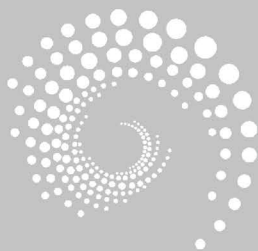


有理B样条曲线和曲面

CHAPTER 5



贝齐尔和 B 样条曲线和曲面已经能够表达几何外形复杂的自由型曲线和曲面,并且具有稳定高效的配套算法。但是,贝齐尔和 B 样条无法精确表达圆锥(二次)曲线和曲面,如圆弧、椭圆、双曲线、柱面、球面、圆锥面等。因此,在 CAD 软件中就不得不采用两种形状描述方式来分别表达自由型曲线和曲面和二次曲线和曲面,这无疑会增加系统的复杂性。研究人员和开发人员更倾向于采用统一的数学描述方法来表示自由型和二次曲线和曲面,有理贝齐尔和有理 B 样条方法应运而生。

20 世纪 70 年代,Versprille 在其导师 Steven A. Coons (CAGD 的奠基人,提出了 Coons 曲面片)的指导下,将权因子引入 B 样条,使其能够通过有理函数精确表示圆锥曲线等复杂形状。Versprille 在他的博士论文中系统地提出了非均匀有理 B 样条方法(Non-Uniform Rational B-Splines, NURBS)的概念和数学定义,其统一了自由型曲线和二次型曲线的表示方法,包括圆锥曲线、贝齐尔曲线、B 样条曲线和有理曲线,成为一个通用的数学工具,并彻底改变了工业设计和计算机图形学的实践方式。Versprille 的研究为 NURBS 成为工业标准奠定了基础。在整个 20 世纪 70 年代,诞生了一批在后来享誉世界的 CAD/CAM 软件,包括 CATIA 和 UG 等软件。发展至今,NURBS 已经成为包括

IGES、STEP 等国际标准中描述曲线和曲面的标准方法,在曲线和曲面造型领域占据着主流位置。

从数学形式上看,贝齐尔方法可以看作 B 样条方法的特例,而有理贝齐尔可以看作 NURBS 的特例。贝齐尔和 B 样条的很多算法都可以推广到有理形式中。本章不再将有理贝齐尔和 NURBS 分割开来,而是以统一的方式来介绍 NURBS 方法。为了加以区别,本章提及的贝齐尔与 B 样条均指非有理贝齐尔与非有理 B 样条。并将有理贝齐尔视作 NURBS 的子集。5.3 节提及了基于有理二次和三次贝齐尔来表示圆弧曲线,是为了指明曲线的具体形式。

5.1 NURBS 曲线的定义和计算

5.1.1 NURBS 曲线的三种定义与性质

1. NURBS 曲线的三种定义

1) 参数有理分式表示

在经典数学中,参数有理函数可以用来表示二次曲线,形如

$$x(u) = \frac{X(u)}{W(u)}, \quad y(u) = \frac{Y(u)}{W(u)} \quad (5.1)$$

其中, $X(u)$ 、 $Y(u)$ 、 $W(u)$ 均为多项式。图 5.1 展示了 1/4 圆弧与椭圆弧以及它们的参数有理函数。

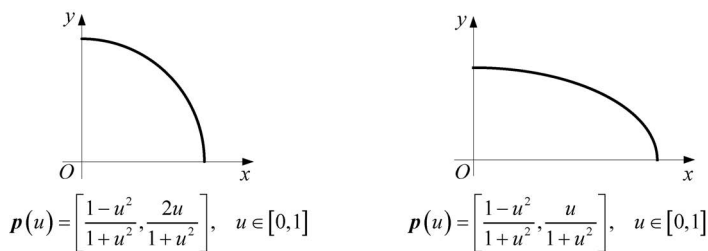


图 5.1 1/4 圆弧和椭圆弧的参数有理形式

与式(5.1)形式类似,一条 p 次 NURBS 曲线可以表示为参数有理分式的形式,如下

$$p(u) = \frac{\sum_{i=0}^n b_i w_i N_{i,p}(u)}{\sum_{j=0}^n w_j N_{j,p}(u)}, \quad u \in [a, b] \quad (5.2)$$

其中, $\mathbf{b}_i$ 与 $N_{i,p}(u)$ 表示控制顶点与定义在节点矢量 U 上的 p 次 B 样条基函数; w_i 称为权因子, 与控制顶点 $\mathbf{b}_i$ 形成一一对应关系, 一般建议权因子 $w_i > 0$, 后文会介绍权因子对曲线几何形状的影响。NURBS 曲线的节点矢量与 B 样条保持一致, 有如下形式

$$U = \{u_0, \dots, u_p, u_{p+1}, \dots, u_n, u_{n+1}, \dots, u_{n+p+1}\} \quad (5.3)$$

在大部分应用中, 只考虑节点矢量首末端节点满足 $p+1$ 重的开曲线(非周期曲线), 使得曲线插值于首末控制顶点, 这样选择易于造型控制。若端节点取值 a 和 b , 则有 $u_0 = u_1 = \dots = u_p = a, u_{n+1} = u_{n+2} = \dots = u_{n+p+1} = b$ 。当端节点满足 $p+1$ 重且 U 中没有内节点时, p 次 NURBS 曲线即表示 p 次有理贝齐尔曲线。

2) 有理基函数表示

将式(5.2)的分母与分子中的权重以及 B 样条基函数结合起来, 可以将 NURBS 曲线方程等价改写为

$$p(u) = \sum_{i=0}^n \mathbf{b}_i R_{i,p}(u), \quad u \in [a, b] \quad (5.4)$$

其中

$$R_{i,p}(u) = \frac{w_i N_{i,p}(u)}{\sum_{j=0}^n w_j N_{j,p}(u)} \quad (5.5)$$

称为 p 次 NURBS 曲线的有理基函数, 是定义在 $[a, b]$ 上的分段有理函数。图 5.2(a) 展示了二次 NURBS 曲线(实线)和二次 B 样条曲线(点线)。对于 NURBS 曲线, 控制顶点 $\mathbf{b}_1$ 的权因子为 2, 其他顶点权重均为 1。图 5.2(b) 为对应的有理基函数和非有理基函数曲线。可以发现有理 NURBS 基函数与非有理 B 样条基函数相比, 在形状上发生了改变。

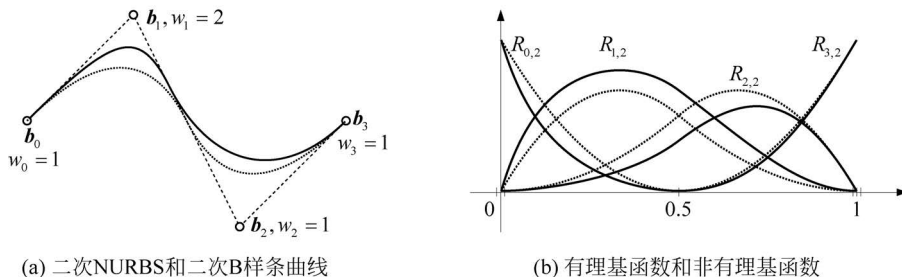


图 5.2 二次 NURBS 和二次 B 样条曲线, $U = \{0, 0, 0, 0.5, 1, 1, 1\}$

观察式(5.5), 有理基函数 $R_{i,p}(u)$ 仅与权因子 w_i 和 B 样条基函数 $N_{i,p}(u)$ 相关。因此, $R_{i,p}(u)$ 的相关性质可以从相应的 B 样条基函数 $N_{i,p}(u)$ 中得到, 令所有权因子均大于零, 这些性质主要包括以下几个。

(1) 非负性。对所有的 i, p 和 $u \in [a, b]$, 有 $R_{i,p}(u) \geq 0$ 。

(2) 规范性。当 $u \in [a, b]$, 所有有理基函数的和为 1, 即 $\sum_{i=0}^n R_{i,p}(u) = 1$ 。有理 B 样条基函数 $R_{i,p}(u)$ 在分子中表现为对应非有理基函数 $N_{i,p}(u)$ 与权重 w_i 的乘积, 其分母是对分子 $w_i N_{i,p}(u)$ 的规范化。

(3) 局部支撑性。有理基函数 $R_{i,p}(u)$ 的支撑区间与非有理基函数 $N_{i,p}(u)$ 保持一致, 仅在支撑区间 $[u_i, u_{i+p+1})$ 上有非零值。对于每个非零节点区间 $[u_i, u_{i+1})$, 其上至多有 $p+1$ 个有理基函数 $R_{i-p,p}, \dots, R_{i,p}$ 非零。

(4) 端点插值性。端节点满足 $p+1$ 重时, 首尾有理基函数满足 $R_{0,p}(a) = 1, R_{n,p}(b) = 1$ 。

(5) 可微性。若有理基函数 $R_{i,p}(u)$ 分母不为零, 则其在非零节点区间内部是任意次连续可微, 在重复度为 r 的内节点处是 $p-r$ 次连续可微。

(6) 权因子影响。若 $w_i = 0$, 则 $R_{i,p}(u) = 0$; 若 $w_i \rightarrow \infty$, 则 $R_{i,p}(u) \rightarrow 1, R_{j(j \neq i),p}(u) \rightarrow 0$; 若所有的权因子相等且不为 0, 则 $R_{i,p}(u) = N_{i,p}(u)$ 。

3) 齐次坐标表示

式(5.1)中的有理分式形式与齐次坐标表达较为类似, 都具有相同的分母, 这也构成了 NURBS 曲线的第三种表达形式, 即齐次坐标表示形式。其核心思想是将 $\dim$ 维的多项式曲线表示为 $\dim+1$ 维的有理曲线。对于三维空间的任意坐标点 $\mathbf{b} = (x, y, z)$, 其在四维空间的齐次坐标表示为 $\mathbf{b}^w = (xw, yw, zw, w) = (X, Y, Z, W)$ 。同理, 二维平面上的任意坐标点 $\mathbf{b} = (x, y)$, 在三维空间的齐次坐标表示为 $\mathbf{b}^w = (xw, yw, w) = (X, Y, W)$ 。这里点 $\mathbf{b}$ 其实就是齐次空间点 $\mathbf{b}^w$ 在超平面 $W=1$ 上的透视投影点, 即从齐次空间原点 O 出发将点 $\mathbf{b}^w$ 投影到超平面 $W=1$ 上所得的映射点为 $\mathbf{b}$ 。令该投影变换记为 H , 则有

$$H\{\mathbf{b}^w\} = H\{(X, Y, Z, W)\} = \begin{cases} \left(\frac{X}{W}, \frac{Y}{W}, \frac{Z}{W}\right) = (x, y, z), & W \neq 0 \\ \text{方向}(X, Y, Z), & W = 0 \end{cases} \quad (5.6)$$

当 $W=0$ 时, 表示由原点出发经过点 (X, Y, Z) 的无穷远点; 当 $W=1$ 时, 齐次点 (X, Y, Z, W) 与空间点 (X, Y, Z) 重合。对于同一空间点 (x, y, z) , 其对应的齐次点 (xw, yw, zw, w) 有无数个, 给定不同的权因子, 即有不同的齐次点。

给定一组三维空间下控制顶点 $\mathbf{b}_i = (x_i, y_i, z_i)$, $(i=0, 1, \dots, n)$ 和节点矢量 $U = \{u_0, u_1, \dots, u_{n+p+1}\}$, 构造齐次空间中的控制顶点 $\mathbf{b}_i^w = (x_i w_i, y_i w_i, z_i w_i, w_i)$, 继而可以定义一条齐次空间中的非有理 B 样条曲线如下

$$\mathbf{p}^w(u) = \sum_{i=0}^n \mathbf{b}_i^w N_{i,p}(u) \quad (5.7)$$

对式(5.7)应用式(5.6)定义的投影变换 H , 可以得到对应齐次曲线 $\mathbf{p}^w(u)$ 的一条三维空间中的 NURBS 曲线 $\mathbf{p}(u)$ 。具体地, 式(5.7)中定义的非有理 B 样条曲线上点的各个分量可以表示为

$$\mathbf{p}^w(u) = [X, Y, Z, W]$$

$$= \left[\sum_{i=0}^n x_i w_i N_{i,p}(u), \sum_{i=0}^n y_i w_i N_{i,p}(u), \sum_{i=0}^n z_i w_i N_{i,p}(u), \sum_{i=0}^n w_i N_{i,p}(u) \right] \quad (5.8)$$

应用投影变换 H , 可得

$$\begin{aligned} H\{\mathbf{p}^w(u)\} &= \mathbf{p}(u) = \left[\frac{X}{W}, \frac{Y}{W}, \frac{Z}{W} \right] \\ &= \left[\frac{\sum_{i=0}^n x_i w_i N_{i,p}(u)}{\sum_{i=0}^n w_i N_{i,p}(u)}, \frac{\sum_{i=0}^n y_i w_i N_{i,p}(u)}{\sum_{i=0}^n w_i N_{i,p}(u)}, \frac{\sum_{i=0}^n z_i w_i N_{i,p}(u)}{\sum_{i=0}^n w_i N_{i,p}(u)} \right] = \sum_{i=0}^n \mathbf{b}_i R_{i,p}(u) \end{aligned} \quad (5.9)$$

因此, 式(5.7)所定义的齐次空间中的非有理 B 样条曲线可以用来表示三维空间中的 NURBS 曲线, 此即 NURBS 曲线的第三种定义形式。

图 5.3 展示了定义在三维齐次空间中的二次非有理 B 样条曲线, 及其在超平面 $W=1$ 上投影所得到的二维 NURBS 曲线。其中图 5.3(b) 中齐次空间的两个不同位置的控制顶点 $\mathbf{b}_1^w$ 与 $\mathbf{b}_2^w$ 在超平面 $W=1$ 上投影至同一位置, 即 $\mathbf{b}_1 = \mathbf{b}_2$, 形成尖点特征。

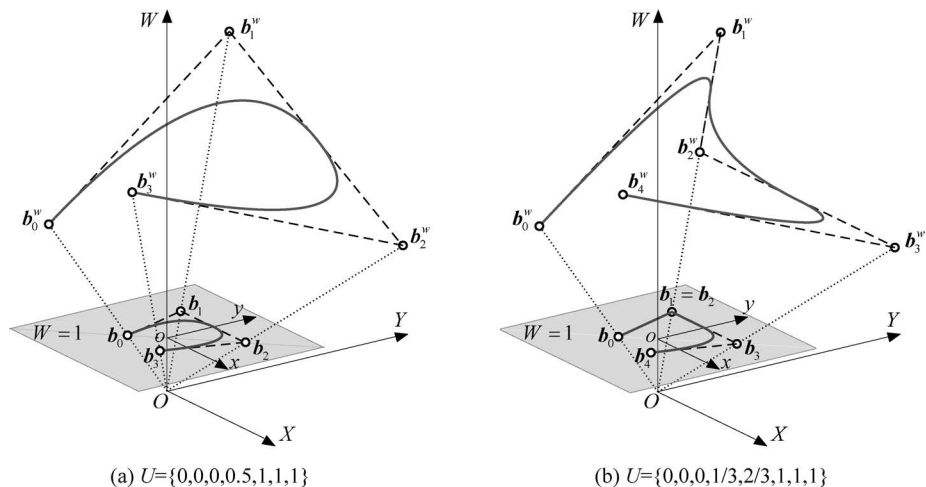


图 5.3 齐次空间中定义的非有理 B 样条曲线及其在 $W=1$ 平面上投影得到的 NURBS 曲线

NURBS 曲线的上述三种定义都表示同一条曲线, 但其含义却相差甚远。第一种有理表示形式是对非有理 B 样条方法的推广, 分式形式表示有理的由来。当所有控制顶点的权因子相等时, NURBS 曲线等价于非有理 B 样条曲线。因此, 可以认为权因子导致了有理的发生。第二种有理基函数表示形式中, 将权因子与非有理 B 样条基函数结合形成有理基函数, 得到了与非有理 B 样条曲线的一致表达。通过有理基函数的性质可以推断 NURBS 曲线的相关性质。对于不需要了解 NURBS 曲线构造机理的下游应用, 该形式提供了一种很友好的途径, 曲线方程简洁。第三种齐次坐标表示形式给出了 NURBS 曲线生成的几何原

理,是由高一维齐次空间中定义的非有理B样条曲线在超平面 $W=1$ 上的投影。因此,NURBS曲线的几何运算可以通过齐次空间中的非有理B样条曲线执行相应的几何运算来实现,继而可以借助B样条的高效配套算法。

2. NURBS 曲线的相关性质

由NURBS曲线的有理基函数定义和齐次坐标定义两种形式,可以得到NURBS曲线的一系列相关性质与几何特点。给定一条由控制顶点 $\mathbf{b}_i (i=0,1,\dots,n)$ 和节点矢量 U 定义的 p 次NURBS曲线,节点矢量 U 的定义如式(5.3)所示,令所有权因子均大于零,其相关性质和特点如下。

(1) 局部修改性质。节点矢量 U 中非零节点区间 $[u_i, u_{i+1})$ 所对应的曲线段至多与 $p+1$ 个控制顶点 $\mathbf{b}_{i-p}, \mathbf{b}_{i-p+1}, \dots, \mathbf{b}_i$ 及其权因子 $w_{i-p}, w_{i-p+1}, \dots, w_i$ 有关,与其他控制顶点与权因子无关。移动第 j 个控制顶点 $\mathbf{b}_j$ 或其权因子 w_j ,仅影响定义在支撑区间 $[u_j, u_{j+p+1})$ 上的曲线段。

如图5.4所示,给定一条三次NURBS曲线,节点矢量 $U=\{0,0,0,0,1/3,2/3,1,1,1,1\}$ 。移动控制顶点 $\mathbf{b}_1$ 至 $\bar{\mathbf{b}}_1$,仅影响定义在 $[u_1, u_5)=[0,2/3)$ 上的曲线段,即前两段曲线,如图5.4(a)所示。同理,改变权因子 w_1 的值,也仅影响前两段曲线,如图5.4(b)所示。随着权因子 w_1 的增大,曲线越加靠近控制顶点 $\mathbf{b}_1$,表明控制顶点 $\mathbf{b}_1$ 对曲线的影响越大。

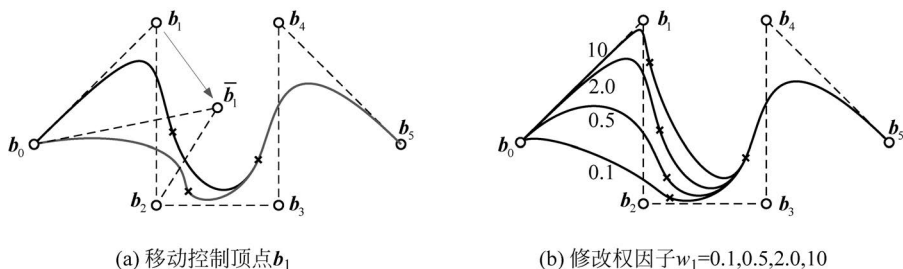


图 5.4 移动控制顶点和权因子对三次NURBS曲线的影响, $U=\{0,0,0,0,1/3,2/3,1,1,1,1\}$

(2) 强凸包性。非零节点区间 $[u_i, u_{i+1})$ 对应的曲线段始终包含于由 $p+1$ 个控制顶点 $\mathbf{b}_{i-p}, \mathbf{b}_{i-p+1}, \dots, \mathbf{b}_i$ 所构成的凸包内。如图5.5所示,三次NURBS曲线中 $[0,1/3)$ 对应的曲线段包含于由 $\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ 所构成的凸包内; $[1/3,2/3)$ 对应曲线段包含于由 $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3, \mathbf{b}_4$ 所构成的凸包内。

(3) 变差减少性。对于三维空间NURBS曲线,任何一个平面与曲线的交点个数不多于该平面和曲线控制多边形的交点个数;对于平面NURBS曲线,任何一条直线与曲线的交点个数不多于该直线和曲线控制多边形的交点个数。

(4) 仿射不变性和透视投影不变性。NURBS曲线经过仿射变换或者透视投影变换后仍然是一条NURBS曲线。变换后的曲线可以通过对原曲线控制顶点进行仿射或透视投影

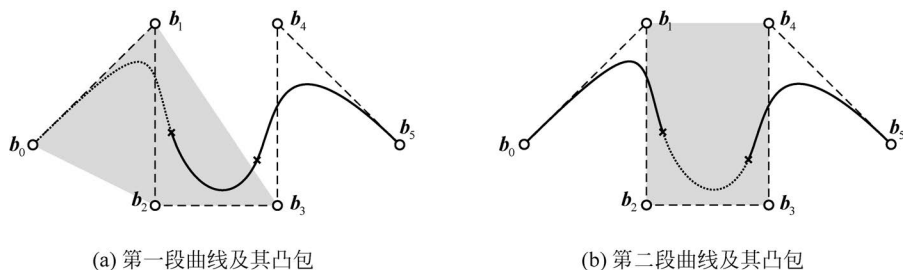


图 5.5 三次 NURBS 曲线的凸包性, $U = \{0, 0, 0, 0, 1/3, 2/3, 1, 1, 1, 1\}$

变换后得到的新控制顶点来定义。这在计算机图形学中至关重要,可视化设备需要将三维几何变换成二维图像输出。

(5) 可微性。NURBS 曲线 $p(u)$ 在节点区间内部为无限次连续可微,在 r 重内节点处为 $p-r$ 次连续可微。

5.1.2 NURBS 曲线点和导矢计算

点和导矢计算是 CAGD 数据处理中的基础算法,在离散、求交和渲染等场景中大量应用。首先来看 NURBS 曲线上点的计算。根据 NURBS 曲线的不同定义方式,可以设计不同的 NURBS 曲线点的计算方法。对于第一种有理分式表示形式和第二种有理基函数表示形式,一般根据定义式来计算。而对于第三种齐次坐标表示形式,则可以借助非有理 B 样条方法中的德布尔递推算法来计算齐次点,再投影到低一维空间。因此,第三种齐次坐标定义形式为 NURBS 曲线点的计算提供了一种高效稳定的算法。

下面以一个具体范例来展示 NURBS 曲线上点的计算。

【例 5.1】 给定一条二维二次 NURBS 曲线,令控制顶点 $b_0 = [0, 0]$, $b_1 = [1, 1]$, $b_2 = [2, -1]$, $b_3 = [3, 1]$, $b_4 = [4, 0]$, 权因子 $\{w_i\} = \{1, 5, 1, 1, 1\}$, 节点矢量 $U = \{0, 0, 0, 1, 2, 3, 3, 3\}$, 计算参数 $\bar{u} = 1$ 的曲线上点。

解: 首先搜索参数 $\bar{u} = 1$ 所在节点区间,有 $\bar{u} = 1 \in [1, 2) = [u_3, u_4)$, 节点区间对应下标 $i = 3$ 。由 B 样条的局部支撑性,非零节点区间 $[u_i, u_{i+1})$ 上至多有 $p+1$ 个非零基函数,它们分别为 $N_{i-p,p}(u), \dots, N_{i,p}(u)$ 。因此,定义在节点矢量 U 上的 B 样条基函数 $N_{1,2}(u), N_{2,2}(u), N_{3,2}(u)$ 可能非零,代入参数 $\bar{u} = 1$,可得

$$N_{1,2}(\bar{u}) = \frac{1}{2}, \quad N_{2,2}(\bar{u}) = \frac{1}{2}, \quad N_{3,2}(\bar{u}) = 0$$

节点矢量 U 上的 B 样条基函数曲线如图 5.6(a) 所示。

根据式 (5.2) 给出的 NURBS 曲线的第一种有理分式定义,曲线上点 $p(\bar{u} = 1)$ 可计算如下

$$p(\bar{u}) = \frac{b_1 w_1 N_{1,2}(\bar{u}) + b_2 w_2 N_{2,2}(\bar{u}) + b_3 w_3 N_{3,2}(\bar{u})}{w_1 N_{1,2}(\bar{u}) + w_2 N_{2,2}(\bar{u}) + w_3 N_{3,2}(\bar{u})} = \frac{\frac{5}{2}b_1 + \frac{1}{2}b_2}{\frac{5}{2} + \frac{1}{2}} = \left[\frac{7}{6}, \frac{2}{3} \right]$$

根据式(5.4)和式(5.5)给出的 NURBS 曲线的第二种有理基函数定义, 非零有理基函数 $R_{1,2}(u)$ 、 $R_{2,2}(u)$ 、 $R_{3,2}(u)$ 计算如下

$$R_{1,2}(\bar{u}) = \frac{w_1 N_{1,2}(\bar{u})}{w_1 N_{1,2}(\bar{u}) + w_2 N_{2,2}(\bar{u}) + w_3 N_{3,2}(\bar{u})} = \frac{5}{6}, \quad R_{2,2}(\bar{u}) = \frac{1}{6}, \quad R_{3,2}(\bar{u}) = 0$$

节点矢量 U 上的所有有理基函数 $R_{i,2}(u)$ 的曲线如图 5.6(b) 所示。相应地, 可得曲线上点

$$p(\bar{u}) = b_1 R_{1,2}(\bar{u}) + b_2 R_{2,2}(\bar{u}) + b_3 R_{3,2}(\bar{u}) = \frac{5}{6}b_1 + \frac{1}{6}b_2 = \left[\frac{7}{6}, \frac{2}{3} \right]$$

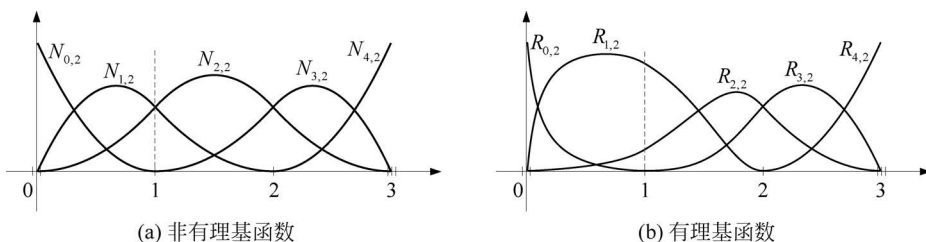


图 5.6 二次 NURBS 曲线定义中的非有理基函数与有理基函数曲线, $U = \{0, 0, 0, 1, 2, 3, 3, 3\}$

针对 NURBS 曲线的第三种齐次坐标定义方式, 通过德布尔算法计算曲线上点。首先将二维控制顶点变换为三维齐次控制顶点

$$b_1^w = [5, 5, 5], \quad b_2^w = [2, -1, 1], \quad b_3^w = [3, 1, 1]$$

根据德布尔递推公式, 有

$$\alpha_1^1 = \frac{1}{2} \rightarrow b_1^{1,w} = (1 - \alpha_1^1) b_1^{0,w} + \alpha_1^1 b_2^{0,w} = \frac{1}{2} b_1^w + \frac{1}{2} b_2^w = \left[\frac{7}{2}, 2, 3 \right]$$

$$\alpha_2^1 = 0 \rightarrow b_2^{1,w} = (1 - \alpha_2^1) b_2^{0,w} + \alpha_2^1 b_3^{0,w} = b_2^w = [2, -1, 1]$$

$$\alpha_1^2 = 0 \rightarrow b_1^{2,w} = (1 - \alpha_1^2) b_1^{1,w} + \alpha_1^2 b_2^{1,w} = b_1^{1,w} = \left[\frac{7}{2}, 2, 3 \right]$$

因此, 曲线上点 $p(\bar{u}=1)$ 在三维齐次空间中的坐标为 $[7/2, 2, 3]$, 该点的权因子 $w=3$, 将其投影回二维空间, 可得曲线上点为

$$p(\bar{u}=1) = \frac{p^w(\bar{u}=1)}{w} = \frac{[7/2, 2, 3]}{3} = \left[\frac{7}{6}, \frac{2}{3}, 1 \right]$$

由计算结果可知, 根据 NURBS 三种定义方式所计算的曲线上点完全相同。图 5.7 展示了本例中的二次 NURBS 曲线。

NURBS 曲线的导矢计算相对复杂, 不能像计算曲线点一样在齐次空间计算导矢再投影回低一维空间得到, 但是可以借助非有理 B 样条的导矢计算公式和算法。下面给出导矢

计算的递推公式。

首先由 NURBS 曲线的有理分式定义,令分母和分子分别记为 $\mathbf{A}(u)$ 与 $W(u)$,有

$$\mathbf{p}(u) = \frac{\sum_{i=0}^n \mathbf{b}_i \omega_i N_{i,p}(u)}{\sum_{j=0}^n \omega_j N_{j,p}(u)} = \frac{\mathbf{A}(u)}{W(u)} \quad (5.10)$$

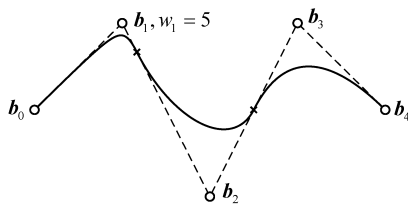


图 5.7 例 5.1 的二次 NURBS 曲线

其中, $\mathbf{A}(u)$ 为矢函数; $W(u)$ 为标量函数。对曲线 $\mathbf{p}(u)$ 计算一阶导矢,可得

$$\mathbf{p}'(u) = \left[\frac{\mathbf{A}(u)}{W(u)} \right]' = \frac{\mathbf{A}'(u)W(u) - \mathbf{A}(u)W'(u)}{W^2(u)} = \frac{\mathbf{A}'(u) - \mathbf{p}(u)W'(u)}{W(u)} \quad (5.11)$$

令 $\mathbf{p}^w(u)$ 表示三维空间下的 NURBS 曲线在四维齐次空间中的非有理 B 样条曲线,其控制顶点记为 $\mathbf{b}_i^w = (x_i \omega_i, y_i \omega_i, z_i \omega_i, \omega_i)$ 。可以发现矢函数 $\mathbf{A}(u)$ 表示一条以三维控制顶点 $\bar{\mathbf{b}}_i = (x_i \omega_i, y_i \omega_i, z_i \omega_i)$ 定义的三维非有理 B 样条曲线,这里 $\bar{\mathbf{b}}_i$ 为齐次控制顶点 $\mathbf{b}_i^w$ 的前三维坐标形成的点。因此,矢函数 $\mathbf{A}(u)$ 的导矢计算可以直接采用非有理 B 样条曲线的导矢计算公式,参考 4.1.5 节的内容。同理,标量函数 $W(u)$ 可以看作以一维控制顶点 $\bar{\mathbf{b}}_i = (\omega_i)$ 定义的一维非有理 B 样条,也可以采用 B 样条的导矢计算公式。事实上, $\mathbf{A}(u)$ 与 $W(u)$ 的控制顶点坐标组合成了齐次曲线 $\mathbf{p}^w(u)$ 的控制顶点坐标。

继续对导矢函数 $\mathbf{p}'(u)$ 求一阶导,可以得到曲线的二阶导矢公式

$$\mathbf{p}''(u) = \frac{\mathbf{A}''(u) - 2W'(u)\mathbf{p}'(u) - W''(u)\mathbf{p}(u)}{W(u)} \quad (5.12)$$

进一步计算曲线 $\mathbf{p}(u)$ 的 k 阶导矢,可得

$$\mathbf{p}^{(k)}(u) = \frac{\mathbf{A}^{(k)}(u) - \sum_{j=1}^k C_k^j W^{(j)}(u) \mathbf{p}^{(k-j)}(u)}{W(u)} \quad (5.13)$$

其中, C_k^j 表示组合数。借助 B 样条方法中的 $1 \sim k$ 阶导矢计算公式,可以得到 NURBS 曲线的 k 阶导矢。

基于上述导矢公式考查 NURBS 曲线在端节点处的导矢。令端节点 $u_0 = u_1 = \cdots = u_p = a, u_{n+1} = u_{n+2} = \cdots = u_{n+p+1} = b$, 由 B 样条导矢计算公式(4.25)可得 $\mathbf{A}(u)$ 与 $W(u)$ 的导矢如下

$$\begin{aligned} \mathbf{A}'(a) &= \frac{p}{u_{p+1} - a} (\omega_1 \mathbf{b}_1 - \omega_0 \mathbf{b}_0), & W'(a) &= \frac{p}{u_{p+1} - a} (\omega_1 - \omega_0) \\ \mathbf{A}'(b) &= \frac{p}{b - u_n} (\omega_n \mathbf{b}_n - \omega_{n-1} \mathbf{b}_{n-1}), & W'(b) &= \frac{p}{b - u_n} (\omega_n - \omega_{n-1}) \end{aligned} \quad (5.14)$$

代入式(5.11)可得 NURBS 曲线端点处导矢为

$$\begin{aligned} p'(a) &= \frac{A'(a) - p(a)W'(a)}{W(a)} = \frac{p\omega_1(b_1 - b_0)}{(u_{p+1} - a)\omega_0} \\ p'(b) &= \frac{A'(b) - p(b)W'(b)}{W(b)} = \frac{p\omega_{n-1}(b_n - b_{n-1})}{(b - u_n)\omega_n} \end{aligned} \quad (5.15)$$

利用式(5.15)计算例5.1所给二次NURBS曲线的端点导矢 $p'(0)$ 与 $p'(3)$, 可得

$$p'(0) = 10(b_1 - b_0) = [10, 10], \quad p'(3) = 2(b_n - b_{n-1}) = [2, -2]$$

可见, NURBS 曲线的端点导矢与控制多边形的首末边平行, 但是导矢模长与构成首末边的控制顶点的权因子相关。

在 5.1.1 节的 B 样条方法中介绍了 B 样条的一系列配套算法, 包括节点插入、节点细化、节点去除、升阶、降阶等, 这些算法稳定高效, 为 B 样条的广泛应用奠定了基础。由于 NURBS 曲线可以通过齐次空间的 B 样条曲线来定义, B 样条的这些配套算法同样适用于 NURBS。在应用 B 样条方法中的这些高效算法时, 需要首先将 NURBS 曲线变换为齐次空间的非有理 B 样条曲线, 再对齐次曲线应用 B 样条算法, 最后投影回低一维空间。

5.1.3 权因子的几何意义与影响

根据 NURBS 曲线有理基函数表示的定义, 曲线和基函数可以分别表示为

$$p(u) = \sum_{i=0}^n b_i R_{i,p}(u), \quad R_{i,p}(u) = \frac{w_i N_{i,p}(u)}{\sum_{j=0}^n w_j N_{j,p}(u)}$$

观察上式中有理基函数 $R_{i,p}(u)$ 的形式, 可知增大或者减少权因子 w_i 的值, 会相应增大或者减少有理基函数 $R_{i,p}(u)$ 的值, 进而使得曲线靠近或者远离控制顶点 b_i 。当权因子 $w_i \rightarrow \infty$ 时, 曲线经过控制顶点 b_i ; 当权因子 $w_i = 0$ 时, 控制顶点 b_i 对曲线形状不产生影响。权因子 w_i 的改变仅影响定义在节点区间 $[u_i, u_{i+p+1})$ 上的那段曲线, 改变 w_i 的值, 会相应改变曲线段的形状。

当给定参数 $u = \bar{u}$ 时, 考查权因子 w_i 的改变对曲线上点 $p(\bar{u})$ 的影响。给定一条三次 NURBS 曲线, 控制顶点记为 $b_0, b_1, b_2, b_3, b_4, b_5$, 节点矢量 $U = \{0, 0, 0, 0, 1/3, 2/3, 1, 1, 1, 1\}$ 。现将控制顶点 b_2 对应的权因子 w_2 分别取值 $\{0, 0.1, 0.3, 0.6, 1, 2, 5, 10, 100\}$, 其他控制顶点的权因子全部置为 1, 所得 9 条曲线如图 5.8 所示。权因子 w_2 的改变对定义在节点区间 $[u_2, u_6) = [0, 1)$ 上的曲线有影响, 因此整条曲线的形状随着 w_2 的改变都会发生改变。给定参数 $\bar{u} = \{1/3, 2/5, 3/5\}$, 计算不同权因子 w_2 对曲线上点 $p(\bar{u})$ 的位置影响。由图 5.8 可以发现, 对于参数 $\bar{u}$, 权因子 w_2 取不同值所对应的一簇曲线上点 $p(\bar{u})$ 始终位于同一条直线上。也就是说, 固定参数 u , 改变权因子 w_i 的值, NURBS 曲线方程退化为以权因子 w_i 为变量的一条直线方程, 即权因子 w_i 对应的一簇 NURBS 曲线, 其上参数 u 取值相同的点位于同一条直线上。

上述结论可以通过以下公式进行简要证明。将第 i 个控制顶点的权因子 w_i 作为变量,

则点 p_1 将线段 $\overline{p_0 b_i}$ 分割为 $\overline{p_0 p_1}$ 与 $\overline{p_1 b_i}$, 两分段长度之比为

$$\frac{\overline{p_0 p_1}}{\overline{p_1 b_i}} = \frac{t_1}{1 - t_1} \quad (5.23)$$

当 w_i 取任意参数时, 即 $w_i \neq 0, 1, \infty$, 令

$$A_i = w_i N_{i,p}(u), \quad t_i = \frac{A_i}{A_i + B}, \quad p_i = (1 - t_i)p_0 + t_i b_i \quad (5.24)$$

此时, 点 p_i 将线段 $\overline{p_0 b_i}$ 分割为 $\overline{p_0 p_i}$ 与 $\overline{p_i b_i}$, 两分段长度之比为

$$\frac{\overline{p_0 p_i}}{\overline{p_i b_i}} = \frac{t_i}{1 - t_i} \quad (5.25)$$

联立式(5.22)和式(5.24), 计算式(5.25)线段比值与式(5.23)线段比值之比, 可得

$$\frac{\overline{p_0 p_i}}{\overline{p_i b_i}} \bigg/ \frac{\overline{p_0 p_1}}{\overline{p_1 b_i}} = \frac{t_i}{1 - t_i} \bigg/ \frac{t_1}{1 - t_1} = \frac{A_i}{A_1} = w_i \quad (5.26)$$

上述两个线段长度比值之比也称为直线上4点 p_0, p_i, p_1, b_i 的交比。

由此可见, 给定一条 NURBS 曲线, 对于曲线上点 $p(\bar{u})$, $\bar{u} \in [u_i, u_{i+p+1}) \subset [u_p, u_{n+1}]$, 当修改控制顶点 b_i 的权因子 w_i 时, 点 $p(\bar{u})$ 的轨迹为一条直线; 并且, 权因子 w_i 的值即为直线上具有权因子 $w_i = 0, 1, +\infty$ 和 $w_i \neq 0, 1, +\infty$ 的4点 p_0, p_1, b_i, p_i 的交比。对于任意参数 $\bar{u} \in [u_i, u_{i+p+1})$, 点 $p(\bar{u})$ 所形成的直线不同, 但该比值相同, 均为权因子 w_i 。因此, 控制顶点 b_i 已知, 若再知晓 p_0, p_1 的空间位置, 则任意权因子 w_i 对应的空间点 p_i 可直接通过式(5.26)计算获得。

如图5.9所示, 固定参数 $\bar{u} = 1/3$, 4个黑色圆点 p_0, p_1, p_i, b_2 分别为权因子 $w_i = 0, 1, 2, +\infty$ 时所对应曲线上的点 $p(\bar{u})$ 。此时, 四点 p_0, p_1, p_i, b_2 形成的交比等于权因子 w_2 的值, 即

$$\frac{\overline{p_0 p_i}}{\overline{p_i b_2}} \bigg/ \frac{\overline{p_0 p_1}}{\overline{p_1 b_2}} = w_2 = 2 \quad (5.27)$$

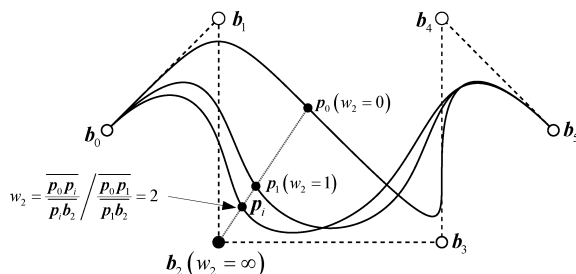


图 5.9 权因子 w_2 的几何意义

5.2 NURBS 曲面的定义和计算

5.2.1 NURBS 曲面的定义和性质

NURBS 曲面的定义与曲线类似也有三种定义方式：有理分式形式、有理基函数形式和齐次坐标形式。给定呈矩形拓扑阵列的控制顶点 $\mathbf{b}_{i,j}$ ($i=0,1,\dots,n; j=0,1,\dots,m$), 其权因子记为 $w_{i,j}$, 沿 u 和 v 两个参数方向的次数分别为 p 和 q , 节点矢量表示为

$$\begin{aligned} U &= \{u_0, \dots, u_p, u_{p+1}, \dots, u_n, u_{n+1}, \dots, u_{n+p+1}\} \\ V &= \{v_0, \dots, v_q, v_{q+1}, \dots, v_m, v_{m+1}, \dots, v_{m+q+1}\} \end{aligned} \quad (5.28)$$

$N_{i,p}(u)$ 和 $N_{j,q}(v)$ 分别表示定义在节点矢量 U 和 V 上的 B 样条基函数。下面基于 3 种方式来分别表示由上述控制顶点、次数和节点矢量定义的 NURBS 曲面。

1. 参数有理分式表示

基于参数有理分式形式的 NURBS 曲面可以表示为

$$\mathbf{p}(u, v) = \frac{\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m \mathbf{b}_{i,j} w_{i,j} N_{i,p}(u) N_{j,q}(v)}{\sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^m w_{k,l} N_{k,p}(u) N_{l,q}(v)}, \quad u \in [a, b], v \in [c, d] \quad (5.29)$$

2. 有理基函数表示

基于有理基函数的 NURBS 曲面表示为

$$\mathbf{p}(u, v) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m \mathbf{b}_{i,j} R_{i,j}^{p,q}(u, v), \quad u \in [a, b], v \in [c, d] \quad (5.30)$$

其中, $R_{i,j}^{p,q}(u, v)$ 为双变量分段有理基函数, 表示为

$$R_{i,j}^{p,q}(u, v) = \frac{w_{i,j} N_{i,p}(u) N_{j,q}(v)}{\sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^m w_{k,l} N_{k,p}(u) N_{l,q}(v)} \quad (5.31)$$

这里需要注意 $R_{i,j}^{p,q}(u, v)$ 是有理形式, 不再是关于参数 u 和 v 的一元基函数的直接乘积。因此, NRUBS 曲面一般也不再是张量积曲面。

3. 齐次坐标表示

将三维空间的控制顶点 $\mathbf{b}_{i,j}$ 通过齐次变换表示为齐次坐标形式 $\mathbf{b}_{i,j}^w = (x_i w_i, y_i w_i,$

$z_i w_i$), 则 NURBS 曲面的齐次坐标形式写为

$$p^w(u, v) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m b_{i,j}^w N_{i,p}(u) N_{j,q}(v) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m b_{i,j}^w N_{i,j}^{p,q}(u, v), \quad u \in [a, b], v \in [c, d] \quad (5.32)$$

其中, $N_{i,j}^{p,q}(u, v)$ 为非有理 B 样条基函数。曲面 $p^w(u, v)$ 为齐次空间中的张量积曲面。图 5.10 展示了一张由 5×5 个控制顶点定义的双二次 NURBS 曲面, 中间控制顶点的权因子 $w_{2,2} = 5$, 其余权因子均为 1。

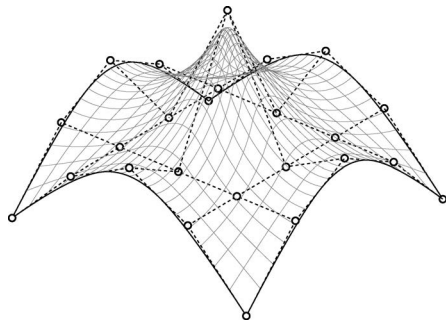


图 5.10 由 5×5 个控制顶点定义一张双二次 NURBS 曲面, $U=V=\{0,0,0,1,2,3,3,3\}$

NURBS 曲面有理基函数 $R_{i,j}^{p,q}(u, v)$ 与权因子 $w_{i,j}$ 以及 B 样条基函数 $N_{i,j}^{p,q}(u, v)$ 有关, 令所有权因子均大于零, 其表现出来的性质也与 $N_{i,j}^{p,q}(u, v)$ 类似, 总结如下。

(1) 非负性。对所有的 i, j, p, q 和 $u \in [a, b]$, $v \in [c, d]$, 有 $R_{i,j}^{p,q}(u, v) \geq 0$ 。

(2) 规范性。当 $u \in [a, b]$, $v \in [c, d]$ 时, 基函数的和为 1, 即 $\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m R_{i,j}^{p,q}(u, v) = 1$ 。

(3) 局部支撑性。基函数 $R_{i,j}^{p,q}(u, v)$ 的支撑区间与非有理基函数 $N_{i,j}^{p,q}(u, v)$ 一致, 仅在支撑区间 $[u_i, u_{i+p+1}) \otimes [v_j, v_{j+q+1})$ 上有非零值。对于每个非零节点区间 $[u_i, u_{i+1}) \otimes [v_j, v_{j+1})$, 其上至多有 $(p+1)(q+1)$ 个基函数非零, 这些基函数可以记为 $R_{k,l}^{p,q}$, $(k=i-p, \dots, i; l=j-q, \dots, j)$ 。

(4) 端点插值性。当节点矢量 $U(V)$ 满足端节点 $p+1(q+1)$ 重时, 则角点处的 4 个有理基函数满足 $R_{0,0}^{p,q}(a, c) = R_{n,0}^{p,q}(b, c) = R_{0,m}^{p,q}(a, d) = R_{n,m}^{p,q}(c, d) = 1$ 。

(5) 可微性。若有理基函数 $R_{i,j}^{p,q}(u, v)$ 分母不为零, 则其在非零节点区间内部是任意次连续可微, 在沿 u 方向重复度为 r 的内节点处是关于 u 的 $p-r$ 次连续可微, v 方向同理。

(6) 权因子影响。若 $w_{i,j} = 0$, 则 $R_{i,j}^{p,q}(u, v) = 0$; 若 $w_{i,j} \rightarrow \infty$, 则 $R_{i,j}^{p,q} \rightarrow 1$, $R_{k(l \neq i), l(l \neq j)}^{p,q}(u, v) \rightarrow 0$; 若所有的权因子相等且不为 0, 则 $R_{i,j}^{p,q}(u, v) = N_{i,j}^{p,q}(u, v)$ 。

图 5.11 展示了定义在节点矢量 $U=V=\{0,0,0,1/3,2/3,1,1,1\}$ 上的 3 张二次 NURBS 基函数 $R_{2,1}^{2,2}$, $R_{2,2}^{2,2}$ 与 $R_{1,3}^{2,2}$ 。对比 NURBS 基函数与坐标平面上的单变量 B 样条基函数, 可以发现基函数的形状发生了较大改变。此外, 图 5.11(a) 和图 5.11(c) 表现出了明显的局部性质。

由上述基函数的性质, 可以推导出 NURBS 曲面的相关性质如下。

(1) 局部修改变质。移动控制顶点 $b_{i,j}$, 或改变权因子 $w_{i,j}$, 仅对支撑区间 $[u_i, u_{i+p+1}) \otimes [v_j, v_{j+q+1})$ 上定义的曲面片产生影响。非零节点区间 $[u_i, u_{i+1}) \otimes$

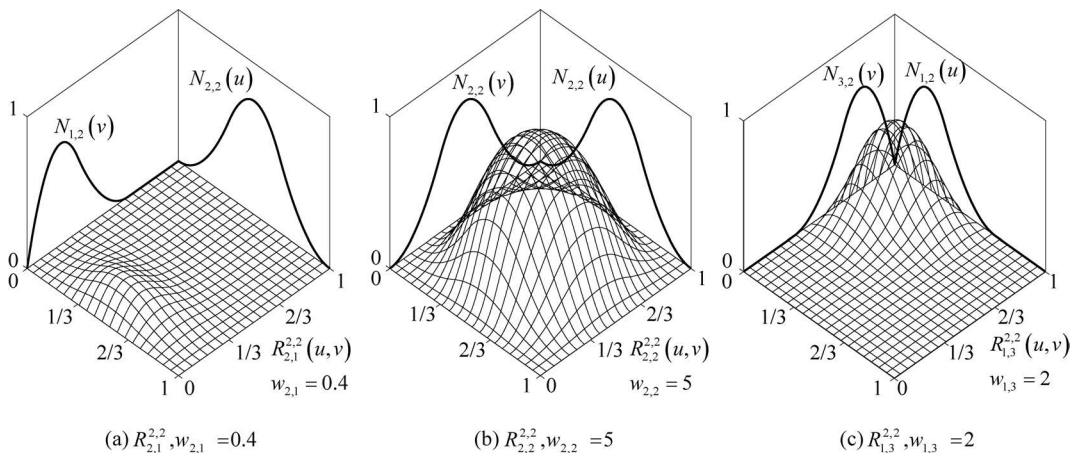


图 5.11 定义在 $U=V=\{0,0,0,1/3,2/3,1,1,1\}$ 上的 3 个 NURBS 基函数

$[v_j, v_{j+1})$ 上定义的曲面片至多与 $(p+1)(q+1)$ 个控制顶点 $\mathbf{b}_{k,l}$ ($k=i-p, \dots, i; l=j-q, \dots, j$) 及其权因子 $w_{k,l}$ 有关。

(2) 角点插值性。当 NURBS 曲面的节点矢量 U 满足端节点 $p+1$ 重, 节点矢量 V 满足端节点 $q+1$ 重, 则曲面插值于 4 个角点处的控制顶点, 即 $\mathbf{b}_{0,0} = \mathbf{p}(a, c), \mathbf{b}_{n,0} = \mathbf{p}(b, c), \mathbf{b}_{0,m} = \mathbf{p}(a, d), \mathbf{b}_{n,m} = \mathbf{p}(b, d)$ 。

(3) 强凸包性。假定所有的权因子均满足 $w_{k,l} \geq 0$, 则非零节点区间 $[u_i, u_{i+1}) \otimes [v_j, v_{j+1})$ 对应的曲线段始终包含于由 $(p+1)(q+1)$ 个控制顶点 $\mathbf{b}_{k,l}$ ($k=i-p, \dots, i; l=j-q, \dots, j$) 所构成的凸包内。

(4) 仿射和透视不变性。NURBS 曲面经过仿射和透视变换后依然是 NURBS 曲面, 变换后的 NURBS 曲面控制顶点可以通过对初始曲面控制顶点进行仿射或透视变换得到。

(5) 可微性。NURBS 曲面在定义域内重复度为 r 的 u 向节点处是关于 u 的 C^{p-r} 参数连续的; 在重复度为 s 的 v 向节点处是关于 v 的 C^{q-s} 参数连续的。

(6) 不具有变差减少性。NURBS 曲面不具有变差减少性。

(7) NURBS 曲面是非有理和有理贝齐尔曲面以及非有理 B 样条曲面的推广, 通过选取适当的节点矢量和权因子, NURBS 曲面可以退变为贝齐尔曲面或者 B 样条曲面。

(8) 权因子影响曲面形状。给定参数 $\bar{u} \in [u_i, u_{i+p+1}), \bar{v} \in [v_j, v_{j+q+1})$, 当修改权因子 $w_{i,j}$ 时, 曲面上点 $\mathbf{p}(\bar{u}, \bar{v})$ 沿一条直线运动。当权因子 $w_{i,j} \rightarrow +\infty$ 时, $\mathbf{p}(\bar{u}, \bar{v}) \rightarrow \mathbf{b}_{i,j}$; 当权因子 $w_{i,j} = 0$ 时, 控制顶点 $\mathbf{b}_{i,j}$ 对曲面不产生影响。令 $w_{i,j} = 0$ 时的曲面点 $\mathbf{p}(\bar{u}, \bar{v})$ 记为 $\mathbf{p}_0$, 令 $w_{i,j} = 1$ 时的曲面点 $\mathbf{p}(\bar{u}, \bar{v})$ 记为 $\mathbf{p}_1$, 则当 $w_{i,j} \neq 0, 1, +\infty$ 时, 曲面点 $\mathbf{p}(\bar{u}, \bar{v}) = \mathbf{p}_i$ 与权因子 $w_{i,j}$ 之间满足关系成立:

$$\frac{\overline{\mathbf{p}_0 \mathbf{p}_i}}{\overline{\mathbf{p}_i \mathbf{b}_{i,j}}} \bigg/ \frac{\overline{\mathbf{p}_0 \mathbf{p}_1}}{\overline{\mathbf{p}_1 \mathbf{b}_{i,j}}} = w_{i,j} \quad (5.33)$$

其证明可以参考 5.1.3 节曲线权因子的相关公式推导。当权因子 $w_{i,j}$ 由 0 逐渐增大时, 曲面点 $p(\bar{u}, \bar{v})$ 从点 p_0 向点 $b_{i,j}$ 作直线移动。

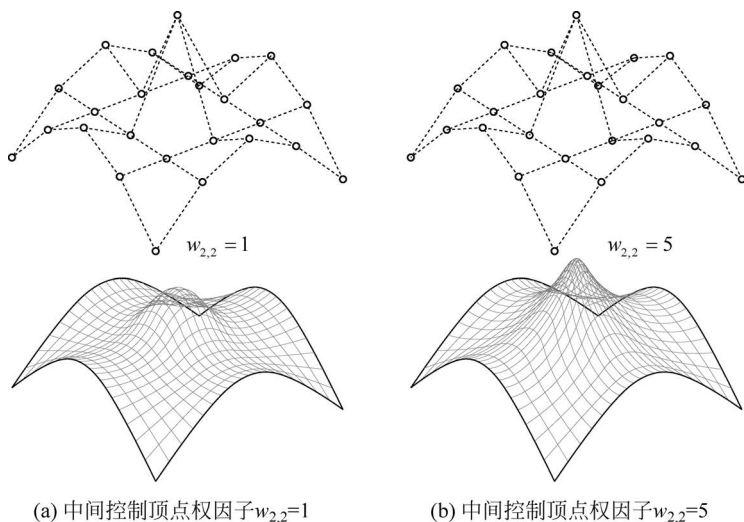


图 5.12 NURBS 曲面权因子的修改对曲面形状的影响

5.2.2 NURBS 曲面的点与导矢计算

NURBS 曲面点的计算可以直接采用 5.2.1 节的 3 种定义方式来求解。对于第三种齐次定义形式, 还可以借助 B 样条曲面的德布尔算法来计算 NURBS 曲面在齐次空间的点, 再投影到低一维空间得到。NURBS 曲面在齐次空间对应的非有理 B 样条曲面的相关算法 (包括节点插入、升阶等) 可以采用第 4 章介绍的 B 样条曲面的计算方式。下面以一个范例来说明 NURBS 曲面点的计算。

【例 5.2】 令 $p(u, v)$ 是定义在节点矢量 $U=V=\{0, 0, 0, 1, 2, 3, 3, 3\}$ 上的一张双二次 NURBS 曲面, 试计算参数点 $(\bar{u}, \bar{v}) = (0.5, 1)$ 时曲面上对应的点。

解: 首先确定参数 $(\bar{u}, \bar{v}) = (0.5, 1)$ 所在节点区间, 有 $\bar{u} = 0.5 \in [0, 1) = [u_2, u_3)$, $\bar{v} = 1.0 \in [1, 2) \in [u_3, u_4)$, 与该参数点相关的基函数为

$$N_{0,2}(\bar{u} | U) = \frac{1}{4}, \quad N_{1,2}(\bar{u} | U) = \frac{5}{8}, \quad N_{2,2}(\bar{u} | U) = \frac{1}{8}$$

$$N_{1,2}(\bar{v} | V) = \frac{1}{2}, \quad N_{2,2}(\bar{v} | V) = \frac{1}{2}, \quad N_{3,2}(\bar{v} | V) = 0$$

假定与非零基函数相对应的齐次控制顶点坐标为

$$[b_{i,j}^w] = \begin{Bmatrix} [1, -2, 1, 1] & [1, -1, 1, 1] & [1, 0, 1, 1] \\ [0, -2, 1, 5, 1] & [1, -1, 1, 1] & [0, 0, 15, 5] \\ [-1, -2, 1, 1] & [-1, -1, 1, 1] & [-1, 0, 1, 1] \end{Bmatrix}, \quad i=1, 2, 3; j=2, 3, 4$$

则齐次空间中参数 $(\bar{u}, \bar{v})$ 所对应曲面点计算如下

$$\begin{aligned} \mathbf{p}^w(0.5, 1) &= \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{5}{8} & \frac{1}{8} \end{bmatrix} \times \left\{ \begin{array}{ccc} [1, -2, 1, 1] & [1, -1, 1, 1] & [1, 0, 1, 1] \\ [0, -2, 1.5, 1] & [1, -1, 1, 1] & [0, 0, 15, 5] \\ [-1, -2, 1, 1] & [-1, -1, 1, 1] & [-1, 0, 1, 1] \end{array} \right\} \times \\ &\quad \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}^T \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2}, -\frac{9}{8}, \frac{31}{16}, \frac{5}{4} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

将齐次点投影到三维空间,有

$$\mathbf{p}(0.5, 1) = \frac{\mathbf{p}^w(0.5, 1)}{w} = \frac{\begin{bmatrix} \frac{1}{2}, -\frac{9}{8}, \frac{31}{16}, \frac{5}{4} \end{bmatrix}}{\frac{5}{4}} = \begin{bmatrix} \frac{2}{5}, -\frac{9}{10}, \frac{31}{20}, 1 \end{bmatrix}$$

因此,参数 $(\bar{u}, \bar{v}) = (0.5, 1)$ 对应的曲面点坐标为 $[0.4, -0.9, 1.55]$ 。图 5.13 展示了双二次 NURBS 曲线及其上一点 $\mathbf{p}(0.5, 1.0)$ 。

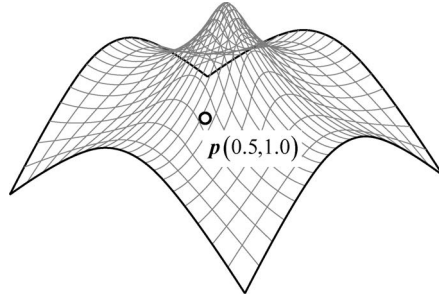


图 5.13 例 5.2 中 NURBS 曲面及其上一点 $\mathbf{p}(0.5, 1.0)$

NURBS 曲面导矢计算涉及有理分式的求导,虽然不能直接采用齐次非有理 B 样条的导矢,但是可以借助 NURBS 曲面的齐次形式来实现。

根据式(5.29)给出的 NURBS 曲面的有理分式形式,令

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(u, v) &= \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m \mathbf{b}_{i,j} w_{i,j} N_{i,p}(u) N_{j,q}(v) \\ w(u, v) &= \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m w_{i,j} N_{i,p}(u) N_{j,q}(v) \end{aligned} \quad (5.34)$$

则 NURBS 曲面可以重写为

$$\mathbf{p}(u, v) = \frac{\mathbf{A}(u, v)}{w(u, v)} \quad (5.35)$$

矢函数 $\mathbf{A}(u, v)$ 可以看作以 $\mathbf{b}_{i,j} w_{i,j}$ 为控制顶点定义的一张 $p \times q$ 次非有理 B 样条曲面, $\mathbf{b}_{i,j} w_{i,j}$ 也表示齐次曲面 $\mathbf{p}^w(u, v)$ 控制顶点的前三维坐标(假定 $\mathbf{b}_{i,j}$ 为三维控制顶

点)。标量函数 $w(u, v)$ 可以看作以权因子 $w_{i,j}$ 为控制顶点的一维 $p \times q$ 次非有理 B 样条曲面。因此, $\mathbf{A}(u, v)$ 与 $w(u, v)$ 的导矢计算可以参考非有理 B 样条曲面的相关算法。实际上, $\mathbf{A}(u, v)$ 与 $w(u, v)$ 构成了齐次曲面 $\mathbf{p}^w(u, v)$ 。

由式(5.35)可以推导 NURBS 曲面 $\mathbf{p}(u, v)$ 沿 u 方向的一阶偏导矢为

$$\mathbf{p}_u(u, v) = \frac{\mathbf{A}_u(u, v) - w_u(u, v)\mathbf{p}(u, v)}{w(u, v)} \quad (5.36)$$

同理, $\mathbf{p}(u, v)$ 沿 v 方向的一阶偏导矢为

$$\mathbf{p}_v(u, v) = \frac{\mathbf{A}_v(u, v) - w_v(u, v)\mathbf{p}(u, v)}{w(u, v)} \quad (5.37)$$

对于 NURBS 曲面的任意高阶导矢计算, 皮格尔和蒂勒给出了便于程序实现的导矢递推公式。由式(5.35), 可以将矢函数 $\mathbf{A}(u, v)$ 改写为

$$\mathbf{A}(u, v) = w(u, v)\mathbf{p}(u, v) \quad (5.38)$$

根据链式法则可计算 $\mathbf{A}(u, v)$ 的 (k, l) 阶偏导矢如下

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^{(k, l)}(u, v) &= \{ [\mathbf{w}(u, v)\mathbf{p}(u, v)]^{(k)} \}^{(l)} = \left\{ \sum_{i=0}^k C_k^i w^{(i, 0)}(u, v) \mathbf{p}^{(k-i, 0)}(u, v) \right\}^{(l)} \\ &= \sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^l C_k^i C_l^j w^{(i, j)}(u, v) \mathbf{p}^{(k-i, l-j)}(u, v) \\ &= w^{(0, 0)}(u, v) \mathbf{p}^{(k, l)}(u, v) + \sum_{i=1}^k C_k^i w^{(i, 0)}(u, v) \mathbf{p}^{(k-i, l)}(u, v) + \\ &\quad \sum_{j=1}^l C_l^j w^{(0, j)}(u, v) \mathbf{p}^{(k, l-j)}(u, v) + \\ &\quad \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^l C_k^i C_l^j w^{(i, j)}(u, v) \mathbf{p}^{(k-i, l-j)}(u, v) \end{aligned} \quad (5.39)$$

将等式右侧的 (k, l) 阶偏导矢 $\mathbf{p}^{(k, l)}(u, v)$ 独立出来, 可得

$$\begin{aligned} \mathbf{p}^{(k, l)}(u, v) &= \frac{1}{w(u, v)} \left[\mathbf{A}^{(k, l)}(u, v) - \sum_{i=1}^k C_k^i w^{(i, 0)}(u, v) \mathbf{p}^{(k-i, l)}(u, v) - \right. \\ &\quad \left. \sum_{j=1}^l C_l^j w^{(0, j)}(u, v) \mathbf{p}^{(k, l-j)}(u, v) - \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^l C_k^i C_l^j w^{(i, j)}(u, v) \mathbf{p}^{(k-i, l-j)}(u, v) \right] \end{aligned} \quad (5.40)$$

$\mathbf{A}(u, v)$ 与 $w(u, v)$ 的高阶偏导矢可以通过 B 样条导矢公式计算。因此, 高阶偏导矢 $\mathbf{p}^{(k, l)}(u, v)$ 可以通过低阶偏导矢递推得到。

对于二阶混合偏导矢, 由式(5.40)可得

$$\mathbf{p}_{uv} = \frac{A_{uv} - 2w_u \mathbf{p}_v - w_{uv} \mathbf{p}}{w}$$

$$\begin{aligned} p_{vv} &= \frac{A_{vv} - 2w_v p_v - w_{vv} p}{w} \\ p_{uv} &= \frac{A_{uv} - w_u p_v - w_v p_u - w_{uv} p}{w} \end{aligned} \quad (5.41)$$

其中各函数表达均省略参数 (u, v) 。

5.3 圆锥曲线的 NURBS 构造

相较于 B 样条, NURBS 最大的优势在于对圆锥曲线和曲面的精确表达。圆锥曲线和曲面通常可以采用二次函数表示, 因此也称为二次曲线和曲面。在几何造型中, 圆锥曲面一般可以通过圆锥曲线的平移、旋转等操作得到。本节仅介绍圆锥曲线的 NURBS 构造, 圆锥曲面的构造方法将在第 8 章中介绍。

5.3.1 有理二次贝齐尔曲线与圆锥曲线

有理二次贝齐尔曲线是能够描述曲线形状的最低阶 NURBS 曲线, 也是表示圆锥曲线的常用方法。根据 NURBS 曲线的参数有理分式形式, 可以给出有理二次贝齐尔曲线表达如下

$$p(u) = \frac{b_0 w_0 B_{0,2}(u) + b_1 w_1 B_{1,2}(u) + b_2 w_2 B_{2,2}(u)}{w_0 B_{0,2}(u) + w_1 B_{1,2}(u) + w_2 B_{2,2}(u)} \quad (5.42)$$

其中, b_0 、 b_1 、 b_2 为曲线的 3 个控制顶点; w_0 、 w_1 、 w_2 为权因子; $B_{0,2}(u)$ 、 $B_{1,2}(u)$ 、 $B_{2,2}(u)$ 为二次伯恩斯坦基函数。根据伯恩斯坦基函数的数学表达, 可以将式(5.42)进一步显式表示为

$$\begin{aligned} p(u) &= \frac{(1-u)^2 w_0 b_0 + 2u(1-u) w_1 b_1 + u^2 w_2 b_2}{(1-u)^2 w_0 + 2u(1-u) w_1 + u^2 w_2} \\ &= R_{0,2}(u) b_0 + R_{1,2}(u) b_1 + R_{2,2}(u) b_2 \end{aligned} \quad (5.43)$$

其中, $R_{0,2}(u)$ 、 $R_{1,2}(u)$ 和 $R_{2,2}(u)$ 为有理伯恩斯坦基函数, 分别表示为

$$R_{0,2}(u) = \frac{(1-u)^2 w_0}{w(u)}, \quad R_{1,2}(u) = \frac{2u(1-u) w_1}{w(u)}, \quad R_{2,2}(u) = \frac{u^2 w_2}{w(u)} \quad (5.44)$$

$$w(u) = (1-u)^2 w_0 + 2u(1-u) w_1 + u^2 w_2$$

给定三个权因子和控制顶点即可确定一条二次有理贝齐尔曲线。显然, 人们希望知道上述有理二次贝齐尔曲线方程是否表示一条圆锥曲线, 以及表示何种圆锥曲线。

圆锥曲线是由圆锥表面与平面相交而形成的曲线(见图 5.14), 一般包括 4 类: 圆、椭圆、抛物线和双曲线。在解析几何中, 圆锥曲线可以采用二元二次隐式方程表示为

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad (5.45)$$

其中,6个系数 A, B, C, D, E, F 均为实数,且 A, B, C 不全为零。若 $F=0$,则式(5.45)有5个独立系数;若 $F \neq 0$,则可以将等式两侧同时除以 F ,式(5.45)依旧有5个独立系数。因此,需要5个独立条件来求解式(5.45)给出的圆锥曲线方程。

式(5.45)给出的隐式方程缺乏几何意义,可将其变换为基于直线方程的定义形式。如图5.15所示,给定两条相交于点 B 的直线 l_1 与 l_2 ,直线 l_3 与直线 l_1 和 l_2 分别交于点 A 和 C 。则通过这3条曲线可以定义一簇与直线 l_1 和 l_2 相切于点 A 和 C 的圆锥曲线,隐式方程表示为

$$(1-\lambda)l_1l_2 + \lambda l_3l_3 = 0 \quad (5.46)$$

其中, l_1, l_2, l_3 表示一次直线方程。给定曲线上一点 D ,即可确定圆锥曲线的参数 λ 。当 D 位于边 AB 中点和边 BC 中点连线中点时,该圆锥曲线为抛物线;当 D 位于抛物线与边 AC 之间时,曲线表示椭圆;其他位置所得曲线为双曲线。将直线方程 l_1, l_2, l_3 和参数 λ 代入式(5.46),整理可以得到式(5.45)的形式。相对于式(5.45),式(5.46)的几何意义更加明确。如果二次有理贝齐尔曲线可以表示圆锥曲线,则式(5.43)应该可以表示成式(5.45)或者式(5.46)的形式。

如图5.16所示,给定由控制顶点 b_0, b_1, b_2 和权因子 w_0, w_1, w_2 定义的一条有理二次贝齐尔曲线。以 b_1 为原点、以边 $\overrightarrow{b_1b_0}$ 和 $\overrightarrow{b_1b_2}$ 为两条坐标轴构建一个斜坐标系,则贝齐尔曲线上点 p 在此斜坐标系中可以表示为

$$\begin{aligned} p &= b_1 + \alpha(u)(b_0 - b_1) + \beta(u)(b_2 - b_1) \\ &= \alpha(u)b_0 + [1 - \alpha(u) - \beta(u)]b_1 + \beta(u)b_2 \end{aligned} \quad (5.47)$$

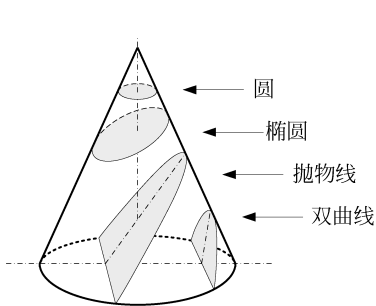


图 5.14 平面与圆锥面沿不同角度相交形成圆、椭圆、抛物线与双曲线

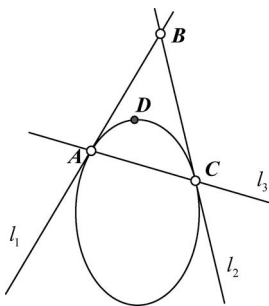


图 5.15 两切线及其内一点定义一条圆锥曲线

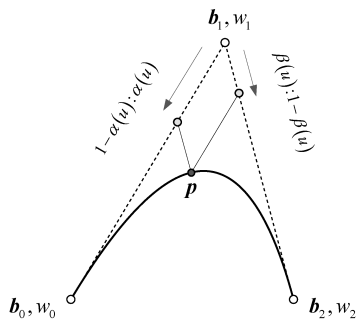


图 5.16 斜坐标系中的有理二次贝齐尔曲线

对比式(5.43),可得

$$\alpha(u) = R_{0,2}(u), \quad 1 - \alpha(u) - \beta(u) = R_{1,2}(u), \quad \beta(u) = R_{2,2}(u) \quad (5.48)$$

进一步观察比例系数 $\alpha(u)$ 与 $\beta(u)$ 的代数关系,有

$$\alpha(u)\beta(u) = R_{0,2}(u)R_{2,2}(u) = \frac{(1-u)^2 u^2 w_0 w_2}{w_1^2(u)} = \frac{1}{4} \frac{w_0 w_2}{w_1^2} R_{1,2}^2(u) \quad (5.49)$$

令

$$k = \frac{w_0 w_2}{w_1^2} \quad (5.50)$$

并将式(5.48)代入式(5.49),可得

$$\alpha(u)\beta(u) = \frac{1}{4}k [1 - \alpha(u) - \beta(u)]^2 \quad (5.51)$$

因此,有理二次贝齐尔曲线上的点 p 在其控制多边形构成的斜坐标系下满足式(5.51)所列关系。对比式(5.46)与式(5.51),可以发现式(5.51)即表示形如式(5.46)的圆锥曲线隐式方程,且参数 λ 与系数 k 满足如下关系

$$\lambda = \frac{k}{k-4} \quad (5.52)$$

当 k 给定时,可确定参数 λ ,继而确定一条圆锥曲线。因此,系数 k 确定了圆锥曲线的形状。由式(5.50)知系数 k 由 3 个权因子决定,其中任意两个可以作为独立变量,并通过改变剩余权因子的值来维持系数 k 不变,继而保持曲线形状不变。系数 k 也称为形状因子,在维持 k 不变的情况下改变权因子的取值,虽然曲线形状不变,但其参数化发生了改变。因此,有理二次贝齐尔曲线方程(5.43)与圆锥曲线隐式方程(5.45)或式(5.46)之间没有一一对应关系。根据有理二次贝齐尔曲线方程可以推导出圆锥曲线的隐式方程,但是圆锥曲线隐式方程对应一簇形状相同的有理二次贝齐尔曲线。

当有理二次贝齐尔曲线的首末权因子取值 1,即 $w_0 = w_2 = 1$ 时,曲线称为标准型有理二次贝齐尔曲线。对于标准型有理二次贝齐尔曲线,其对应的圆锥曲线的类型可以根据式(5.44)中分母 $w(u)$ 的根来判定。具体形状分类如下

$$w_1 : \begin{cases} = +\infty, & \text{控制多边形} \\ = \pm 1, & \text{抛物线} \\ = 0, & \text{连接 } b_0 \text{ 与 } b_1 \text{ 直线段} \\ \in (-1, 0) \cup (0, 1), & \text{椭圆} \\ \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty), & \text{双曲线} \end{cases} \quad (5.53)$$

相应地,以形状因子 k 来划分,有

$$k = \frac{w_0 w_2}{w_1^2} = \frac{1}{w_1^2} : \begin{cases} = +\infty, & \text{连接 } b_0 \text{ 与 } b_1 \text{ 直线段} \\ \in (1, +\infty), & \text{椭圆} \\ = 1, & \text{抛物线} \\ \in (0, 1), & \text{双曲线} \\ = 0, & \text{控制多边形} \end{cases} \quad (5.54)$$

注意,当权因子 w_1 取负值时所生成的曲线弧为其正值 $|w_1|$ 对应曲线弧的补弧。图 5.17 展示了权因子 w_1 取不同值时所对应的曲线弧。当 $w_1 = \pm 1/3$ 时,两段曲线弧构成了一条完整的椭圆曲线;当 $w_1 = \pm 1$ 时,两段曲线弧构成了一条抛物线;当 $w_1 = 0$ 时,曲线弧表示

一条从 b_0 到 b_1 的直线段; 当 $w_1=2$ 时, 曲线弧表示双曲线中的一条; 当 $w_1 \rightarrow +\infty$ 时, 曲线弧表示 $b_0 b_1$ 和 $b_1 b_2$ 两直线段。

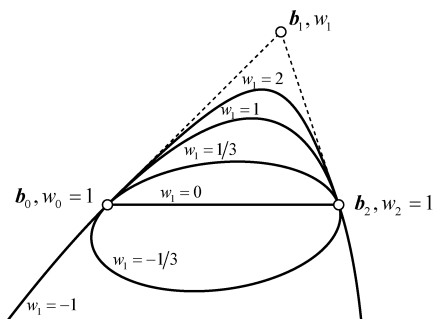


图 5.17 权因子 w_1 取不同值时的圆锥曲线, $w_1 = -1, -1/3, 0, 1/3, 1, 2$

5.3.2 有理二次贝齐尔曲线的参数化

给定 3 个控制顶点和 3 个权因子, 即可确定一条有理二次贝齐尔曲线, 包括其几何形状和参数化。在维持形状因子 $k = w_0 w_2 / w_1^2$ 不变的前提下, 可以通过改变 3 个权因子的取值, 来使曲线上的点具有不同参数值。如图 5.18 所示, 给定 3 个控制顶点, 图 5.18(a) 中的两组权因子对应形状因子 $k=4$, 图 5.18(b) 中的两组权因子对应形状因子 $k=0.25$ 。取 $\Delta u=0.05$ 等分参数域 $[0, 1]$, 方形点和星形点分别表示两条曲线上的参数等分点。观察等分点在曲线上的分布, 可以发现权因子越大, 等分点越向对应控制顶点聚集。下面考查曲线上的点与权因子之间的确切关系。

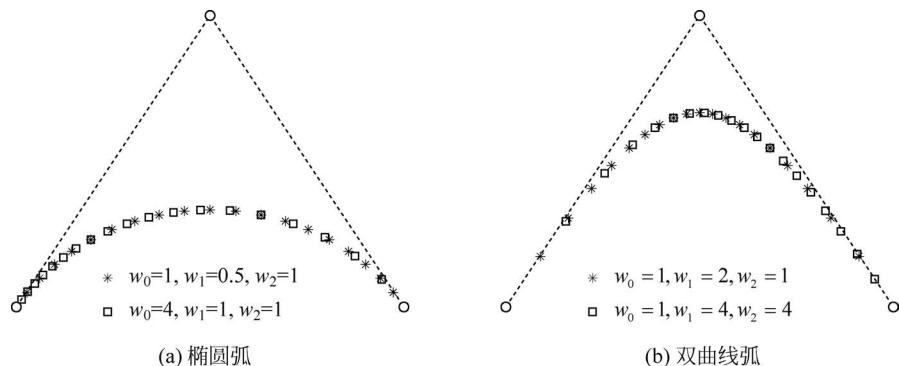


图 5.18 有理二次贝齐尔曲线的不同参数化

当给定有理二次贝齐尔曲线的 3 个控制顶点后, 可确定 4 个已知条件, 包括首末点插值和首末点处与首末边相切 4 个条件。因此, 再给定曲线上一点 p 即可确定一条圆锥曲线。对于曲线上一点 p , 假定对应参数 $\bar{u}$, 通过几何关系可以计算其在 3 个控制顶点所构成斜坐标系中的坐标 $\alpha(\bar{u})$ 与 $\beta(\bar{u})$ 。由式(5.48)可得

$$\frac{\alpha(\bar{u})}{\beta(\bar{u})} = \frac{R_{0,2}(\bar{u})}{R_{2,2}(\bar{u})} = \frac{(1-\bar{u})^2 w_0}{\bar{u}^2 w_2} \quad (5.55)$$

继而可以将参数 $\bar{u}$ 表示为

$$\bar{u} = \frac{1}{1 + \sqrt{\frac{\alpha(\bar{u})}{\beta(\bar{u})} \frac{w_2}{w_0}}} \quad (5.56)$$

因此,当点 p 的位置确定后(可计算出斜坐标 $\alpha(\bar{u})$ 与 $\beta(\bar{u})$),其参数值取决于首末点权因子的比值 w_2/w_0 。这也就是说,可以通过调节比值 w_2/w_0 来精确控制点 p 的参数。

下面通过例 5.3 来说明如何精确调整曲线上一点的参数。

【例 5.3】 给定一条有理二次贝齐尔曲线,控制顶点 $b_0 = [0,0]$, $b_1 = [1,1]$, $b_2 = [2,0]$,权因子 $w_0 = w_1 = w_2 = 1$ 。该曲线表示一段抛物线,由曲线方程可计算曲线上参数 $u = 0.5$ 的点为 $p = [1,0.5]$ 。试通过修改权因子,使得点 p 处的参数值由 0.5 变更为 0.1。

解: 由初始权因子可计算曲线的形状因子为

$$k = \frac{w_0 w_2}{w_1^2} = 1$$

如图 5.18 所示,根据点 $p = [1,0.5]$ 和控制顶点 $b_0 = [0,0]$, $b_1 = [1,1]$, $b_2 = [2,0]$ 的相对位置,可计算点 p 在斜坐标系下的坐标 $[\alpha(u), \beta(u)]$ 为

$$\alpha(u) = \beta(u) = \frac{1}{4}$$

假定控制顶点的新权因子记为 $\bar{w}_0, \bar{w}_1, \bar{w}_2$,如果点 p 的新参数值为 0.9,根据式(5.56)可得

$$\bar{u} = \frac{1}{1 + \sqrt{\frac{\alpha(\bar{u})}{\beta(\bar{u})} \frac{\bar{w}_2}{\bar{w}_0}}} \rightarrow \frac{\bar{w}_2}{\bar{w}_0} = \left(\frac{1}{\bar{u}} - 1\right)^2 \frac{\beta(\bar{u})}{\alpha(\bar{u})} = \left(\frac{1}{0.1} - 1\right)^2 = 81$$

令 $\bar{w}_0 = 1$,则 $\bar{w}_2 = 81$ 。再根据形状因子可计算中间点权因子为

$$k = \frac{\bar{w}_0 \bar{w}_2}{\bar{w}_1^2} = 1 \rightarrow \bar{w}_1 = \sqrt{\bar{w}_0 \bar{w}_2} = 9$$

由于点 p 位于控制多边形形成的三角形内,舍去根 $\bar{w}_1 = -9$ 。图 5.19 中的星形点表示重新参数化之前的曲线等参数分割点,方形点则表示重新参数化之后的等参数分割点。可以发现等参数分割点明显向点 b_2 靠近,这主要是因为权因子 $\bar{w}_2$ 远大于 $\bar{w}_0$ 和 $\bar{w}_1$ 。

通过权因子来控制曲线形状在造型设计中并不方便,设计人员更倾向于直观简洁且几何意义明显的曲线设计方式。下面介绍一种更加便捷的圆锥曲线形状设计工具。

如图 5.20 所示,给定 3 个控制顶点 b_0, b_1, b_2 来定义一条标准型有理二次贝齐尔曲线,

首末控制点的权因子 $w_0 = w_2 = 1$ 。在 NURBS 曲线中,对于给定参数 $\bar{u}$,修改特定权因子,则曲线上点 $p(\bar{u})$ 沿着直线移动。有理二次贝齐尔曲线作为 NURBS 的特例,自然也具备该性质。这里假定参数 $\bar{u} = 0.5$,当权因子 $w_1 = 0$ 时,有理二次贝齐尔曲线表示从 b_0 到 b_2 的直线段。此时,曲线上点 $p(\bar{u} = 0.5)$ 即为直线段 $b_0 b_2$ 的中点 m 。当权因子 $w_1 \rightarrow +\infty$ 时,点 $p(\bar{u} = 0.5) = b_1$ 。因此,权因子 w_1 取其他值时,点 $p(\bar{u} = 0.5)$ 在直线段 mb_1 上移动,点 $p(\bar{u} = 0.5)$ 也称为圆锥曲线的肩点(shoulderpoint)。

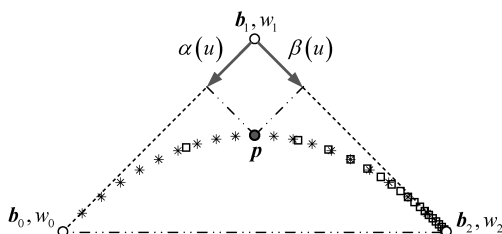


图 5.19 有理二次贝齐尔曲线上点的参数调整

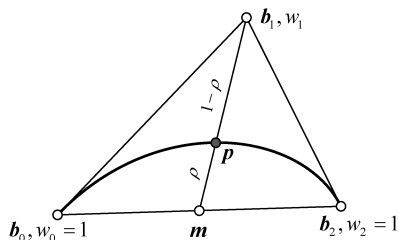


图 5.20 有理二次贝齐尔曲线上点的参数调整

假定存在参数 ρ ,使得点 $p(\bar{u} = 0.5)$ 成为直线段 mb_1 上的线性插值点,即

$$p(\bar{u} = 0.5) = (1 - \rho)m + \rho b_1 \quad (5.57)$$

此外,将参数 $\bar{u} = 0.5$ 代入有理二次贝齐尔曲线方程(5.43),可得

$$p(\bar{u} = 0.5) = \frac{0.5b_0 + w_1b_1 + 0.5b_2}{1 + w_1} = \frac{m + w_1b_1}{1 + w_1} = \frac{1}{1 + w_1}m + \frac{w_1}{1 + w_1}b_1 \quad (5.58)$$

对比式(5.57)与式(5.58),有如下关系成立

$$\rho = \frac{w_1}{1 + w_1}, \quad w_1 = \frac{\rho}{1 - \rho} \quad (5.59)$$

参数 ρ 较为直观地给出了肩点的位置,通过调整 ρ 的大小,可以实现圆锥曲线的形状调整。根据式(5.53)和式(5.59),可将参数 ρ 的取值与圆锥曲线类别的关系表示为

$$\rho: \begin{cases} = 1, & \text{控制多边形} \\ = 1/2, & \text{抛物线} \\ = 0, & \text{连接 } b_0 \text{ 与 } b_1 \text{ 直线段} \\ \in (0, 1/2), & \text{椭圆} \\ \in (1/2, 1), & \text{双曲线} \end{cases} \quad (5.60)$$

由式(5.60)可知,当参数 ρ 从 0 变化到 1 时,圆锥曲线依次表示直线段、椭圆、抛物线、双曲线和控制多边形。

5.3.3 圆弧和整圆的 NURBS 表达

通过 5.3.1 节和 5.3.2 节可知通过调整权因子 w_1 、形状因子 k 或参数 ρ ,可以得到不

同类别的圆锥曲线,参见式(5.53)、式(5.54)和式(5.60)。这些分类将圆和椭圆统一考虑,并未给出圆弧和整圆的 NURBS 或者有理贝齐尔表示。圆弧和整圆是最为经典和常用的圆锥曲线之一,在几何设计中占据着重要地位,本节将介绍圆弧和整圆的 NURBS 表示。NURBS 曲线中部分控制顶点的权因子取负值也可以用于表示圆弧或者整圆,但是曲线会失去凸包性质,不利于造型设计和曲线控制。因此,在圆弧和整圆的 NURBS 或贝齐尔表示中,假定权因子均取正值。

1. 圆弧的有理二次贝齐尔表示

考查基于有理二次贝齐尔曲线来表示圆弧。由于有理二次贝齐尔曲线的两条控制边相交且与曲线相切,可以想象一条有理二次贝齐尔曲线在权因子均为有限大正值时仅可表示圆心角小于 180° 的圆弧。

如图 5.21 所示,给定圆心为 O 、圆心角为 θ ($\theta < 180^\circ$)、半径为 r 、两端点为 b_0 和 b_2 的一段圆弧,考虑采用一条标准型有理二次贝齐尔曲线来表示该圆弧,即 $w_0 = w_2 = 1$ 。由贝齐尔曲线的性质可知,控制多边形的边 b_0b_1 、 b_1b_2 分别与圆弧相切于点 b_0 与 b_2 ,有 $b_0b_1 \perp Ob_0$, $b_1b_2 \perp Ob_2$ 。因此,由圆弧两端点 b_0 与 b_2 、圆心角 θ 以及半径 r 即可计算出有理二次贝齐尔曲线中间控制顶点 b_1 的坐标。此时,还剩权因子 w_1

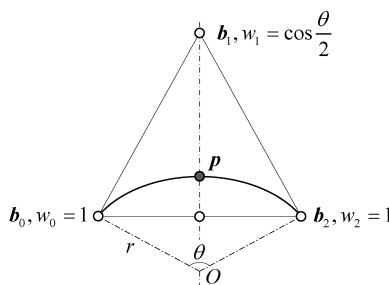


图 5.21 圆弧的有理二次贝齐尔表示

未知。令点 m 为线段 b_0b_2 的中点,点 p 为线段 mb_1 与圆弧的交点。根据几何关系,可得

$$|mp| = r - r \cos \frac{\theta}{2}, \quad |pb_1| = \frac{r}{\cos \frac{\theta}{2}} - r \quad (5.61)$$

由式(5.59)中参数 ρ 的定义及其与权因子 w_1 的关系,有

$$\frac{|mp|}{|pb_1|} = \frac{r - r \cos \frac{\theta}{2}}{\frac{r}{\cos \frac{\theta}{2}} - r} = \cos \frac{\theta}{2} = \frac{\rho}{1 - \rho} = w_1 \quad (5.62)$$

因此,有理二次贝齐尔曲线中间控制顶点 b_1 的权因子取值为 $\cos(\theta/2)$ 。对于非标准型有理二次贝齐尔曲线,可以通过形状因子 $k = 1/\cos^2(\theta/2)$ 来调整 3 个权因子。

当圆心角 $\theta < 180^\circ$ 时,可以采用一条有理二次贝齐尔曲线来表示圆弧。但是随着角度增大,曲线的参数化和凸包性都会变差,特别是当角度接近 180° 时。因此,有理二次贝齐尔曲线通常用来表示圆心角 $\theta \leq 90^\circ$ 的圆弧。当圆心角 $\theta > 90^\circ$ 时,可以采用含有内节点的 NURBS 曲线来表示,也可以基于高阶有理贝齐尔曲线来表示。

2. 圆弧的 NURBS 表示

有理二次贝齐尔曲线可以看作没有内节点的二次 NURBS 曲线。因此,可以通过节点插入的方式来增加曲线控制变量。尝试对图 5.20 中的有理二次贝齐尔曲线进行节点插入,假定 3 个控制坐标采用行矢量表示,则它们的齐次坐标表示为

$$\mathbf{b}_0^w = [\mathbf{b}_0, 1], \quad \mathbf{b}_1^w = \left[\mathbf{b}_1 \cos\left(\frac{\theta}{2}\right), \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \right], \quad \mathbf{b}_2^w = [\mathbf{b}_2, 1] \quad (5.63)$$

由于 NURBS 曲线在齐次空间的曲线为非有理 B 样条曲线,可以采用 B 样条的节点插入算法来计算新控制顶点。如图 5.21(a)所示,插入节点 $\bar{u}=0.5$,利用伯姆节点插入算法可得

$$\begin{aligned} \alpha_1^1 &= 0.5, \quad \mathbf{b}_1^{1w} = \alpha_1^1 \mathbf{b}_1^w + (1 - \alpha_1^1) \mathbf{b}_0^w = \left[\frac{1}{2} (\mathbf{b}_0 + \mathbf{b}_1 \cos(\theta/2)), \frac{1}{2} (1 + \cos(\theta/2)) \right] \\ \alpha_2^1 &= 0.5, \quad \mathbf{b}_2^{1w} = \alpha_2^1 \mathbf{b}_2^w + (1 - \alpha_2^1) \mathbf{b}_1^w = \left[\frac{1}{2} (\mathbf{b}_2 + \mathbf{b}_1 \cos(\theta/2)), \frac{1}{2} (1 + \cos(\theta/2)) \right] \end{aligned} \quad (5.64)$$

将齐次坐标投影回低一维空间,插入节点后的 4 个新控制顶点可以表示为

$$\bar{\mathbf{b}}_0 = \mathbf{b}_0, \quad \bar{\mathbf{b}}_1 = \frac{\mathbf{b}_0 + \mathbf{b}_1 \cos(\theta/2)}{1 + \cos(\theta/2)}, \quad \bar{\mathbf{b}}_2 = \frac{\mathbf{b}_2 + \mathbf{b}_1 \cos(\theta/2)}{1 + \cos(\theta/2)}, \quad \bar{\mathbf{b}}_3 = \mathbf{b}_3 \quad (5.65)$$

相应地,权因子表示为

$$w_0 = w_3 = 1, \quad w_1 = w_2 = \frac{1}{2} (1 + \cos(\theta/2)) = \cos^2(\theta/4) \quad (5.66)$$

对应的 NURBS 曲线的节点矢量为

$$U = \{0, 0, 0, 0.5, 1, 1, 1\} \quad (5.67)$$

也可以将曲线等分为两段,采用分段有理贝齐尔曲线来表示,如图 5.21(b)所示。此时曲线含有 5 个控制顶点,其权因子和节点矢量如下

$$w_0 = w_2 = w_4 = 1, \quad w_1 = w_3 = \cos(\theta/4), \quad U = \{0, 0, 0, 0.5, 0.5, 1, 1, 1\} \quad (5.68)$$

注意,图 5.22(b)给出的分段有理贝齐尔曲线并不是通过对图 5.22(a)中的 NURBS 曲线进行插入节点 $\bar{u}=0.5$ 得到。图 5.22(a)和图 5.22(b)具有不同的参数化,其中分段有理贝齐尔表现出更好的参数化,但是在表达上多了一个控制顶点和一个内节点,在内节点处的参数连续性也降低一阶。取 $\Delta u=0.05$ 对曲线进行等分,图 5.23 展示了两种参数化下等分点的位置。

当圆心角 $90^\circ < \theta \leq 180^\circ$ 时,建议采用图 5.22 所给出的两种方法来表示圆弧。相比于采用没有内节点有理二次贝齐尔曲线,可以获得更好的凸包性。如果不希望出现内节点,则可以继续采用有理二次贝齐尔曲线。

当圆心角 $180^\circ < \theta \leq 270^\circ$ 或 $270^\circ < \theta \leq 360^\circ$ 时,可以将圆心角进行三等分或者四等分,并根据相切和对称关系来计算控制顶点。图 5.24 给出了圆心角 $\theta=240^\circ$ 的圆弧所对应的两种

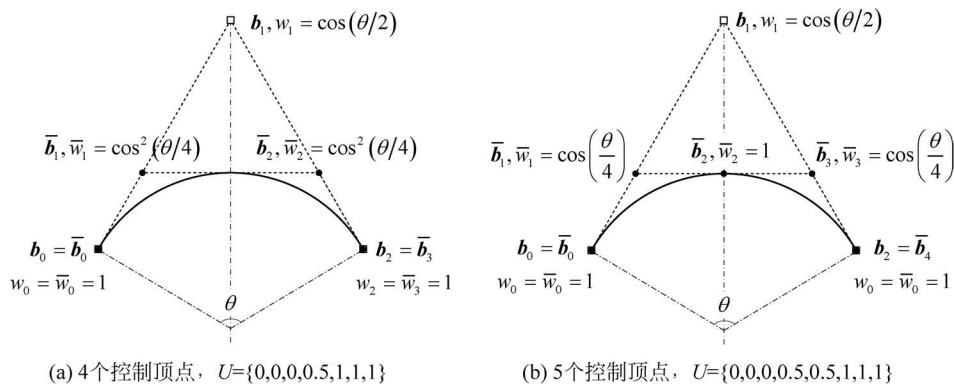


图 5.22 圆弧的两种 NURBS 表示

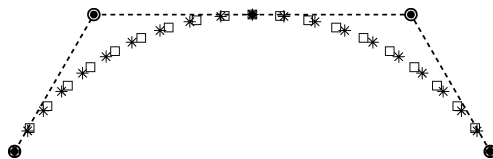
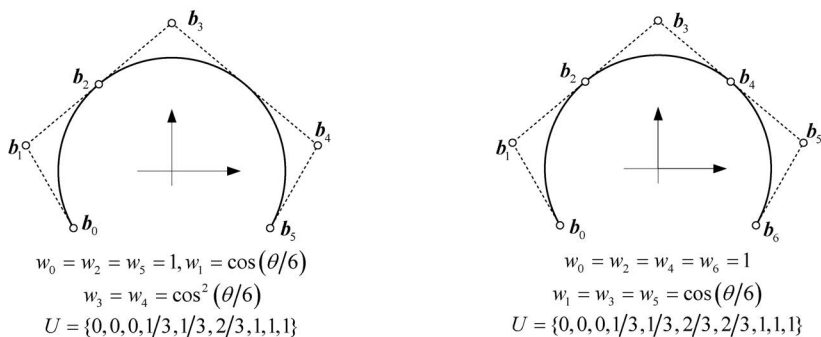


图 5.23 NURBS 表示和分段有理贝齐尔表示的参数化不同

图 5.24 圆心角 $\theta=240^\circ$ ($180^\circ < \theta \leq 270^\circ$) 圆弧的两种 NURBS 表示方法

NURBS 表示形式,均包含 3 个非零节点区间,其中右侧曲线为分段有理贝齐尔曲线,比左侧曲线多了 1 个控制顶点和 1 个内节点。图 5.25 给出了圆心角 $\theta=300^\circ$ 的圆弧所对应的两种 NURBS 表示形式,均包含 4 个非零节点区间,右侧曲线同样为分段有理贝齐尔曲线,比左侧曲线多了 2 个控制顶点和 2 个内节点。

3. 圆弧的有理三次贝齐尔表示

通过对有理二次贝齐尔曲线进行升阶,可以得到三次或者更高次数的有理贝齐尔曲线。高次有理贝齐尔曲线具有更多的控制顶点,可以表示圆心角 $\theta > 90^\circ$ 的圆弧曲线,同时提升曲线连续性。

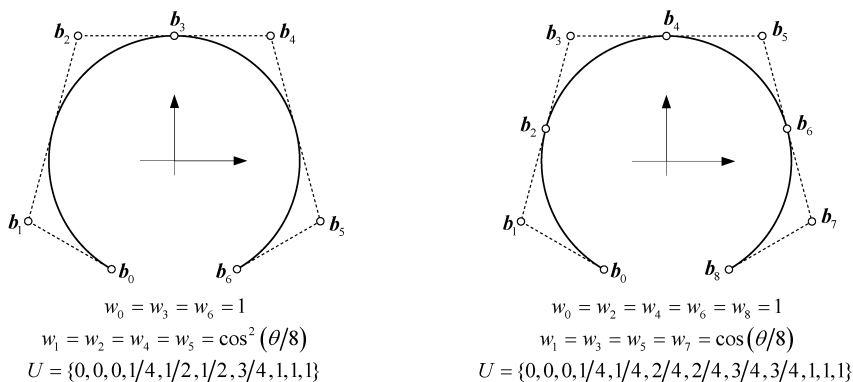


图 5.25 圆心角 $\theta=300^\circ$ ($270^\circ < \theta \leq 320^\circ$) 圆弧的两种 NURBS 表示方法

采用贝齐尔升阶算法对齐次空间的二次贝齐尔曲线进行升阶一次, 根据式(5.63)给出的齐次控制顶点, 可得有理三次贝齐尔曲线的 4 个齐次控制顶点 $\bar{\mathbf{b}}_i^w$ ($i=0, 1, 2, 3$) 分别为

$$\begin{aligned}
 \bar{\mathbf{b}}_0^w &= \mathbf{b}_0^w \\
 \bar{\mathbf{b}}_1^w &= \frac{1}{3}\mathbf{b}_0^w + \frac{2}{3}\mathbf{b}_1^w = \left[\frac{\mathbf{b}_0 + 2\mathbf{b}_1 \cos(\theta/2)}{3}, \frac{1 + 2\cos(\theta/2)}{3} \right] \\
 \bar{\mathbf{b}}_2^w &= \frac{2}{3}\mathbf{b}_1^w + \frac{1}{3}\mathbf{b}_2^w = \left[\frac{\mathbf{b}_2 + 2\mathbf{b}_1 \cos(\theta/2)}{3}, \frac{1 + 2\cos(\theta/2)}{3} \right] \\
 \bar{\mathbf{b}}_3^w &= \mathbf{b}_2^w
 \end{aligned} \tag{5.69}$$

将其投影到低一维空间, 有

$$\bar{\mathbf{b}}_0 = \mathbf{b}_0, \quad \bar{\mathbf{b}}_1 = \frac{\mathbf{b}_0 + 2\mathbf{b}_1 \cos(\theta/2)}{1 + 2\cos(\theta/2)}, \quad \bar{\mathbf{b}}_2 = \frac{\mathbf{b}_2 + 2\mathbf{b}_1 \cos(\theta/2)}{1 + 2\cos(\theta/2)}, \quad \bar{\mathbf{b}}_3 = \mathbf{b}_2 \tag{5.70}$$

对应的权因子取值为

$$\bar{w}_0 = \bar{w}_3 = 1, \quad \bar{w}_1 = \bar{w}_2 = \frac{1 + 2\cos(\theta/2)}{3} \tag{5.71}$$

若要求权因子保持非负性, 根据式(5.71)可知, 圆心角需满足 $0^\circ < \theta < 240^\circ$ 。图 5.26(a) 展示了圆心角 $\theta=120^\circ$ 圆弧的有理三次贝齐尔曲线表达, 黑色实心点为有理三次贝齐尔曲线的控制顶点, 空心点为有理二次贝齐尔曲线的控制顶点。

注意到, 当圆心角 $180^\circ < \theta < 240^\circ$ 时, 有理二次贝齐尔曲线采用正权因子无法实现。可以首先采用负权因子构造不满足凸包性质的有理二次贝齐尔曲线圆弧, 再对其升阶构造满足凸包性质的有理三次贝齐尔曲线圆弧。采用负权因子构造圆心角 $180^\circ < \theta < 240^\circ$ 的圆弧时, 依旧选取圆弧的首末点作为控制顶点 $\mathbf{b}_0$ 与 $\mathbf{b}_2$, 将两端点处切线的交点作为中间控制顶点 $\mathbf{b}_1$, 权因子依旧取值 $w_0 = w_1 = 1, w_2 = \cos(\theta/2)$ 。此时, 权因子 $w_2 < 0$, 圆弧不再位于控制顶点 $\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1$ 与 $\mathbf{b}_2$ 构成的凸包内部, 如图 5.26(b) 所示。对曲线进行升阶得到有理三次贝齐尔曲线, 得到控制顶点 $\bar{\mathbf{b}}_0, \bar{\mathbf{b}}_1, \bar{\mathbf{b}}_2$ 与 $\bar{\mathbf{b}}_3$, 可以发现圆弧位于三次曲线控制顶点所构成的

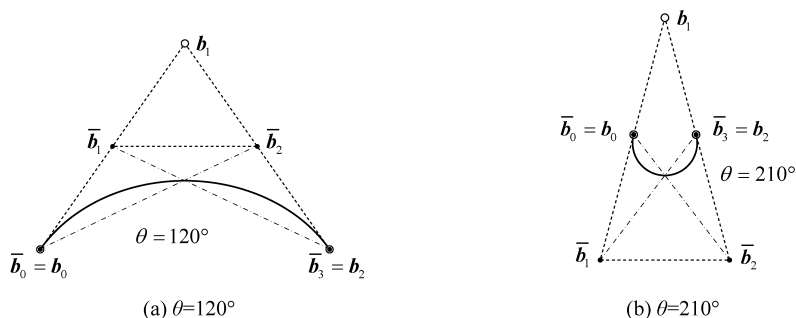


图 5.26 圆弧的有理三次贝齐尔曲线表示

凸包内。

通过此种方式构造的有理三次贝齐尔曲线,具有两个特点:①控制多边形三条边的长度相等;②控制顶点所形成四边形的对角线的交点为圆弧的中点。

4. 半圆的有理贝齐尔和 NURBS 表示

对于半圆,其圆弧端点切线并不相交。从某种意义上,也可以认为其相交于无穷远处。根据齐次坐标定义,对于无穷远处的点可以认为其权因子为 0。因此,半圆可以采用两个端点 b_0 、 b_2 和一个表示无穷远点的方向矢量 $\vec{b}_1$ 来定义。方向矢量 $\vec{b}_1$ 垂直于 $\overline{b_0 b_2}$,且模长等于圆弧的半径 r 。如图 5.27 所示,以半圆的圆心作为坐标原点,并令半圆位于 x - y 平面上,则该半圆的 3 个控制顶点的齐次坐标可表示为

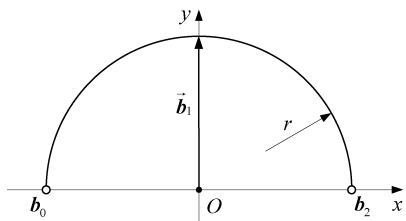


图 5.27 含有一个无穷远控制顶点的半圆定义

$$\mathbf{b}_0^w = [-r, 0, 1], \quad \mathbf{b}_1^w = [0, r, 0], \quad \mathbf{b}_2^w = [r, 0, 1] \quad (5.72)$$

其中第三维坐标表示权因子。将上述坐标代入有理二次贝齐尔曲线方程(5.43),可得

$$\begin{aligned} \mathbf{p}^w(u) &= \sum_{i=0}^2 \mathbf{b}_i^w N_{i,p}(u) = (1-u)^2 \mathbf{b}_0^w + 2u(1-u) \mathbf{b}_1^w + u^2 \mathbf{b}_2^w \\ &= [r(2u-1), 2ru(1-u), (1-u)^2 + u^2], \quad u \in [0, 1] \end{aligned} \quad (5.73)$$

将其投影到二维空间,可得曲线上点的 x 和 y 坐标

$$x(u) = \frac{r(2u-1)}{(1-u)^2 + u^2}, \quad y(u) = \frac{2ru(1-u)}{(1-u)^2 + u^2} \quad (5.74)$$

可以发现式(5.74)满足

$$[x(u)]^2 + [y(u)]^2 = r^2 \quad (5.75)$$

这也验证了式(5.72)和式(5.73)确实表示半径为 r 的半圆。

对表示半圆的有理二次贝齐尔曲线插入节点 $u=0.5$,可得如图 5.28(a)所示含单个内

节点的 NURBS 曲线。曲线恢复凸包特性,控制顶点、节点矢量和权因子表示为

$$\begin{cases} \mathbf{b}_0 = [-r, 0], & \mathbf{b}_1 = [-r, r], & \mathbf{b}_2 = [r, r], & \mathbf{b}_3 = [r, 0] \\ w_0 = w_3 = 1, w_1 = w_2 = 1/2 \\ U = \{0, 0, 0, 0.5, 1, 1, 1\} \end{cases} \quad (5.76)$$

对表示半圆的有理二次贝齐尔曲线升阶一次,可得如图 5.28(b)所示有理三次贝齐尔曲线。曲线的控制顶点、节点矢量和权因子表示为

$$\begin{cases} \mathbf{b}_0 = [-r, 0], & \mathbf{b}_1 = [-r, 2r], & \mathbf{b}_2 = [r, 2r], & \mathbf{b}_3 = [r, 0] \\ w_0 = w_3 = 1, w_1 = w_2 = 1/3 \end{cases} \quad (5.77)$$

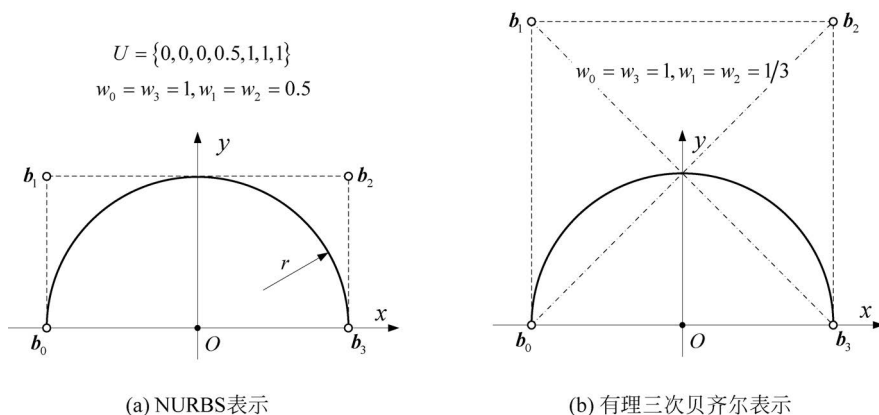


图 5.28 半圆的 NURBS 表示和有理三次贝齐尔表示

5. 整圆的有理贝齐尔和 NURBS 表示

整圆相当于圆心角为 360° 的圆弧,参考大角度圆弧的 NURBS 表达形式,可以采用含内节点的 NURBS 曲线来表示。下面介绍 3 种整圆表示方法。

整圆最经典的构造方法是基于 9 个控制顶点的分段有理二次贝齐尔曲线,如图 5.29 所示。整圆曲线相当于 4 段圆心角为 90° 的圆弧拼接而成。此时,整圆的控制顶点全部位于整圆的外切正方形上,且位于该正方形的 4 个角点和 4 条边的中点。插值于整圆的控制顶点拥有权因子 $w = 1$,不插值于整圆的控制顶点的权因子 $w = \sqrt{2}/2$ 。

也可以将整圆视作两个半圆的组合。由图 5.28(a)给出的 NURBS 半圆曲线,可以采用 7 个控制顶点来表示整圆,如图 5.30 所示。相比于图 5.29 给出的 9 控制顶点表示方法,7 控制顶点表示方法减少了 2 个控制顶点和 2 个内节点,但是曲线参数化不如 9 控制顶点整圆曲线。

减少整圆的分段贝齐尔的数量,还采用含 3 个非零节点区间的分段有理二次贝齐尔曲线来定义整圆,如图 5.31 所示,整圆共包含 7 个控制顶点。每个分段曲线的圆心角为 120° 。控制顶点位于整圆的外切等边三角形上,且位于三角形的角点和边的中点。

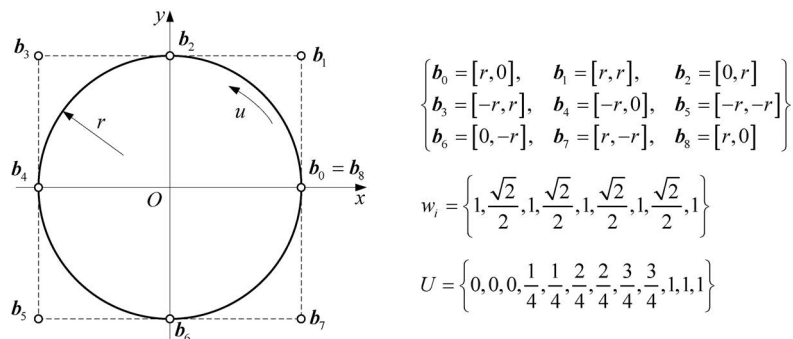


图 5.29 基于 9 个控制顶点定义的整圆曲线, 控制顶点位于正方形上

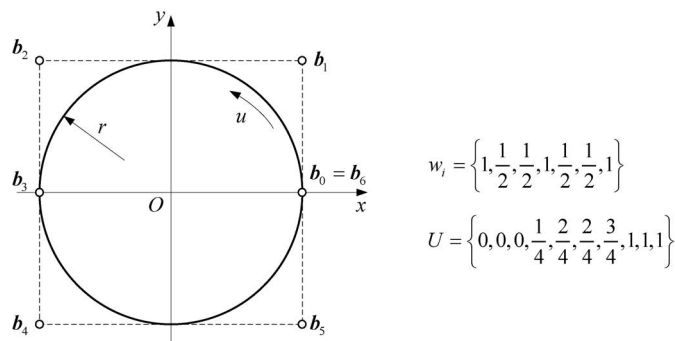


图 5.30 基于 7 个控制顶点定义的整圆曲线, 控制顶点位于正方形上

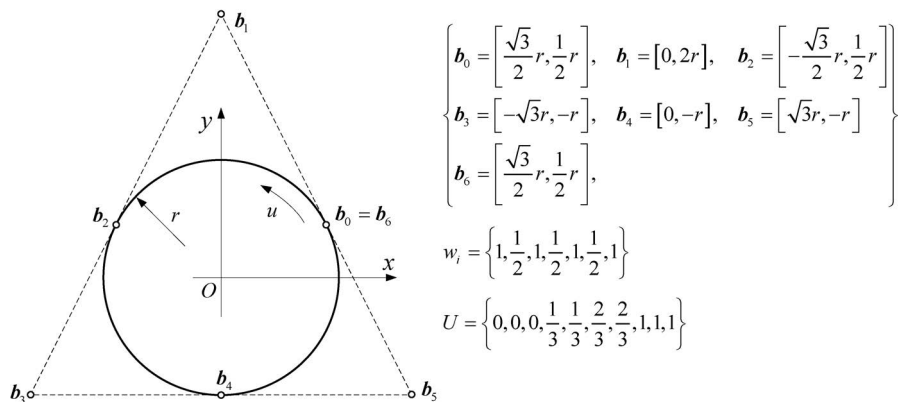


图 5.31 基于 7 个控制顶点定义的整圆曲线, 控制顶点位于三角形上

上述三种整圆表示方法都以 x 轴上点作为起始点, 实际应用中并没有此限制。可以采用整圆上的任意一点作为起始点, 控制多边形根据起始点的位置进行相应旋转即可。