第3章 线性时不变系统时域分析

3.1 本章知识图谱

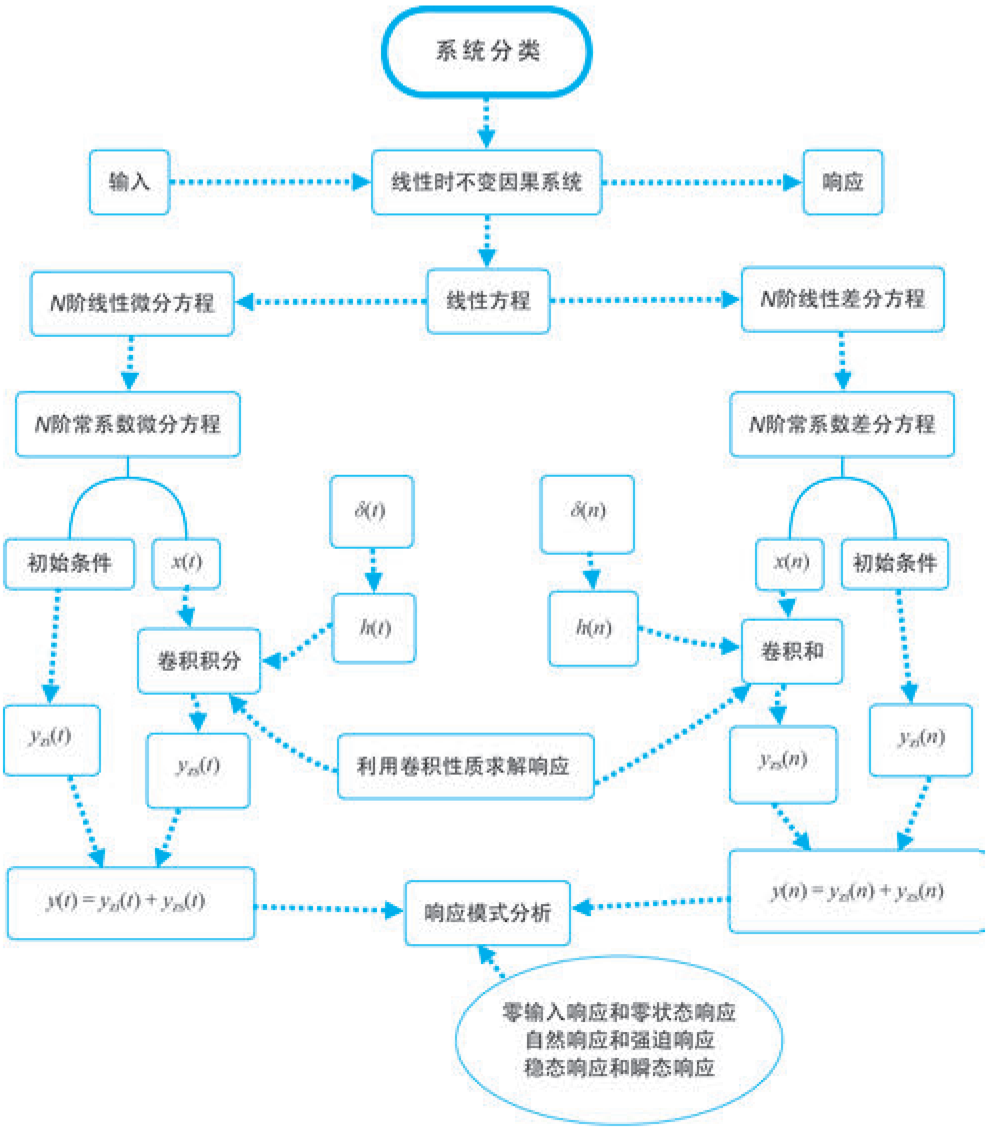


图 3.1.1　线性时不变系统时域分析知识图谱

3.2　习题解答

3.2.1　基础题

3.1　列写图 3.2.1 中 $i_1(t)$、$i_2(t)$、$u_0(t)$的算子方程。

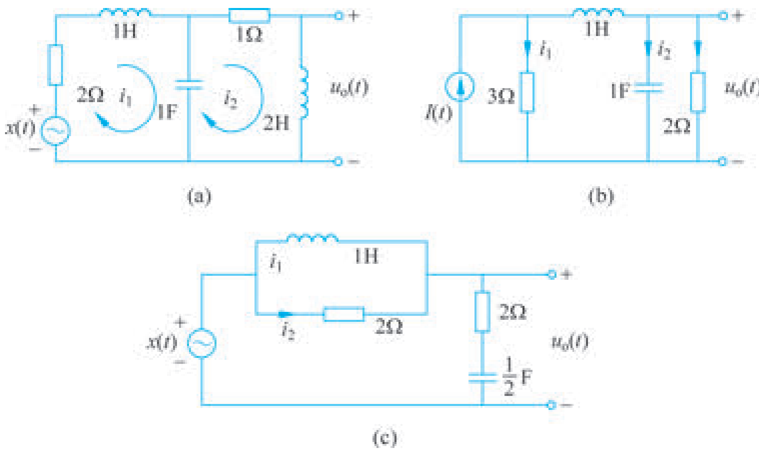


图　3.2.1

【知识点】　本题知识点对应主教材 3.1.1 节。

【解题思路】　根据电路基本知识，列写连续时间线性时不变系统的常系数微分方程。通过将方程组写成矩阵形式，可利用线性代数的知识，借助克拉默法则得出方程组的解。

【解题过程】

（1）根据基尔霍夫电压定律，有如下等式成立：

$$\begin{cases}\left(2+p+\dfrac{1}{p}\right)i_1(t)-\dfrac{1}{p}i_2(t)=x(t)\\[2mm] -\dfrac{1}{p}i_1(t)+\left(1+2p+\dfrac{1}{p}\right)i_2(t)=0\\[2mm] u_o(t)=2pi_2(t)\end{cases}$$

列出矩阵形式

$$\begin{bmatrix}2+p+\dfrac{1}{p} & -\dfrac{1}{p}\\[2mm] -\dfrac{1}{p} & 1+2p+\dfrac{1}{p}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}i_1(t)\\ i_2(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x(t)\\ 0\end{bmatrix}$$

使用克拉默法则

$$i_1(t)=\frac{\begin{vmatrix} x(t) & -\frac{1}{p} \\ 0 & 1+2p+\frac{1}{p} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2+p+\frac{1}{p} & -\frac{1}{p} \\ -\frac{1}{p} & 1+2p+\frac{1}{p} \end{vmatrix}}=\frac{x(t)\left(1+2p+\frac{1}{p}\right)}{2p^2+5p+5+\frac{3}{p}}=\frac{2p^2+p+1}{2p^3+5p^2+5p+3}x(t)$$

$$i_2(t)=\frac{\begin{vmatrix} 2+p+\frac{1}{p} & x(t) \\ -\frac{1}{p} & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2+p+\frac{1}{p} & -\frac{1}{p} \\ -\frac{1}{p} & 1+2p+\frac{1}{p} \end{vmatrix}}=\frac{x(t)\frac{1}{p}}{2p^2+5p+5+\frac{3}{p}}=\frac{1}{2p^3+5p^2+5p+3}x(t)$$

从而

$$u_o(t)=2pi_2(t)=\frac{2p}{2p^3+5p^2+5p+3}x(t)$$

(2) 电容与电阻并联后,再与电感串联,等效电阻为

$$p+\frac{\frac{1}{p}2}{2+\frac{1}{p}}$$

根据 3Ω 两端电压与上述等效电阻的电压相等,可得

$$3i_1(t)=[I(t)-i_1(t)]\left(p+\frac{\frac{1}{p}2}{2+\frac{1}{p}}\right)$$

整理可得

$$i_1(t)=\frac{2p^2+p+2}{2p^2+7p+5}I(t)$$

$$i_2(t)=[I(t)-i_1(t)]\frac{2}{2+\frac{1}{p}}=\frac{6p}{2p^2+7p+5}I(t)$$

$$u_o(t)=[I(t)-i_1(t)]\frac{2\frac{1}{p}}{2+\frac{1}{p}}=\frac{6}{2p^2+7p+5}I(t)$$

(3) 根据电压关系，可得

$$\begin{cases}2i_2(t)+[i_2(t)+i_1(t)]\left(2+\dfrac{2}{p}\right)=x(t)\\ pi_1(t)=2i_2(t)\end{cases}$$

列出矩阵形式

$$\begin{bmatrix}2+\dfrac{2}{p} & 4+\dfrac{2}{p}\\ p & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}i_1(t)\\ i_2(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x(t)\\ 0\end{bmatrix}$$

使用克拉默法则，可得

$$i_1(t)=\frac{\begin{vmatrix}x(t) & 4+\dfrac{2}{p}\\ 0 & -2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2+\dfrac{2}{p} & 4+\dfrac{2}{p}\\ p & -2\end{vmatrix}}=\frac{p}{2p^2+3p+2}x(t)$$

$$i_2(t)=\frac{\begin{vmatrix}2+\dfrac{2}{p} & x(t)\\ p & 0\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2+\dfrac{2}{p} & 4+\dfrac{2}{p}\\ p & -2\end{vmatrix}}=\frac{p^2}{4p^2+6p+4}x(t)$$

因此

$$u_o(t)=[i_1(t)+i_2(t)]\left(2+\frac{2}{p}\right)=\frac{2p^2+6p+4}{4p^2+6p+4}x(t)$$

3.2 已知描述系统的微分方程如下：

(1) $y'''(t)+3y''(t)+2y'(t)=x(t)$

(2) $y'''(t)+2y''(t)+y'(t)=x(t)$

当初始状态为 $y(0^-)=y'(0^-)=y''(0^-)=1$ 时，求零输入响应。

【知识点】 本题知识点对应主教材 3.1.2 节。

【解题思路】 首先列出特征方程，求解特征根，当特征根是各不相等实根时，解为 $y_{zi}(t)=k_1e^{\lambda_1 t}+k_2e^{\lambda_2 t}+\cdots+k_ne^{\lambda_n t}$，$t\geqslant 0$，若有二重根 λ_0，则 $y_{zi}(t)=k_1e^{\lambda_1 t}+k_2e^{\lambda_2 t}+\cdots+k_{n-2}e^{\lambda_{n-2} t}+k_{n-1}e^{\lambda_0 t}+k_nte^{\lambda_0 t}$，再利用初始状态求解待定系数。

【解题过程】

(1) 由系统微分方程可知其系统的特征方程为 $\lambda^3+3\lambda^2+2\lambda=0$，即

$$\lambda(\lambda+2)(\lambda+1)=0$$

求解得到系统的特征根为

$$\lambda_1=0,\quad \lambda_2=-2,\quad \lambda_3=-1$$

故零输入响应形式为

$$y_{zi}(t)=k_1\mathrm{e}^{-t}+k_2\mathrm{e}^{-2t}+k_3,\quad t\geqslant 0$$

由初始状态可求得系数

$$\left.\begin{aligned}y(0^-)&=y_{zi}(0^-)=k_1+k_2+k_3=1\\y'(0^-)&=y'_{zi}(0^-)=-k_1-2k_2=1\\y''(0^-)&=y''_{zi}(0^-)=k_1+4k_2=1\end{aligned}\right\}\Rightarrow\begin{cases}k_1=-3\\k_2=1\\k_3=3\end{cases}$$

因此,系统的零输入响应为

$$y_{zi}(t)=-3\mathrm{e}^{-t}+\mathrm{e}^{-2t}+3,\quad t\geqslant 0$$

(2) 由微分方程可知,系统特征方程为

$$\lambda^3+2\lambda^2+\lambda=0$$

从而可求得系统特征根为

$$\lambda_1=0,\quad \lambda_2=\lambda_3=-1$$

故零输入响应形式为

$$y_{zi}(t)=k_1\mathrm{e}^{-t}+k_2t\mathrm{e}^{-t}+k_3,\quad t\geqslant 0$$

代入初始状态,可求得系数为

$$\left.\begin{aligned}y(0^-)&=y_{zi}(0^-)=k_1+k_3=1\\y'(0^-)&=y'_{zi}(0^-)=-k_1+k_2=1\\y''(0^-)&=y''_{zi}(0^-)=k_1-2k_2=1\end{aligned}\right\}\Rightarrow\begin{cases}k_1=-3\\k_2=-2\\k_3=4\end{cases}$$

因此,系统的零输入响应为

$$y_{zi}(t)=-3\mathrm{e}^{-t}-2t\mathrm{e}^{-t}+4,\quad t\geqslant 0$$

3.3 已知 $H(p)=\dfrac{2p^2+8p+3}{(p+1)(p+3)^2}$,$y_{zi}(0^-)=2$,$y'_{zi}(0^-)=1$,$y''_{zi}(0^-)=0$,求零输入响应 $y_{zi}(t)$。

【知识点】 本题知识点对应主教材 3.1.2 节。

【解题思路】 由系统传输算子得到系统的特征方程,继而求解特征根,方法同上。再结合初始状态得到零输入响应的表达式。

【解题过程】

由系统的传输算子,可知系统特征方程为

$$(\lambda+1)(\lambda+3)^2=0$$

从而可求出系统特征根为

$$\lambda_1=-1,\quad \lambda_2=\lambda_3=-3$$

故零输入响应形式为

$$y_{zi}(t)=k_1\mathrm{e}^{-t}+k_2\mathrm{e}^{-3t}+k_3t\mathrm{e}^{-3t},\quad t\geqslant 0$$

代入初始状态可得

$$\left.\begin{aligned}y(0^-)&=y_{zi}(0^-)=k_1+k_2=2\\y'(0^-)&=y'_{zi}(0^-)=-k_1-3k_2+k_3=1\\y''(0^-)&=y''_{zi}(0^-)=k_1+9k_2-6k_3=0\end{aligned}\right\}\Rightarrow\begin{cases}k_1=6\\k_2=-4\\k_3=-5\end{cases}$$

因此，系统的零输入响应为

$$y_{zi}(t)=6e^{-t}-4e^{-3t}-5te^{-3t},\quad t\geqslant 0$$

3.4 如图 3.2.2 所示系统中，$h_1(t)=\delta(t-1)$，$h_2(t)=u(t)$，求该系统的单位冲激响应。

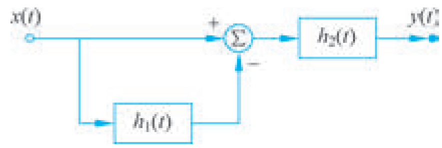


图 3.2.2

【知识点】 本题知识点对应主教材 3.1.3 节和 2.5.1 节。

【解题思路】 单位冲激响应的输入信号为 $\delta(t)$。利用 $\delta(t)$ 在卷积运算中是单位元、$u(t)$ 是积分器的特性，求解系统的单位冲激响应。

【解题过程】

令 $x(t)=\delta(t)$，则有

$$\begin{aligned}y(t)=h(t)&=[\delta(t)-\delta(t)*\delta(t-1)]*u(t)\\&=(\delta(t)-\delta(t-1))*u(t)\\&=\delta(t)*u(t)-\delta(t-1)*u(t)\\&=u(t)-u(t-1)\\&=G_1\left(t-\frac{1}{2}\right)\end{aligned}$$

因此，该系统的单位冲激响应 $h(t)$ 为 $u(t)-u(t-1)$，也可写为 $G_1\left(t-\frac{1}{2}\right)$。

3.5 证明：如果一个线性时不变系统，对于 $x(t)$ 的响应为 $y(t)$，那么该系统对于 $\frac{d}{dt}x(t)$ 的响应为 $\frac{d}{dt}y(t)$。

【知识点】 本题知识点对应主教材 3.1.4 节和 2.5.1 节。

【解题思路】 输出等于输入卷积单位冲激响应，再利用卷积的微分特性即可。

【解题过程】

设线性时不变系统的冲激响应为 $h(t)$，则由题可知 $y(t)=x(t)*h(t)$。对 $y(t)$ 求导，可得

$$\frac{d}{dt}y(t)=\frac{d}{dt}[x(t)*h(t)]$$

由卷积的微分特性可知

$$\frac{d}{dt}[x(t)*h(t)]=\frac{d}{dt}x(t)*h(t)$$

因此

$$\frac{d}{dt}y(t)=\frac{d}{dt}(t)*h(t)$$

即系统对$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t)$的响应为$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y(t)$，证毕。

3.6 某线性时不变系统对输入 $x(t)=\mathrm{e}^{-5t}u(t)$的响应是 $y(t)=\sin(\omega_0 t)u(t)$，试求该系统的冲激响应 $h(t)$。

【知识点】 本题知识点对应主教材 3.1.4 节和 2.5.1 节。

【解题思路】 利用卷积的微分特性，输入信号的微分通过系统以后的输出是原输出的微分，再进行加权整理即可。

【解题过程】

由题意可知

$$\mathrm{e}^{-5t}u(t)\rightarrow\sin(\omega_0 t)u(t) \quad ①$$

由卷积的微分特性可知

$$x'(t)\rightarrow y'(t)$$

即

$$\mathrm{e}^{-5t}\delta(t)-5\mathrm{e}^{-5t}u(t)\rightarrow\omega_0\cos(\omega_0 t)u(t)+\sin(\omega_0 t)\delta(t)$$

利用冲激信号筛选特性，可得

$$\delta(t)-5\mathrm{e}^{-5t}u(t)\rightarrow\omega_0\cos(\omega_0 t)u(t) \quad ②$$

式①×5＋式②，可得

$$\delta(t)\rightarrow\omega_0\cos(\omega_0 t)u(t)+5\sin(\omega_0 t)u(t)$$

即

$$h(t)=\omega_0\cos(\omega_0 t)u(t)+5\sin(\omega_0 t)u(t)$$

3.7 某连续时间线性时不变系统如图 3.2.3 所示。各子系统冲激响应分别为 $h_1(t)=\delta(t-1)$，$h_2(t)=u(t)$，$h_3(t)=G_1(t)$，求该系统的单位冲激响应 $h(t)$。

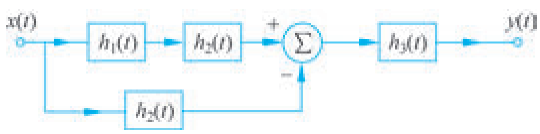


图 3.2.3

【知识点】 本题知识点对应主教材 3.1.3 节和 2.5.1 节。

【解题思路】 单位冲激响应的输入信号为 $\delta(t)$。利用 $\delta(t-t_0)$是卷积延时器，等长的门信号卷积结果为三角信号，级联系统的单位冲激响应为各子系统单位冲激响应卷积，并联系统的单位冲激响应为各子系统单位冲激响应相加，求解系统的单位冲激响应。

【解题过程】

令 $x(t)=\delta(t)$，则有

$$\begin{aligned}y(t)&=[h_1(t)*h_2(t)-h_2(t)]*h_3(t)\\&=[\delta(t-1)*u(t)-u(t)]*G_1(t)\\&=[u(t-1)-u(t)]*G_1(t)\\&=G_1(t-0.5)*G_1(t)\end{aligned}$$

$$=G_1(t)*G_1(t)*\delta(t-0.5)$$
$$=\Lambda_2(t-0.5)$$

3.8 已知某连续时间线性时不变系统对输入信号 $\delta'(t)$的零状态响应为 $y_{zs}(t)=2e^{-3t}u(t)$，试求：

(1) 系统的单位冲激响应 $h(t)$；

(2) 系统对输入信号 $x(t)=u(t)-u(t-2)$产生的零状态响应 $y_{zs}(t)$。

【知识点】 本题知识点对应主教材 2.5.1 节和 3.1.4 节。

【解题思路】 本题考查连续时间线性时不变系统的时域分析和信号的微积分运算。零状态响应 $y_{zs}(t)$是输入信号 $x(t)$与系统冲激响应函数 $h(t)$的卷积积分，即 $y_{zs}(t)=x(t)*h(t)$。同时，冲激偶函数 $\delta'(t)$是卷积微分器，$\delta(t-t_0)$是卷积延时器，冲激函数 $\delta(t)$和阶跃函数 $u(t)$是微积分关系。

【解题过程】

(1) 当输入信号为 $\delta(t)$时，零状态响应即为冲激响应函数 $h(t)$，已知：

$$y_{zs1}(t)=\delta'(t)*h(t)=h'(t)$$

因此有

$$h(t)=u(t)*y_{zs1}(t)=u(t)*[2e^{-3t}u(t)]=\frac{2}{3}(1-e^{-3t})u(t)$$

(2)

$$y_{zs2}(t)=x(t)*h(t)=[u(t)-u(t-2)]*h(t)$$

其中，

$$u(t)*h(t)=u(t)*\left[\frac{2}{3}(1-e^{-3t})u(t)\right]=\frac{2}{3}\left(t-\frac{1-e^{-3t}}{3}\right)u(t)$$
$$=\left(\frac{2}{3}t-\frac{2}{9}+\frac{2}{9}e^{-3t}\right)u(t)$$

$$y_{zs2}(t)=x(t)*h(t)=[u(t)-u(t-2)]*h(t)$$
$$=\left(\frac{2}{3}t-\frac{2}{9}+\frac{2}{9}e^{-3t}\right)u(t)*[\delta(t)-\delta(t-2)]$$
$$=\left(\frac{2}{3}t-\frac{2}{9}+\frac{2}{9}e^{-3t}\right)u(t)-\left[\frac{2}{3}(t-2)-\frac{2}{9}+\frac{2}{9}e^{-3(t-2)}\right]u(t-2)$$

3.9 已知系统微分方程为 $y''(t)+5y'(t)+6y(t)=6x(t)$，输入信号 $x(t)=(1+e^{-t})u(t)$，初始条件 $y(0^-)=1$，$y'(0^-)=0$，试求系统的全响应、零输入响应、零状态响应、自然响应、强迫响应、瞬态响应和稳态响应。

【知识点】 本题知识点对应主教材 3.1.2 节～3.1.5 节。

【解题思路】 全响应等于零输入响应加上零状态响应。

首先利用系统微分方程求解系统特征根，进而求解系统零输入响应。

将系统的输入与冲激响应卷积求解零状态响应。

得到系统的全响应后，根据系统特征根找出与之对应的自然响应，剩下的则是强迫响应。

【解题过程】

根据系统微分方程，求得系统特征根为

$$\lambda_1=-2,\quad \lambda_2=-3$$

故系统的零输入响应可写为

$$y_{zi}(t)=A\mathrm{e}^{-2t}+B\mathrm{e}^{-3t},\quad t>0$$

将初始条件代入，可求得系数

$$A=3,\quad B=-2$$

因此，系统的零输入响应

$$y_{zi}(t)=3\mathrm{e}^{-2t}-2\mathrm{e}^{-3t},\quad t>0$$

利用冲激平衡法，可得系统单位冲激响应

$$h(t)=(6\mathrm{e}^{-2t}-6\mathrm{e}^{-3t})u(t)$$

因此，系统的零状态响应

$$y_{zs}(t)=x(t)*h(t)=[(1+\mathrm{e}^{-t})u(t)]*[(6\mathrm{e}^{-2t}-6\mathrm{e}^{-3t})u(t)]$$

利用卷积对

$$[\mathrm{e}^{\lambda_1 t}u(t)]*[\mathrm{e}^{\lambda_2 t}u(t)]=\begin{cases}\dfrac{\mathrm{e}^{\lambda_1 t}-\mathrm{e}^{\lambda_2 t}}{\lambda_1-\lambda_2}u(t), & \lambda_1\neq\lambda_2\\ t\mathrm{e}^{\lambda_1 t}u(t), & \lambda_1=\lambda_2\end{cases}$$

$$\begin{aligned}y_{zs}(t)&=u(t)*[6\mathrm{e}^{-2t}u(t)]+[\mathrm{e}^{-t}u(t)]*[6\mathrm{e}^{-2t}u(t)]-u(t)*[6\mathrm{e}^{-3t}u(t)]-\\&\quad[\mathrm{e}^{-t}u(t)]*[6\mathrm{e}^{-3t}u(t)]\\&=6\frac{1-\mathrm{e}^{-2t}}{0-(-2)}u(t)+6\frac{\mathrm{e}^{-t}-\mathrm{e}^{-2t}}{-1-(-2)}u(t)-6\frac{1-\mathrm{e}^{-3t}}{0-(-3)}u(t)-6\frac{\mathrm{e}^{-t}-\mathrm{e}^{-3t}}{-1-(-3)}u(t)\\&=3(1-\mathrm{e}^{-2t})u(t)+6(\mathrm{e}^{-t}-\mathrm{e}^{-2t})u(t)-2(1-\mathrm{e}^{-3t})u(t)-3(\mathrm{e}^{-t}-\mathrm{e}^{-3t})u(t)\\&=u(t)+3\mathrm{e}^{-t}u(t)-9\mathrm{e}^{-2t}u(t)+5\mathrm{e}^{-3t}u(t)\end{aligned}$$

因此，系统的全响应为

$$y(t)=y_{zi}(t)+y_{zs}(t)=(1+3\mathrm{e}^{-t}-6\mathrm{e}^{-2t}+3\mathrm{e}^{-3t})u(t)$$

自然响应：$y_n(t)=(-6\mathrm{e}^{-2t}+3\mathrm{e}^{-3t})u(t)$

强迫响应：$y_f(t)=(1+3\mathrm{e}^{-t})u(t)$

稳态响应：$u(t)$

瞬态响应：$(3\mathrm{e}^{-t}-6\mathrm{e}^{-2t}+3\mathrm{e}^{-3t})u(t)$

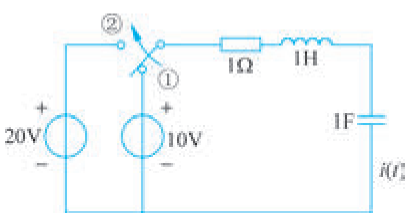


图 3.2.4

3.10 电路如图 3.2.4 所示，$t=0$ 以前开关位于①且系统处于稳态。当 $t=0$ 时，开关从①扳到②，求全响应电流 $i(t)$。

【知识点】 本题知识点对应主教材 3.1.1 节、3.1.2 节和 3.1.4 节。

【解题思路】 针对电路图，利用先修课程电路

基础相关知识，分析系统在 0^- 和 0^+ 时刻的状态，确定初始状态；利用电路知识建立方程，因求解 $t>0$ 时的响应，该段时间无输入，故建立的是一个齐次微分方程，其全响应等价为零输入响应。

【解题过程】

由于 $t=0$ 以前开关位于“1”，已进入稳态，电容应视为开路，电路中无电流，即 $i(0^-)=0$，电感两端的电压也为零，即 $Li'(0^-)=0$，而电容两端电压为 $u_C(0^-)=10$。当开关转至“2”时，由于电感中电流不会突变，所以 $i(0^-)=i(0^+)=0$，电阻两端电压为零。同时，电容两端电压也不会突变，认为 10V，接上 20V 激励信号后必然要在电感两端产生一个 10V 电压的跳变，因此 $Li'(0^+)=10$。

当 $t>0$ 时，电路方程为

$$Ri(t)+L\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}+\frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t}i(t)\mathrm{d}t=20$$

将 R、L、C 代入方程，并微分得

$$\frac{\mathrm{d}^2i(t)}{\mathrm{d}t^2}+\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}+i(t)=0$$

可设

$$i(t)=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t}\left[A\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)+B\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right],\quad t>0$$

因

$$i(0^+)=0,\quad i'(0^+)=10$$

解得

$$A=0,\quad B=\frac{20}{\sqrt{3}}$$

$$i(t)=\frac{20}{\sqrt{3}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)u(t)$$

即

$$i(t)=\frac{20\sqrt{3}}{3}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)u(t)$$

3.11 某线性时不变系统初始状态记作 $y(0)$，当初始状态为 $y(0)=1$、输入为 $x(t)=u(t)$ 时，全响应 $y_1(t)=(6\mathrm{e}^{-2t}-5)u(t)$；若初始状态不变，输入为 $3u(t)$ 时，全响应 $y_2(t)=(8\mathrm{e}^{-2t}-7)u(t)$。求下列情况下的全响应 $y(t)$。

(1) $x(t)=0, y(0)=1$　　(2) $x(t)=2u(t), y(0)=0$

(3) $x(t)=4\delta(t), y(0)=0$　　(4) $x(t)=\delta(t), y(0)=1$

(5) $x(t)=u(t), y(0)=2$

【知识点】 本题知识点对应主教材 3.1.4 节和 2.5.1 节。

【解题思路】 初始状态和输入信号的线性组合对应的输出是原输出的线性组合，输入微分后的零状态响应为原来的零状态响应微分。

【解题过程】

设 $y(0)=1$ 时的零输入响应为 $y_{zi}(t)$，输入为 $u(t)$时的零状态响应为 $y_{zs}(t)$，则由线性系统的性质可知，输入为 $3u(t)$时的零状态响应为 $3y_{zs}(t)$。因此，由题可知

$$(6e^{-2t}-5)u(t)=y_{zi}(t)+y_{zs}(t)$$

$$(8e^{-2t}-7)u(t)=y_{zi}(t)+3y_{zs}(t)$$

将两式相减再除以 2，可求得输入为 $u(t)$时的零状态响应为

$$y_{zs}(t)=(e^{-2t}-1)u(t)$$

系统的零输入响应为

$$y_{zi}(t)=(5e^{-2t}-4)u(t)$$

(1) 此时的全响应：

$$y(t)=y_{zi}(t)=(5e^{-2t}-4)u(t)$$

(2) 此时的全响应：

$$y(t)=2y_{zs}(t)=(2e^{-2t}-2)u(t)$$

(3) 此时的全响应：

$$\begin{aligned} y(t)&=4\frac{d}{dt}y_{zs}(t)\\ &=4[e^{-2t}\delta(t)-2e^{-2t}u(t)-\delta(t)]=-8e^{-2t}u(t) \end{aligned}$$

(4) 此时的全响应：

$$\begin{aligned} y(t)&=y_{zi}(t)+\frac{d}{dt}y_{zs}(t)\\ &=(5e^{-2t}-4)u(t)+(-2e^{-2t})u(t)\\ &=(3e^{-2t}-4)u(t) \end{aligned}$$

(5) 此时的全响应：

$$\begin{aligned} y(t)&=2y_{zi}(t)+y_{zs}(t)\\ &=2(5e^{-2t}-4)u(t)+(e^{-2t}-1)u(t)\\ &=(11e^{-2t}-9)u(t) \end{aligned}$$

3.12 给定系统微分方程为 $y''(t)+3y'(t)+2y(t)=x'(t)+3x(t)$，当输入为 $x(t)=e^{-4t}u(t)$时，系统的全响应为 $\left(\frac{14}{3}e^{-t}-\frac{7}{2}e^{-2t}-\frac{1}{6}e^{-4t}\right)u(t)$。试确定系统的零输入响应和零状态响应，自然响应和强迫响应，瞬态响应和稳态响应。

【知识点】 本题知识点对应主教材 3.1.3 节～3.1.5 节。

【解题思路】 利用冲激平衡法求出单位冲激响应，将其与输入信号卷积得到零状态响应。再由全响应减去零状态响应可得到零输入响应。全响应中与 $h(t)$结构相同的部分为自然响应，与输入结构相同的部分为强迫响应。时间趋于无穷大时存在的那部分响应为稳态响应，否则为瞬态响应。

【解题过程】

利用冲激平衡法，求得

$$h(t)=(-\mathrm{e}^{-2t}+2\mathrm{e}^{-t})u(t)$$

$$y_{zs}(t)=x(t)*h(t)=[\mathrm{e}^{-4t}u(t)]*[(-\mathrm{e}^{-2t}+2\mathrm{e}^{-t})u(t)]$$

$$=\left(\frac{2}{3}\mathrm{e}^{-t}-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2t}-\frac{1}{6}\mathrm{e}^{-4t}\right)u(t)$$

因此

$$y_{zi}(t)=y(t)-y_{zs}(t)=(4\mathrm{e}^{-t}-3\mathrm{e}^{-2t})u(t)$$

由于系统特征根分别为-1、-2，因此自然响应为$\left[\frac{14}{3}\mathrm{e}^{-t}-\frac{7}{2}\mathrm{e}^{-2t}\right]u(t)$，强迫响应为$-\frac{1}{6}\mathrm{e}^{-4t}u(t)$，不存在稳态响应，瞬态响应为$\left[\frac{14}{3}\mathrm{e}^{-t}-\frac{7}{2}\mathrm{e}^{-2t}-\frac{1}{6}\mathrm{e}^{-4t}\right]u(t)$。

3.13 已知二阶微分方程为$\frac{\mathrm{d}^2y(t)}{\mathrm{d}t^2}+3\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}+2y(t)=2x(t)$，初始条件$y(0)=0$，$\left.\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}=3$，采样间隔或步长$T=0.1$，试导出其差分方程。

【知识点】 本题知识点对应主教材3.1.1节和3.2.1节。

【解题思路】 由连续时间信号经过采样得到离散时间信号，再根据微分与差分的关系可得到差分方程。

【解题过程】

$$\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}=\lim_{T\to 0}\frac{y[(n+1)T]-y(nT)}{T}$$

当T足够小时

$$\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}\approx\frac{y[(n+1)T]-y(nT)}{T}\triangleq\frac{y(n+1)-y(n)}{T}$$

同理可得

$$\frac{\mathrm{d}^2y(t)}{\mathrm{d}t^2}\approx\frac{y[(n+2)T]-2y[(n+1)T]+y(nT)}{T^2}$$

$$\triangleq\frac{y(n+2)-2y(n+1)+y(n)}{T^2}$$

对输入$x(t)$也做间隔时间T采样，$t=nT$处取值为$x(nT)$，有

$$\frac{\mathrm{d}^2y(t)}{\mathrm{d}t^2}+3\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}+2y(t)=2x(t)$$

$$\frac{y(n+2)-2y(n+1)+y(n)}{T^2}+3\frac{y(n+1)-y(n)}{T}+2y(n)=2x(n)$$

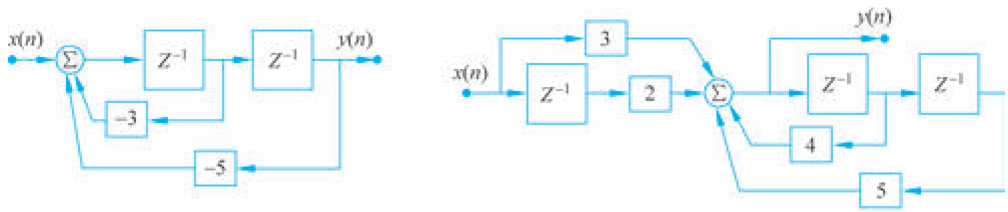
$$y(n+2)-2y(n+1)+y(n)+3T[y(n+1)-y(n)]+2T^2y(n)=2T^2x(n)$$

$T=0.1$，整理得

$$y(n+2)-1.7y(n+1)+0.72y(n)=0.02x(n)$$

$$y(0)=0,\quad y'(0)=\frac{y(1)-y(0)}{0.1}=3,\quad y(1)=0.3$$

3.14 如图3.2.5所示是系统的模拟框图，请列出其差分方程。



(a) (b)

图 3.2.5

【知识点】 本题知识点对应主教材 3.2.1 节和 1.3.1 节。

【解题思路】 观察离散时间系统的框图，由加法器建立差分方程，并整理成标准形式。

【解题过程】

(a)
$$y(n+2)=-3y(n+1)-5y(n)+x(n)$$

整理得

$$y(n+2)+3y(n+1)+5y(n)=x(n)$$

(b)
$$y(n)=4y(n-1)+5y(n-2)+3x(n)+2x(n-1)$$

整理得

$$y(n)-4y(n-1)-5y(n-2)=3x(n)+2x(n-1)$$

3.15 试求下列离散线性时不变系统的零输入响应 $y_{zi}(n)$。

(1) $y(n)+\frac{1}{3}y(n-1)=x(n)$，$y(-1)=-1$

(2) $y(n)+3y(n-1)+2y(n-2)=x(n)$，$y(-1)=0$，$y(-2)=1$

(3) $y(n)+2y(n-1)+y(n-2)=x(n)$，$y(0)=y(-1)=1$

(4) $y(n)-2y(n-1)=x(n)$，$y(1)=1$

(5) $y(n)+y(n-2)=x(n)$，$y(0)=1$，$y(1)=2$

【知识点】 本题知识点对应主教材 3.2.2 节～3.2.4 节和 2.5.2 节。

【解题思路】 首先列出特征方程，求解特征根，得出零输入响应的基本形式。若无重根，$y_{zi}(n)=c_1\lambda_1^n+c_2\lambda_2^n+\cdots+c_k\lambda_k^n$，$n\geqslant0$，否则，若 λ_1 有 q 阶重根，则 $y_{zi}(n)=(c_1+c_2n+\cdots+c_qn^{q-1})\lambda_1^n+c_{q+1}\lambda_{q+1}^n+\cdots+c_k\lambda_k^n$。再利用初始状态求解待定系数。单位样值响应卷积输入信号等于零状态响应，零输入响应加上零状态响应等于全响应。

【解题过程】

(1) 特征方程为

$$D(\lambda)=1+\frac{1}{3}\lambda^{-1}=0$$

特征根为

$$\lambda=-\frac{1}{3}$$

因此，零输入响应可写为

$$y_{zi}(n)=c_1\left(-\frac{1}{3}\right)^n$$

代入初始条件 $y(-1)=1$,有

$$y(-1)=y_{zi}(-1)=c_1\cdot(-3)=1$$

从而得到

$$c_1=-\frac{1}{3}$$

因此

$$y(n)=y_{zi}(n)=-\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{3}\right)^n=\left(-\frac{1}{3}\right)^{n+1},\quad n\geqslant 0$$

(2) 特征方程为

$$D(\lambda)=1+3\lambda^{-1}+2\lambda^{-2}=0$$

特征根为

$$\lambda_1=-1,\quad \lambda_2=-2$$

故可将零输入响应写为

$$y_{zi}(n)=c_1(-1)^n+c_2(-2)^n$$

代入初始条件：

$$y(-1)=y_{zi}(-1)=-c_1-\frac{1}{2}c_2=0$$

$$y(-2)=y_{zi}(-2)=c_1+\frac{1}{4}c_2=1$$

求得

$$c_1=2,\quad c_2=-4$$

因此

$$y(n)=y_{zi}(n)=2(-1)^n-4(-2)^n,\quad n\geqslant 0$$

(3) 特征方程为

$$D(\lambda)=1+2\lambda^{-1}+\lambda^{-2}=0$$

特征根为

$$\lambda_1=\lambda_2=-1$$

因此,零输入响应可写为

$$y_{zi}(n)=(c_1+c_2n)(-1)^n$$

代入初始条件,可得到

$$\left.\begin{aligned}&y(0)=y_{zi}(0)=c_1=1\\&y(-1)=y_{zi}(-1)=(c_1-c_2)(-1)=1\end{aligned}\right\}\Rightarrow\begin{cases}c_1=1\\c_2=2\end{cases}$$

因此

$$y(n)=y_{zi}(n)=(1+2n)(-1)^n,\quad n\geqslant 0$$

(4) 特征方程为

$$D(\lambda)=1-2\lambda^{-1}=0$$

特征根为

$$\lambda=2$$

因此可将零输入响应写为

$$y_{zi}(n)=c_1 2^n$$

代入已知条件，可计算得到

$$y(1)=y_{zi}(1)=2c_1=1, \quad c_1=\frac{1}{2}$$

因此

$$y(n)=y_{zi}(n)=2^{n-1}, \quad n\geqslant 0$$

(5) 特征方程和特征根为

$$D(\lambda)=1+\lambda^{-2}=0, \quad \lambda=\pm \mathrm{j}$$

因此可将零输入响应写为

$$y_{zi}(n)=c_1\mathrm{j}^n+c_2(-\mathrm{j})^n$$

代入已知条件，可计算得到

$$\left.\begin{aligned} y(0)=y_{zi}(0)=c_1+c_2=1 \\ y(1)=y_{zi}(1)=c_1\mathrm{j}-c_2\mathrm{j}=2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned} c_1=\frac{\mathrm{j}+2}{2\mathrm{j}} \\ c_2=\frac{\mathrm{j}-2}{2\mathrm{j}} \end{aligned}\right.$$

因此

$$y(n)=\frac{\mathrm{j}+2}{2\mathrm{j}}\mathrm{j}^n+\frac{\mathrm{j}-2}{2\mathrm{j}}(-\mathrm{j})^n=\frac{\mathrm{j}}{2\mathrm{j}}[\mathrm{j}^n+(-\mathrm{j})^n]+\frac{2}{2\mathrm{j}}[\mathrm{j}^n-(-\mathrm{j})^n]$$

由于 $\mathrm{j}=\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\pi}{2}}, -\mathrm{j}=\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\pi}{2}}$。

因此

$$\begin{aligned} y(n)&=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\pi n}{2}}+\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\pi n}{2}}}{2}+\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\pi n}{2}}-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\pi n}{2}}}{2\mathrm{j}}2 \\ &=\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)+2\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right), \quad n\geqslant 0 \end{aligned}$$

3.16 试求下列离散系统的单位样值响应。

(1) $y(n+2)-5y(n+1)+6y(n)=x(n)$

(2) $y(n)-2y(n-1)-5y(n-2)+6y(n-3)=x(n)$

(3) $H(E)=\dfrac{1}{E^2-E+0.25}$

(4) $H(E)=\dfrac{E^2}{E^2+\dfrac{1}{2}}$

【知识点】 本题知识点对应主教材 3.2.3 节。

【解题思路】 首先由系统差分方程得到系统传输算子 $H(E)$，从 $H(E)$ 中提出一个 E，得到 $H(E)=EH'(E)$；将 $H'(E)$ 进行部分分式展开，再将 E 乘入部分分式展开式，得到 $H(E)$ 的部分分式展开式；求出各展开式对应的单位样值响应，再相加可得到系统

的单位样值响应。

【解题过程】

解：(1) 由方程可得系统的传输算子为

$$H(E)=\frac{1}{E^2-5E+6}=\frac{1}{(E-2)(E-3)}$$

$$=E\cdot\frac{1}{E(E-2)(E-3)}$$

$$=E\left(\frac{1}{6}\frac{1}{E}-\frac{1}{2}\frac{1}{E-2}+\frac{1}{3}\frac{1}{E-3}\right)$$

$$=\frac{1}{6}-\frac{1}{2}\frac{E}{E-2}+\frac{1}{3}\frac{E}{E-3}$$

因此

$$h(n)=\frac{1}{6}\delta(n)-2^{n-1}u(n)+3^{n-1}u(n)$$

化简可得

$$h(n)=3^{n-1}u(n-1)-2^{n-1}u(n-1)$$

(2) 由方程可得系统的传输算子为

$$H(E)=\frac{E^3}{E^3-2E^2-5E+6}$$

$$=E\cdot\frac{E^2}{(E-1)(E+2)(E-3)}$$

$$=E\left(-\frac{1}{6}\frac{1}{E-1}+\frac{4}{15}\frac{1}{E+2}+\frac{9}{10}\frac{1}{E-3}\right)$$

$$=-\frac{1}{6}\frac{E}{E-1}+\frac{4}{15}\frac{E}{E+2}+\frac{9}{10}\frac{E}{E-3}$$

因此

$$h(n)=\left[\frac{9}{10}3^n+\frac{4}{15}(-2)^n-\frac{1}{6}\right]u(n)$$

(3) 传输算子为

$$H(E)=\frac{1}{E^2-E+0.25}$$

$$=E^{-2}\frac{E^2}{(E-0.5)^2}$$

因此

$$h(n)=\delta(n-2)*[(n+1)(0.5)^n u(n)]$$

$$=(n-1)(0.5)^{n-2}u(n-2)$$

$$=4(n-1)(0.5)^n u(n-2)$$

(4) 传输算子为

$$H(E)=\frac{E^2}{E^2+\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{E}{E+\mathrm{j}\frac{\sqrt{2}}{2}}+\frac{1}{2}\cdot\frac{E}{E-\mathrm{j}\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

因此

$$h(n)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}\mathrm{j}}\right)^n u(n)+\frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{j}}{\sqrt{2}}\right)^n u(n)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n\left(\frac{1}{\mathrm{j}^n}+\mathrm{j}^n\right)u(n)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\pi n}{2}}+\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\pi n}{2}}\right)u(n)$$

$$=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)u(n)$$

3.17 如图 3.2.6 所示三个系统,均由子系统组成,各子系统的单位样值响应分别为 $h_1(n)=u(n)$,$h_2(n)=\delta(n-3)$,$h_3(n)=(0.8)^n u(n)$。试证明这三个系统是等效的,并求出系统的单位样值响应。

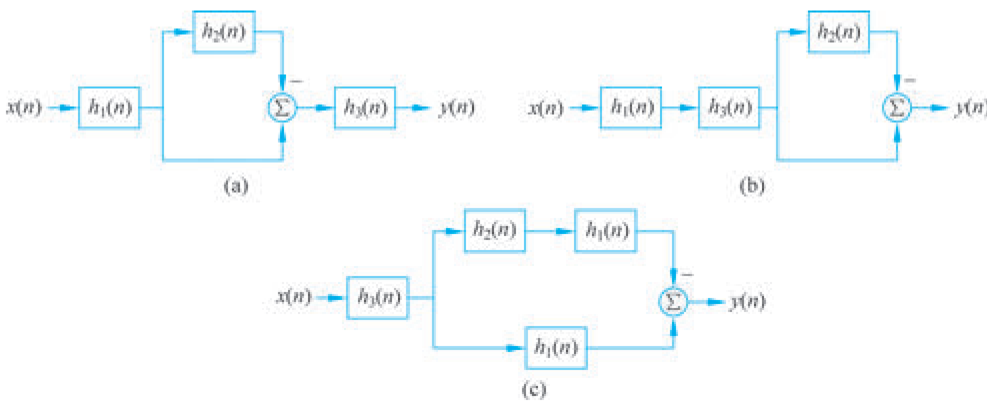


图 3.2.6

【知识点】 本题知识点对应主教材 3.2.4 节和 2.5.2 节。

【解题思路】 根据系统框图求出单位样值响应,若单位样值响应形式相同,则这三个系统是等效的。计算过程中需要用到输出信号等于输入信号卷积单位样值响应、$x(n)*\delta(n-n_0)=x(n-n_0)$和常用卷积对$[\lambda_1^n u(n)]*[\lambda_2^n u(n)]=\begin{cases}\dfrac{\lambda_1^{n+1}-\lambda_2^{n+1}}{\lambda_1-\lambda_2}u(n), & \lambda_1\neq\lambda_2\\ (n+1)\lambda_1^n u(n), & \lambda_1=\lambda_2\end{cases}$。

【解题过程】

(a)

$$y(n)=[x(n)*h_1(n)-x(n)*h_1(n)*h_2(n)]*h_3(n)$$
$$=x(n)*[h_1(n)*h_3(n)-h_1(n)*h_2(n)*h_3(n)]$$

因此

$$h(n)=h_1(n)*h_3(n)-h_1(n)*h_2(n)*h_3(n)$$

(b)

$$y(n)=x(n)*h_1(n)*h_3(n)-x(n)*h_1(n)*h_3(n)*h_2(n)$$
$$=x(n)*[h_1(n)*h_3(n)-h_1(n)*h_2(n)*h_3(n)]$$

因此

$$h(n)=h_1(n)*h_3(n)-h_1(n)*h_2(n)*h_3(n)$$

(c)

$$y(n)=x(n)*h_3(n)*[h_1(n)-h_1(n)*h_2(n)]$$
$$=x(n)*[h_1(n)*h_3(n)-h_1(n)*h_2(n)*h_3(n)]$$

因此

$$h(n)=h_1(n)*h_3(n)-h_1(n)*h_2(n)*h_3(n)$$

故三个系统等效

$$h(n)=u(n)*[(0.8)^n u(n)]-u(n)*[(0.8)^n u(n)]*\delta(n-3)$$
$$=\frac{1-0.8^{n+1}}{1-0.8}u(n)-\left[\frac{1-0.8^{n+1}}{1-0.8}u(n)\right]*\delta(n-3)$$
$$=5(1-0.8^{n+1})u(n)-5(1-0.8^{n-2})u(n-3)$$
$$=5u(n)-4\cdot 0.8^n u(n)-5u(n-3)+4\cdot 0.8^{n-3}u(n-3)$$

3.18 离散时间系统的模拟框图如图 3.2.7 所示，试求：

(1) 系统的差分方程及传输算子；

(2) 单位样值响应 $h(n)$；

(3) 单位阶跃响应 $s(n)$，即输入 $x(n)=u(n)$时系统的零状态响应。

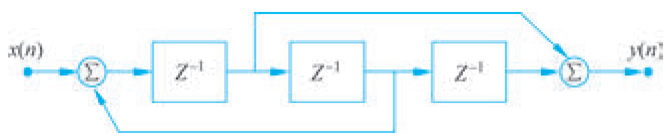


图 3.2.7

【知识点】 本题知识点对应主教材 3.2.1 节、3.2.3 节、3.2.4 节、2.5.2 节和 1.3.1 节。

【解题思路】 根据系统框图可得到系统的差分方程，由系统差分方程得到传输算子，由传输算子计算单位样值响应。输出等于输入卷积单位样值响应，卷积需要用到常用卷积对$[\lambda_1^n u(n)]*[\lambda_2^n u(n)]=\begin{cases}\dfrac{\lambda_1^{n+1}-\lambda_2^{n+1}}{\lambda_1-\lambda_2}u(n), & \lambda_1\neq\lambda_2\\(n+1)\lambda_1^n u(n), & \lambda_1=\lambda_2\end{cases}$和 $x(n)*\delta(n-n_0)=x(n-n_0)$。

【解题过程】

系统框图(见图 3.2.8)增加两个中间节点,可列方程

$$\begin{cases} b(n)=a(n-1) \\ y(n)=a(n)+b(n-1) \\ x(n)+b(n)=a(n+1) \end{cases}$$

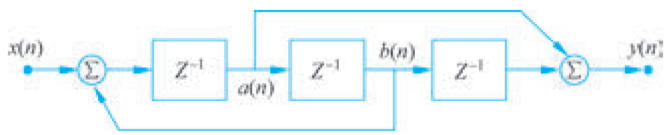


图 3.2.8

整理可得

$$\begin{cases} b(n)=E^{-1}a(n) \\ y(n)=a(n)+E^{-1}b(n) \\ x(n)+b(n)=Ea(n) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y(n)=a(n)+E^{-2}a(n) \\ x(n)=Ea(n)-E^{-1}a(n) \end{cases} \Rightarrow y(n)$$

$$=\frac{1+E^{-2}}{E-E^{-1}}x(n)=\frac{E^2+1}{E^3-E}x(n)$$

(1) 差分方程为

$$y(n+3)-y(n+1)=x(n+2)+x(n)$$

传输算子为

$$H(E)=\frac{E^2+1}{E^3-E}$$

(2) $H(E)=\dfrac{E^2+1}{E^3-E}=\dfrac{E^2+1}{E(E+1)(E-1)}=\dfrac{-1}{E}+\dfrac{1}{E+1}+\dfrac{1}{E-1}$

$$\begin{aligned} h(n)&=H(E)\delta(n) \\ &=-\delta(n-1)+[(-1)n-1+1]u(n-1) \end{aligned}$$

(3) $s(n)=h(n)*u(n)$

$$\begin{aligned} &=[u(n-1)-\delta(n-1)+(-1)^{n-1}u(n-1)]*u(n) \\ &=u(n)*u(n)*\delta(n-1)-u(n-1)+[(-1)^n u(n)]*u(n)*\delta(n-1) \\ &=[(n+1)u(n)]*\delta(n-1)-u(n-1)+\left[\frac{1^{n+1}-(-1)^{n+1}}{1-(-1)}u(n)\right]*\delta(n-1) \\ &=nu(n-1)-u(n-1)+\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{2}(-1)^n\right]u(n-1) \\ &=\left[n-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}(-1)^n\right]u(n-1) \end{aligned}$$

3.19 系统如图 3.2.9 所示,求:(1)系统的传输算子;(2)单位样值响应;(3)当 $x(n)=\left(\dfrac{1}{2}\right)^n u(n)$时的零状态响应。

【知识点】 本题知识点对应主教材 3.2.1 节~3.2.4 节、2.5.2 节、1.3.1 节。

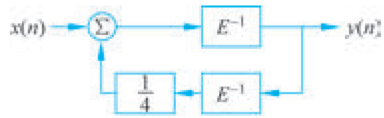


图 3.2.9

【解题思路】 由系统框图可得到系统的差分方程，由差分方程可得到系统的传输算子，由传输算子可计算单位样值响应，将系统输入与单位样值响应卷积可得到系统的零状态响应。

【解题过程】

(1) 由系统框图可得到系统的差分方程为

$$y(n+1)=x(n)+\frac{1}{4}y(n-1)$$

整理得到

$$y(n+2)-\frac{1}{4}y(n)=x(n+1)$$

由此可知，系统的传输算子为

$$H(E)=\frac{E}{E^2-\frac{1}{4}}$$

(2) 将传输算子变换为如下形式：

$$H(E)=\frac{E}{E^2-\frac{1}{4}}=\frac{E}{\left(E-\frac{1}{2}\right)\left(E+\frac{1}{2}\right)}=\frac{E}{E-\frac{1}{2}}-\frac{E}{E+\frac{1}{2}}$$

由此可得

$$\begin{aligned}h(n)&=H(E)\delta(n)\\&=\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)-\left(-\frac{1}{2}\right)^n u(n)\end{aligned}$$

(3) 将系统输入与 $h(n)$ 卷积，可得到系统零状态响应

$$\begin{aligned}y(n)&=x(n)*h(n)\\&=\left[\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)\right]*\left[\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)-\left(-\frac{1}{2}\right)^n u(n)\right]\\&=(n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)-\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right]u(n)\\&=n\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)+\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}u(n)+\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}u(n)\end{aligned}$$

3.20 设离散时间系统的差分方程为 $y(n+2)-y(n+1)-2y(n)=x(n+2)$。系统的初始条件 $y(1)=5$、$y(0)=4$，输入 $x(n)=u(n)$，试求系统的零输入响应、零状态响应和全响应。

【知识点】 本题知识点对应主教材 3.2.2 节～3.2.5 节。

【解题思路】 本题考查离散时间线性时不变系统响应模式分析。系统全响应为零状态响应与零输入响应之和,其中零输入响应利用初始状态和系统特征根求解,零状态响应利用传输算子求解。

【解题过程】

先求零输入响应。由于输入信号在 0 和 1 时刻均不为 0,因此初始条件 $y(0)$、$y(1)$ 并不是零输入响应的初始状态,因此将 $n=-1$、$n=-2$ 代入差分方程求出零输入响应初始状态。

$$\begin{cases} y(1)-y(0)-2y(-1)=x(1)=1 \\ y(0)-y(-1)-2y(-2)=x(0)=1 \end{cases},\quad 从而 \begin{cases} y(-1)=y_{zi}(-1)=0 \\ y(-2)=y_{zi}(-2)=1.5 \end{cases}$$

由方程可得传输算子为

$$H(E)=\frac{E^2}{E^2-E-2}$$

特征根为

$$\lambda_1=2,\quad \lambda_2=-1$$

所以

$$y_{zi}(n)=C_1 2^n+C_2(-1)^n,\quad n\geqslant 0$$

令 $n=-2$,$n=-1$,代入初始状态,得

$$\begin{cases} y_{zi}(-2)=\dfrac{C_1}{4}+C_2=1.5 \\ y_{zi}(-1)=\dfrac{C_1}{2}-C_2=0 \end{cases}$$

联立上述方程,求解得

$$C_1=2,\quad C_2=1$$

因此零输入响应为

$$y_{zi}(n)=2^{n+1}+(-1)^n,\quad n\geqslant 0$$

接下来求解零状态响应。

由于
$$u(n)=\frac{E}{E-1}\delta(n)$$

故零状态响应为

$$\begin{aligned} y_{zs}(n)&=\frac{E^2}{E^2-E-2}\frac{E}{E-1}\delta(n) \\ &=-\frac{1}{2}\frac{E}{E-1}\delta(n)+\frac{4}{3}\frac{E}{E-2}\delta(n)+\frac{1}{6}\frac{E}{E+1}\delta(n) \\ &=\left[-\frac{1}{2}+\frac{4}{3}2^n+\frac{1}{6}(-1)^n\right]u(n) \end{aligned}$$

从而系统的全响应为

$$y(n)=y_{zi}(n)+y_{zs}(n)=\frac{10}{3}2^n u(n)+\frac{7}{6}(-1)^n u(n)-\frac{1}{2}u(n)$$

3.21 某系统的差分方程为 $y(n+2)-5y(n+1)+6y(n)=x(n)$。已知 $x(n)=u(n)$，初始条件 $y_{zi}(0)=2, y_{zi}(1)=1$，求系统响应 $y(n)$。

【知识点】 本题知识点对应主教材 3.2.1 节、3.2.3 节、3.2.4 节、2.5.2 节、1.3.1 节。

【解题思路】 系统全响应为零输入响应与零状态响应之和。

【解题过程】

系统的特征根为

$$\lambda_1=2,\quad \lambda_2=3$$

系统的零输入响应可写为

$$y_{zi}(n)=c_1\cdot 2^n+c_2\cdot 3^n,\quad n\geqslant 0$$

利用初始条件可求出

$$y_{zi}(n)=5\cdot 2^n-3\cdot 3^n,\quad n\geqslant 0$$

由于

$$H(E)=\frac{1}{E^2-5E+6}=\frac{1}{E-3}-\frac{1}{E-2}$$

$$h(n)=3^{n-1}u(n-1)-2^{n-1}u(n-1)$$

故零状态响应为

$$\begin{aligned}y_{zs}(n)&=x(n)*h(n)=u(n)*[3^{n-1}u(n-1)-2^{n-1}u(n-1)]\\&=u(n)*[3^nu(n)-2^nu(n)]*\delta(n-1)\\&=\left[\frac{3^{n+1}-1}{2}u(n)-(2^{n+1}-1)u(n)\right]*\delta(n-1)\\&=\frac{3^n-1}{2}u(n-1)-(2^n-1)u(n-1)\\&=0.5u(n)-2^nu(n)+0.5\cdot 3^nu(n)\end{aligned}$$

由此可得，系统的全响应为

$$\begin{aligned}y(n)&=y_{zi}(n)+y_{zs}(n)\\&=0.5u(n)+4\cdot 2^nu(n)-2.5\cdot 3^nu(n)\end{aligned}$$

3.22 有一工厂，原有资金 200 万元，由于生产所得利润，工厂每年资金能够翻一番，次年开始国家每年初再向工厂投资 100 万元，求第 n 年工厂的资金 $y(n)$。

【知识点】 本题知识点对应主教材 3.2.1 节、3.2.3 节、3.2.4 节、2.5.2 节、1.3.1 节。

【解题思路】 根据题意建立差分方程，由差分方程求解系统的全响应。

【解题过程】

根据题意可知，工厂的资金 $y(n)$ 与国家投资输入 $x(n)$ 之间的关系为

$$y(n+1)=2y(n)+x(n),\quad x(n)=100u(n),\quad y(0)=200$$

由于零输入响应为

$$y_{zi}(n)=c_1\cdot 2^n,\quad n\geqslant 0$$

代入初始条件

$$y_{zi}(0)=y(0)=200$$

因此，零输入响应为

$$y_{zi}(n)=200\cdot 2^n,\quad n\geqslant 0$$

$$H(E)=\frac{1}{E-2},\quad h(n)=2^{n-1}u(n-1)$$

零状态响应为

$$\begin{aligned}y_{zs}(n)&=x(n)*h(n)=100u(n)*[2^{n-1}u(n-1)]\\&=100\left[\frac{2^{n+1}-1}{2-1}u(n)\right]*\delta(n-1)\\&=100\cdot 2^n u(n-1)-100u(n-1)\end{aligned}$$

因此，系统的全响应为

$$\begin{aligned}y(n)&=y_{zi}(n)+y_{zs}(n)=200\cdot 2^n u(n)+100\cdot 2^n u(n-1)-100u(n-1)\\&=\begin{cases}300\cdot 2^n-100, & n\geqslant 1\\ 200, & n=0\end{cases}=300\cdot 2^n u(n)-100\cdot u(n)\end{aligned}$$

3.23 如果在第 n 个月初向银行存款 $x(n)$元，月息为 a，月利息不取，试用差分方程写出第 n 个月初的本利和 $y(n)$。设 $x(n)=1000$ 元，$a=0.03\%$，$y(0)=2000$ 元，求 $y(n)$；若 $n=12$，求 $y(12)$。

【知识点】 本题知识点对应主教材 3.2.1 节～3.2.4 节、2.5.2 节。

【解题思路】 第 n 个月的本利和 $y(n)$等于第 $n-1$ 个月的本利和 $y(n-1)$乘以一个月的利息加上第 n 个月初的存款 $x(n)$，由此可建立差分方程。求解差分方程可得到相应的解。

【解题过程】

由题意可建立如下差分方程：

$$y(n)=(1+a)y(n-1)+x(n)$$

可求出该差分方程所描述系统的零输入响应和零状态响应分别为

$$y_{zi}(n)=2000\cdot 1.0003^n u(n)$$

$$\begin{aligned}y_{zs}(n)&=x(n)*h(n)=1000u(n)*[1.0003^n u(n)]\\&=1000\,\frac{1.0003^{n+1}-1}{0.0003}u(n)\end{aligned}$$

因此，系统的全响应为

$$y(n)=1000\,\frac{1.0003^{n+1}-1}{0.0003}u(n)+2000\cdot 1003^n u(n)$$

$$y(12)=14026.4$$

3.24 已知系统的差分方程为 $y(n)-0.7y(n-1)+0.1y(n-2)=2x(n)-x(n-2)$，若输入 $x(n)=u(n)$，初始状态 $y(-1)=-26$，$y(-2)=-202$，求该系统全响应，并指出其中的自然响应和强迫响应，瞬态响应和稳态响应。

【知识点】 本题知识点对应主教材 3.2.2 节～3.2.5 节。

【解题思路】 本题考查离散时间线性时不变系统响应求解和响应模式分析。系统

全响应为零状态响应与零输入响应之和，其中零输入响应利用初始状态和系统特征根求解，零状态响应利用传输算子求解。自然响应由系统特征决定，与输入信号无关，强迫响应由输入信号决定；稳态响应是特征根的模不小于 1 的那部分响应，瞬态响应是特征根的模小于 1 的那部分响应。

【解题过程】

先求零输入响应。

由方程得传输算子为

$$H(E)=\frac{2E^2-1}{E^2-0.7E+0.1}$$

特征根分别为

$$\lambda_1=\frac{1}{2},\quad \lambda_2=\frac{1}{5}$$

零输入响应为

$$y_{zi}(n)=C_1\left(\frac{1}{2}\right)^n+C_2\left(\frac{1}{5}\right)^n,\quad n\geq 0$$

代入 $n=-2, n=-1$ 初始状态，可得

$$y(-2)=y_{zi}(-2)=4C_1+25C_2=-202$$

$$y(-1)=y_{zi}(-1)=2C_1+5C_2=-26$$

联立方程得

$$C_1=12,\quad C_2=-10$$

因此

$$y_{zi}(n)=12\left(\frac{1}{2}\right)^n-10\left(\frac{1}{5}\right)^n,\quad n\geqslant 0$$

接下来求解零状态响应。

由于
$$u(n)=\frac{E}{E-1}\delta(n)$$

故零状态响应为

$$\begin{aligned}y_{zs}(n)&=\frac{2E^2-1}{E^2-0.7E+0.1}\,\frac{E}{E-1}\delta(n)\\&=\frac{5}{2}\,\frac{E}{E-1}\delta(n)+\frac{10}{3}\,\frac{E}{E-\frac{1}{2}}\delta(n)-\frac{23}{6}\,\frac{E}{E-\frac{1}{5}}\delta(n)\\&=\frac{5}{2}u(n)+\frac{10}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)-\frac{23}{6}\left(\frac{1}{5}\right)^n u(n)\end{aligned}$$

从而系统的全响应为

$$y(n)=y_{zi}(n)+y_{zs}(n)=\frac{5}{2}u(n)+\frac{46}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)-\frac{83}{6}\left(\frac{1}{5}\right)^n u(n)$$

自然响应：$\frac{46}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)-\frac{83}{6}\left(\frac{1}{5}\right)^n u(n)$

强迫响应：$\frac{5}{2}u(n)$

稳态响应：$\frac{5}{2}u(n)$

瞬态响应：$\frac{46}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)-\frac{83}{6}\left(\frac{1}{5}\right)^n u(n)$

3.2.2 提高题

T3.1 针对下述线性时不变系统的输入、输出关系，分别计算系统的单位冲激响应。

(1) $y(t)=\int_{-\infty}^{t} e^{-(t-1-\tau)}x(\tau-2)d\tau$ (2) $y(t)=\int_{t-3}^{\infty} e^{t-\tau}x(\tau-1)dt$

【知识点】 本题知识点对应主教材3.1.3节，系统的单位冲激响应定义为系统的初始状态全部为零，仅由单位冲激信号输入系统产生的输出响应。

【解题思路】 由线性时不变系统的输入输出关系，令输入为单位冲激信号，则输出为系统的单位冲激响应。

【解题过程】

(1) 令 $x(t)=\delta(t)$，则有

$$\begin{aligned}h(t)&=\int_{-\infty}^{t} e^{-(t-1-\tau)}\delta(\tau-2)d\tau\\&=e^{-(t-3)}\int_{-\infty}^{t}\delta(\tau-2)d\tau\\&=e^{-(t-3)}\int_{-\infty}^{t-2}\delta(\tau)d\tau\\&=e^{-(t-3)}u(t-2)\end{aligned}$$

即系统的单位冲激响应为 $e^{-(t-3)}u(t-2)$。

(2) 令 $x(t)=\delta(t)$，则有

$$\begin{aligned}h(t)&=\int_{t-3}^{\infty} e^{t-\tau}\delta(\tau-1)d\tau\\&=e^{t-1}\int_{t-3}^{\infty}\delta(\tau-1)d\tau\\&=e^{t-1}\int_{t-4}^{\infty}\delta(\tau)d\tau\\&=e^{t-1}u(4-t)\end{aligned}$$

即系统的单位冲激响应为 $e^{t-1}u(4-t)$。

T3.2 某连续时间线性时不变系统，当输入为 $G_1(t-0.5)$时，输出为 $\Lambda_2(t-2)$。试画出当输入为 $G_2(t-1)$时的输出 $y(t)$。

【知识点】 本题知识点对应主教材1.3.2节，线性时不变系统具有齐次性和可加性。

【解题思路】 利用线性时不变系统的性质求解。

【解题过程】

系统输入为 $x(t)=G_1(t-0.5)$时，输出为 $y_1(t)=\Lambda_2(t-2)$。

输入信号 $G_2(t-1)$可表示为

$$x(t)=G_1(t-0.5)+G_1(t-1.5)=x(t)+x(t-1)$$

因此，此时系统的输出为

$$\begin{aligned}y(t)&=y_1(t)+y_1(t-1)\\&=\Lambda_2(t-2)+\Lambda_2(t-3)\end{aligned}$$

波形如图 3.2.10 所示。

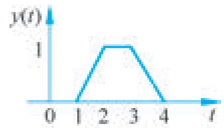


图 3.2.10

T3.3 已知某连续时间线性时不变系统的输入信号为 $x(t)$，系统的阶跃响应为 $s(t)$，试证明系统的零状态响应可以表示为

$$y_{zs}(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x'(\tau)s(t-\tau)\mathrm{d}\tau$$

上式称为杜阿美尔(Duhamel)积分。

【知识点】 本题知识点对应主教材 2.5.1 节、3.1.4 节。

【解题思路】 本题考查利用奇异信号卷积特性、系统零状态响应。方法一，利用 $\delta'(t)$是微分器，$u(t)$是积分器，卷积积分的微积分特性。方法二，充分利用系统阶跃响应，通过卷积和分部积分法，推导出零状态响应的杜阿美尔积分。

【解题过程】

方法一：

$$\begin{aligned}y_{zs}(t)&=x(t)*h(t)\\&=x(t)*\delta'(t)*u(t)*h(t)\\&=x'(t)*s(t)\\&=\int_{-\infty}^{\infty}x'(\tau)s(t-\tau)\mathrm{d}\tau\end{aligned}$$

方法二：

输入函数的积分表达式：$x(t)=\int_{-\infty}^{t}x'(\tau)\mathrm{d}\tau$

零状态响应为

$$\begin{aligned}y_{zs}(t)&=\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)h(t-\tau)\mathrm{d}\tau\\&=\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\tau}x'(a)\mathrm{d}a\cdot h(t-\tau)\right]\mathrm{d}\tau\\&=\int_{-\infty}^{\infty}\left[x'(a)\int_{a}^{\infty}h(t-\tau)\mathrm{d}\tau\right]\mathrm{d}a\\&=\int_{-\infty}^{\infty}\left[x'(a)\int_{-\infty}^{t-a}h(\tau)\mathrm{d}\tau\right]\mathrm{d}a\end{aligned}$$

系统阶跃响应为

$$s(t)=u(t)*h(t)=\int_{-\infty}^{t}h(\tau)\mathrm{d}\tau$$

因此

$$\int_{-\infty}^{t-a} h(\tau)\mathrm{d}\tau = s(t-a)$$

所以 $y_{zs}(t)=\int_{-\infty}^{\infty} x'(a)s(t-a)\mathrm{d}a=\int_{-\infty}^{\infty} x'(\tau)s(t-\tau)\mathrm{d}\tau$

T3.4 已知某连续时间线性时不变系统的单位阶跃信号 $u(t)$产生的阶跃响应 $s(t)=(2\mathrm{e}^{-2t}-1)u(t)$，试求系统在输入信号为 $x(t)=\mathrm{e}^{-3t}u(t)$激励下产生的零状态响应 $y_{zs}(t)$。

【知识点】 本题知识点对应主教材 2.5.1 节和 3.1.4 节。

【解题思路】 本题考查奇异信号卷积特性，以及利用卷积积分计算零状态响应。阶跃响应 $s(t)$的微分是冲激响应 $h(t)$；零状态响应等于输入信号与冲激响应的卷积。

【解题过程】

方法一：利用阶跃响应与冲激响应的微积分关系求解

阶跃响应与冲激响应满足 $h(t)=s'(t)$

因此 $h(t)=[-4\mathrm{e}^{-2t}u(t)+2\delta(t)]-\delta(t)=\delta(t)-4\mathrm{e}^{-2t}u(t)$

$$\begin{aligned}
y_{zs}(t)&=[\mathrm{e}^{-3t}u(t)]*[\delta(t)-4\mathrm{e}^{-2t}u(t)]\\
&=\mathrm{e}^{-3t}u(t)-4\frac{\mathrm{e}^{-2t}-\mathrm{e}^{-3t}}{-2-(-3)}u(t)\\
&=(5\mathrm{e}^{-3t}-4\mathrm{e}^{-2t})u(t)
\end{aligned}$$

方法二：利用 T3.3 推导的杜阿美尔积分求解，将输入信号代入 T3.3 推导结果中，得

$$\begin{aligned}
y_{zs}(t)&=[\delta(t)-3\mathrm{e}^{-3t}u(t)]*[2\mathrm{e}^{-2t}u(t)-u(t)]\\
&=2\mathrm{e}^{-2t}u(t)-u(t)-6\frac{\mathrm{e}^{-2t}-\mathrm{e}^{-3t}}{-2-(-3)}u(t)+3\frac{1-\mathrm{e}^{-3t}}{0-(-3)}u(t)\\
&=(5\mathrm{e}^{-3t}-4\mathrm{e}^{-2t})u(t)
\end{aligned}$$

T3.5 电路如图 3.2.11 所示，$t=0$ 以前开关位于①且系统处于稳态。当 $t=0$ 时，开关从①扳到②，求电压 $v(t)$。

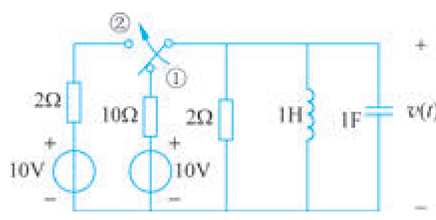


图 3.2.11

【知识点】 本题知识点对应主教材 3.1.1 节、3.1.2 节、3.1.4 节。

【解题思路】 针对电路图，利用先修课程电路分析知识，当开关位于①时，分析电路确定初始状态；当开关位于②时，利用电路知识建立方程，进行求解。

【解题过程】

分析电路图可以看到，当开关从①转至②时，电路中有的元件参数发生了变化，因此不能在 $-\infty<t<\infty$ 时间域内用一个统一的微分方程描述该电路。对于这类问题，只能

写出 $t>0$ 的微分方程，并从物理概念上判断出初始条件。

在 $t>0$ 时，电路方程为

$$\frac{1}{2}v(t)+\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t}+\int_{-\infty}^{t}v(\tau)\mathrm{d}\tau=\frac{10-v(t)}{2}$$

两边微分，得

$$v''(t)+v'(t)+v(t)=0$$

方程的特征根为

$$\lambda_1=-\frac{1}{2}+\mathrm{j}\frac{\sqrt{3}}{2},\quad \lambda_1=-\frac{1}{2}-\mathrm{j}\frac{\sqrt{3}}{2}$$

系统的响应为

$$v(t)=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t}\left(k_1\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t+k_2\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right),\quad t>0$$

在 $t=0$ 以前，电路已进入稳态，此时，电感相当于短路，电感两端电压 $v(0^-)=0$ 为零，电感中有 1A 电流通过，而由于稳态时电容的开路作用，使电容中电流为零，即

$$C\left.\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}=v'(0^-)=0$$

当开关转至②时，电路接入一个 5A 电流源，而电容两端电压不能突变，所以

$$v(0^+)=v(0^-)=0$$

又由于电感中电流也不能突变，仍为 1A，而电阻两端电压为零，电阻中无电流流过，因此，接入 5A 电流源时，必然有 4A 电流流进电容，故

$$v'(0^+)=4+v'(0^-)=4$$

依据初始条件

$$v(0^+)=0,\quad v'(0^+)=4$$

求得系统响应电压

$$v(t)=\frac{8}{\sqrt{3}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t,\quad t>0$$

T3.6 已知某因果连续时间线性时不变系统的微分方程为

$$y''(t)+7y'(t)+10y(t)=2x'(t)+3x(t)$$

已知 $y(0^-)=1,y'(0^-)=0$，输入信号为 $x(t)=10\cos(t)u(t)$。

(1) 试求系统的单位冲激响应 $h(t)$；

(2) 求系统的零输入响应 $y_{zi}(t)$、零状态响应 $y_{zs}(t)$和全响应 $y(t)$；

(3) 指出系统响应中的瞬态响应和稳态响应，以及自然响应和强迫响应。

【知识点】 本题知识点对应主教材 3.1.2 节～3.1.5 节。

【解题思路】 本题考查连续时间线性时不变系统响应模式分析和响应模式的分析。全响应等于零输入响应加零状态响应。首先利用系统微分方程求解系统特征根，进而求解系统零输入响应。利用微分算子求解冲激响应，将系统的输入与冲激响应卷积求解零状态响应。自然响应由系统特征决定，与输入信号无关，强迫响应由输入信号决定；稳态

响应是特征根的实部不小于 0 的那部分响应，瞬态响应是特征根的实部小于 0 的那部分响应。

【解题过程】

(1) 单位冲激响应。

根据微分方程可写出系统的传输算子为

$$H(p)=\frac{2p+3}{p^2+7p+10}=-\frac{1}{3}\frac{1}{p+2}+\frac{7}{3}\frac{1}{p+5}$$

可得出单位冲激响应 $h(t)$ 为

$$h(t)=\left(-\frac{1}{3}e^{-2t}+\frac{7}{3}e^{-5t}\right)u(t)$$

(2) 全响应。

先求零输入响应 $y_{zi}(t)$：

$$y_{zi}(t)=c_1e^{-2t}+c_2e^{-5t},\quad t\geqslant 0$$

代入初始状态，得

$$\begin{cases}y(0^-)=C_1+C_2=1\\ y'(0^-)=-2C_1-5C_2=0\end{cases}$$

联立方程组解得 $C_1=\frac{5}{3}$，$C_2=-\frac{2}{3}$

所以零输入响应为 $y_{zi}(t)=\frac{5}{3}e^{-2t}-\frac{2}{3}e^{-5t}$，$t\geqslant 0$

再求零状态响应 $y_{zs}(t)$：

$$\begin{aligned}y_{zs}(t)&=x(t)*h(t)=[10\cos(t)u(t)]*\left[-\frac{1}{3}e^{-2t}u(t)+\frac{7}{3}e^{-5t}u(t)\right]\\&=5[e^{jt}u(t)+e^{-jt}u(t)]*\left[-\frac{1}{3}e^{-2t}u(t)+\frac{7}{3}e^{-5t}u(t)\right]\\&=-\frac{5}{3}[e^{jt}u(t)]*[e^{-2t}u(t)]-\frac{5}{3}[e^{-jt}u(t)]*[e^{-2t}u(t)]+\\&\quad\frac{35}{3}[e^{jt}u(t)]*[e^{-5t}u(t)]+\frac{35}{3}[e^{-jt}u(t)]*[e^{-5t}u(t)]\\&=-\frac{5}{3}\frac{e^{jt}-e^{-2t}}{j+2}u(t)-\frac{5}{3}\frac{e^{-jt}-e^{-2t}}{-j+2}u(t)+\frac{35}{3}\frac{e^{jt}-e^{-5t}}{j+5}u(t)+\frac{35}{3}\frac{e^{-jt}-e^{-5t}}{-j+5}u(t)\\&=-\frac{5}{3}\frac{2\sin(t)+4\cos(t)-4e^{-2t}}{5}u(t)+\frac{35}{3}\frac{2\sin(t)+10\cos(t)-10e^{-5t}}{26}u(t)\\&=\left(\frac{41}{13}\cos(t)+\frac{3}{13}\sin(t)+\frac{4}{3}e^{-2t}-\frac{175}{39}e^{-5t}\right)u(t)\end{aligned}$$

综上可知，全响应为

$$y(t)=y_{zi}(t)+y_{zs}(t)=\left(\frac{41}{13}\cos(t)+\frac{3}{13}\sin(t)+3e^{-2t}-\frac{67}{13}e^{-5t}\right)u(t)$$

（3）响应模式判断。

自然响应：$\left(3e^{-2t}-\frac{67}{13}e^{-5t}\right)u(t)$

强迫响应：$\left(\frac{41}{13}\cos(t)+\frac{3}{13}\sin(t)\right)u(t)$

稳态响应：$\left(\frac{41}{13}\cos(t)+\frac{3}{13}\sin(t)\right)u(t)$

瞬态响应：$\left(3e^{-2t}-\frac{67}{13}e^{-5t}\right)u(t)$

T3.7 某系统框图如图 3.2.12(a)所示，计算图 3.2.12(b)所示信号通过该系统后的输出。

图 3.2.12

【知识点】 本题知识点对应主教材 3.2.1 节，根据离散时间线性时不变系统框图建立系统差分方程。

【解题思路】 由系统框图建立差分方程，根据差分方程和输入，得到系统输出。

【解题过程】

由系统框图可知系统的差分方程为

$$y(n)=x(n)+x(n-1)+x(n-2)$$

又由于系统输入为

$$x(n)=\delta(n)+\delta(n-1)+\delta(n-2)$$

因此，系统输出为

$$\begin{aligned}y(n)&=x(n)+x(n-1)+x(n-2)\\&=\delta(n)+2\delta(n-1)+3\delta(n-2)+2\delta(n-3)+\delta(n-4)\\&=\{1,2,3,2,1\}_0\end{aligned}$$

T3.8 某离散时间线性时不变系统的输入为 $x(n)=u(n)-u(n-3)$，输出为 $y(n)=\{3,5,6,3,1\}_1$，求该系统的单位样值响应 $h(t)$。

【知识点】 本题知识点对应主教材 2.5.2 节和 3.2.4 节，离散时间线性时不变系统的零状态响应为输入与单位样值响应的卷积，该卷积和可用竖式法进行计算。

【解题思路】 利用解卷积的思路求解系统的单位样值响应。

【解题过程】

设系统的单位样值响应为 $h(n)=\{a,b,c\}_1$，则有 $x(n)*h(n)=y(n)$。又因为

$$x(n)=u(n)-u(n-3)=\{1,1,1\}_0$$

且 $y(n)$的起点为 1，长度为 5，则 $h(n)$的起点为 1，长度为 3，即 $h(n)=\{a,b,c\}_1$。

根据竖式法可得

$$y(n)=\{3,5,6,3,1\}_1=\{a,a+b,a+b+c,b+c,c\}_1$$

因此

$$a=3,b=2,c=1$$

即单位样值响应为

$$h(n)=\{3,2,1\}_1$$

T3.9 离散时间线性时不变系统的阶跃响应 $s(n)=a^n u(n)$，$0<a<1$，试求该系统的单位样值响应 $h(n)$。

【知识点】 本题知识点对应主教材 2.3.2 节和 3.2.3 节。

【解题思路】 本题考查离散时间线性时不变系统单位样值响应与阶跃响应的关系，以及离散时间信号的差分与求和。单位样值响应是 $\delta(n)$ 经过系统的响应，而离散阶跃信号 $u(n)$ 可以表示为 $u(n)=\delta(n)+\delta(n-1)+\delta(n-2)+\cdots$，所以单位阶跃响应 $s(n)$ 可以表示为 $s(n)=h(n)+h(n-1)+h(n-2)+\cdots$，所以存在 $h(n)=s(n)-s(n-1)$。

【解题过程】

根据单位样值响应与阶跃响应的关系：

$$h(n)=s(n)-s(n-1)$$

代入 $s(n)=a^n u(n)$，得到

$$h(n)=s(n)-s(n-1)=a^n u(n)-a^{n-1}u(n-1)$$

T3.10 根据下列差分方程写出系统的传输算子 $H(E)$，并画出系统的模拟框图。

(1) $y(n+2)=ay(n+1)+by(n)+cx(n+1)+dx(n)$

(2) $y(n+3)=2y(n+1)+x(n+1)-3x(n)$

(3) $y(n)=y(n-1)-2y(n-2)+5x(n)$

【知识点】 本题知识点对应主教材 3.2.1 节。

【解题思路】 根据系统差分方程得到系统传输算子，并可画出系统框图。

【解题过程】

(1) 传输算子

$$H(E)=\frac{cE+d}{E^2-aE-b}$$

系统框图如图 3.2.13 所示。

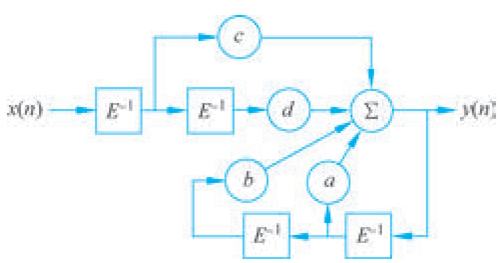


图 3.2.13

（2）传输算子

$$H(E)=\frac{E-3}{E^3-2E}$$

系统框图如图 3.2.14 所示。

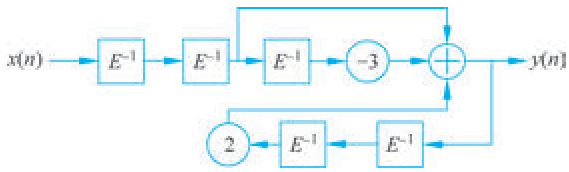


图 3.2.14

（3）传输算子

$$H(E)=\frac{5E^2}{E^2-E+2}$$

系统框图如图 3.2.15 所示。

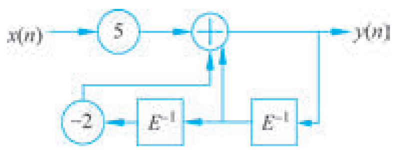


图 3.2.15

T3.11 图 3.2.16 所示反馈系统框图中，G 所对应的微分方程为

$$y'(t)+y(t)=x'(t)-x(t)$$

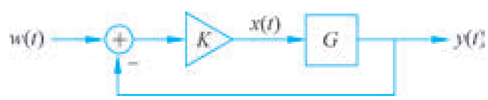


图 3.2.16

（1）当 $K=10$ 时，确定该系统 $w(t)\to y(t)$ 的微分方程；

（2）若系统为稳定系统，确定 K 的取值范围。

【知识点】 本题知识点对应主教材 3.1 节，连续时间线性时不变系统的时域分析。

【解题思路】 由系统框图建立微分方程，并根据微分方程求解单位冲激响应。若系统稳定，则单位冲激响应是绝对可积的，据此可确定 K 的取值范围。

【解题过程】

（1）由系统框图，可得到微分方程为

$$y'(t)+\frac{1-K}{1+K}y(t)=\frac{K}{K+1}w'(t)-\frac{K}{K+1}w(t)$$

当 $K=10$ 时，系统 $w(t)\to y(t)$ 的微分方程为

$$y'(t)-\frac{9}{11}y(t)=\frac{10}{11}w'(t)-\frac{10}{11}w(t)$$

（2）由系统的微分方程可知，系统的特征根为

$$\lambda=\frac{K-1}{K+1}$$

即系统的单位冲激响应具有如下形式：

$$h(t)=c\cdot \mathrm{e}^{\frac{K-1}{K+1}\cdot t},\quad t\geqslant 0$$

若系统为稳定系统，则单位冲激响应是绝对可积的，因此有

$$\frac{K-1}{K+1}<0$$

即

$$K-1<0 \text{ 且 } K+1>0$$

从而得到 K 的取值范围为 $-1<K<1$。

T3.12 判断下列线性时不变系统的因果、稳定性：

(1) $h(t)=\mathrm{e}^{2t}u(t)$ (2) $h(t)=\mathrm{e}^{-2t}u(t)$ (3) $h(t)=u(t)$

(4) $h(t)=u(t+1)-u(t-1)$ (5) $h(n)=2^n u(n)$ (6) $h(n)=2^{-n}u(n)$

(7) $h(n)=\cos\frac{\pi n}{2}u(n)$ (8) $h(n)=u(n+1)-u(n-2)$

【知识点】 本题知识点对应主教材 3.1.3 节和 3.2.3 节，根据线性时不变系统的单位冲激响应(单位样值响应)来判断系统的因果性和稳定性。

线性时不变系统的因果性判断：一个线性时不变系统的因果性等效于它的单位冲激响应(单位样值响应)是一个因果信号，即 $h(t)=0,t<0(h(n)=0,n<0)$。

线性时不变系统的稳定性判断：若系统的单位冲激响应(单位样值响应)是绝对可积的(绝对可和的)，则该系统就是稳定的，否则，该系统是不稳定的。

【解题思路】 根据因果系统和稳定系统的定义来判断系统的因果和稳定性。

【解题过程】

(1) 由于该系统的单位冲激响应 $h(t)=\mathrm{e}^{2t}u(t)$ 是因果信号，因此该系统是因果系统；单位冲激响应 $h(t)=\mathrm{e}^{2t}u(t)$ 并不是绝对可积的，因此该系统是不稳定的。综上，该系统是因果、不稳定的系统。

(2) 由于该系统的单位冲激响应 $h(t)=\mathrm{e}^{-2t}u(t)$ 是因果信号，因此该系统是因果系统；单位冲激响应 $h(t)=\mathrm{e}^{-2t}u(t)$ 是绝对可积的，因此该系统是稳定的。综上，该系统是因果、稳定的系统。

(3) 由于该系统的单位冲激响应 $h(t)=u(t)$ 是因果信号，因此该系统是因果系统；单位冲激响应 $h(t)=u(t)$ 并不是绝对可积的，因此该系统是不稳定的。综上，该系统是因果、不稳定的系统。

(4) 由于该系统的单位冲激响应 $h(t)=u(t+1)-u(t-1)$ 不是因果信号，因此该系统是非因果系统；单位冲激响应 $h(t)=u(t+1)-u(t-1)$ 是绝对可积的，因此该系统是稳定的。综上，该系统是非因果、稳定的系统。

(5) 由于该系统的单位冲激响应 $h(n)=2^n u(n)$ 是因果信号，因此该系统是因果系统；单位冲激响应 $h(n)=2^n u(n)$ 不是绝对可和的，因此该系统是不稳定的。综上，该系

统是因果、不稳定的系统。

（6）由于该系统的单位冲激响应 $h(n)=2^{-n}u(n)$是因果信号，因此该系统是因果系统；单位冲激响应 $h(n)=2^{-n}u(n)$是绝对可和的，因此该系统是稳定的。综上，该系统是因果、稳定的系统。

（7）由于该系统的单位冲激响应 $h(n)=\cos\frac{\pi n}{2}u(n)$是因果信号，因此该系统是因果系统；单位冲激响应 $h(n)=\cos\frac{\pi n}{2}u(n)$不满足绝对可和，因此该系统不是稳定的。综上，该系统是因果、不稳定的系统。

（8）由于该系统的单位冲激响应 $h(n)=u(n+1)-u(n-2)$不是因果信号，因此该系统不是因果系统；单位冲激响应 $h(n)=u(n+1)-u(n-2)$满足绝对可和条件，因此该系统是稳定的。综上，该系统是非因果、稳定的系统。