有间断点

(20) 下列说法正确的是().

(A) 若 $f(x)$ 在 $(a-\delta, a+\delta)$ 内有界, 则 $f(x)$ 在 $x=a$ 处连续

(B) 若 $f(x)$ 在 $x=a$ 处连续, 则必存在 $\delta>0$, 使得 $f(x)$ 在 $(a-\delta, a+\delta)$ 内有界

(C) 若 $f(x)$ 在 $(a-\delta, a+\delta)$ 内有界且可导, 则 $f'(x)$ 在 $(a-\delta, a+\delta)$ 内有界

(D) 若 $f(x)$ 在 $(a-\delta, a+\delta)$ 内有界, 且有 $\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x)=0$, 则有 $\lim_{x \rightarrow a} g(x)=0$



第(20)题详解

3. 求下列函数的反函数及反函数的定义域.

(1) $y=2+\arcsin(3+x)$; (2) $y=1-\sqrt{4-x^2}$ ($-2 \leq x \leq 0$).

4. 设 $y=f(x)$ 的定义域为 $(0, 1]$, 求函数 $f[1-(\ln x)^2]$ 的定义域.

5. 设 $f(x)=\begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 2, \\ 2, & 2 < x \leq 6, \end{cases}$ $h(x)=f(x+2)-f(x-1)$, 求 $h(x)$ 的定义域.

6. 设 $f\left(x-\frac{1}{x}\right)=x^2+\frac{1}{x^2}$, 试求 $f(x)$ 的表达式.

7. 已知 $f(x)$ 是奇函数, 判断 $F(x)=f(x)\left(\frac{1}{2^x+1}-\frac{1}{2}\right)$ 的奇偶性.

8. 已知 $f(x)=\begin{cases} x+1, & x < 1, \\ \sin x, & x > 1, \end{cases}$ 讨论 $f(x)-f(-x)$ 的奇偶性.

9. 判断下列函数的奇偶性.

(1) $y=\ln(\sqrt{x^2+1}+x)$; (2) $y=x \cdot \frac{2^x-1}{2^x+1}$.

10. 下列函数可以由哪些简单函数复合而成?

(1) $y=\ln(1-3x)$;

(2) $y=\arctan(\tan^2 x)$;

(3) $y=e^{\sin^2 x}$.

11. 设 $f(x)=\begin{cases} x+1, & x \leq 1 \\ 2, & x > 1 \end{cases}$, 试求 $f[f(x)]$ 的表达式.

12. 判断下列函数是否为周期函数, 若为周期函数, 求其周期; 若不是周期函数,

说明理由.

$$(1) f(x) = \cos(3x+1); \quad (2) f(x) = 3 + \sin(4x+2); \quad (3) f(x) = x \cos x.$$

13. 求下列极限.

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{8n^3+1}+n}{\sqrt{n^2+1}+2n};$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \arctan \sqrt{n}}{\sqrt{4n^2+1}};$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - \sin x}{2x + \sin(2x)};$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+\sqrt{x}} - \sqrt{x});$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} \sin x + 2x \sin \frac{1}{x} \right);$$

$$(6) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{1+x} \right)^{-2x+1};$$

$$(7) \lim_{x \rightarrow 0} (1+x e^x)^{\frac{1}{x}};$$

$$(8) \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \left(\sqrt{\frac{n-1}{n+2}} - 1 \right);$$

$$(9) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3-x} - \sqrt{1+x}}{\sin(x^2-1)};$$

$$(10) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \tan(2x) \tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right);$$

$$(11) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sqrt{2x^2-1}};$$

$$(12) \lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{1-x}};$$

$$(13) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\tan x} - e^{\sin x}}{\sin^3 x};$$

$$(14) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^n}{n^{n-1}} \tan \frac{1}{n};$$

$$(15) \lim_{x \rightarrow \infty} (x + \sqrt[3]{1-x^3});$$

$$(16) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}.$$

14. 若 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+ax+b}{\tan(x^2-1)} = 3$, 试求常数 a 和 b 的值.

15. 若 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^2+1}{x-1} + ax + b \right) = 0$, 试求常数 a 和 b 的值.

16. 已知极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+a}{x-2a} \right)^x = 8$, 试求常数 a 的值.

17. 设当 $x \rightarrow 1$ 时, $1 - \frac{m}{1+x+\dots+x^{m-1}}$ 是 $x-1$ 的等价无穷小, 试求 m 的值.

18. 已知 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln\left(1+\frac{f(x)}{\arcsin x}\right)}{a^x-1} = A$, 其中 $A > 0$ 为常数, 试求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2}$.

19. 已知 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内是奇函数, 且 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = A$, 试求 $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ 和 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

20. 已知 $f(x)$ 为三次多项式, 且 $\lim_{x \rightarrow 2a} \frac{f(x)}{x-2a} = \lim_{x \rightarrow 4a} \frac{f(x)}{x-4a} = 1$, 其中 $a \neq 0$, 求极限

$$\lim_{x \rightarrow 3a} \frac{f(x)}{x-3a}.$$

21. 设 $f(x) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln(2^t + x^t)}{t}$, 其中 $x > 0$, 求 $f(x)$ 的表达式.

22. 设 $x_{n+1} = \frac{1}{3} \left(2x_n + \frac{8}{x_n^2} \right)$ ($n=0, 1, 2, \dots$), 其中 $x_0 > 0$, 证明数列 $\{x_n\}$ 收敛, 并求 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

23. 设 $x_0 = 1$, $x_{n+1} = 1 + \frac{x_n}{1+x_n}$, $n=0, 1, 2, \dots$, 试证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在, 并求其值.

24. 已知 $f(x) = \frac{x^2 - x}{|x|(x^2 - 1)}$, 讨论 $f(x)$ 的间断点及其类型.

25. 讨论函数 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - 2^{nx}}{1 + 2^{nx}}$ 的连续性.

26. 讨论函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{\cos x}{x+4}, & x \geq 0, \\ \frac{2 - \sqrt{4-x}}{x}, & x < 0 \end{cases}$ 在定义域内的连续性.

27. 讨论函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{e^{\frac{1}{x}} + 1}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处的连续性.

28. 设 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[1 + x^n + \left(\frac{x^2}{2} \right)^n \right]^{1/n}$, 其中 $x \geq 0$, 讨论 $f(x)$ 的连续性.

29. 证明方程 $x2^x = 1$ 至少有一个小于 1 的根.

30. 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 且满足 $f(0) > 0$, $f(1) < 1$, 试证在开区间 $(0, 1)$ 内至少存在一定 $\xi \in (0, 1)$, 使得 $f(\xi) = \xi$.

31. 设数列 $\{x_n\}$ 由以下等式给定,

$$x_1 = \sqrt{a}, \quad x_2 = \sqrt{a + \sqrt{a}}, \quad x_3 = \sqrt{a + \sqrt{a + \sqrt{a}}}, \quad \dots,$$

其中 $a > 0$, 试证明数列 $\{x_n\}$ 收敛, 并求 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

32. 设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, $a < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$, $c_i > 0$, $i=1, 2, \dots, n$, 证明至少存在一点 $\xi \in [a, b]$, 使得

$$f(\xi) = \frac{c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2) + \dots + c_n f(x_n)}{c_1 + c_2 + \dots + c_n}.$$

1.4 习题详解

1. 填空题

- (1) 0; (2) $\left(\frac{3}{2}, 2\right)$; (3) $(-2, -1] \cup [1, +\infty)$;
 (4) $(2k\pi, (2k+1)\pi)$, $k \in \mathbf{Z}$; (5) $[-1, 1]$;

$$(6) [e^{-1}, e]; \quad (7) (0, +\infty); \quad (8) \frac{\sqrt[3]{1-e^x}}{2};$$

$$(9) -x^4 + 2x^2; \quad (10) \frac{1-x}{3x}; \quad (11) \frac{4+x}{1-x};$$

$$(12) f(x) = \begin{cases} x^2, & 0 \leq x \leq 1 \\ x-5, & 1 < x \leq 2 \end{cases}; \quad (13) \pi;$$

$$(14) 0; \quad (15) 0; +\infty; \text{不存在};$$

$$(16) \frac{2}{5}; \quad (17) \left(\frac{3}{5}\right)^{20}; \quad (18) 0;$$

$$(19) -50; \text{提示}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} x(\sqrt{x^2 + 100} + x) &= \lim_{t \rightarrow +\infty} -t(\sqrt{t^2 + 100} - t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} -\frac{100t}{\sqrt{t^2 + 100} + t} \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} -\frac{100}{\sqrt{1 + \frac{100}{t^2}} + 1} = -50. \end{aligned}$$

$$(20) 0; \quad (21) \pi x^2; \quad (22) -6;$$

$$(23) 5; \quad (24) 1; \quad (25) 1;$$

$$(26) \frac{1}{5}; \quad (27) 6; \quad (28) 4;$$

$$(29) 1; \quad (30) e^{-2};$$

$$(31) f(x) = 2x - \frac{4\pi}{3} \sin x; \text{提示} \quad \text{因为极限值等于某个常数, 因此不妨设 } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} f(x) =$$

A, 原题等式两边同时求极限, 得

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} 2x + \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} 4A \sin x,$$

即有 $A = \pi + 4A$, 所以 $A = -\frac{\pi}{3}$, 从而 $f(x) = 2x - \frac{4\pi}{3} \sin x$.

$$(32) 3; \quad (33) 1, 2; \quad (34) \frac{2}{3};$$

(35) 第一类间断点中的可去间断点;

(36) $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$; 显然当 $x=0$ 时, $f(0)=0$; 当 $x \neq 0$ 时,

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3nx}{1-nx} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3x}{\frac{1}{n}-x} = \frac{3x}{-x} = -3,$$

函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 点处不连续, 所以 $f(x)$ 的连续区间为 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

2. 单项选择题

- (1) B; (2) C; (3) D; (4) A; (5) A;
(6) A; (7) C; (8) C; (9) A; (10) D;

(11) B; 提示 当 $x \rightarrow 0^+$ 时,

$$1 - e^{\sqrt{x}} \sim -\sqrt{x}, \quad \ln \frac{1-x}{1-\sqrt{x}} = \ln(1+\sqrt{x}) \sim \sqrt{x},$$

$$\sqrt{1+\sqrt{x}} - 1 \sim \frac{1}{2}\sqrt{x}, \quad 1 - \cos \sqrt{x} \sim \frac{1}{2}(\sqrt{x})^2 = \frac{1}{2}x.$$

(12) D; (13) A; (14) C; (15) D; (16) A;

(17) C; (18) B;

(19) D; 采用排除法. 设在 $(-\infty, +\infty)$ 上有 $\varphi(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$, $\varphi(x)$ 有间断点

$x=0$, $f(x)=x^2$, $f(x)$ 为连续函数. 则 $\varphi[f(x)]=1$, 没有间断点, 故 A 排除;
 $\varphi[f^2(x)]=1$, 没有间断点, 故 B 排除; $f[\varphi(x)]=1$, 没有间断点, 故 C 排除. 对于选项 D, $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ 一定有间断点, 故 D 正确.

(20) B.

3. (1) $y = \sin(x-2) - 3, \left[2 - \frac{\pi}{2}, 2 + \frac{\pi}{2}\right];$

(2) $y = -\sqrt{4-(x-1)^2}, [-1, 1].$

4. $(e^{-1}, e).$

5. $[1, 4].$

6. 因为

$$f\left(x - \frac{1}{x}\right) = x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + 2,$$

所以 $f(t) = t^2 + 2$, 从而 $f(x) = x^2 + 2$.

7. 由题意可知, $F(x)$ 的定义域关于原点对称, 且

$$F(-x) = f(-x) \left(\frac{1}{2^{-x}+1} - \frac{1}{2} \right) = -f(x) \cdot \frac{1-2^{-x}}{2(2^{-x}+1)} = -f(x) \cdot \frac{2^x-1}{2(1+2^x)},$$

而 $F(x) = f(x) \cdot \frac{1-2^x}{2(2^x+1)}$, 从而有 $F(-x) = F(x)$, 因此 $F(x)$ 为偶函数.

8. 奇函数.

9. (1) 奇函数; (2) 偶函数.

10. (1) $y = \ln u, u = 1-3x;$ (2) $y = \arctan u, u = v^2, v = \tan x;$

(3) $y = e^u, u = v^2, v = \sin x.$

11. 由题意,

$$f[f(x)] = \begin{cases} f(x) + 1, & f(x) \leq 1, \\ 2, & f(x) > 1. \end{cases}$$

当 $f(x) \leq 1$ 时, 则

$$\begin{cases} f(x) = x + 1 \leq 1, \\ x \leq 1, \end{cases}$$

解得 $x \leq 0$.

当 $f(x) > 1$ 时, 则

$$\begin{cases} f(x) = x + 1 > 1, \\ x \leq 1, \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} f(x) = 2 > 1, \\ x > 1, \end{cases}$$

解得 $0 < x \leq 1$ 或 $x > 1$. 因此

$$f[f(x)] = \begin{cases} x + 2, & x \leq 0, \\ 2, & x > 0. \end{cases}$$

12. (1) 周期函数, $T = \frac{2}{3}\pi$; (2) 周期函数, $T = \frac{1}{2}\pi$;

(3) 非周期函数. 理由如下.

利用反证法. 假设 $y = x \cos x$ 是周期函数, 则存在 $T > 0$, 使得对 $\forall x \in \mathbf{R}$, 有

$$f(x + T) = f(x),$$

即

$$(x + T) \cos(x + T) = x \cos x.$$

取 $x = 0$, 则有 $T \cos T = 0$, 从而 $\cos T = 0$, 所以有

$$T = k\pi + \frac{\pi}{2}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

取 $x = T$, 则有 $2T \cos(2T) = T \cos T = 0$, 从而

$$\cos(2T) = 0.$$

而 $\cos(2T) = \cos(2k\pi + \pi) = -1$, 矛盾. 因此假设不成立, 即 $y = x \cos x$ 不是周期函数.

13. 求下列极限:

$$(1) 1; \quad (2) \frac{\pi}{4}; \quad (3) \frac{1}{2};$$

$$(4) \text{原式} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x+\sqrt{x}} - \sqrt{x}}{1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \sqrt{x} - x}{\sqrt{x+\sqrt{x}} + \sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x}} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2};$$

$$(5) 1;$$

$$(6) \text{原式} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{-1}{1+x}\right)^{\frac{1+x}{-1} \cdot \frac{2x-1}{1+x}} = e^2;$$

$$(7) e;$$

$$(8) \text{原式} = \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\sqrt{1 - \frac{3}{n+2}} - 1 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{3}{n+2} \right) = -\frac{3}{2};$$

$$\begin{aligned} (9) \text{原式} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3-x} - \sqrt{1+x}}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{3-x} - \sqrt{1+x})(\sqrt{3-x} + \sqrt{1+x})}{(x^2 - 1)(\sqrt{3-x} + \sqrt{1+x})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2(1-x)}{(x-1)(x+1)(\sqrt{3-x} + \sqrt{1+x})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-2}{(x+1)(\sqrt{3-x} + \sqrt{1+x})} = -\frac{\sqrt{2}}{4}; \end{aligned}$$

(10) 令 $t = \frac{\pi}{4} - x$, 则 $x = \frac{\pi}{4} - t$, 从而

$$\text{原式} = \lim_{t \rightarrow 0} \tan\left(\frac{\pi}{2} - 2t\right) \tan t = \lim_{t \rightarrow 0} \cot(2t) \tan t = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\tan t}{\tan(2t)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{2t} = \frac{1}{2};$$

$$(11) \text{ 原式} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 \cdot \frac{1}{x}}{\sqrt{2x^2 - 1}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{\sqrt{2x^2 - 1}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{-t}{\sqrt{2t^2 - 1}} = -\frac{1}{\sqrt{2}};$$

$$(12) \text{ 原式} = \lim_{x \rightarrow 1} (1+x-1)^{\frac{1}{1-x}} = \lim_{x \rightarrow 1} (1+x-1)^{\frac{1}{x-1} \cdot (-1)} = e^{-1};$$

$$(13) \text{ 原式} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\tan x - \sin x} - 1}{\sin^3 x} e^{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{\sin^3 x} e^{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}x^3}{x^3} e^{\sin x} = \frac{1}{2}.$$

$$(14) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^n}{n^{n-1}} \tan \frac{1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^n}{n^{n-1}} \frac{1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

$$(15) \text{ 原式} = \lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \left(1 + \sqrt[3]{\frac{1}{x^3} - 1}\right) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt[3]{1-t^3}}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{3}t^3}{t} = 0;$$

(16) 因为

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{1}{x}} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} e^{\frac{1}{x}} = 0;$$

因此

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{1 + e^{\frac{1}{x}}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} x \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{1 + e^{\frac{1}{x}}} = 0; \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{1 + e^{\frac{1}{x}}} = \frac{0}{1 + 0} = 0,$$

所以

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{1 + e^{\frac{1}{x}}} = 0.$$

14. 由于

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + ax + b}{\tan(x^2 - 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + ax + b}{x^2 - 1} = 3,$$

因此有 $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + ax + b) = 0$, 即 $x=1$ 为方程 $x^2 + ax + b = 0$ 的一个根, 因此设

$$x^2 + ax + b = (x-1)(x-k).$$

而

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + ax + b}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x-k)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-k}{x+1} = \frac{1-k}{2} = 3,$$

因此 $k = -5$, 故有 $a = 4, b = -5$.

$$15. \text{ 原式} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2+a)x^2 + (b-a)x + 1 - b}{x-1} = 0, \text{ 因此 } a+2=0, b-a=0, \text{ 所以}$$

$a = -2, b = -2$.

16. 由题意, 显然 $a \neq 0$, 又因为

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+a}{x-2a} \right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3a}{x-2a} \right)^{\frac{x-2a}{3a} \cdot \frac{3ax}{x-2a}} = e^{3a} = 8,$$

所以 $a = \ln 2$.

17. 根据等价无穷小的定义, 有

$$\begin{aligned} 1 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1} \left(1 - \frac{m}{1+x+\cdots+x^{m-1}} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1+x+\cdots+x^{m-1}-m}{(x-1)(1+x+\cdots+x^{m-1})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1) + (x^2-1) + \cdots + (x^{m-1}-1)}{(x-1)(1+x+\cdots+x^{m-1})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1+(x+1)+\cdots+(x^{m-2}+x^{m-3}+\cdots+1)}{1+x+\cdots+x^{m-1}} = \frac{1+2+\cdots+(m-1)}{m} = \frac{m-1}{2}, \end{aligned}$$

所以 $m=3$.

18. 由题意, 当 $x \rightarrow 0$ 时, $\frac{f(x)}{\arcsin x} \rightarrow 0$, 因此

$$A = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{f(x)}{\arcsin x}}{x \ln a} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x \ln a \arcsin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2 \ln a},$$

从而

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2} = A \ln a.$$

19. 由于

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{t \rightarrow 0^-} f(-t) = -\lim_{t \rightarrow 0^-} f(t),$$

所以 $\lim_{t \rightarrow 0^-} f(t) = -\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -A$, 从而 $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -A$. 因此当 $A=0$ 时, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$,

当 $A \neq 0$ 时, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 不存在.

20. 由题意, $f(x)$ 为连续函数, 因此

$$f(2a) = \lim_{x \rightarrow 2a} f(x) = 0, \quad f(4a) = \lim_{x \rightarrow 4a} f(x) = 0,$$

从而 $x=2a$ 和 $x=4a$ 为 $f(x)=0$ 的实根. 故设

$$f(x) = (x-2a)(x-4a)(Ax+B),$$

由

$$\lim_{x \rightarrow 2a} \frac{f(x)}{x-2a} = \lim_{x \rightarrow 2a} [(x-4a)(Ax+B)] = -2a(2Aa+B) = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow 4a} \frac{f(x)}{x-4a} = \lim_{x \rightarrow 4a} [(x-2a)(Ax+B)] = 2a(4Aa+B) = 1,$$

解得 $A = \frac{1}{2a^2}$, $B = -\frac{3}{2a}$. 因此

$$\lim_{x \rightarrow 3a} \frac{f(x)}{x-3a} = \lim_{x \rightarrow 3a} \frac{(x-2a)(x-4a) \left(\frac{x}{2a^2} - \frac{3}{2a} \right)}{x-3a} = \lim_{x \rightarrow 3a} \frac{(x-2a)(x-4a)}{2a^2} = -\frac{1}{2}.$$

$$21. \text{ 当 } 0 < x < 2 \text{ 时, } f(x) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t \ln 2 + \ln \left[1 + \left(\frac{x}{2} \right)^t \right]}{t} = \ln 2,$$

$$\text{当 } x = 2 \text{ 时, } f(x) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln(2^t + 2^t)}{t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{(t+1)\ln 2}{t} = \ln 2,$$

$$\text{当 } x > 2 \text{ 时, } f(x) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t \ln x + \ln \left[1 + \left(\frac{2}{x} \right)^t \right]}{t} = \ln x,$$

综上所述可得

$$f(x) = \begin{cases} \ln 2, & 0 < x \leq 2, \\ \ln x, & x > 2. \end{cases}$$

22. 由于

$$x_{n+1} = \frac{1}{3} \left(x_n + x_n + \frac{8}{x_n^2} \right) \geq \sqrt[3]{x_n \cdot x_n \cdot \frac{8}{x_n^2}} = 2;$$

$$x_{n+1} - x_n = \frac{1}{3} \left(2x_n + \frac{8}{x_n^2} \right) - x_n = \frac{1}{3x_n^2} (8 - x_n^3) \leq 0,$$

因此 $x_{n+1} \leq x_n$. 数列 $\{x_n\}$ 单调递减有下界, 所以数列 $\{x_n\}$ 收敛.

不妨设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$, 由题意可得 $A = \frac{1}{3} \left(2A + \frac{8}{A^2} \right)$, 所以 $A = 2$.

23. 显然, $x_1 > x_0 = 1$, 假设 $x_n > x_{n-1}$, 由于

$$x_{n+1} - x_n = 1 + \frac{x_n}{1+x_n} - 1 - \frac{x_{n-1}}{1+x_{n-1}} = \frac{x_n - x_{n-1}}{(1+x_n)(1+x_{n-1})} > 0,$$

因此由数学归纳法可知, 数列 $\{x_n\}$ 单调递增. 又因为

$$x_{n+1} = 1 + \frac{x_n}{1+x_n} < 1 + 1 = 2,$$

即 $\{x_n\}$ 有上界, 因此根据单调收敛准则可知, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在. 不妨设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$, 则由

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = 1 + \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n}{1 + \lim_{n \rightarrow \infty} x_n}$$

可知, $A = 1 + \frac{A}{1+A}$, 解得 $A = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

24. $x=0$ 是第一类间断点中的跳跃间断点, $x=1$ 是第一类间断点中的可去间断点, $x=-1$ 是第二类间断点中的无穷间断点.

25. 当 $x < 0$ 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} 2^{nx} = 0$; 当 $x > 0$ 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} 2^{nx} = +\infty$; 当 $x = 0$ 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} 2^{nx} = 1$.

因此有

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x > 0, \end{cases}$$

显然 $x=0$ 为 $f(x)$ 的间断点, 因此函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ 内连续.

26. 因为 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 和 $(0, +\infty)$ 内为初等函数, 所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ 内连续. 在 $x=0$ 处,

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2 - \sqrt{4-x}}{x} = \frac{1}{4}, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos x}{x+4} = \frac{1}{4}, \quad f(0) = \frac{1}{4},$$

所以有

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0),$$

从而 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续, 因此函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续.

27. 由于

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{e^{\frac{1}{x}} + 1} = \frac{0-1}{0+1} = -1, \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{e^{\frac{1}{x}} + 1} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - e^{-\frac{1}{x}}}{1 + e^{-\frac{1}{x}}} = \frac{1-0}{1+0} = 1, \end{aligned}$$

故 $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$, 所以函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处不连续.

$$28. \text{ 当 } 0 \leq x < 1 \text{ 时, } f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[1 + x^n + \left(\frac{x^2}{2} \right)^n \right]^{1/n} = 1^0 = 1;$$

当 $x=1$ 时, $f(x)=1$;

$$\text{当 } 1 < x < 2 \text{ 时, } f(x) = x \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{x^n} + 1 + \left(\frac{x}{2} \right)^n \right]^{1/n} = x \cdot 1^0 = x;$$

$$\text{当 } x=2 \text{ 时, } f(x) = 2 \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{2^n} + 1 + 1 \right]^{1/n} = 2 \times 2^0 = 2;$$

$$\text{当 } x > 2 \text{ 时, } f(x) = \frac{x^2}{2} \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\left(\frac{2}{x^2} \right)^n + \left(\frac{2}{x} \right)^n + 1 \right]^{1/n} = \frac{x^2}{2}.$$

综上,

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 1, \\ x, & 1 < x \leq 2, \\ \frac{1}{2}x^2, & x > 2. \end{cases}$$

由于 $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1)$, $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = f(2)$, 所以函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 和 $x=2$ 处连续, 从而 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续.

29. 构造辅助函数 $\varphi(x) = x2^x - 1$, 显然 $\varphi(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 且

$$\varphi(0) = -1 < 0, \quad \varphi(1) = 1 > 0,$$

因此由零点定理可知, 至少存在一点 $\xi \in (0, 1)$, 使得 $\varphi(\xi) = 0$, 从而方程 $x2^x = 1$ 至少有一个小于 1 的根.

30. 提示 构造辅助函数 $F(x) = f(x) - x$, 利用零点定理容易证明.

31. 显然数列 $\{x_n\}$ 单调递增, 且 $x_n \geq \sqrt{a}$. 由于

$$x_n = \sqrt{a + x_{n-1}},$$

因此 $x_n^2 = a + x_{n-1}$, 于是 $x_n^2 < a + x_n$, 从而

$$x_n < \frac{a}{x_n} + 1 \leq \frac{a}{\sqrt{a}} + 1 = \sqrt{a} + 1.$$

即数列 $\{x_n\}$ 有界, 根据单调有界准则可知, 数列 $\{x_n\}$ 收敛.

不妨设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$, 根据保号性可知, $\sqrt{a} \leq A \leq 1 + \sqrt{a}$. 等式 $x_n = \sqrt{a + x_{n-1}}$ 两边同时取极限, 有

$$A = \sqrt{a + A},$$

解得 $A = \frac{1 \pm \sqrt{1+4a}}{2}$, 舍去负根, 故 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{1 + \sqrt{1+4a}}{2}$.

32. 由于 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 因此一定存在最大值 M 和最小值 m , 使得对任意的 $x \in [a, b]$, 有 $m \leq f(x) \leq M$. 从而

$$c_i m \leq c_i f(x_i) \leq c_i M, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

故

$(c_1 + c_2 + \dots + c_n)m \leq c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2) + \dots + c_n f(x_n) \leq (c_1 + c_2 + \dots + c_n)M$,
不等式两边同时除以 $c_1 + c_2 + \dots + c_n$, 得

$$m \leq \frac{c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2) + \dots + c_n f(x_n)}{c_1 + c_2 + \dots + c_n} \leq M,$$

由介值定理可知, 至少存在一点 $\xi \in [a, b]$, 使得

$$f(\xi) = \frac{c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2) + \dots + c_n f(x_n)}{c_1 + c_2 + \dots + c_n}.$$

1.5 拓展训练

1. 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, 且 $a \neq 0$, 则当 n 充分大时, 有().

(A) $|a_n| > \frac{|a|}{2};$

(B) $|a_n| < \frac{|a|}{2};$

(C) $a_n > a - \frac{1}{n};$

(D) $a_n < a + \frac{1}{n}.$

2. 设 $x_n = 1 + \frac{1}{1+1} + \frac{1}{1+2} + \dots + \frac{1}{1+2+\dots+n}$, 试求 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

3. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内单调有界, $\{x_n\}$ 为数列, 下列命题正确的是().

(A) 若 $\{x_n\}$ 收敛, 则 $\{f(x_n)\}$ 收敛;

(B) 若 $\{x_n\}$ 单调, 则 $\{f(x_n)\}$ 收敛;

(C) 若 $\{f(x_n)\}$ 收敛, 则 $\{x_n\}$ 收敛;

(D) 若 $\{f(x_n)\}$ 单调, 则 $\{x_n\}$ 收敛.



1.5.1 详解



1.5.2 详解



1.5.3 详解