第一部分

同步练习

第1章

函　　数

1.1　内容提要

1.1.1　函数的定义

设 D 为一个非空实数集，如果存在一个对应法则 f，使得对于每一个 $x \in D$，都能由 f 唯一确定一个实数 y 与之对应，则称对应法则 f 为定义在实数集 D 上的一个函数，记作 $y=f(x)$，其中，x 称为**自变量**，y 称为**因变量**，实数集 D 称为函数的**定义域**，记为 $D(f)$或者 D_f. 集合$\{y \mid y=f(x),\ x \in D_f\}$称为函数的**值域**，一般记为 $Z(f)$或者 Z_f.

定义域和对应法则是函数的两要素，值域由定义域和对应法则确定. 两个函数相同的充要条件是定义域与对应法则分别相同，因此判断两个函数是否相同，只需验证函数的定义域与对应法则是否分别相同，而与自变量、因变量的符号没有关系.

如果函数没有明确给出定义域，则其定义域一般默认为使得分析表达式有意义的自变量的取值范围.

函数的表示方法主要有公式法、图示法以及表格法等，其中公式法是函数关系表示的一种主要形式.

1.1.2　分段函数

根据函数的定义，在表示函数时，并不要求在整个定义域上都用一个数学表达式来表示. 事实上，在很多问题中，常常遇到一些在定义域的不同子集上具有不同表达式的情况，习惯上把这类函数叫作**分段函数**.

例如**符号函数**

$$y=\operatorname{sgn} x=\begin{cases} 1, & x>0 \\ 0, & x=0 \\ -1, & x<0 \end{cases}$$

是一个分段函数.

注 分段函数在其整个定义域上是一个函数，而不是几个函数.

1.1.3 函数的基本特性

函数的基本特性主要有四种，即奇偶性、单调性、周期性和有界性.

1. 奇偶性

设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称，如果对于 $\forall x\in D$，恒有 $f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为**偶函数**；如果对于 $\forall x\in D$，恒有 $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$ 为**奇函数**.

奇函数的图像关于坐标原点对称，偶函数的图像关于 y 轴对称. 需要注意的是：函数的奇偶性是相对于对称区间而言的，因此如果函数的定义域关于原点不对称，则该函数不具有奇偶性.

奇、偶函数的一些常用结论：

(1) 常函数为偶函数；

(2) 有限个奇函数的代数和为奇函数，有限个偶函数的代数和为偶函数；

(3) 奇函数与偶函数的乘积为奇函数；

(4) 奇数个奇函数的乘积为奇函数，偶数个奇函数的乘积为偶函数.

2. 单调性

设函数 $f(x)$ 在某个区间 D 上有定义，对于 $\forall x_1, x_2\in D$，且 $x_1<x_2$，有：

(1) 若 $f(x_1)<f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在区间 D 单调增加(单调递增)；

(2) 若 $f(x_1)>f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在区间 D 单调减少(单调递减).

3. 周期性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，如果存在一个正数 T，使得对任意一个 $x\in D$，有 $(x\pm T)\in D$ 且

$$f(x+T)=f(x)$$

恒成立，则称该函数为**周期函数**. T 称为函数 $f(x)$ 的**周期**，满足上式的最小的正数 T_0 称为函数的**最小正周期**，通常我们所说的函数的周期指的是函数的最小正周期.

周期函数的一些常用结论：

(1) 若 $f(x)$ 的周期为 T，则 $f(ax+b)$ 的周期为 $\dfrac{T}{|a|}$，$a\neq 0$；

(2) 若 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的周期均为 T，则 $f(x)\pm g(x)$ 也是周期为 T 的周期函数.

4. 有界性

设函数 $f(x)$ 在集合 D 上有定义，若存在正数 M，使得对于 $\forall x\in D$，恒有 $|f(x)|\leqslant M$，则称函数 $f(x)$ 在 D 上**有界**，否则称 $f(x)$ 在 D 上**无界**.

函数的有界性还可以通过另外一种形式来定义.

若存在实数 a 和 b，$a\leqslant b$，使得对 $\forall x\in D$，恒有 $a\leqslant f(x)\leqslant b$，则称函数 $f(x)$ 在 D 上有界，否则称 $f(x)$ 在 D 上无界，其中 a 称为函数的**下界**，b 称为函数的**上界**.

1.1.4　反函数

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D_f，值域为 Z_f. 如果对于 Z_f 中的每一个 y 值，都存在唯一的满足 $y=f(x)$ 的 $x\in D_f$ 与之对应，这样确定的以 y 为自变量、以 x 为因变量的函数，称为函数 $y=f(x)$ 的**反函数**，并记为 $x=f^{-1}(y)$. 习惯上，一般将 $y=f(x)$ 的反函数记为 $y=f^{-1}(x)$.

显然，反函数 $x=f^{-1}(y)$ 的定义域为 Z_f，值域为 D_f，且对任意的 $y\in Z_f$，有

$$f[f^{-1}(y)]=y,$$

对任意的 $x\in D_f$，有

$$f^{-1}[f(x)]=x.$$

单调函数一定存在反函数，且函数与反函数具有相同的单调性.

在同一坐标系下，函数 $y=f(x)$ 与其反函数 $x=f^{-1}(y)$ 的图像是重合的，$y=f(x)$ 与其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图像关于直线 $y=x$ 对称.

1.1.5　复合函数

已知两个函数

$$y=f(u),\ u\in D_f,\ y\in Z_f,$$
$$u=\varphi(x),\ x\in D_\varphi,\ u\in Z_\varphi,$$

若 $D_f\cap Z_\varphi\neq\varnothing$，则可通过中间变量 u 将 $u=\varphi(x)$ 代入 $y=f(u)$ 构成一个以 x 为自变量、以 y 为因变量的函数 $y=f[\varphi(x)]$，称 $y=f[\varphi(x)]$ 为 $y=f(u)$ 与 $u=\varphi(x)$ 的**复合函数**.

1.1.6　基本初等函数

常函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数及反三角函数这 6 大类函数统称为**基本初等函数**.

1.1.7　初等函数

由基本初等函数经有限次四则运算和(或)复合运算而得到的函数称为**初等函数**.

1.1.8　一些常用的三角公式

**1. 两角和、两角差公式

$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$;

$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$;

$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$;

$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$.

**2. 和差化积公式

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

**3. 积化和差公式

$$\sin\alpha\sin\beta=-\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)];$$

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)];$$

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)].$$

4. 倍角公式

$$\sin(2\alpha)=2\sin\alpha\cos\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha};$$

$$\cos(2\alpha)=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=1-2\sin^2\alpha=\frac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha};$$

$$\tan(2\alpha)=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}.$$

5. 半角公式

$$\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{2};\ \cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{2}.$$

1.1.9 一些常用的代数公式

1. 某些数列的 n 项和

$$1+2+\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1);$$

$$1^2+2^2+\cdots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1);$$

$$1^3+2^3+\cdots+n^3=\frac{1}{4}n^2(n+1)^2.$$

2. 乘法与因式分解公式

$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$;
$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$;
$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$;
$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$;
$a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\cdots+ab^{n-2}+b^{n-1})$，其中 n 为正整数；

$$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k a^{n-k}b^k=a^n+C_n^1a^{n-1}b+C_n^2a^{n-2}b^2+\cdots+C_n^{n-1}ab^{n-1}+b^n,$$

其中

$$C_n^0=1,\ C_n^k=\frac{A_n^k}{P_k}=\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}=\frac{n!}{k!(n-k)!},\ C_n^k=C_n^{n-k}.$$

3. 对数公式

$\log_a(xy)=\log_a x+\log_a y$；　$\log_a\dfrac{x}{y}=\log_a x-\log_a y$；

$\log_a x^b=b\log_a x$；　$\log_a x=\dfrac{\log_c x}{\log_c a}$；

$a^{\log_a x}=x$；其中 $a>0$，$a\neq1$，$c>0$，$c\neq1$，$x>0$，$y>0$.

1.2　典型例题分析

1.2.1　题型一　函数定义域的求解

例 1.1　求函数 $y=\dfrac{1}{x}-\sqrt{x^2-4}$ 的定义域.

解　由题意，$x\neq0$，且 $x^2-4\geqslant0$，解不等式得 $|x|\geqslant2$. 所以函数的定义域为

$$D_f=(-\infty,-2]\cup[2,+\infty).$$

例 1.2　设函数 $y=f(x)$的定义域为$[0,6]$，求 $f(x+2)+f(x-2)$的定义域.

解　由于 $f(x)$的定义域为$[0,6]$，因此 $f(x+2)$的定义域为 $0\leqslant x+2\leqslant6$，即 $x\in[-2,4]$；$f(x-2)$的定义域为 $0\leqslant x-2\leqslant6$，即 $x\in[2,8]$；所以 $f(x+2)+f(x-2)$的定义域为$[2,4]$.

1.2.2　题型二　函数表达式的求解

例 1.3　设函数 $f(x)$满足 $f(x)+2f\left(\dfrac{1}{x}\right)=1-x$，且 $x\neq0$，求 $f(x)$的表达式.

解　利用函数表示法的无关特性，令 $\dfrac{1}{x}=t$，则有 $f\left(\dfrac{1}{t}\right)+2f(t)=1-\dfrac{1}{t}$，联立方程组

$$\begin{cases} f(x)+2f\left(\dfrac{1}{x}\right)=1-x \\ f\left(\dfrac{1}{x}\right)+2f(x)=1-\dfrac{1}{x} \end{cases},$$

从而有

$$f(x)=\frac{1}{3}-\frac{2}{3x}+\frac{x}{3}.$$

例 1.4 已知函数 $f(x)$满足 $f\left(\dfrac{1}{x}-x\right)=x^2+\dfrac{1}{x^2}+2$，$x\neq0$，试求 $f(x)$的表达式.

解 由于

$$f\left(\frac{1}{x}-x\right)=x^2+\frac{1}{x^2}+2=\left(\frac{1}{x}-x\right)^2+4,$$

令 $t=\dfrac{1}{x}-x$，则 $f(t)=t^2+4$，从而 $f(x)=x^2+4$.

1.2.3 题型三 反函数的求解

例 1.5 求 $y=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$的反函数.

解 令 $e^x=t$，则 $x=\ln t$，$t>0$，则有 $y=\dfrac{t-t^{-1}}{2}$，从而

$$t^2-2yt-1=0,$$

求解一元二次方程可得 $t=y\pm\sqrt{y^2+1}$，舍去负根，有 $t=y+\sqrt{y^2+1}$，即有 $e^x=y+\sqrt{y^2+1}$，因此 $y=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$的反函数为 $y=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$.

例 1.6 求函数 $y=\begin{cases} 2x-4, & x\leqslant0 \\ \ln(x+1), & x>0 \end{cases}$ 的反函数.

解 当 $x\leqslant0$ 时，$y=2x-4$，从而 $x=\dfrac{1}{2}y+2$，$y\leqslant-4$；当 $x>0$ 时，$y=\ln(x+1)$，$x=e^y-1$，$y>0$. 因此反函数为

$$y=\begin{cases} \dfrac{1}{2}x+2, & x\leqslant-4 \\ e^x-1, & x>0 \end{cases}.$$

1.2.4 题型四 复合函数的求解

例 1.7 已知 $y=f(x)=\begin{cases} 1, & |x|\leqslant1 \\ 0, & x>1 \end{cases}$，求 $f\{f[f(x)]\}$.

解 由于 $f[f(x)]=\begin{cases} 1, & |f(x)|\leqslant1 \\ 0, & |f(x)|>1 \end{cases}$，所以 $f\{f[f(x)]\}=1$.

**例 1.8　$f(x)=\begin{cases} e^x, & x<1 \\ x, & x\geqslant 1 \end{cases}$，$g(x)=\begin{cases} x+3, & x<0 \\ x-2, & x\geqslant 0 \end{cases}$，求 $f[g(x)]$.

解　由题意，$f[g(x)]=\begin{cases} e^{g(x)}, & g(x)<1 \\ g(x), & g(x)\geqslant 1 \end{cases}$，下面进行分类讨论.

(1) 当 $g(x)<1$ 时，则

$$\begin{cases} g(x)=x+3<1 \\ x<0 \end{cases} \quad 或 \quad \begin{cases} g(x)=x-2<1 \\ x\geqslant 0 \end{cases},$$

从而有 $x<-2$ 或 $0\leqslant x<3$.

(2) 当 $g(x)\geqslant 1$ 时，则

$$\begin{cases} g(x)=x+3\geqslant 1 \\ x<0 \end{cases} \quad 或 \quad \begin{cases} g(x)=x-2\geqslant 1 \\ x\geqslant 0 \end{cases},$$

从而有 $-2\leqslant x<0$ 或 $x\geqslant 3$.

综上所述，有

$$f[g(x)]=\begin{cases} e^{x+3}, & x<-2 \\ x+3, & -2\leqslant x<0 \\ e^{x-2}, & 0\leqslant x<3 \\ x-2, & x\geqslant 3 \end{cases}.$$

1.2.5　题型五　函数的四种基本特性

**例 1.9　设对于任意的 $x\in\mathbf{R}$ 有 $f\left(\frac{1}{2}+x\right)=\frac{1}{2}+\sqrt{f(x)-f^2(x)}$，试求 $f(x)$的周期.

解　由题意可知，对于任意的 $x\in\mathbf{R}$ 有 $f\left(\frac{1}{2}+x\right)\geqslant\frac{1}{2}$，从而对于任意的 $x\in\mathbf{R}$ 有 $f(x)\geqslant\frac{1}{2}$，又因为

$$\begin{aligned} f\left[\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}+x\right)\right]&=\frac{1}{2}+\sqrt{f\left(\frac{1}{2}+x\right)-f^2\left(\frac{1}{2}+x\right)}=\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}-f(x)+f^2(x)} \\ &=\frac{1}{2}+\sqrt{\left(\frac{1}{2}-f(x)\right)^2}, \end{aligned}$$

因此有

$$f(x+1)=\frac{1}{2}+\left[f(x)-\frac{1}{2}\right]=f(x),$$

故 $f(x)$的周期为 1.

例 1.10　对于任意的 x，$y\in\mathbf{R}$，函数 $f(x)$满足 $f(x+y)=f(x)+f(y)$，试讨论 $f(x)$的奇偶性.

解 取 $y=0$，则有 $f(x+0)=f(x)+f(0)$，因此有 $f(0)=0$；取 $y=-x$，则有

$$f(x-x)=f(x)+f(-x),$$

可得 $f(-x)=-f(x)$，因此 $f(x)$为奇函数.

例 1.11 设 $f(x)=\begin{cases} x+5, & x<1 \\ 2-3x, & x>1 \end{cases}$，试讨论函数 $g(x)=\dfrac{1}{2}[f(x)-f(-x)]$的奇偶性.

解 由题意，函数 $g(x)$的定义域为$\{x \mid x\in\mathbf{R}, x\neq 1, x\neq -1\}$，定义域关于 $x=0$ 对称，又因为

$$g(-x)=\frac{1}{2}[f(-x)-f(x)]=-g(x),$$

因此函数 $g(x)$为奇函数.

注 采用类似方法可以证明函数$\dfrac{1}{2}[f(x)+f(-x)]$为偶函数，且奇偶性与函数 $f(x)$的具体表达式没有关系.

例 1.12 设 $f(x)$在$[a,b]$和$[b,c]$上单调递增，证明 $f(x)$在$[a,c]$上单调递增.

证 设 $x_1<x_2$ 为$[a,c]$上的任意两点，

(1) 若 $x_1, x_2\in[a,b]$，结论成立；

(2) 若 $x_1, x_2\in[b,c]$，结论成立；

(3) 若 $x_1\in[a,b]$，$x_2\in[b,c]$，则 x_1，x_2 不能同时等于 b，从而 $f(x_1)\leqslant f(b)\leqslant f(x_2)$，且等号不能同时成立，因此有 $f(x_1)<f(x_2)$，结论成立.

例 1.13 证明函数 $y=\dfrac{x}{1+x^2}$在$(-\infty,+\infty)$内有界.

解 对 $\forall x\in(-\infty,+\infty)$，都有$|x|\leqslant\dfrac{1}{2}(1+x^2)$，因此

$$\left|\frac{x}{1+x^2}\right|\leqslant\frac{1}{2},$$

故函数 $y=\dfrac{x}{1+x^2}$在$(-\infty,+\infty)$内有界.

例 1.14 证明函数 $y=x\sin x$ 在$(0,+\infty)$上无界.

证 利用反证法.

假设 $y=x\sin x$ 在$(0,+\infty)$上有界，则存在 $M>0$，使得对 $\forall x\in(0,+\infty)$，有

$$|x\sin x|<M,$$

取 $x=2n\pi+\dfrac{\pi}{2}$，其中，n 为正整数，从而有

$$|x\sin x|=2n\pi+\frac{\pi}{2}<M,$$

显然当 n 足够大时，上式不成立，因此假设不成立，故函数 $y=x\sin x$ 在$(0,+\infty)$上无界.

1.3　习题精选

1. 填空题

(1) 函数 $y=\dfrac{1}{\ln(2x-3)}+\arcsin(x-1)$的定义域为________.

(2) 设函数 $f(x)=\ln 2$，则 $f(x+2)-f(x)=$________.

(3) 设函数 $f(x)$的定义域为$(0,1]$，则函数 $f(\sin x)$的定义域为________.

(4) 若函数 $f(x)$的定义域为$[0,1]$，则 $f(x^2)$的定义域为________.

(5) 设函数 $f(x)=\arcsin x$，$g(x)=\ln x$，则 $f(g(x))$的定义域为________.

(6) 已知函数 $f(x)=\sqrt{x}$，则函数 $f\left(\dfrac{1}{x}\right)$的定义域是________.

(7) 设 $f(x)=8x^3$，$f[g(x)]=1-e^x$，则 $g(x)=$________.

(8) 已知函数 $f(x)=1-x^2$，则 $f[f(x)]=$________.

(9) 已知 $f(x)=3x+1$，则 $f^{-1}\left(\dfrac{1}{x}\right)=$________.

(10) 已知 $f\left(\dfrac{1}{x}-1\right)=\dfrac{3x+1}{2x-1}$，则 $f(x)=$________.

(11) 已知 $f(x)=\begin{cases}(x-1)^2, & 1\leqslant x\leqslant 2\\ x-6, & 2<x\leqslant 3\end{cases}$，则 $f(x+1)=$________.

(12) 函数 $f(x)=|\cos x|$的周期为________.

2. 单项选择题

(1) 函数 $y=\dfrac{\ln(x+1)}{\sqrt{x-1}}$的定义域为(　　).

(A) $x>-1$；　(B) $x>1$；　(C) $x\geqslant -1$；　(D) $x\geqslant 1$.

(2) 下列函数相同的是(　　).

(A) $f(x)=x+2$，$g(x)=\dfrac{x^2-x-6}{x-3}$；

(B) $f(x)=\sin x$，$g(x)=\sqrt{\dfrac{1-\cos(2x)}{2}}$；

(C) $f(x)=2x+1$，$g(t)=2t+1$；

(D) $f(x)=e^{\frac{1}{2}\ln x}$，$g(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

(3) 下列函数在$(0,+\infty)$内无界的是(　　).

(A) $y=e^{-x}$；　(B) $y=\dfrac{x^2}{1+x^2}$；

(C) $y=\sin\dfrac{1}{x}$；　(D) $y=x\sin x$.

(4) 函数 $f(x)=\ln\dfrac{1+x}{1-x}$ 是(　　).

(A) 奇函数;　　(B) 偶函数;

(C) 非奇非偶函数;　　(D) 有界函数.

(5) 已知 $f(x)=\begin{cases} x+1, & x<1 \\ \sin x, & x>1 \end{cases}$,则 $f(x)-f(-x)$ 为(　　).

(A) 奇函数;　　(B) 偶函数;

(C) 非奇非偶函数;　　(D) 无法确定.

(6) 设 $f(x)=\begin{cases} x^2, & 0\leqslant x\leqslant 1 \\ 2x, & 1<x\leqslant 2 \end{cases}$,则函数 $g(x)=f(x-2)+f(2x)$ 的定义域为(　　).

(A) 空集;　　(B) $[0,2]$;

(C) $[0,4]$;　　(D) $[2,4]$.

(7) 下列表达式为基本初等函数的是(　　).

(A) $y=x^2+\cos x$;　　(B) $y=\begin{cases} x^2+2x, & x>0 \\ e^x-1, & x<0 \end{cases}$;

(C) $y=\ln x$;　　(D) $y=\sin\sqrt{x}$.

(8) 函数 $y=\sin\dfrac{1}{x}$ 在其定义域内是(　　).

(A) 单调函数;　　(B) 无界函数;

(C) 有界函数;　　(D) 周期函数.

3. 求下列函数的反函数及反函数的定义域:

(1) $y=2+\arcsin(3+x)$;　　(2) $y=1-\sqrt{4-x^2}$,$-2\leqslant x\leqslant 0$.

4. 设 $y=f(x)$ 的定义域为 $(0,1]$,求函数 $f[1-(\ln x)^2]$ 的定义域.

5. 设 $f(x)=\begin{cases} 1, & 0\leqslant x\leqslant 2 \\ 2, & 2<x\leqslant 6 \end{cases}$,$h(x)=f(x+2)-f(x-1)$,求 $h(x)$ 的定义域.

6. 设 $f\left(x-\dfrac{1}{x}\right)=x^2+\dfrac{1}{x^2}$,试求 $f(x)$ 的表达式.

7. 已知 $f(x)$ 是奇函数,判断 $F(x)=f(x)\left(\dfrac{1}{2^x+1}-\dfrac{1}{2}\right)$ 的奇偶性.

8. 判断下列函数的奇偶性:

(1) $y=\ln(\sqrt{x^2+1}+x)$;　　(2) $y=x\cdot\dfrac{2^x-1}{2^x+1}$.

9. 下列函数可以由哪些简单函数复合而成?

(1) $y=\ln(1-3x)$;

(2) $y=\arctan(\tan^2 x)$;

(3) $y=e^{\sin^2 x}$.

10. 设 $f(x)=\begin{cases}x+1, & x\leqslant 1\\ 2, & x>1\end{cases}$，试求 $f[f(x)]$的表达式.

11. 判断下列函数是否为周期函数，若为周期函数，求其周期；若不是周期函数，说明理由.

(1) $f(x)=\cos(3x+1)$；　(2) $f(x)=3+\sin(4x+2)$；　(3) $f(x)=x\cos x$.

1.4　习题详解

1. 填空题

(1) $\left(\frac{3}{2}, 2\right)$；　(2) 0；　(3) $\bigcup\limits_{k\in\mathbf{Z}}(2k\pi, (2k+1)\pi)$；　(4) $[-1, 1]$；

(5) $[\mathrm{e}^{-1}, \mathrm{e}]$；　(6) $(0, +\infty)$；　(7) $\frac{\sqrt[3]{1-\mathrm{e}^{x}}}{2}$；　(8) $-x^4+2x^2$；

(9) $\frac{1-x}{3x}$；　(10) $\frac{4+x}{1-x}$；　(11) $\begin{cases}x^2, & 0\leqslant x\leqslant 1\\ x-5, & 1<x\leqslant 2\end{cases}$；　(12) π.

2. 单项选择题

(1) B；　(2) C；　(3) D；　(4) A；　(5) A；　(6) A；　(7) C；　(8) C.

3. (1) $y=\sin(x-2)-3$，$\left[2-\frac{\pi}{2}, 2+\frac{\pi}{2}\right]$；

(2) $y=-\sqrt{4-(x-1)^2}$，$[-1, 1]$.

4. $(\mathrm{e}^{-1}, \mathrm{e})$.

5. $[1, 4]$.

6. 因为

$$f\left(x-\frac{1}{x}\right)=x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2,$$

所以 $f(t)=t^2+2$，从而 $f(x)=x^2+2$.

7. 由题意可知，$F(x)$的定义域关于原点对称，且

$$F(-x)=f(-x)\left(\frac{1}{2^{-x}+1}-\frac{1}{2}\right)=-f(x)\cdot\frac{1-2^{-x}}{2(2^{-x}+1)}=-f(x)\cdot\frac{2^x-1}{2(1+2^x)},$$

而 $F(x)=f(x)\cdot\frac{1-2^x}{2(2^x+1)}$，从而有 $F(-x)=F(x)$，因此 $F(x)$为偶函数.

8. (1) 奇函数；　(2) 偶函数.

9. (1) $y=\ln u$，$u=1-3x$；

(2) $y=\arctan u$，$u=v^2$，$v=\tan x$；

(3) $y=\mathrm{e}^u$，$u=v^2$，$v=\sin x$.

10. $f[f(x)]=\begin{cases}x+2, & x\leqslant 0\\ 2, & x>0\end{cases}$.

11. (1) 周期函数，$T=\frac{2}{3}\pi$.

(2) 周期函数，$T=\frac{1}{2}\pi$.

(3) 非周期函数. 理由如下：

利用反证法. 假设 $y=x\cos x$ 是周期函数，则存在 $T>0$，使得对 $\forall x\in \mathbf{R}$，有
$$f(x+T)=f(x).$$
即
$$(x+T)\cos(x+T)=x\cos x.$$
取 $x=0$，则有 $T\cos T=0$，从而 $\cos T=0$，所以有
$$T=k\pi+\frac{\pi}{2}，k=0，1，2，\cdots.$$
取 $x=T$，则有 $2T\cos(2T)=T\cos T=0$，从而
$$\cos(2T)=0.$$
而 $\cos(2T)=\cos(2k\pi+\pi)=-1$，矛盾. 因此假设不成立，故 $y=x\cos x$ 不是周期函数.

填空题详解　　单项选择题详解