

第2章介绍了连续时间信号与系统的时域分析,以时间为自变量,讨论了线性时不变系统数学模型的建立、系统时域特性分析以及零输入响应和零状态响应的求解方法。信号和系统的分析都是在时间域完成的,这种方法物理概念清晰,直观明了,是信号与系统分析的基础。

时域分析中以单位冲激信号为基本单元,将任意信号分解为不同时刻、不同强度的冲激信号的组合,这种分解方式为系统零状态响应的卷积分析法奠定了基础。实际上信号存在多种分解方式,如果以正余弦信号和复指数信号作为基本单元,则可以从频率组角度来分析信号,从而奠定频域分析的基础。

本章从信号的正交分解入手,介绍周期信号傅里叶级数展开的两种形式,并引入信号频谱图的描述方法。对于非周期信号,通过傅里叶变换揭示信号时间特性和频率特性之间的内在联系。利用频域分析方法讨论了系统特性和响应求解,从而建立信号通过线性系统的一些重要概念,包括无失真传输、理想低通滤波器和时域采样等。最后介绍了频域分析在实际通信系统中的相关应用。

3.1 信号的正交分解

3.1.1 正交函数集

信号的正交分解是指将信号分解成一组相互正交的信号分量之和。所谓信号正交是指信号的内积为零,即如果信号 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ 在区间 (t_1, t_2) 正交,则有

$$\int_{t_1}^{t_2} f_1(t) \cdot f_2^*(t) dt = 0 \quad (3.1-1)$$

式中, $f_2^*(t)$ 是信号 $f_2(t)$ 的共轭。

如果 n 个互不相同的函数 $f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t)$ 构成一个函数集,当这些函数在区间 (t_1, t_2) 内满足

$$\int_{t_1}^{t_2} f_i(t) \cdot f_j^*(t) dt = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ K_i \neq 0, & i = j \end{cases} \quad (3.1-2)$$

则称此函数集为区间 (t_1, t_2) 上的正交函数集,函数 $f_i(t)$ 称为基函数。式(3.1-2)中, K_i 为非零常数。如果在正交函数集 $\{f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t)\}$ 之外,不存在任何能量有限信号与各 $f_i(t)$ 正交,则称此函数集为区间 (t_1, t_2) 上的完备正交函数集。完备正交函数集有很多种,本章用到的三角函数集 $\{1, \sin\omega_0 t, \cos\omega_0 t, \dots, \sin n\omega_0 t, \cos n\omega_0 t, \dots\}$ 和复指数函数集 $\{1, e^{j\omega_0 t}, e^{-j\omega_0 t}, \dots, e^{jn\omega_0 t}, e^{-jn\omega_0 t}, \dots\}$ 都是区间 $(t_0, t_0 + T)$ ($T = \frac{2\pi}{\omega_0}$, 表示函数的周期) 上的完备正交函数集。

3.1.2 正交分解

设有 n 个函数的函数集 $\{f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t)\}$ 是区间 (t_1, t_2) 上的完备正交函数

集,则任意函数 $g(t)$ 可以用这 n 个函数的线性组合来近似,即

$$g(t) \approx C_1 f_1(t) + C_2 f_2(t) + \cdots + C_n f_n(t) = \sum_{j=1}^n C_j f_j(t) \quad (3.1-3)$$

其中近似表示引起的误差为

$$e(t) = g(t) - \sum_{j=1}^n C_j f_j(t) \quad (3.1-4)$$

要使得近似表示与原函数的误差最小,就必须合理选择系数 C_j ,通常采用最小均方误差准则。均方误差定义为

$$\overline{\epsilon^2(t)} = \frac{1}{t_1 - t_2} \int_{t_1}^{t_2} \left| g(t) - \sum_{j=1}^n C_j f_j(t) \right|^2 dt \quad (3.1-5)$$

为使均方误差最小,需要式(3.1-5)对系数 C_j 的导数为零,计算可得

$$C_j = \frac{\int_{t_1}^{t_2} g(t) f_j^*(t) dt}{\int_{t_1}^{t_2} f_j(t) f_j^*(t) dt} = \frac{1}{K_j} \int_{t_1}^{t_2} g(t) f_j(t) dt, \quad j=1,2,\dots,n \quad (3.1-6)$$

此时最小均方误差为

$$\overline{\epsilon^2(t)} = \frac{1}{t_1 - t_2} \left[\int_{t_1}^{t_2} |g(t)|^2 dt - \sum_{j=1}^n \int_{t_1}^{t_2} |C_j f_j(t)|^2 dt \right] \geq 0 \quad (3.1-7)$$

当近似表示所取的函数项数 n 越大,均方误差越小。当 $n \rightarrow \infty$ 时,均方误差为零,此时有

$$\int_{t_1}^{t_2} |g(t)|^2 dt = \sum_{j=1}^n \int_{t_1}^{t_2} |C_j f_j(t)|^2 dt \quad (3.1-8)$$

式(3.1-8)称为帕塞瓦尔方程。其含义为,在区间 (t_1, t_2) 上,信号 $g(t)$ 的能量恒等于在完备正交函数集分解的各正交分量能量之和,也就是说正交分解满足能量守恒。

根据上述分析可知,正交分解中由于基函数之间无重叠信息,避免了重复表示。同时基函数的系数 C_j 相互独立,可以通过内积计算得到,在一定程度上可以避免求解耦合方程,计算复杂度低。

采用正交函数集对信号进行分解的方法多种多样。三角函数集是工程中常用的正交函数集。三角函数集 $\{1, \sin\omega_0 t, \cos\omega_0 t, \dots, \sin n\omega_0 t, \cos n\omega_0 t, \dots\}$ 中各函数间具有以下关系:

$$\begin{cases} \int_{t_0}^{t_0+T} \sin^2 n\omega_0 t dt = \int_{t_0}^{t_0+T} \cos^2 n\omega_0 t dt = \frac{T}{2} \\ \int_{t_0}^{t_0+T} \sin m\omega_0 t \cdot \sin n\omega_0 t dt = \int_{t_0}^{t_0+T} \cos m\omega_0 t \cdot \cos n\omega_0 t dt = 0, \quad m \neq n \\ \int_{t_0}^{t_0+T} \sin m\omega_0 t \cdot \cos n\omega_0 t dt = 0 \end{cases} \quad (3.1-9)$$

式中, T 为三角函数的周期; m 和 n 为任意正整数。从式(3.1-9)可以看出,在区间 $(t_0, t_0 + T)$ 内,各正弦函数和余弦函数互相正交,也就是说 $\sin n\omega_0 t$ 和 $\cos n\omega_0 t$ 合起来形成了正交函数集,其中 n 为 $0, 1, 2, \dots$ 整数。当所取函数为无穷多个时,三角函数集为完备正交函数集。

复指数函数集 $\{1, e^{j\omega_0 t}, e^{-j\omega_0 t}, \dots, e^{jn\omega_0 t}, e^{-jn\omega_0 t}, \dots\}$ 中各函数也满足下列关系:

$$\begin{cases} \int_{t_0}^{t_0+T} e^{jn\omega_0 t} \cdot (e^{jm\omega_0 t})^* dt = T \\ \int_{t_0}^{t_0+T} e^{jn\omega_0 t} \cdot (e^{jm\omega_0 t})^* dt = 0, \quad m \neq n \end{cases} \quad (3.1-10)$$

式中, T 为指数函数的周期; m, n 为整数。式(3.1-10)说明复指数函数集在区间 $(t_0, t_0 + T)$ 上也满足正交函数集的条件。当 n 取 $-\infty \sim +\infty$ 的所有整数时, 复指数函数集是完备正交函数集。

由于三角函数集和复指数函数集中各项都是以 T 为周期进行重复的函数, 即

$$\begin{cases} \sin n\omega_0 t = \sin n\omega_0 (t + kT) \\ \cos n\omega_0 t = \cos n\omega_0 (t + kT), \quad k \text{ 为任意整数} \\ e^{jn\omega_0 t} = e^{jn\omega_0 (t+kT)} \end{cases} \quad (3.1-11)$$

因此用这两个函数集表示的函数在区间 $(t_0, t_0 + T)$ 以外都是该区的重复, 是一个周期性函数。也就是说, 可以利用三角函数和复指数函数的线性组合来分析周期信号。

思考题

1. 完备正交函数集有什么特点?
2. 对信号进行正交完备集分解有什么优点?

3.2 周期信号的傅里叶级数

基于正交分解理论, 可知三角函数集和复指数函数集都是完备正交函数集, 因此可以基于这两个函数集对信号进行分解。本节利用三角函数集和复指数函数集对周期信号进行正交分解, 也就是三角形形式傅里叶级数展开和复指数形式傅里叶级数展开。

3.2.1 周期信号三角形形式的傅里叶级数展开

由 3.1 节分析可知, 周期信号 $f(t)$ 可以用完备正交的三角函数集 $\{1, \sin\omega_0 t, \cos\omega_0 t, \dots, \sin n\omega_0 t, \cos n\omega_0 t, \dots\}$ 来表示, 即

$$\begin{aligned} f(t) = & a_0 + a_1 \cos\omega_0 t + b_1 \sin\omega_0 t + a_2 \cos 2\omega_0 t + \\ & b_2 \sin 2\omega_0 t + \dots + a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t + \dots \end{aligned} \quad (3.2-1)$$

式(3.2-1)说明周期信号可以由不同频率的正弦信号线性组合而成, 因此可以从频率构成角度来分析信号。这一思想由法国物理学家傅里叶在 1807 年提出, 后人将这一结论命名为傅里叶级数理论。式(3.2-1)可以整理为

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t) \quad (3.2-2)$$



视频

式(3.2-2)称为周期信号三角形式的傅里叶级数展开式。其中, n 为正整数; a_0 为常数, 也称为直流分量; a_n 为余弦分量的振幅; b_n 为正弦分量的振幅; 若周期信号的周期为 T_1 , 则角频率 $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_1}$ 。下面通过波形变换来展示由三角函数叠加得到周期信号的过程。

设正弦信号 $f_1(t)$ 的角频率为 1rad/s , 振幅为 $\frac{4}{\pi}$, 相位为 0 , 则其波形如图 3-1(a) 所示, 数学表达式为

$$f_1(t) = \frac{4}{\pi} \sin t$$

若给信号 $f_1(t)$ 再叠加两个正弦分量 $\frac{4}{3\pi} \sin 3t$ 和 $\frac{4}{5\pi} \sin 5t$, 可得到信号 $f_2(t)$, 其波形如图 3-1(b) 所示, 数学表达式为

$$f_2(t) = \frac{4}{\pi} \sin t + \frac{4}{3\pi} \sin 3t + \frac{4}{5\pi} \sin 5t$$

可以看出 $f_2(t)$ 仍然是周期信号, 其周期与 $f_1(t)$ 相同。若按照此规律将 100 个正弦信号叠加, 则可得到波形如图 3-1(c) 所示的信号 $f_3(t)$, 其表达式为

$$f_3(t) = \sum_{n=0}^{99} \frac{4}{(2n+1)\pi} \sin[(2n+1)t]$$

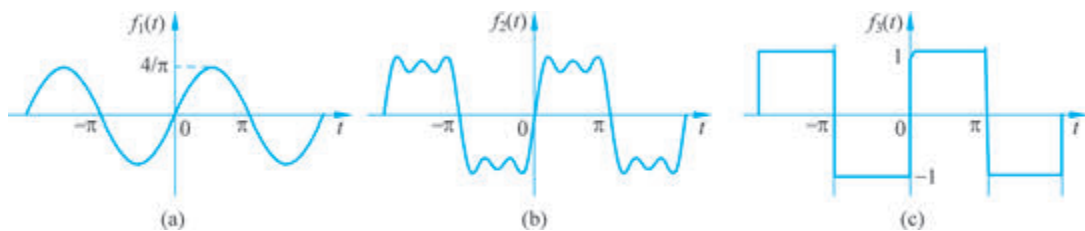


图 3-1 正弦信号合成周期矩形信号示意图

可以看出, 信号 $f_3(t)$ 的波形形状与周期矩形信号非常相似。实际上, 当 n 取到无穷大时, 合成的波形即为周期矩形信号。不仅周期矩形信号可以由不同频率的正弦信号组合而成, 其他的周期信号也具有类似的特点。例如, 图 3-2(a) 为正弦信号 $f_1(t) = \frac{4}{\pi} \sin t$ 的波形, 图 3-2(b) 为 $f_2(t) = \frac{4}{\pi} \sin t - \frac{4}{2\pi} \sin 2t + \frac{4}{3\pi} \sin 3t$ 的波形, 图 3-2(c) 为 $f_3(t) = \sum_{n=1}^{100} (-1)^{n+1} \frac{4}{n\pi} \sin(nt)$ 的波形。可以看出, 随着正弦分量的增加, 信号波形越来越接近周期锯齿波信号。当 n 取到无穷大时, 合成的波形即为周期锯齿波信号。

1829 年, 科学家狄里赫利提出, 周期信号 $f(t)$ 可用式(3.2-2)展开为傅里叶级数需要满足以下三个条件:

- (1) 在一个周期内, 信号连续或者第一类间断点的个数有限;
- (2) 在一个周期内, 信号的极大值和极小值的个数有限;

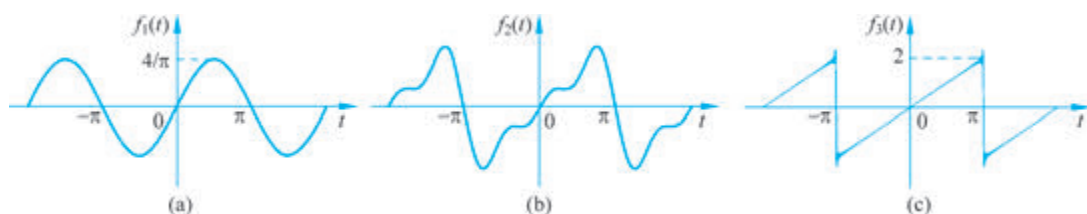


图 3-2 正弦信号合成周期锯齿波信号示意图

(3) 在一个周期内,信号绝对可积,即 $\int_{t_0}^{t_0+T_1} |f(t)| dt < \infty$ 。

通常将上述条件称为狄里赫利条件。工程中常用的实周期信号均满足狄里赫利条件,因此一般不再特殊考虑。

从式(3.2-2)中可以看出,周期信号可以展开为直流和无穷多个不同频率的正弦分量和余弦分量的叠加,各分量的频率均为 ω_0 的整数倍。 a_0 、 a_n 和 b_n 称为傅里叶系数,根据式(3.1-6)计算系数的方法,可知

$$a_0 = \frac{1}{T_1} \int_{t_0}^{t_0+T_1} f(t) dt \quad (3.2-3)$$

$$a_n = \frac{\int_{t_0}^{t_0+T_1} f(t) \cos n\omega_0 t dt}{\int_{t_0}^{t_0+T_1} \cos^2 n\omega_0 t dt} = \frac{2}{T_1} \int_{t_0}^{t_0+T_1} f(t) \cos n\omega_0 t dt \quad (3.2-4)$$

$$b_n = \frac{\int_{t_0}^{t_0+T_1} f(t) \sin n\omega_0 t dt}{\int_{t_0}^{t_0+T_1} \sin^2 n\omega_0 t dt} = \frac{2}{T_1} \int_{t_0}^{t_0+T_1} f(t) \sin n\omega_0 t dt \quad (3.2-5)$$

通常为了计算方便,积分区间取 $0 \sim T_1$ 或 $-\frac{T_1}{2} \sim \frac{T_1}{2}$ 。根据数学运算规则可知, a_n 是关于 $n\omega_0$ 的偶函数, b_n 是关于 $n\omega_0$ 的奇函数。若周期信号 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ 的周期均为 T_1 ,则它们的角频率 ω_0 相同,它们包含的频率分量均为 ω_0 的整数倍,但由于傅里叶系数 a_n 和 b_n 的不同,使得各频率分量的振幅不同,所以叠加后得到两个不同的周期信号。图 3-1 和图 3-2 就说明了这一点。

例 3-1 已知周期矩形脉冲信号的时域波形如图 3-3 所示,计算其三角形式的傅里叶级数展开式。

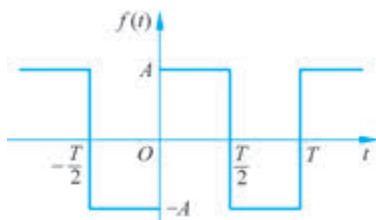


图 3-3 例 3-1 周期矩形脉冲信号的时域波形

解: 从图 3-3 可以看出, 周期信号 $f(t)$ 是关于 t 的奇函数, 故可得

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) dt = 0 \\ a_n &= \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos n\omega_0 t dt = 0 \\ b_n &= \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \sin n\omega_0 t dt = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} A \sin n\omega_0 t dt \\ &= \frac{4A}{T} \frac{1}{n\omega_0} (-\cos n\omega_0 t) \Big|_0^{\frac{T}{2}} = \frac{4A}{n\omega_0 T} (1 - \cos n\omega_0 \frac{T}{2}) \\ &= \frac{2A}{n\pi} (1 - \cos n\pi) \end{aligned}$$

将系数代入式(3.2-2)中, 可得该周期矩形脉冲信号的三角形傅里叶级数展开式为

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2A}{n\pi} (1 - \cos n\pi) \sin(n\omega_0 t) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4A}{n\pi} \sin n\omega_0 t, \quad n = 1, 3, 5, \dots \\ &= \frac{4A}{\pi} \sin \omega_0 t + \frac{4A}{3\pi} \sin 3\omega_0 t + \frac{4A}{5\pi} \sin 5\omega_0 t + \dots \end{aligned}$$

由展开式可以看出, 由于 $a_0 = 0, a_n = 0$, 故图 3-3 所示的周期矩形脉冲信号中仅包含了奇次频率的正弦分量, 无直流和余弦分量, 其中各正弦分量的振幅随着频率的增加而减小。

式(3.2-2)中, $a_n \cos n\omega_0 t$ 和 $b_n \sin n\omega_0 t$ 都是角频率为 $n\omega_0$ 的三角分量, 可以利用三角函数的计算公式, 将同频率的正弦分量和余弦分量进行合并, 得到

$$\begin{aligned} f(t) &= a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t) \\ &= a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \left(\frac{a_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}} \cos n\omega_0 t - \frac{-b_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}} \sin n\omega_0 t \right) \end{aligned}$$

令 $c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}, \theta_n = \arctan \frac{-b_n}{a_n}$, 可得

$$\begin{aligned} f(t) &= a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} c_n (\cos \theta_n \cos n\omega_0 t - \sin \theta_n \sin n\omega_0 t) \\ &= c_0 \cos \theta_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} c_n \cos(n\omega_0 t + \theta_n) \end{aligned} \quad (3.2-6)$$

式(3.2-6)称为标准三角形式的傅里叶级数展开式。其中, $c_0 = |a_0|$ 是直流分量的振幅; θ_0 是直流分量的相位。当 $a_0 \geq 0$ 时, θ_0 取值为 0; 当 $a_0 < 0$ 时, θ_0 取值为 π 或 $-\pi$ 。 c_n 为 $n\omega_0$ 频率分量的振幅, θ_n 为 $n\omega_0$ 频率分量的相位。

标准三角形式的傅里叶级数展开式中各正弦分量的频率为 $n\omega_0$, 是角频率 ω_0 的整数倍。通常把 $n=1$ 时的正弦分量 $c_1 \cos(\omega_0 t + \theta_1)$ 称为基波, ω_0 为基波频率, c_1 为基波振幅, θ_1 为基波相位; $n>1$ 以后的正弦分量称为谐波, 如 $c_2 \cos(2\omega_0 t + \theta_2)$ 称为二次谐波, $2\omega_0$ 为二次谐波频率, c_2 为二次谐波振幅, θ_2 为二次谐波相位。以此类推, $c_n \cos(n\omega_0 t + \theta_n)$ 就是 n 次谐波, $n\omega_0$ 是 n 次谐波频率, c_n 是 n 次谐波振幅, θ_n 是 n 次谐波相位。由于 c_n 表示振幅, 根据计算公式可知 $c_n \geq 0$, 同时为了保证相位的唯一性, 通常规定 $-\pi \leq \theta_n \leq \pi$ 。

由式(3.2-6)可以看出, 周期信号由直流、基波和各次谐波线性组合而成。其中每个正弦分量均由其频率 $n\omega_0$ 、振幅 c_n 和相位 θ_n 三个要素决定。根据此式, 可以清楚地了解该周期信号中含有哪些频率分量, 各频率分量的振幅和相位分别是多少。也就是说, 通过三角形式的傅里叶级数展开式, 可以将周期信号的特性分析转换为其包含的各频率分量的振幅、相位的计算。

例 3-2 已知周期信号 $f(t)$ 如下, 写出其标准三角形式的傅里叶级数展开式。

$$f(t) = 1 + \sqrt{2} \cos \omega_0 t - \cos\left(2\omega_0 t + \frac{5\pi}{4}\right) + \sqrt{2} \sin \omega_0 t + 0.5 \sin 3\omega_0 t$$

解: 由三角函数的运算, 可将表达式改写为

$$\begin{aligned} f(t) &= 1 + (\sqrt{2} \cos \omega_0 t + \sqrt{2} \sin \omega_0 t) + \cos\left(2\omega_0 t + \frac{5\pi}{4} - \pi\right) + 0.5 \cos\left(3\omega_0 t - \frac{\pi}{2}\right) \\ &= 1 + 2\cos\left(\omega_0 t - \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(2\omega_0 t + \frac{\pi}{4}\right) + 0.5 \cos\left(3\omega_0 t - \frac{\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

从结果中可以看出, 相较于一般三角形式的傅里叶级数展开式, 标准三角形式的傅里叶级数展开式能更直观地看出信号包含的频率信息。本例中周期信号 $f(t)$ 含有 0 、 ω_0 、 $2\omega_0$ 和 $3\omega_0$ 四个频率的正弦分量。其中, 频率为 0 的正弦分量, 振幅为 1 , 相位为 0 ; 频率为 ω_0 的正弦分量, 振幅为 2 , 相位为 $-\frac{\pi}{4}$; 频率为 $2\omega_0$ 的正弦分量, 振幅为 1 , 相位为 $\frac{\pi}{4}$; 频率为 $3\omega_0$ 的正弦分量, 振幅为 0.5 , 相位为 $-\frac{\pi}{2}$ 。

3.2.2 周期信号三角形式的频谱

在分析信号的时域特性时, 通常采用表达式和波形图来描述信号, 其中波形图可以直观地呈现信号随时间的变化情况。3.2.1 节中将周期信号展开为傅里叶级数后, 每个正弦分量都可以用振幅、频率和相位三个要素来确定。为了更加直观、清楚地表示信号中所包含的频率分量, 以及各频率分量的振幅和相位信息, 可以借助频谱图来描述信号的频率特性。

一般来说, 周期信号的频谱图包含振幅谱图和相位谱图两部分。

(1) 振幅谱图: 以频率为横轴, 振幅为纵轴, 用长短不同的谱线来表示信号所包含的各正弦分量的振幅大小。



视频

(2) 相位谱图: 以频率为横轴, 相位为纵轴, 用长短不同的谱线来表示信号各频率分量的相位。

由式(3.2-6)可知, 周期信号可展开为标准三角形式的傅里叶级数, 即

$$f(t) = c_0 \cos \theta_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} c_n \cos(n\omega_0 t + \theta_n)$$

式中, c_n 为不同频率正弦信号的振幅; θ_n 为不同频率正弦信号的相位。因此 c_n 随 ω 的变化谱线称为周期信号三角形式的振幅谱图, θ_n 随 ω 的变化谱线称为周期信号三角形式的相位谱图。由于在三角形式的傅里叶级数展开式中, n 的取值为 $1 \sim \infty$, 即信号所包含的频率 $\omega \geq 0$, 故振幅谱线和相位谱线只会出现在纵轴和它右边, 且呈现离散的线状图, 因此三角形式的频谱图也称为单边谱。

例 3-3 请画出例 3-2 所示周期信号 $f(t)$ 的振幅谱图和相位谱图。

$$f(t) = 1 + \sqrt{2} \cos \omega_0 t - \cos\left(2\omega_0 t + \frac{5\pi}{4}\right) + \sqrt{2} \sin \omega_0 t + 0.5 \sin 3\omega_0 t$$

解: 为了获得信号 $f(t)$ 所包含的频率分量及各频率分量的振幅和相位信息, 需要先得该周期信号标准三角形式的傅里叶级数展开式。

由例 3-2 的结论可知

$$f(t) = 1 + 2\cos\left(\omega_0 t - \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(2\omega_0 t + \frac{\pi}{4}\right) + 0.5\cos\left(3\omega_0 t - \frac{\pi}{2}\right)$$

故 $f(t)$ 的振幅谱图和相位谱图如图 3-4 所示。

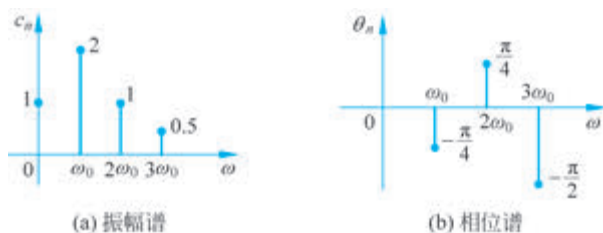


图 3-4 信号频谱图

例 3-4 已知某周期信号的频谱图如图 3-5 所示, 请写出该周期信号的表达式。

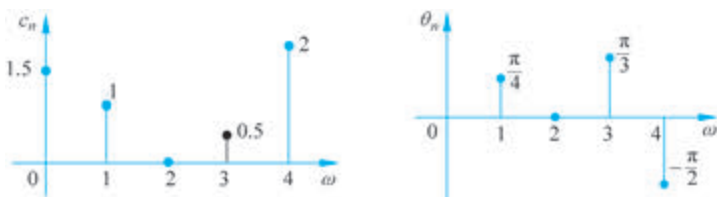


图 3-5 例 3-4 信号的频谱图

解: 由图中可以看出, 信号包含了 0、1、3、4 四个频率, 每个频率对应的振幅和相位如下:
信号包含的频率为

$$\omega = 0, \quad \omega = 1, \quad \omega = 3, \quad \omega = 4$$

对应振幅为

$$c_0 = 1.5, \quad c_1 = 1, \quad c_3 = 0.5, \quad c_4 = 2$$

对应相位为

$$\theta_0 = 0, \quad \theta_1 = \frac{\pi}{4}, \quad \theta_3 = \frac{\pi}{3}, \quad \theta_4 = -\frac{\pi}{2}$$

因此该信号的表达式为

$$f(t) = 1.5 + \cos\left(t + \frac{\pi}{4}\right) + 0.5\cos\left(3t + \frac{\pi}{3}\right) + 2\cos\left(4t - \frac{\pi}{2}\right)$$

从上述例题中可以看出,根据周期信号傅里叶级数展开式能够确定信号中包含的频域信息,可利用频谱图来描述信号中包含的频率、振幅和相位信息。反之,根据频谱图也可以确定周期信号的时域表达式。即周期信号的时域与频域间存在一一对应的关系。

3.2.3 周期信号复指数形式的傅里叶级数展开

3.2.1节中以正弦信号为基本单元介绍了周期信号三角形式的傅里叶级数,实际上与正弦信号具有类似特性的基本单元还有复指数信号 $e^{j\omega t}$,这两种信号都具有正交性、微积分不变性,并且同时具有时间和频率的含义。

根据3.1节分析可知,复指数函数集 $\{1, e^{j\omega_0 t}, e^{-j\omega_0 t}, \dots, e^{jn\omega_0 t}, e^{-jn\omega_0 t}, \dots\}$ 在区间 $(t_0, t_0 + T)$ 上也是完备正交函数集,所以周期为 T 的周期信号 $f(t)$ 可以用复指数信号表示为

$$\begin{aligned} f(t) &= F_0 + F_1 e^{j\omega_0 t} + F_2 e^{j2\omega_0 t} + \dots + F_n e^{jn\omega_0 t} + \dots + \\ &\quad F_{-1} e^{-j\omega_0 t} + F_{-2} e^{-j2\omega_0 t} + \dots + F_{-n} e^{-jn\omega_0 t} + \dots \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F(n\omega_0) e^{jn\omega_0 t} \end{aligned} \quad (3.2-7)$$

式(3.2-7)称为周期信号复指数形式的傅里叶级数展开式,其中 $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ 是周期信号的基波频率, n 为 $-\infty \sim +\infty$ 的整数。该式表明,周期信号可以展开为无穷多个频率为 $n\omega_0$ 的复指数信号 $e^{jn\omega_0 t}$ 的线性组合,各项系数为 $F(n\omega_0)$ 。 $F(n\omega_0)$ 称为复指数形式的谱系数,有时也简写为 F_n ,具体计算式如下:

$$F_n = F(n\omega_0) = \frac{\int_{t_0}^{t_0+T} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt}{\int_{t_0}^{t_0+T} e^{jn\omega_0 t} \cdot e^{-jn\omega_0 t} dt} = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \quad (3.2-8)$$

故式(3.2-7)也可简写为

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_n e^{jn\omega_0 t} \quad (3.2-9)$$

例 3-5 求图 3-6 所示周期矩形脉冲的复指数形式的傅里叶级数展开式。

解: 根据式(3.2-8)计算复指数形式的谱系数为



视频

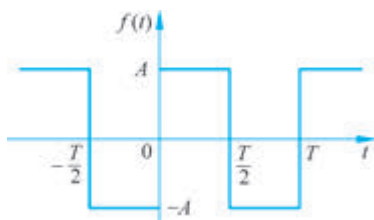


图 3-6 例 3-5 用图

$$\begin{aligned}
 F_n &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^0 (-A) e^{-jn\omega_0 t} dt + \frac{1}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} A e^{-jn\omega_0 t} dt \\
 &= -\frac{A}{T} \cdot \frac{1}{-jn\omega_0} e^{-jn\omega_0 t} \Big|_{-\frac{T}{2}}^0 + \frac{A}{T} \cdot \frac{1}{-jn\omega_0} e^{-jn\omega_0 t} \Big|_0^{\frac{T}{2}} \\
 &= -\frac{2A}{T} \cdot \frac{1}{-jn\omega_0} e^{-jn\omega_0 t} \Big|_{-\frac{T}{2}}^0 + \frac{2A}{T} \cdot \frac{1}{-jn\omega_0} e^{-jn\omega_0 t} \Big|_0^{\frac{T}{2}} \\
 &= \frac{A}{jn\omega_0 T} (2 - e^{jn\omega_0 \frac{T}{2}} - e^{-jn\omega_0 \frac{T}{2}}) = \frac{A}{jn\pi} (1 - \cos n\pi) \\
 &= \begin{cases} \frac{2A}{jn\pi}, & n = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \dots \\ 0, & n = 0, \pm 2, \pm 4, \pm 6, \dots \end{cases}
 \end{aligned}$$

将谱系数 F_n 代入式(3.2-9)中,可得复指数形式的傅里叶级数展开式为

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{2A}{jn\pi} e^{jn\omega_0 t}, \quad n = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \dots$$

比较例 3-1 和例 3-5,可以看出同一个周期信号既可以展开为三角形式的傅里叶级数,也可以展开为复指数形式的傅里叶级数。式(3.2-10)所示的欧拉公式给出了正弦信号和复指数信号之间的关系,所以这两种形式的傅里叶级数可以相互转换。

$$\begin{cases} e^{j\omega t} = \cos\omega t + j\sin\omega t \\ e^{-j\omega t} = \cos\omega t - j\sin\omega t \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} \cos\omega t = \frac{1}{2}(e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}) \\ \sin\omega t = \frac{1}{2j}(e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}) \end{cases} \quad (3.2-10)$$

利用欧拉公式可将式(3.2-9)展开为

$$\begin{aligned}
 f(t) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_n e^{jn\omega_0 t} = F_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (F_n e^{jn\omega_0 t} + F_{-n} e^{-jn\omega_0 t}) \\
 &= F_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} [F_n (\cos n\omega_0 t + j\sin n\omega_0 t) + F_{-n} (\cos n\omega_0 t - j\sin n\omega_0 t)] \\
 &= F_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} [(F_n + F_{-n}) \cos n\omega_0 t + j(F_n - F_{-n}) \sin n\omega_0 t] \quad (3.2-11)
 \end{aligned}$$

根据式(3.2-8)可知

$$F_0 = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) dt = a_0 \quad (3.2-12)$$

$$\begin{aligned}
 F_n + F_{-n} &= \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt + \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) e^{jn\omega_0 t} dt \\
 &= \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) (e^{jn\omega_0 t} + e^{-jn\omega_0 t}) dt = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \cos n\omega_0 t dt \\
 &= a_n
 \end{aligned} \tag{3.2-13}$$

$$\begin{aligned}
 F_n - F_{-n} &= \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt - \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) e^{jn\omega_0 t} dt \\
 &= \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) (e^{-jn\omega_0 t} - e^{jn\omega_0 t}) dt = -\frac{2j}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \sin n\omega_0 t dt \\
 &= -jb_n
 \end{aligned} \tag{3.2-14}$$

故有

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t)$$

由此可以看出三角形式的傅里叶级数和复指数形式的傅里叶级数是周期信号的两不同展开方式,其本质是一样的。两种形式的傅里叶级数展开式的系数关系为

$$F_0 = a_0, \quad F_n = \frac{1}{2}(a_n - jb_n), \quad F_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + jb_n) \tag{3.2-15}$$

3.2.4 周期信号复指数形式的频谱

由于周期信号既可以展开为三角形式的傅里叶级数,也可以展开为复指数形式的傅里叶级数,所以周期信号的频谱图也存在两种形式,即三角形式的频谱图和复指数形式的频谱图。

在周期信号复指数形式的傅里叶级数展开式中, F_n 是 $e^{jn\omega_0 t}$ 分量的系数,一般是复数,可以将其表示为

$$F_n = |F_n| e^{j\varphi_n} \tag{3.2-16}$$

式中, $|F_n|$ 为 $n\omega_0$ 频率分量的振幅信息; φ_n 为 $n\omega_0$ 频率分量的相位信息。故通常将振幅 $|F_n|$ 随频率 ω 变化的图形描述称为振幅谱图; 相位 φ_n 随频率 ω 变化的图形描述称为相位谱图。

由于三角形式的傅里叶系数与复指数形式的傅里叶系数之间存在一定的对应关系,故可以通过三角形式的傅里叶系数计算复指数形式的振幅 $|F_n|$ 和相位 φ_n 。由式(3.2-15)可知:

(1) 当 $n=0$ 时,振幅 $|F_0| = |a_0| = c_0$, $\varphi_0 = \theta_0$ 。即频率为 0 时,三角形频谱和复指数形式频谱的振幅和相位相同。

(2) 当 $n \neq 0$ 时,有

$$|F_n| = \frac{1}{2} \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = \frac{1}{2} c_n, \quad \varphi_n = \arctan \frac{-b_n}{a_n} = \theta_n \tag{3.2-17}$$



视频

$$|F_{-n}| = \frac{1}{2} \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = \frac{1}{2} c_n, \varphi_{-n} = \arctan \frac{b_n}{a_n} = -\theta_n \quad (3.2-18)$$

例 3-6 写出例 3-4 所示信号的复指数形式的傅里叶级数展开式,并画出频谱图。

解: 例 3-4 中根据频谱图得到信号表达式为

$$f(t) = 1.5 + \cos\left(t + \frac{\pi}{4}\right) + 0.5\cos\left(3t + \frac{\pi}{3}\right) + 2\cos\left(4t - \frac{\pi}{2}\right)$$

根据式(3.2-17)和式(3.2-18)可得

$$|F_0| = 1.5, \quad |F_1| = \frac{1}{2}, \quad |F_{-1}| = \frac{1}{2}, \quad |F_3| = \frac{1}{4}, \quad |F_{-3}| = \frac{1}{4},$$

$$|F_4| = 1, \quad |F_{-4}| = 1$$

$$\varphi_0 = 0, \quad \varphi_1 = \frac{\pi}{4}, \quad \varphi_{-1} = -\frac{\pi}{4}, \quad \varphi_3 = \frac{\pi}{3}, \quad \varphi_{-3} = -\frac{\pi}{3}, \quad \varphi_4 = -\frac{\pi}{2}, \quad \varphi_{-4} = \frac{\pi}{2}$$

即

$$F_0 = 1.5, F_1 = \frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{4}}, F_{-1} = \frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{4}}, F_3 = \frac{1}{4}e^{j\frac{\pi}{3}}, F_{-3} = \frac{1}{4}e^{-j\frac{\pi}{3}}, F_4 = e^{-j\frac{\pi}{2}}, F_{-4} = e^{j\frac{\pi}{2}}$$

复指数形式的傅里叶级数展开式为

$$f(t) = 1.5 + \frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{4}} \cdot e^{jt} + \frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{4}} \cdot e^{-jt} + \frac{1}{4}e^{j\frac{\pi}{3}} \cdot e^{j3t} + \frac{1}{4}e^{-j\frac{\pi}{3}} \cdot e^{-j3t} + e^{-j\frac{\pi}{2}} \cdot e^{j4t} + e^{j\frac{\pi}{2}} \cdot e^{-j4t}$$

所以复指数形式的频谱图如图 3-7 所示。

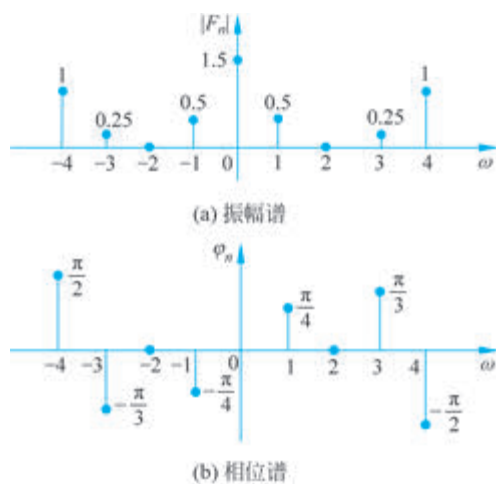


图 3-7 例 3-6 信号复指数形式的频谱图

从图 3-7 中可以看出,由于复指数形式的傅里叶级数展开式中, n 的取值为 $-\infty \sim +\infty$,因此复指数形式的频谱图是双边谱。

比较例 3-4 和例 3-6 的频谱图,结合之前的分析可建立复指数形式频谱图与三角形频谱图的关系,即

(1) 振幅谱图: 当 $n=0$ 时, $|F_0|=c_0$, 两者振幅相等; 当 $n \neq 0$ 时, $|F_n|=|F_{-n}|=\frac{1}{2}c_n$, 复指数形式振幅是三角形振幅的一半, 是关于 ω 的偶函数, 振幅谱图关于纵轴对称。

(2) 相位谱图: 当 $n \geq 0$ 时, $\varphi_n = \theta_n$, 两者相位相同; 当 $n < 0$ 时, $\varphi_n = -\varphi_{-n}$, F_n 的相位是关于 ω 的奇函数, 相位谱图关于原点对称。

傅里叶级数以其独特的魅力, 成为连接数学与现实世界的桥梁, 将对信号的研究从时域引入到频域, 从而带来一种全新的视角。可以说, 它是信号处理学科重要的理论基石。

3.2.5 常用周期信号的频谱分析

通过常用周期信号的频谱分析, 可以了解周期信号频谱的一般规律和特点。

1. 周期矩形脉冲信号

周期矩形脉冲信号是一种常用的周期信号, 设其脉宽为 τ , 脉冲高度为 E , 周期为 T_1 , 且 $\tau < \frac{T_1}{2}$, 则信号波形如图 3-8 所示。

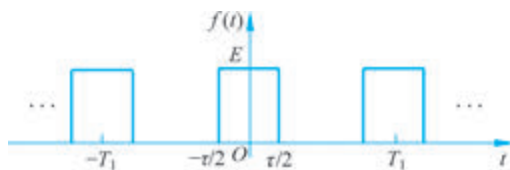


图 3-8 周期矩形脉冲信号的时域波形

$f(t)$ 在一个周期内 $(-\frac{T_1}{2} \leq t \leq \frac{T_1}{2})$ 的表达式为

$$f(t) = \begin{cases} E, & -\frac{\tau}{2} \leq t \leq \frac{\tau}{2} \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

利用式(3.2-8)可得其复指数形式的谱系数为

$$\begin{aligned} F_n &= \frac{1}{T_1} \int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt = \frac{1}{T_1} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} E e^{-jn\omega_0 t} dt \\ &= \frac{1}{T_1} \cdot \frac{E}{-jn\omega_0} e^{-jn\omega_0 t} \Big|_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} = \frac{E}{jn\omega_0 T_1} (e^{jn\omega_0 \frac{\tau}{2}} - e^{-jn\omega_0 \frac{\tau}{2}}) = \frac{2jE \sin(n\omega_0 \frac{\tau}{2})}{jn\omega_0 T_1} \\ &= \frac{E\tau}{T_1} \text{Sa}(n\omega_0 \frac{\tau}{2}) \end{aligned} \quad (3.2-19)$$

所以周期矩形脉冲信号复指数形式的傅里叶级数展开式为

$$f(t) = \frac{E\tau}{T_1} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \text{Sa}\left(\frac{n\omega_0 \tau}{2}\right) e^{jn\omega_0 t}$$



视频

根据式(3.2-19)可知 F_n 为实数,故

$$|F_n| = \left| \frac{E\tau}{T_1} \text{Sa}\left(n\omega_0 \frac{\tau}{2}\right) \right| = \frac{E\tau}{T_1} \left| \text{Sa}\left(n\omega_0 \frac{\tau}{2}\right) \right|$$

$$\varphi_n = \begin{cases} 0, & F_n \geq 0 \\ \pm\pi, & F_n < 0 \end{cases}$$

图 3-9(a)和(b)分别为 $T=5\tau$ 时,周期矩形脉冲信号的振幅谱和相位谱图。

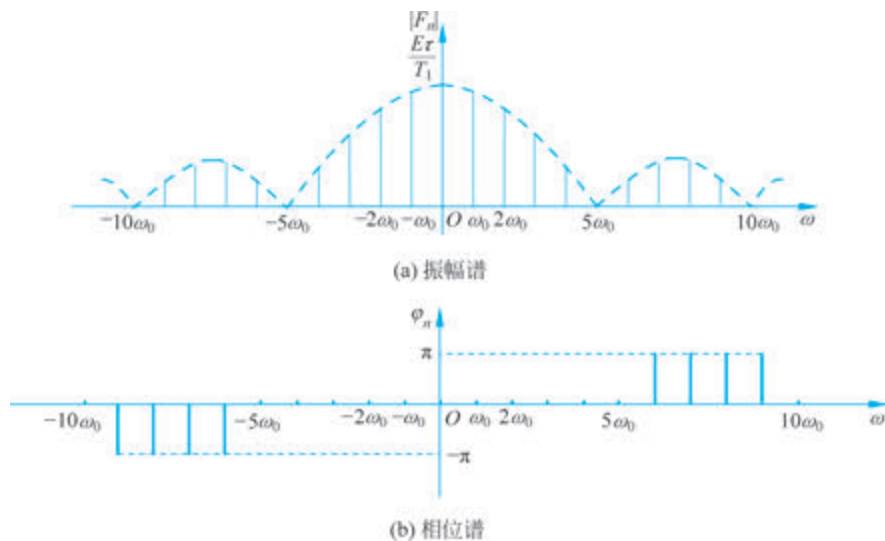


图 3-9 周期矩形脉冲信号的频谱图

由于周期矩形脉冲信号的谱系数 F_n 是实数,所以振幅谱和相位谱可以合并为一个图,如图 3-10 所示,其中相位可通过振幅的正、负来体现。

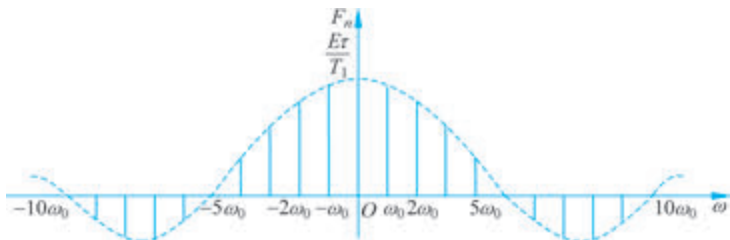


图 3-10 振幅谱和相位谱合并后的频谱图

从图 3-10 中可以看出,周期矩形脉冲信号的频谱是间隔为 ω_0 的离散谱线,振幅包络线形状为抽样函数,最大值在 $n=0$ 处,振幅为 $\frac{E\tau}{T_1}$ 。当 $\omega = \frac{2n\pi}{\tau}$ ($n = \pm 1, \pm 2, \dots$) 时, $F_n = 0$,其中第一个零点坐标为 $5\omega_0 = 5 \times \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{\tau}$ 。

周期矩形脉冲信号的脉宽 τ 和周期 T_1 与其频谱分布有着密切关系。

(1) 脉宽 τ 不变,周期 T_1 改变。

当脉宽 τ 不变, 周期 T_1 增加时, 信号谱线间隔 $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_1}$ 相应减小, 谱线变得密集, 同时各频率的振幅整体变小, 如图 3-11 所示。当 $T_1 \rightarrow \infty$ 时, 谱线无限密集, 谱线间隔 $\omega_0 \rightarrow 0$, 离散谱将变为连续谱。

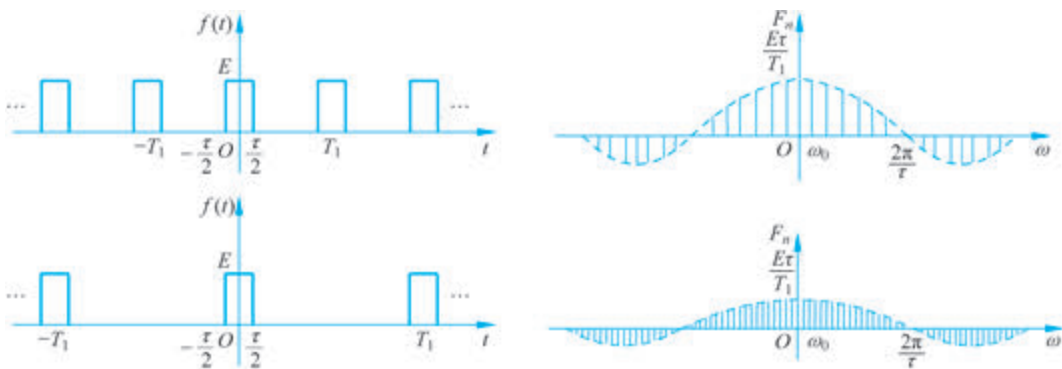


图 3-11 τ 不变、 T_1 增大时信号频谱变化示意图

(2) 周期 T_1 不变, 脉宽 τ 改变。

当周期 T_1 不变时, 谱线间隔 ω_0 保持不变。若脉宽 τ 减小, 则第一个过零点的频率变大, 在 $0 \sim 2\pi/\tau$ 的频率范围内, 包含的信号谱线数量增加, 信号频谱幅度整体减小, 如图 3-12 所示。

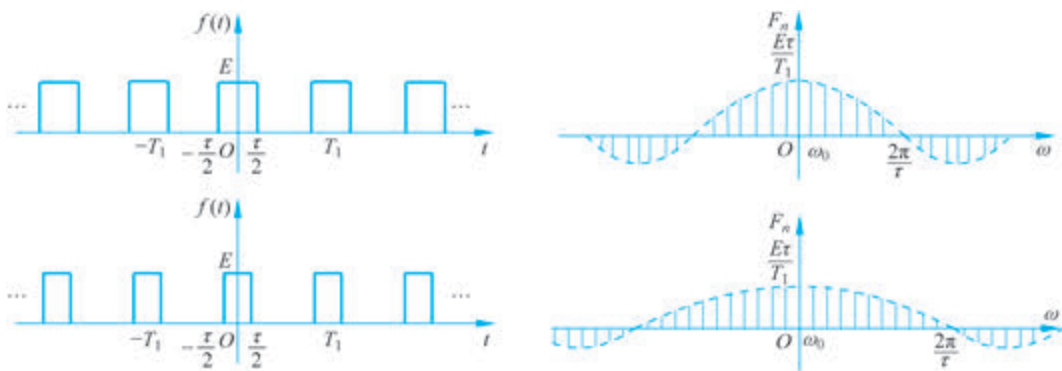


图 3-12 T_1 不变、 τ 减小时信号频谱变化示意图

2. 周期三角脉冲信号

如图 3-13 所示的周期三角脉冲信号, 其周期为 T_1 。

周期三角脉冲信号在一个周期内的函数表达式为

$$f_1(t) = -\frac{2E}{T_1} |t| + E, \quad -\frac{T_1}{2} < t < \frac{T_1}{2}$$

从图 3-13 中可以看出, 周期三角脉冲信号为偶函数, 因此其三角形式的傅里叶级数展开式中余弦分量的系数 $b_n = 0$ 。根据式(3.2-4)和式(3.2-5)可得

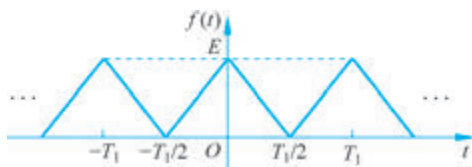


图 3-13 周期三角脉冲信号的时域波形

$$a_0 = \frac{1}{T_1} \int_{-T_1/2}^{T_1/2} f(t) dt = \frac{E}{2}$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T_1} \int_{-T_1/2}^{T_1/2} f(t) \cos n\omega_0 t dt = \frac{4}{T_1} \int_0^{T_1/2} \left(-\frac{2E}{T_1}t + E\right) \cos n\omega_0 t dt \\ &= \frac{2E}{n^2 \pi^2} (1 - \cos n\pi) \end{aligned}$$

则周期三角脉冲信号的傅里叶级数展开式为

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{E}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2E}{n^2 \pi^2} (1 - \cos n\pi) \cos n\omega_0 t \\ &= \frac{E}{2} + \frac{4E}{\pi^2} \left(\cos \omega_0 t + \frac{1}{3^2} \cos 3\omega_0 t + \frac{1}{5^2} \cos 5\omega_0 t + \dots \right) \end{aligned} \quad (3.2-20)$$

其中, $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_1}$ 。从式(3.2-20)中可以看出, 周期三角脉冲信号的频谱中只包含有直流和奇次谐波分量, 且各频率的相位均为 0。该信号三角形形式的振幅谱图和复指数形式的振幅谱图分别如图 3-14 和图 3-15 所示。

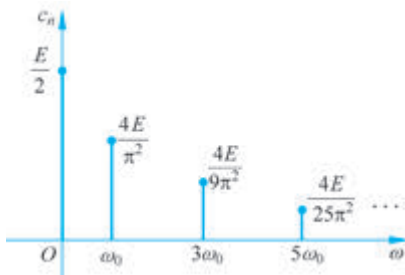


图 3-14 三角形形式的振幅谱图

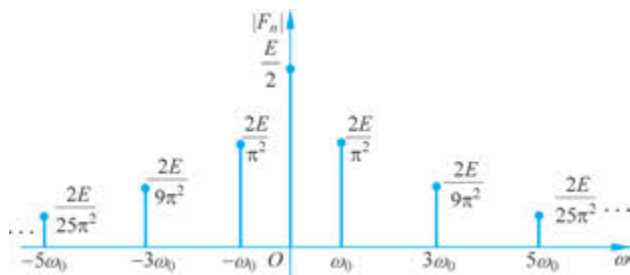


图 3-15 复指数形式的振幅谱图

3. 周期锯齿波信号

周期锯齿波信号也是常见的周期信号, 在显像器件的光栅扫描中起到很关键的作用。周期为 T_1 的锯齿波信号的时域波形如图 3-16 所示。

周期锯齿波信号在一个周期内的表达式为

$$f(t) = \frac{A}{T_1} t, \quad -\frac{T_1}{2} < t < \frac{T_1}{2}$$

从图 3-16 可以看出, 周期锯齿波信号为奇函数, 因此其三角形形式的傅里叶级数展开

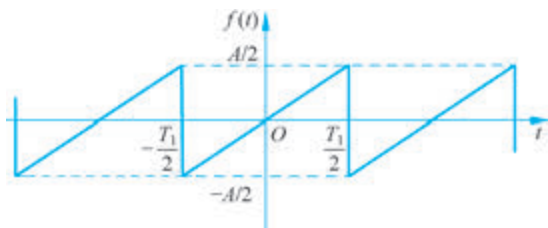


图 3-16 周期锯齿波信号的时域波形

式中系数 a_0 和 a_n 均为零。由傅里叶级数系数公式可得

$$b_n = \frac{2}{T_1} \int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} \frac{A}{T_1} t \sin n\omega_0 t dt = \frac{A}{n\pi} (-1)^{n+1}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

则周期锯齿波信号三角形式的傅里叶级数展开式为

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{A}{\pi} \sin\omega_0 t - \frac{A}{2\pi} \sin 2\omega_0 t + \frac{A}{3\pi} \sin 3\omega_0 t - \frac{A}{4\pi} \sin 4\omega_0 t \dots \\ &= \frac{A}{\pi} \cos\left(\omega_0 t - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{A}{2\pi} \cos\left(2\omega_0 t + \frac{\pi}{2}\right) + \frac{A}{3\pi} \cos\left(3\omega_0 t - \frac{\pi}{2}\right) + \dots \end{aligned}$$

其振幅谱和相位谱图如图 3-17 所示。

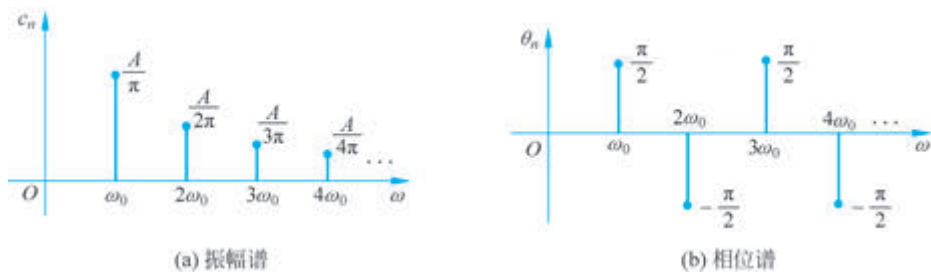


图 3-17 周期锯齿波信号的频谱图

根据三角形式的频谱图和复指数形式的频谱图的关系,可得周期锯齿波信号的双边谱如图 3-18 所示。

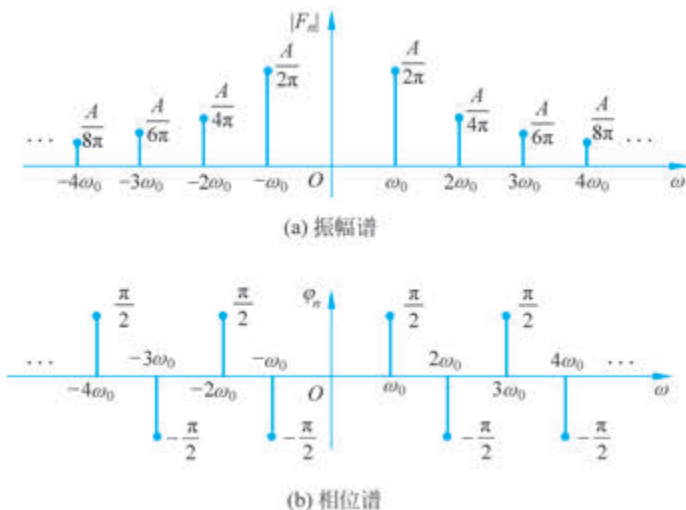


图 3-18 周期锯齿波信号的双边频谱图

通过上述信号分析可知,周期信号的频谱具有下列一般性特点。

(1) 离散性: 周期信号的频谱由间隔为 ω_0 的不连续谱线组成, 每条谱线代表一个正弦分量。振幅谱线的长度代表该正弦分量的振幅, 相位谱线的长度代表该正弦分量的相位。

(2) 谐波性: 谱线只出现在基频 ω_0 的整数倍上, 不包含有非基频整数倍的频率分量。

(3) 收敛性: 各次谐波的振幅总趋势是随着谐波频率 $n\omega_0$ 的增加而减小, 并最终趋于零。需要注意的是, 周期冲激信号的谱系数不满足收敛性, 3.5 节会对周期冲激信号的谱系数做详细说明。

例 3-7 图 3-19 所示的周期矩形脉冲信号, 其幅度 $E = 5\text{V}$, 周期 $T_1 = 50\mu\text{s}$, 脉冲宽度 $\tau = 20\mu\text{s}$, 判断该信号中是否包含有 20kHz、60kHz、90kHz 和 100kHz 的频率分量。

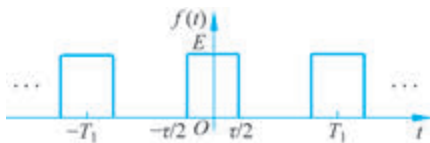


图 3-19 例 3-7 用图

解: 根据信号周期 T_1 , 可计算得到该周期信号的基波频率 $f_0 = \frac{1}{T_1} = 20\text{kHz}$ 。根据周期信号频谱的谐波性, 信号中只包含 f_0 整数倍的频率, 则可判断 $f(t)$ 中不包含 90kHz 的频率分量。

根据式(3.2-19)可知, 周期矩形脉冲信号的谱系数 $F_n = \frac{E\tau}{T_1} \text{Sa}\left(\frac{n\omega_0\tau}{2}\right)$, 当 $\frac{n\omega_0\tau}{2} = k\pi$, 即 $\omega = n\omega_0 = \frac{2k\pi}{\tau} = \frac{2k\pi}{20 \times 10^{-6}} = 10^5 k \pi \text{rad/s}$ 时, $F_n = 0$, 故信号 $f(t)$ 不包含频率为 50kHz 的整数倍频率分量。

结合上述分析可知, 该信号中包含了 20kHz 和 60kHz 的频率分量, 不含有 90kHz 和 100kHz 的频率分量。

思考题

1. 为什么要引入信号的频域分析?
2. 周期信号傅里叶级数展开的物理意义是什么?
3. 周期信号傅里叶级数展开的系数如何求解?
4. 周期信号三角形式和复指数形式的傅里叶级数展开系数之间有什么关系?
5. 周期信号的频谱有什么意义? 绘制周期信号的频谱关键要获得哪些信息?



3.3 傅里叶变换

3.2节讨论了周期信号的傅里叶级数展开,从展开式中可知周期信号的频率分布情况。实际工程中除了周期信号外,还存在大量的非周期信号,如语音、图像等。本节沿用信号分解的思想来分析非周期信号的频域表示。

3.3.1 定义

当周期信号的周期 T 趋于无穷大时,在可观测范围内,只存在一个周期的波形,此时可以将周期信号看作非周期信号。根据3.2节对周期矩形脉冲的频谱分析可知,当 $T \rightarrow \infty$ 时,信号的频谱间隔 $\omega_0 \rightarrow 0$,谱线无限密集,离散谱将变为连续谱,同时谱线的振幅 $|F(n\omega_0)| \rightarrow 0$,即信号所包含的各分量振幅均趋于0,因此对非周期信号不适合使用傅里叶级数来表示。但应注意,虽然各频谱系数幅度无限小,但相对大小仍存在。

周期信号复指数形式的谱系数计算公式为

$$F(n\omega_0) = \frac{1}{T_1} \int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \quad (3.3-1)$$

对式(3.3-1)两边同乘以 T_1 ,有

$$T_1 F(n\omega_0) = \frac{2\pi F(n\omega_0)}{\omega_0} = \int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \quad (3.3-2)$$

式中,当 $T_1 \rightarrow \infty$ 时,频率 $f_1 = \frac{1}{T_1}$ 趋于零, $F(n\omega_0)$ 也趋于零,若 $\frac{F(n\omega_0)}{\omega_0}$ 的极限存在,记为 $F(\omega)$,有时也写成 $F(j\omega)$,即

$$F(\omega) = \lim_{T_1 \rightarrow \infty} T_1 F(n\omega_0) = \lim_{T_1 \rightarrow \infty} \int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \quad (3.3-3)$$

当 $T_1 \rightarrow \infty$ 时,离散谱将变为连续谱, $n\omega_0 \rightarrow \omega$,故式(3.3-3)可以改写为

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \quad (3.3-4)$$

由于 $\frac{F(n\omega_0)}{\omega_0}$ 表示信号单位频带的频谱值,因此 $F(\omega)$ 称为信号 $f(t)$ 的频谱密度函数,简称为频谱函数。

根据傅里叶级数的复指数形式

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F(n\omega_0) e^{jn\omega_0 t} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{F(n\omega_0)}{\omega_0} e^{jn\omega_0 t} \cdot \omega_0 = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{2\pi F(n\omega_0)}{\omega_0} e^{jn\omega_0 t} \cdot \omega_0$$

当 $T_1 \rightarrow \infty$ 时, $\frac{2\pi F(n\omega_0)}{\omega_0} \rightarrow F(\omega)$, $n\omega_0 \rightarrow \omega$, $\omega_0 \rightarrow d\omega$,求和变为求积分,故可得

$$f(t) = \lim_{T_1 \rightarrow \infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F(n\omega_0) e^{jn\omega_0 t} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (3.3-5)$$

时域信号 $f(t)$ 和频谱函数 $F(\omega)$ 之间的变换关系也可以表示为 $f(t) \leftrightarrow F(\omega)$, 两者称为一组傅里叶变换对。习惯上采用如下方法表示:

傅里叶正变换

$$F(\omega) = \mathcal{F}[f(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \quad (3.3-6)$$

傅里叶反变换

$$f(t) = \mathcal{F}^{-1}[F(\omega)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (3.3-7)$$

从这一对变换公式可以看出, $f(t)$ 和 $F(\omega)$ 是一一对应的, 即已知信号 $f(t)$ 可唯一地确定其频谱函数 $F(\omega)$, 反之根据 $F(\omega)$ 也可唯一地确定 $f(t)$ 。注意, $f(t)$ 和 $F(\omega)$ 是同一个信号的两种描述方法, $f(t)$ 是从时域角度描述信号, $F(\omega)$ 是从频域角度描述信号。

频谱函数 $F(\omega)$ 一般为复数, 可以表示为

$$F(\omega) = |F(\omega)| e^{j\varphi(\omega)} = R(\omega) + jX(\omega) \quad (3.3-8)$$

式中, $|F(\omega)|$ 称为振幅谱函数, $|F(\omega)|$ 随频率 ω 的变化关系曲线称为振幅谱; $\varphi(\omega)$ 称为相位谱函数, $\varphi(\omega)$ 随频率 ω 的变化关系曲线称为相位谱。

若 $f(t)$ 为实函数, 利用傅里叶正变换式(3.3-6), 可得

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) (\cos\omega t - j\sin\omega t) dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos\omega t dt - j \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin\omega t dt \end{aligned}$$

则

$$R(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos\omega t dt \quad (3.3-9)$$

$$X(\omega) = - \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin\omega t dt \quad (3.3-10)$$

可以看出, $R(\omega)$ 是 ω 的偶函数, $X(\omega)$ 是 ω 的奇函数, 即

$$R(\omega) = R(-\omega), \quad X(\omega) = -X(-\omega)$$

又因为

$$\begin{aligned} |F(\omega)| &= \sqrt{R^2(\omega) + X^2(\omega)} \\ \varphi(\omega) &= \arctan \frac{X(\omega)}{R(\omega)} \end{aligned}$$

所以 $|F(\omega)|$ 是 ω 的偶函数, 振幅谱偶对称; $\varphi(\omega)$ 是 ω 的奇函数, 相位谱奇对称。

将 $F(\omega) = |F(\omega)| e^{j\varphi(\omega)}$ 代入傅里叶反变换式(3.3-7), 可得

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |F(\omega)| e^{j\varphi(\omega)} e^{j\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |F(\omega)| e^{j[\varphi(\omega) + \omega t]} d\omega \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |F(\omega)| \cos[\varphi(\omega) + \omega t] d\omega + \frac{j}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |F(\omega)| \sin[\varphi(\omega) + \omega t] d\omega \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} |F(\omega)| \cos[\varphi(\omega) + \omega t] d\omega \quad (3.3-11)
 \end{aligned}$$

式(3.3-11)说明,与周期信号类似,非周期信号也可以分解为无穷多个不同频率的正弦信号的线性叠加,不同之处在于,非周期信号包含的是连续频率分量。

前面讲到,周期信号展开为傅里叶级数需满足狄里赫利条件,同样傅里叶变换也需要满足一定的条件才存在,不同之处在于时间范围由一个周期变为了无限的区间。信号 $f(t)$ 傅里叶变换存在的充分条件是无限区间内信号绝对可积,即

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt < \infty \quad (3.3-12)$$

所有能量信号均满足此条件,即存在傅里叶变换。

例 3-8 已知信号 $f(t)$ 波形如图 3-20 所示,其频谱函数为 $F(\omega)$,试计算下列数值:

(1) $F(0)$;

(2) $\int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) d\omega$ 。

解: 可以根据傅里叶变换的定义式求解。

(1) $F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$

$$F(0) = F(\omega) |_{\omega=0} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt$$

由于 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt$ 为信号 $f(t)$ 的面积,故 $F(0)=1$ 。

(2) $f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega$

$$f(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) d\omega$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) d\omega = 2\pi f(0) = 2\pi$$

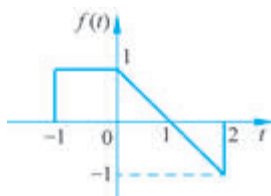


图 3-20 例 3-8 信号波形

3.3.2 常用信号的傅里叶变换

1. 指数信号

1) 因果指数衰减信号

因果指数衰减信号是系统分析中的常用信号,时域表达式为

$$f(t) = E e^{-at} u(t), \quad a \text{ 为实数} \quad (3.3-13)$$

其时域波形如图 3-21 所示。

该信号满足绝对可积条件,可以利用式(3.3-6)进行傅里叶变换,即



视频

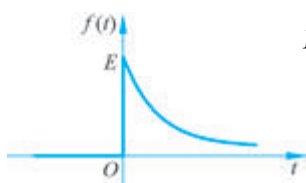


图 3-21 因果指数衰减信号的时域波形

$$F(\omega) = \mathcal{F}[f(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} E e^{-at} u(t) e^{-j\omega t} dt = \int_0^{+\infty} E e^{-(a+j\omega)t} dt$$

$$= -\frac{E}{a+j\omega} e^{-(a+j\omega)t} \Big|_0^{+\infty} = \frac{E}{a+j\omega}$$

即

$$E e^{-at} u(t) \leftrightarrow \frac{E}{a+j\omega} \quad (3.3-14)$$

因果指数衰减信号的振幅谱函数为 $|F(\omega)| = \frac{E}{\sqrt{a^2 + \omega^2}}$, 当 $\omega = 0$ 时, $|F(\omega)|$ 取得最大值 $\frac{E}{a}$; 当 $\omega \rightarrow \pm\infty$ 时, $|F(\omega)| = 0$, 故其振幅谱曲线如图 3-22(a) 所示。相位谱函数为

$\varphi(\omega) = -\arctan \frac{\omega}{a}$, 当 $\omega \rightarrow -\infty$ 时, $\varphi(\omega) = \frac{\pi}{2}$; 当 $\omega = 0$ 时, $\varphi(\omega) = 0$; 当 $\omega \rightarrow +\infty$ 时, $\varphi(\omega) = -\frac{\pi}{2}$, 故相位谱曲线如图 3-22(b) 所示。

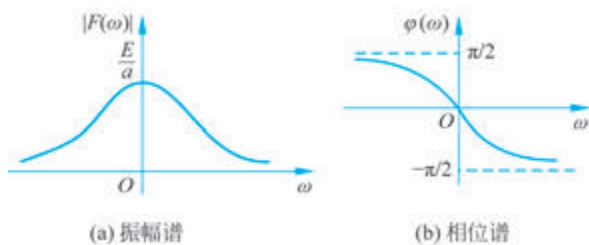


图 3-22 因果指数衰减信号的频谱图

2) 单边非因果指数衰减信号

单边非因果指数衰减信号的时域表达式为

$$f(t) = e^{at} u(-t), \quad a \text{ 为正实数} \quad (3.3-15)$$

其时域波形如图 3-23 所示。

该信号满足绝对可积条件, 故其傅里叶变换为

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} E e^{at} u(-t) e^{-j\omega t} dt = E \int_{-\infty}^0 e^{(a-j\omega)t} dt = \frac{E}{a-j\omega}$$

即

$$E e^{at} u(-t) \leftrightarrow \frac{E}{a-j\omega} \quad (3.3-16)$$

单边非因果指数衰减信号的振幅谱函数为 $|F(\omega)| = \frac{E}{\sqrt{a^2 + \omega^2}}$, 相位谱函数为

$\varphi(\omega) = \arctan \frac{\omega}{a}$, 故其振幅谱与相位谱图如图 3-24 所示。

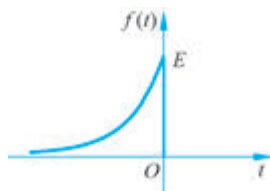


图 3-23 单边非因果指数衰减信号的时域波形

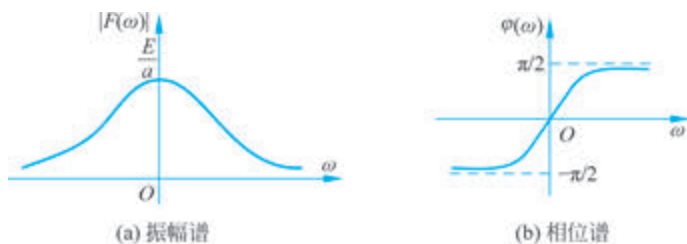


图 3-24 单边非因果指数衰减信号的频谱图

3) 双边指数信号

双边指数信号的时域表达式为

$$f(t) = E e^{-a|t|}, \quad a \text{ 为正实数} \quad (3.3-17)$$

其时域波形如图 3-25 所示。

其傅里叶变换为

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \mathcal{F}[f(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} E e^{-a|t|} e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} E [e^{-at} u(t) + e^{at} u(-t)] e^{-j\omega t} dt \\ &= E \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-at} u(t) e^{-j\omega t} dt + \int_{-\infty}^{+\infty} e^{at} u(-t) e^{-j\omega t} dt \\ &= \frac{E}{a + j\omega} + \frac{E}{a - j\omega} = \frac{2Ea}{a^2 + \omega^2} \end{aligned} \quad (3.3-18)$$

可以看出,双边指数信号的频谱函数为正实数,故 $|F(\omega)| = F(\omega)$, $\varphi(\omega) = 0$ 。双边指数信号的频谱图如图 3-26 所示。

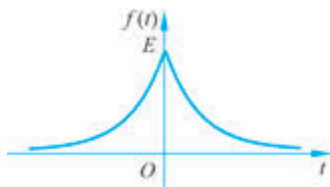


图 3-25 双边指数信号的时域波形

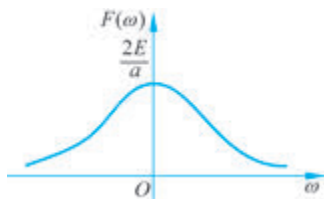


图 3-26 双边指数信号的频谱图

2. 门函数

关于纵轴对称的矩形脉冲信号又称为门函数,由于其波形简单,实现容易,常常作为通信中的基带信号。振幅为 E 、宽度为 τ 的门函数的时域表达式为

$$f(t) = E G_{\tau}(t) = E \left[u\left(t - \frac{\tau}{2}\right) - u\left(t + \frac{\tau}{2}\right) \right] \quad (3.3-19)$$

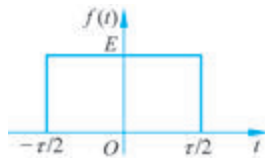


图 3-27 门函数的时域波形

其时域波形如图 3-27 所示。

从图中可以看出,门函数满足绝对可积条件,其傅里叶变换为

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} E \left[u\left(t + \frac{\tau}{2}\right) - u\left(t - \frac{\tau}{2}\right) \right] e^{-j\omega t} dt = \int_{-\tau/2}^{\tau/2} E e^{-j\omega t} dt$$



视频

$$\begin{aligned}
 &= -\frac{E}{j\omega} e^{-j\omega t} \Big|_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} = -\frac{E}{j\omega} (e^{-j\omega \frac{\tau}{2}} - e^{j\omega \frac{\tau}{2}}) = \frac{E}{j\omega} \cdot 2j \sin \omega \frac{\tau}{2} \\
 &= E\tau \cdot \frac{\sin \omega \tau / 2}{\omega \tau / 2} = E\tau \text{Sa}\left(\frac{\omega \tau}{2}\right)
 \end{aligned}$$

即

$$EG_{\tau}(t) \leftrightarrow E\tau \text{Sa}\left(\frac{\omega \tau}{2}\right) \quad (3.3-20)$$

由式(3.3-20)可得到门函数振幅谱函数和相位谱函数分别为

$$\begin{aligned}
 |F(\omega)| &= E\tau \left| \text{Sa}\left(\frac{\omega \tau}{2}\right) \right| \\
 \varphi(\omega) &= \begin{cases} 0, & \frac{4n\pi}{\tau} < |\omega| < \frac{2(2n+1)\pi}{\tau} \\ \pm \pi, & \frac{2(2n+1)\pi}{\tau} < |\omega| < \frac{2(2n+2)\pi}{\tau} \end{cases} \quad n=0,1,2,\dots
 \end{aligned}$$

门函数的振幅谱和相位谱图如图 3-28 所示。

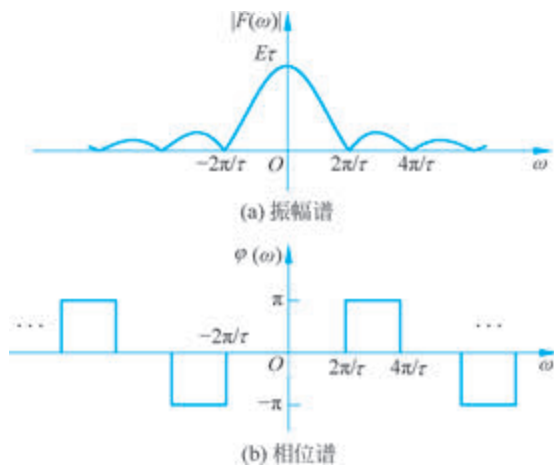


图 3-28 门函数的振幅谱和相位谱图

由于频谱函数 $F(\omega) = E\tau \text{Sa}\left(\frac{\omega \tau}{2}\right)$ 是实函数, 可将振幅谱和相位谱合成一幅图, 如图 3-29 所示。

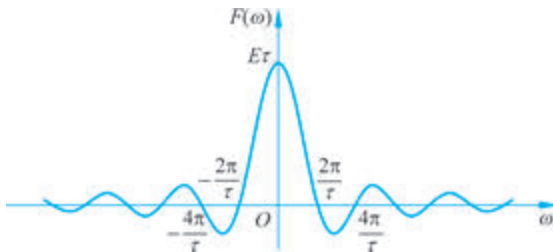


图 3-29 门函数的频谱图

通常将信号所包含的频率范围称为信号的频带宽度。从图 3-29 中可以看出,门函数包含了 0 到无穷大的频率分量。由于实际系统能够传输处理的信号频率范围是有限的,在误差允许的范围内,需要用一定频率范围内的分量来代表原信号。同时,绝大多数实用信号的主要能量(或功率)都集中在一段频率范围内,故在工程应用中,通常根据信号频谱的分布情况确定信号的带宽。这里给出两种常用的信号带宽定义。

1) 第一零点带宽

从门函数的频谱图中可以看出,其频谱的主要能量集中在第一个过零点 $\frac{2\pi}{\tau}$ 范围内,频谱具有明显的主瓣,该范围包含了信号 90% 以上的能量。因此,对于具有这类频谱特点的信号,通常定义信号频谱第一个过零点的频率作为信号的频带宽度,称为第一零点带宽。所以,门函数的频带宽度或带宽定义为

$$B_{\omega} = \frac{2\pi}{\tau} \text{rad/s} \quad \text{或} \quad B_f = \frac{1}{\tau} \text{Hz} \quad (3.3-21)$$

从式(3.3-21)也可以看出,门函数的时域脉宽与带宽成反比。信号脉冲持续时间越长,其带宽越窄;信号脉冲持续时间越短,其带宽越宽。

2) -3dB 带宽

若信号频谱中无明显的主瓣,如图 3-30 所示,通常可定义信号频域幅值下降为最大值的 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时对应的频率为信号的带宽,即

$$|F(\omega_0)| = \frac{\sqrt{2}}{2} |F(\omega)|_{\max} \quad (3.3-22)$$

由于该频率点的功率为功率最大值的 $\frac{1}{2}$,用对数表示即为下降了 3dB,因此这种方式定义的带宽称为-3dB 带宽。-3dB 带宽点也称为半功率点,表示在该带宽内集中了一半的功率。

3. 三角脉冲信号

三角脉冲信号也是实际通信中常用的一种信号,时域表达式为

$$f(t) = \begin{cases} E\left(1 - \frac{|t|}{\tau}\right), & |t| \leq \tau \\ 0, & |t| > \tau \end{cases} \quad (3.3-23)$$

其时域波形如图 3-31 所示。

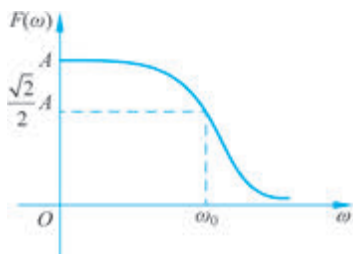


图 3-30 3dB 带宽示意图

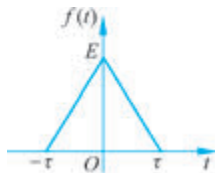


图 3-31 三角脉冲信号的时域波形

三角脉冲信号的傅里叶变换为

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\tau}^{\tau} E \left(1 - \frac{|t|}{\tau}\right) e^{-j\omega t} dt \\ &= E \int_{-\tau}^0 \left(1 + \frac{t}{\tau}\right) e^{-j\omega t} dt + E \int_0^{\tau} \left(1 - \frac{t}{\tau}\right) e^{-j\omega t} dt \\ &= E \int_{-\tau}^0 e^{-j\omega t} dt + \frac{E}{\tau} \int_{-\tau}^0 t e^{-j\omega t} dt + E \int_0^{\tau} e^{-j\omega t} dt - \frac{E}{\tau} \int_0^{\tau} t e^{-j\omega t} dt \end{aligned}$$

利用分部积分对上式进行化简,得到

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \frac{E}{(j\omega)^2 \tau} (e^{j\omega\tau} + e^{-j\omega\tau}) - \frac{2E}{(j\omega)^2 \tau} \\ &= \frac{2E}{\omega^2 \tau} (1 - \cos\omega\tau) = \frac{4E}{\omega^2 \tau} \sin^2\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) = E\tau \text{Sa}^2\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) \end{aligned} \quad (3.3-24)$$

三角脉冲信号的频谱图如图 3-32 所示。

从图 3-32 中可以看出,三角脉冲信号的频率分量在频率 $2\pi/\tau$ 后衰减很快,其主瓣更突出。这是因为三角脉冲信号频谱为抽样信号的平方,其收敛速度快于抽样信号本身。在实际通信系统中,常常会用频谱收敛较快的三角脉冲信号作为基带信号。

另一个在通信中常用的基带信号是升余弦信号,其时域波形如图 3-33 所示。该信号时域“尾端”衰减较快,能够降低信号传输中可能存在的码间串扰。

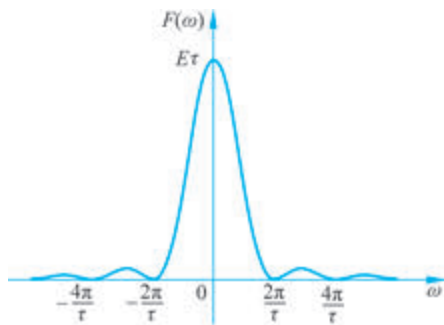


图 3-32 三角脉冲信号的频谱图

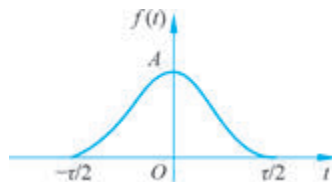


图 3-33 升余弦信号的时域波形

升余弦信号的时域表达式为

$$f(t) = \begin{cases} \frac{A}{2} \left(1 + \cos \frac{2\pi}{\tau} t\right), & |t| \leq \frac{\tau}{2} \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (3.3-25)$$

其傅里叶变换为

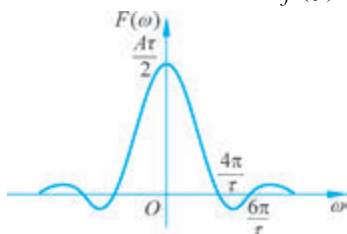


图 3-34 升余弦信号的频谱图

$$F(\omega) = \frac{A\tau}{2} \frac{\text{Sa}^2\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)}{1 - \left(\frac{\omega\tau}{2\pi}\right)^2} \quad (3.3-26)$$

升余弦信号的频谱图如图 3-34 所示。

4. 单位冲激信号

单位冲激信号的定义为

$$\begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1 \\ \delta(t) = 0, t \neq 0 \end{cases} \quad (3.3-27)$$

根据傅里叶变换的公式,可得其傅里叶变换为

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) e^{-j\omega t} dt = 1$$

即

$$\delta(t) \leftrightarrow 1 \quad (3.3-28)$$

单位冲激信号的时域波形和频谱图分别如图 3-35 和图 3-36 所示。

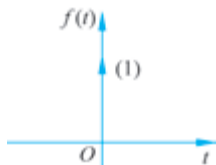


图 3-35 单位冲激信号的时域波形

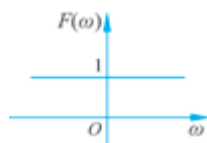


图 3-36 单位冲激信号的频谱图

5. 直流信号

直流信号 $f(t)=1$ 的时域波形如图 3-37 所示。由于直流信号不满足绝对可积的条件,无法通过傅里叶变换的定义式来求其傅里叶变换,这里利用求 $\delta(\omega)$ 原函数的方法。

$\delta(\omega)$ 的傅里叶反变换为

$$\mathcal{F}^{-1}[\delta(\omega)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi}$$

即

$$\mathcal{F}\left[\frac{1}{2\pi}\right] = \delta(\omega)$$

故可得

$$1 \leftrightarrow 2\pi\delta(\omega) \quad (3.3-29)$$

直流信号 $f(t)=1$ 的频谱图如图 3-38 所示。



图 3-37 直流信号的时域波形



图 3-38 直流信号的频谱图

从单位冲激信号和直流信号的频谱分析可以看出,时间上无限窄的冲激信号,频谱是无限宽的,而时域无限宽的直流信号,其频谱是无限窄的冲激函数。

表 3-1 整理了以上分析的几组常用信号的傅里叶变换对。

表 3-1 常用信号的傅里叶变换对

序号	名称	时域信号 $f(t)$	频谱函数 $F(\omega)$
1	因果指数衰减信号	$Ee^{-at}u(t), a$ 为正实数	$\frac{E}{a+j\omega}$
2	单边非因果指数衰减信号	$f(t) = e^{at}u(-t), a$ 为正实数	$\frac{E}{a-j\omega}$
3	双边指数信号	$Ee^{-a t }, a$ 为正实数	$\frac{2Ea}{a^2 + \omega^2}$
4	门函数	$EG_{\tau}(t)$	$E\tau \text{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$
5	三角脉冲信号	$f(t) = \begin{cases} E\left(1 - \frac{ t }{\tau}\right), & t \leq \tau \\ 0, & t > \tau \end{cases}$	$E\tau \text{Sa}^2\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$
6	升余弦信号	$f(t) = \begin{cases} \frac{A}{2}\left(1 + \cos\frac{2\pi}{\tau}t\right), & t \leq \frac{\tau}{2} \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$	$\frac{A\tau}{2} \frac{\text{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)}{1 - \left(\frac{\omega\tau}{2\pi}\right)^2}$
7	单位冲激信号	$\delta(t)$	1
8	直流信号	1	$2\pi\delta(\omega)$

频谱分析通过数学变换将信号从时域转换到频域, 以此可以观察信号中各个频率成分的强度, 从而能够识别信号的频率特性, 确定信号带宽, 检测信号失真, 以及发现潜在的干扰源。因此非周期信号的频谱分析在实际工程中有着广泛应用。

3.3.3 傅里叶谱系数 F_n 与频谱函数 $F(\omega)$ 的关系

周期信号傅里叶级数的谱系数 F_n 与非周期信号的频谱函数 $F(\omega)$ 之间存在一定的对应关系。

从周期矩形脉冲信号 $f_T(t)$ (图 3-39(a)) 中截取 $\left(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right)$ 范围内的波形, 得到信号 $f(t)$, 如图 3-39(b) 所示。

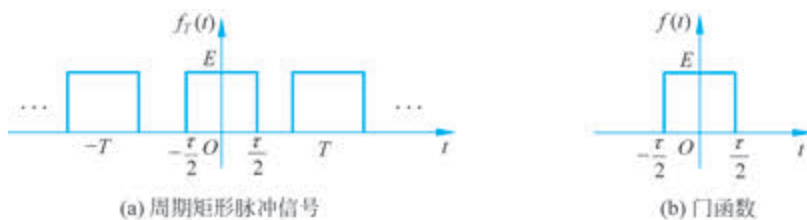


图 3-39 从周期矩形脉冲信号中截取一个周期

$f(t)$ 的傅里叶变换为

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt = \int_{-T/2}^{T/2} f_T(t)e^{-j\omega t} dt$$

周期信号 $f_T(t)$ 的傅里叶谱系数为

$$F_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f_T(t) e^{-jn\omega_0 t} dt, \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

可以看出,非周期信号的频谱函数 $F(\omega)$ 与周期信号的傅里叶谱系数 F_n 之间存在如下关系:

$$F_n = \left. \frac{F(\omega)}{T} \right|_{\omega=n\omega_0} = \frac{F(n\omega_0)}{T} \quad (3.3-30)$$

图 3-39(b) 中非周期信号 $f(t)$ 为门函数,易知

$$F(\omega) = \mathcal{F}[f(t)] = E\tau \text{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$$

故图 3-39(a) 中周期矩形脉冲信号的傅里叶谱系数为

$$F_n = \left. \frac{E\tau}{T} \text{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) \right|_{\omega=n\omega_0} = \frac{E\tau}{T} \text{Sa}\left(\frac{n\omega_0\tau}{2}\right)$$

例 3-9 计算图 3-40 所示周期三角脉冲信号的复指数形式傅里叶级数展开式。

解: 从 $f(t)$ 中提取一个周期 ($-2 \sim 2$) 的波形,可得到如图 3-41 所示的三角脉冲信号 $f_1(t)$ 。由常用信号的傅里叶变换可知, $f_1(t)$ 的频谱函数为

$$F_1(\omega) = 4\text{Sa}^2(\omega)$$

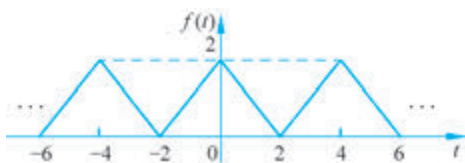


图 3-40 周期三角脉冲信号

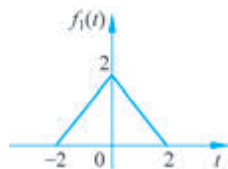


图 3-41 三角脉冲信号

根据式(3.3-30)可得

$$F_n = \left. \frac{F_1(\omega)}{T} \right|_{\omega=n\omega_0} = \text{Sa}^2(n\omega_0)$$

该周期三角脉冲信号的周期为 4,其频率 $\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{2}$,则

$$F_n = \text{Sa}^2\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

故复指数形式的傅里叶级数展开式为

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_n e^{jn\omega_0 t} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \text{Sa}^2\left(\frac{n\pi}{2}\right) e^{j\frac{n\pi}{2}t}$$

思考题

1. 如何计算非周期信号的傅里叶变换? 其物理意义是什么?

2. 是不是任意信号都能进行傅里叶变换?
3. 如何绘制非周期信号的频谱图?
4. 周期信号傅里叶级数的谱系数与其对应的非周期信号的频谱函数之间有什么区别和联系?

3.4 傅里叶变换的性质和定理

通过 3.3 节分析可知,信号可以用时间函数 $f(t)$ 来描述,也可以用频谱函数 $F(\omega)$ 来描述,两者从不同的角度反映了信号的特性。本节通过讨论傅里叶变换的性质和定理,分析信号在时域进行某种运算,其频谱函数的变化情况,理解信号的时间特性与频率特性之间的联系。

3.4.1 傅里叶变换的性质

1. 线性特性

若 $f_1(t) \leftrightarrow F_1(\omega)$, $f_2(t) \leftrightarrow F_2(\omega)$, 则有

$$k_1 f_1(t) + k_2 f_2(t) \leftrightarrow k_1 F_1(\omega) + k_2 F_2(\omega) \quad (3.4-1)$$

其中, k_1, k_2 为任意常数。

$$\begin{aligned} \text{证明: } \mathcal{F}[k_1 f_1(t) + k_2 f_2(t)] &= \int_{-\infty}^{+\infty} [k_1 f_1(t) + k_2 f_2(t)] e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} k_1 f_1(t) e^{-j\omega t} dt + \int_{-\infty}^{+\infty} k_2 f_2(t) e^{-j\omega t} dt \\ &= k_1 F_1(\omega) + k_2 F_2(\omega) \end{aligned}$$

一般地,式(3.4-1)可以推广为

$$\sum_{i=1}^{+\infty} k_i f_i(t) \leftrightarrow \sum_{i=1}^{+\infty} k_i F_i(\omega) \quad (3.4-2)$$

结合傅里叶变换的线性特性,若复杂信号可以分解为简单信号的线性运算,则信号的频谱函数也可由简单信号频谱函数的线性运算得到。

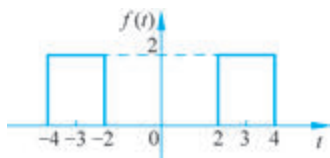


图 3-42 例 3-10 中信号 $f(t)$ 的波形

例 3-10 信号 $f(t)$ 波形如图 3-42 所示,计算 $f(t)$ 的频谱函数 $F(\omega)$ 。

解: $f(t)$ 可以看成两个脉宽分别为 8 和 4 的门函数相减的结果,即

$$f(t) = 2[G_8(t) - G_4(t)]$$

由常用信号的傅里叶变换对可知

$$EG_\tau(t) \leftrightarrow E\tau \text{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$$

根据线性特性,可得



视频



$$F(\omega) = 16\text{Sa}(4\omega) - 8\text{Sa}(2\omega)$$

2. 尺度变换特性

若 $f(t) \leftrightarrow F(\omega)$, 则

$$f(at) \leftrightarrow \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\omega}{a}\right) \quad (3.4-3)$$

其中, a 为非零实常数。

$$\text{证明: } \mathcal{F}[f(at)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(at) e^{-j\omega t} dt \stackrel{\text{令 } \lambda=at}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda) e^{-j\omega \frac{\lambda}{a}} d \frac{\lambda}{a}$$

当 $a > 0$ 时, 有

$$\mathcal{F}[f(at)] = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda) e^{-j\frac{\omega}{a}\lambda} d\lambda = \frac{1}{a} F\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

当 $a < 0$ 时, 有

$$\mathcal{F}[f(at)] = \frac{1}{a} \int_{+\infty}^{-\infty} f(\lambda) e^{-j\frac{\omega}{a}\lambda} d\lambda = -\frac{1}{a} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda) e^{-j\frac{\omega}{a}\lambda} d\lambda = -\frac{1}{a} F\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

结合上述两种情况, 有 $f(at) \leftrightarrow \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\omega}{a}\right)$ 。

尺度变换特性说明, 信号在时域波形压缩, 其频谱扩展; 反之, 信号在时域波形扩展, 其频谱压缩。

特别地, 当 $a = -1$ 时, 有

$$f(-t) \leftrightarrow F(-\omega) \quad (3.4-4)$$

以幅度为 E 、脉宽为 τ 的门函数 $EG_{\tau}(t)$ 为例, 其时域波形和频谱图分别如图 3-43(a) 和图 3-43(b) 所示。



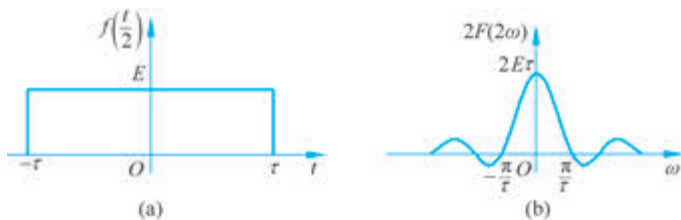
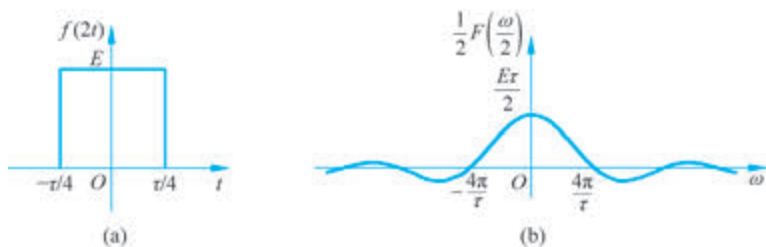
图 3-43 门函数的时域波形和频谱图

当 $0 < a < 1$ 时, 以 $a = \frac{1}{2}$ 为例, $f\left(\frac{t}{2}\right)$ 的时域波形如图 3-44(a) 所示。根据傅里叶变换的尺度变换特性, 可知

$$f\left(\frac{t}{2}\right) \leftrightarrow 2F(2\omega)$$

故其频谱图如图 3-44(b) 所示。

当 $a > 1$ 时, 以 $a = 2$ 为例, $f(2t)$ 的时域波形如图 3-45(a) 所示。根据傅里叶变换的尺度变换特性, 可知其频谱图如图 3-45(b) 所示。

图 3-44 $f(t/2)$ 的时域波形和频谱图图 3-45 $f(2t)$ 的时域波形和频谱图

从上面的讨论可以看出,信号持续时间与信号占有频带成反比。在实际通信中,有时为加速信号的传递,要将信号持续时间压缩,使单位时间内传输的信号脉冲数增加,必然会导致信号所占用的频带展宽。因此,信号的高速传递要依靠信道的宽频带来支撑。

3. 时移特性

若 $f(t) \leftrightarrow F(\omega)$, 则

$$f(t \pm t_0) \leftrightarrow F(\omega) e^{\pm j\omega t_0} \quad (3.4-5)$$

$$\begin{aligned} \text{证明: } \mathcal{F}[f(t \pm t_0)] &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t \pm t_0) e^{-j\omega t} dt \stackrel{\text{令 } t \pm t_0 = \lambda}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda) e^{-j\omega(\lambda \mp t_0)} d\lambda \\ &= e^{\pm j\omega t_0} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda) e^{-j\omega \lambda} d\lambda \\ &= F(\omega) e^{\pm j\omega t_0} \end{aligned}$$

可以看出,信号在时域中沿时间轴右移 t_0 ,其频域中频谱乘以因子 $e^{-j\omega t_0}$;在时域中沿时间轴左移 t_0 ,其频域中频谱乘以因子 $e^{j\omega t_0}$ 。

由于 $F(\omega) = |F(\omega)| e^{j\varphi(\omega)}$, 可得

$$F(\omega) e^{\pm j\omega t_0} = |F(\omega)| e^{j\varphi(\omega)} \cdot e^{\pm j\omega t_0} = |F(\omega)| e^{j[\varphi(\omega) \pm \omega t_0]} \quad (3.4-6)$$

从式(3.4-6)中可以看出,信号发生时移后,其振幅谱函数不变,仅是相位谱函数发生改变,改变量与信号时移量有关,即信号在时域中的时移与频域中的移相对应。

由于非周期信号可展开为无穷多个连续频率正弦信号的叠加,在时间轴上移动信号,就相当于同时移动若干正弦信号。根据 $\sin\omega(t-t_0) = \sin(\omega t - \omega t_0)$ 可以看出,正弦信号移位时其相位发生改变,因此体现在频域就是信号频谱中振幅不变、相位改变。

例 3-11 求图 3-46 所示信号 $f(t)$ 的频谱函数 $F(\omega)$ 。

解: 设信号 $f_0(t) = 2G_2(t)$, 波形如图 3-47 所示。



视频

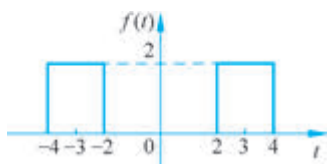


图 3-46 例 3-11 信号的时域波形

图 3-47 信号 $f_0(t)$ 的波形

可以看出,信号 $f(t)$ 可以看成 $f_0(t)$ 分别向左、向右时移了 3 个单位后叠加的结果,即 $f(t) = f_0(t+3) + f_0(t-3)$ 。

由门函数的傅里叶变换,可知

$$F_0(\omega) = \mathcal{F}[f_0(t)] = 4\text{Sa}(\omega)$$

根据时移特性可得

$$\begin{aligned} F(\omega) &= F_0(\omega)(e^{3j\omega} + e^{-3j\omega}) \\ &= 4\text{Sa}(\omega) \times 2\cos 3\omega = 8\text{Sa}(\omega)\cos 3\omega \end{aligned}$$

在例 3-10 中,利用线性特性求解此信号的频谱函数为 $F(\omega) = 16\text{Sa}(4\omega) - 8\text{Sa}(2\omega)$ 。虽然利用两种不同性质计算得到的结果形式不同,但是可以互相转换。即

$$\begin{aligned} F(\omega) &= 8\text{Sa}(\omega)\cos 3\omega = 8 \frac{\sin \omega}{\omega} \cos 3\omega = \frac{4}{\omega} [\sin 4\omega + \sin(-2\omega)] \\ &= 4 \times \left(4 \frac{\sin 4\omega}{4\omega} - 2 \frac{\sin 2\omega}{2\omega} \right) = 16\text{Sa}(4\omega) - 8\text{Sa}(2\omega) \end{aligned}$$

4. 频移特性

若 $f(t) \leftrightarrow F(\omega)$, 则

$$f(t)e^{\pm j\omega_0 t} \leftrightarrow F(\omega \mp \omega_0) \quad (3.4-7)$$

$$\begin{aligned} \text{证明: } \mathcal{F}[f(t)e^{\pm j\omega_0 t}] &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{\pm j\omega_0 t} e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j(\omega \mp \omega_0)t} dt \\ &= F(\omega \mp \omega_0) \end{aligned}$$

式(3.4-7)表明,信号在时域中与因子 $e^{j\omega_0 t}$ 相乘,其频谱右移 ω_0 ; 信号在时域中与因子 $e^{-j\omega_0 t}$ 相乘,其频谱左移 ω_0 。

例 3-12 求信号 $f(t) = \cos \omega_0 t$ 的频谱函数 $F(\omega)$ 。

解: 根据欧拉公式,可知

$$\cos \omega_0 t = \frac{1}{2}(e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}) \quad (3.4-8)$$

直流信号的傅里叶变换对为

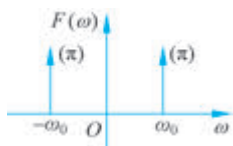
$$1 \leftrightarrow 2\pi\delta(\omega)$$

利用频移特性可得



视频

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[\cos\omega_0 t] &= \frac{1}{2} \mathcal{F}[1 \times e^{j\omega_0 t}] + \frac{1}{2} \mathcal{F}[1 \times e^{-j\omega_0 t}] \\ &= \frac{1}{2} \times 2\pi\delta(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2} \times 2\pi\delta(\omega + \omega_0) \\ &= \pi\delta(\omega - \omega_0) + \pi\delta(\omega + \omega_0)\end{aligned}$$

图 3-48 $\cos\omega_0 t$ 的频谱图

$\cos\omega_0 t$ 信号的频谱如图 3-48 所示。

同理,可以推导得到正弦信号 $\sin\omega_0 t$ 的傅里叶变换为

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[\sin\omega_0 t] &= \frac{1}{2j} \mathcal{F}[e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}] \\ &= j\pi[\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0)]\end{aligned}$$

类似地,利用欧拉公式和频移特性,可得

$$\begin{cases} f(t)\cos\omega_0 t = f(t) \cdot \frac{e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}}{2} \leftrightarrow \frac{1}{2}[F(\omega + \omega_0) + F(\omega - \omega_0)] \\ f(t)\sin\omega_0 t = f(t) \cdot \frac{e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}}{2j} \leftrightarrow \frac{j}{2}[F(\omega + \omega_0) - F(\omega - \omega_0)] \end{cases} \quad (3.4-9)$$

例 3-13 求图 3-49 所示信号 $f(t)$ 的频谱函数 $F(\omega)$ 。

解: 从图 3-49 可以看出,信号 $f(t)$ 的时域表达式为

$$\begin{aligned}f(t) &= \cos\omega_0 t \cdot \left[u\left(t + \frac{\tau}{2}\right) - u\left(t - \frac{\tau}{2}\right) \right] \\ &= G_\tau(t) \cos\omega_0 t\end{aligned}$$

因为 $G_\tau(t) \leftrightarrow F_1(\omega) = \tau \text{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$, 其频谱如图 3-50 所示。

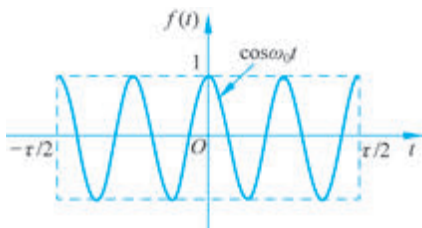


图 3-49 例 3-13 信号波形

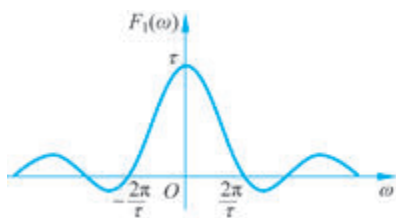


图 3-50 门函数频谱图

根据式(3.4-9)可知

$$\begin{aligned}f(t) \leftrightarrow F(\omega) &= \frac{1}{2} [F_1(\omega + \omega_0) + F_1(\omega - \omega_0)] \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \tau \text{Sa}\left[\frac{(\omega + \omega_0)\tau}{2}\right] + \tau \text{Sa}\left[\frac{(\omega - \omega_0)\tau}{2}\right] \right\}\end{aligned}$$

$f(t)$ 的频谱如图 3-51 所示。

从图 3-51 中可以看出,时域信号 $f(t)$ 与信号 $\cos\omega_0 t$ 相乘,频域上是将 $f(t)$ 的频谱分别向左和向右搬移了 ω_0 个单位,并且振幅降为原来的一半。

在通信中把这种信号频谱的搬移过程称调制。在无线电通信中,为了将信号以电磁



图 3-51 图 3-49 所示信号的频谱图

波的形式发射出去,必须把低频信号的频谱搬移到较高的发射频率附近,就需要进行调制。实际做法就是把待传输的信号与 $\cos\omega_0 t$ 或 $\sin\omega_0 t$ 相乘。在接收端,将信号频谱从较高频率搬回到低频,恢复为原信号的过程称为解调。调制解调过程如图 3-52 所示,详细内容将在 3.9 节中介绍。

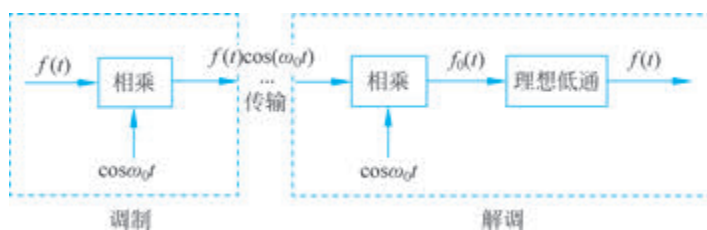


图 3-52 调制解调过程示意图

5. 对称性

若 $f(t) \leftrightarrow F(\omega)$, 则

$$F(t) \leftrightarrow 2\pi f(-\omega) \quad (3.4-10)$$

证明: 根据傅里叶反变换的公式

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

可知

$$f(-t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{-j\omega t} d\omega$$

将 ω 与 t 的位置互换可得

$$f(-\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(t) e^{-j\omega t} dt$$

整理可以得到

$$F(t) \leftrightarrow 2\pi f(-\omega)$$

特别地,若 $f(t)$ 为偶函数,则 $F(t) \leftrightarrow 2\pi f(\omega)$ 。

式(3.4-10)说明,若 $f(t)$ 的频谱函数为 $F(\omega)$,则 $F(t)$ 的频谱函数的形状与 $f(t)$ 的形状一样,只是幅度相差 2π 倍。

例 3-14 求直流信号 $f(t)=1$ 的频谱函数 $F(\omega)$ 。

解: 因为直流信号不满足绝对可积的条件,在 3.3.2 节利用了求 $\delta(\omega)$ 原函数的方法,这里利用对称性来求取。



视频

已知 $\delta(t) \leftrightarrow 1$, 根据对称性可得

$$1 \leftrightarrow F(\omega) = 2\pi\delta(-\omega) = 2\pi\delta(\omega)$$

图 3-53 给出了单位冲激信号和直流信号的时域波形和频谱图, 可以看出这两个信号的时域和频域波形之间具有对称关系。

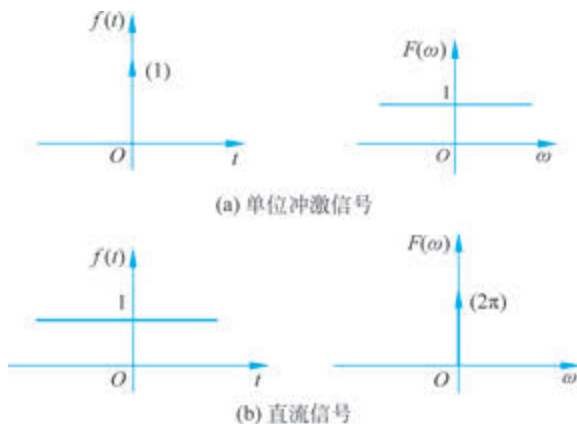


图 3-53 单位冲激信号和直流信号的时域波形和频谱图

例 3-15 求抽样函数 $\text{Sa}(t) = \frac{\sin t}{t}$ 的频谱函数 $F(\omega)$ 。

解: 待求信号为时域抽样函数。已知时域的门函数对应的频谱函数为抽样函数, 即

$$EG_{\tau}(t) \leftrightarrow E\tau \text{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$$

当 $\tau=2, E=1$ 时, 有

$$G_2(t) \leftrightarrow 2\text{Sa}(\omega)$$

由对称性可知

$$2\text{Sa}(t) \leftrightarrow F(\omega) = 2\pi G_2(-\omega) = 2\pi G_2(\omega)$$

即

$$\text{Sa}(t) \leftrightarrow F(\omega) = \pi G_2(\omega)$$

例 3-16 已知信号频谱如图 3-54 所示, 求时域信号 $f(t)$ 。

解: 从图 3-54 中可以看出, 信号频谱函数可以表示为

$$F(\omega) = 2G_8(\omega)$$

根据 $EG_{\tau}(t) \leftrightarrow E\tau \text{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$, 可知

$$2G_8(t) \leftrightarrow 16\text{Sa}(4\omega)$$

图 3-54 例 3-16 用图

由对称性可得

$$\text{Sa}(4t) \leftrightarrow \frac{\pi}{4} G_8(\omega)$$

即

$$G_8(\omega) \leftrightarrow \frac{4}{\pi} \text{Sa}(4t)$$

因此 $F(\omega)$ 对应的时域信号为

$$f(t) = \frac{8}{\pi} \text{Sa}(4t)$$

根据例 3-15 和例 3-16, 可以得出一个有用的结论, 即

$$\text{Sa}(\omega_0 t) \rightarrow \frac{\pi}{\omega_0} G_{2\omega_0}(\omega) \quad (3.4-11)$$

6. 时域微分特性

若 $f(t) \leftrightarrow F(\omega)$, 则

$$\frac{d}{dt} f(t) \leftrightarrow j\omega F(\omega) \quad (3.4-12)$$

证明: 对傅里叶反变换公式

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

两边同时求导

$$\frac{d}{dt} f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) \cdot \frac{d}{dt} e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} j\omega F(\omega) \cdot e^{j\omega t} d\omega$$

即得

$$\frac{d}{dt} f(t) \leftrightarrow j\omega F(\omega)$$

式(3.4-12)可推广到高阶导数的傅里叶变换, 即

$$\frac{d^n f(t)}{dt^n} \leftrightarrow (j\omega)^n F(\omega) \quad (3.4-13)$$

时域微分特性表明, 在时域中对信号取 n 次导数, 其频谱函数 $F(\omega)$ 将乘以 $(j\omega)^n$, 即时域中的微分运算对应于频域中的代数运算。信号求导后, 时域波形会变得陡峭; 而在频域, 由于其频谱函数变为 $j\omega F(\omega)$, 高频分量会得到增强。

7. 频域微分特性

若 $f(t) \leftrightarrow F(\omega)$, 则

$$-jtf(t) \leftrightarrow \frac{dF(\omega)}{d\omega} \quad (3.4-14)$$

证明: 与时域微分特性类似, 对傅里叶正变换公式

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} d\omega$$

两边同时求导

$$\frac{d}{d\omega} F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot \frac{d}{d\omega} e^{-j\omega t} d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} (-jt) f(t) \cdot e^{-j\omega t} d\omega$$

即得

$$-jtf(t) \leftrightarrow \frac{dF(\omega)}{d\omega}$$



视频

推广到高阶,有

$$(-jt)^n f(t) \leftrightarrow \frac{d^n F(\omega)}{d\omega^n}$$

对于频域微分特性,常用形式为

$$t^n f(t) \leftrightarrow j^n \frac{d^n F(\omega)}{d\omega^n} \quad (3.4-15)$$

例 3-17 已知 $f(t) \leftrightarrow F(\omega)$, 求 $(t-1)f(t-1)$ 的傅里叶变换。

解: 设 $f_0(t) = tf(t)$ 。根据频域微分特性,有

$$\mathcal{F}[f_0(t)] = j \frac{dF(\omega)}{d(\omega)}$$

由信号的时域运算,可知

$$(t-1)f(t-1) = f_0(t-1)$$

结合傅里叶变换的时移特性,可得

$$\mathcal{F}[(t-1)f(t-1)] = j \frac{dF(\omega)}{d(\omega)} \cdot e^{-j\omega}$$

例 3-18 计算 $f(t) = te^{-at}u(t)$ 的傅里叶变换。

解: 由常用信号的傅里叶变换对,可知

$$e^{-at}u(t) \leftrightarrow \frac{1}{a + j\omega}$$

利用频域微分特性,可得

$$\mathcal{F}[te^{-at}u(t)] = j \frac{d}{d\omega} \left[\frac{1}{a + j\omega} \right] = \frac{1}{(a + j\omega)^2}$$

8. 时域积分特性

若 $f(t) \leftrightarrow F(\omega)$, 则

$$\int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau \leftrightarrow \pi F(0)\delta(\omega) + \frac{F(\omega)}{j\omega} \quad (3.4-16)$$

式中, $F(0) = F(\omega)|_{\omega=0} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt$ 。

时域积分特性的证明可参考例 3-23。

特别地,若 $F(0) = 0$, 则式(3.4-16)可以简写为

$$\int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau \leftrightarrow \frac{F(\omega)}{j\omega} \quad (3.4-17)$$

例 3-19 计算单位阶跃信号 $u(t)$ 的傅里叶变换。

解: 阶跃信号不满足绝对可积条件,无法直接利用傅里叶变换定义式计算其傅里叶变换。由于单位阶跃信号是单位冲激信号的积分,即

$$u(t) = \int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau$$

已知 $\mathcal{F}[\delta(t)] = 1$, 故由积分性质可得

$$\mathcal{F}[u(t)] = \frac{1}{j\omega} + \pi \times 1 \times \delta(\omega) = \frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)$$

即

$$u(t) \leftrightarrow \frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega) \quad (3.4-18)$$

单位阶跃信号的时域波形和振幅谱图分别如图 3-55 和图 3-56 所示。



图 3-55 单位阶跃信号的时域波形

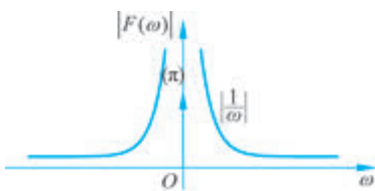


图 3-56 单位阶跃信号的振幅谱图

例 3-20 求符号函数 $\text{sgn}(t)$ 的频谱函数。

解：符号函数的时域表达式为

$$f(t) = \text{sgn}(t) = \begin{cases} +1, & t > 0 \\ -1, & t < 0 \end{cases}$$

根据阶跃信号与符号函数之间的关系

$$\text{sgn}(t) = 2u(t) - 1$$

则有

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[\text{sgn}(t)] &= \mathcal{F}[2u(t) - 1] \\ &= 2 \left[\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} \right] - 2\pi\delta(\omega) = \frac{2}{j\omega} \end{aligned}$$

即

$$\text{sgn}(t) \leftrightarrow \frac{2}{j\omega} \quad (3.4-19)$$

例 3-21 已知梯形脉冲的时域波形如图 3-57 所示, 求其频谱函数 $F(\omega)$ 。

解：由分段折线组成的函数波形, 可用积分特性来求其频谱函数。因为该函数一次或多次微分后, 总会出现阶跃信号或冲激信号, 而阶跃和冲激信号的频谱函数是已知的, 再利用时域积分特性即可求原信号的频谱函数。

对 $f(t)$ 进行求导, 其导数的波形如图 3-58 所示。

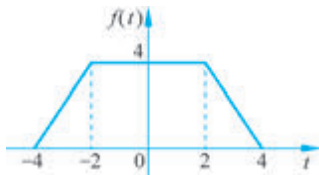


图 3-57 例 3-21 梯形脉冲的时域波形

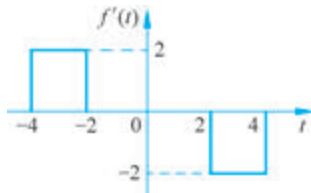


图 3-58 $f(t)$ 导数的波形

由导数波形可以得到

$$f'(t) = G_2(t+3) - G_2(t-3)$$

其傅里叶变换 $F_1(\omega)$ 为

$$F_1(\omega) = \mathcal{F}[f'(t)] = 4\text{Sa}(\omega)[e^{j3\omega} - e^{-j3\omega}] = 8j\text{Sa}(\omega)\sin(3\omega)$$

由于 $f'(t)$ 的面积为 0, 即 $F_1(0) = 0$, 可根据式(3.4-17)计算原信号的变换为

$$F(\omega) = \frac{\mathcal{F}[f_1(t)]}{j\omega} = \frac{8j\text{Sa}(\omega)\sin(3\omega)}{j\omega} = 24\text{Sa}(\omega)\text{Sa}(3\omega)$$

需要注意的是, 例 3-21 采用的这种求解方法不能应用于任意信号, 只有当信号先微分再积分后能恢复成原信号时才适用。设信号 $f(t)$ 的导数为 $f'(t)$, 因为

$$\int_{-\infty}^t f'(\tau) d\tau = f(\tau) \Big|_{-\infty}^t = f(t) - f(-\infty)$$

只有当 $f(-\infty) = 0$ 时, $\int_{-\infty}^t f'(\tau) d\tau = f(t)$ 。如图 3-59(a) 所示信号 $f(t)$, 图 3-59(b) 为其

导数 $f'(t)$, 而 $\int_{-\infty}^t f'(\tau) d\tau$ 的波形如图 3-59(c) 所示。显然此时 $\int_{-\infty}^t f'(\tau) d\tau \neq f(t)$ 。

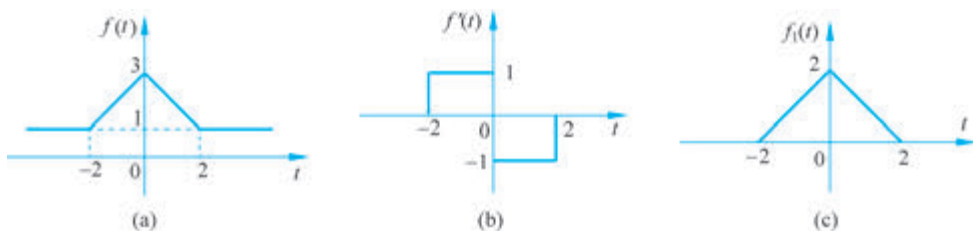


图 3-59 信号 $f(t)$ 、导数 $f'(t)$ 及其积分波形

因此, 求解 $f(t)$ 的傅里叶变换时, 需先将 $f(t)$ 分解为三角脉冲信号 $f_1(t)$ 和直流信号 $f_2(t)$ 的叠加, 如图 3-60 所示。



图 3-60 $f(t)$ 的分解示意图

由傅里叶变换的线性特性, 可知

$$\mathcal{F}[f(t)] = \mathcal{F}[f_1(t)] + \mathcal{F}[f_2(t)]$$

$f_1(t)$ 的导数如图 3-59(b) 所示, 令其傅里叶变换为 $F_1(\omega)$, 则

$$\begin{aligned} F_1(\omega) &= \mathcal{F}[f_1'(t)] = \mathcal{F}[G_2(t+1) - G_2(t-1)] \\ &= 2\text{Sa}(\omega)e^{j\omega} - 2\text{Sa}(\omega)e^{-j\omega} \\ &= 4j\text{Sa}(\omega)\sin\omega \end{aligned}$$

根据时域积分特性, 得

$$\mathcal{F}[f_1(t)] = \frac{F_1(\omega)}{j\omega} + \pi F_1(0)\delta(\omega) = 4\text{Sa}^2(\omega)$$

又因为 $f_2(t) = 1 \leftrightarrow 2\pi\delta(\omega)$, 综合以上计算可知, 信号 $f(t)$ 的傅里叶变换为

$$\mathcal{F}[f(t)] = 4\text{Sa}^2(\omega) + 2\pi\delta(\omega)$$

9. 奇偶虚实性

由 3.3.1 节的讨论可知, 信号 $f(t)$ 的频谱函数 $F(\omega)$ 可以写成实部和虚部之和, 即

$$F(\omega) = R(\omega) + jX(\omega)$$

若 $f(t)$ 为实偶函数, 即 $f(t) = f(-t)$, 可得

$$X(\omega) = 0, \quad F(\omega) = R(\omega)$$

若 $f(t)$ 为实奇函数, 即 $f(t) = -f(-t)$, 可得

$$R(\omega) = 0, \quad F(\omega) = jX(\omega)$$

可以看出, 时域的实偶函数, 其频域上也是实偶函数; 时域的实奇函数, 其频谱函数为虚奇函数。例如, 门函数是实偶函数, 其傅里叶变换也为实偶函数; 例 3-20 中的符号函数是实奇函数, 其傅里叶变换是虚奇函数。

3.4.2 傅里叶变换的定理

1. 时域卷积定理

若 $f_1(t) \leftrightarrow F_1(\omega)$, $f_2(t) \leftrightarrow F_2(\omega)$, 则

$$f_1(t) * f_2(t) \leftrightarrow F_1(\omega) \cdot F_2(\omega) \quad (3.4-20)$$

$$\begin{aligned} \text{证明: } \mathcal{F}[f_1(t) * f_2(t)] &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau \right] e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f_2(t - \tau) e^{-j\omega t} dt \right] d\tau \\ &= F_2(\omega) \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \\ &= F_1(\omega) \cdot F_2(\omega) \end{aligned}$$

式(3.4-20)说明时域中信号的卷积运算对应频域中频谱函数的相乘运算。

例 3-22 已知 $f_1(t) \leftrightarrow E\tau \text{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$, 求 $f(t) = f_1(t) * f_1(t)$ 的频谱函数 $F(\omega)$ 。

解: 由卷积定理可得

$$\mathcal{F}[f(t)] = F_1(\omega) \cdot F_1(\omega) = E^2 \tau^2 \text{Sa}^2\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$$

$f_1(t)$ 和 $f(t)$ 的时域波形和频谱图分别如图 3-61 和图 3-62 所示。

可以看出, 利用时域卷积定理所得到的结果与 3.3.2 节中根据傅里叶变换式计算的结果相同。

例 3-23 已知 $f(t) \leftrightarrow F(\omega)$, 求 $\int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau$ 的傅里叶变换。



视频

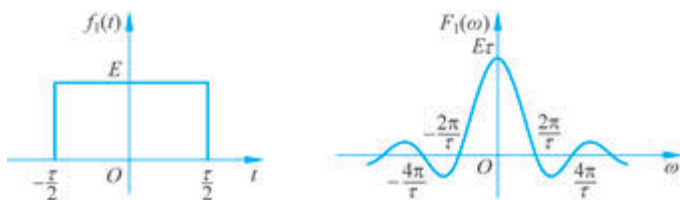


图 3-61 $f_1(t)$ 的时域波形和频谱图

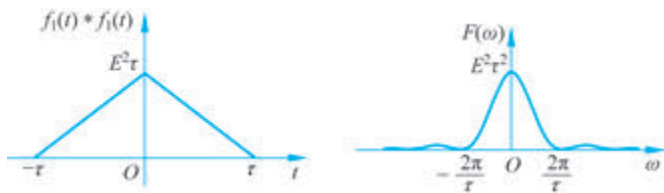


图 3-62 卷积结果的时域波形和频谱图

解: 由卷积的微积分运算可知, $\int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau = f(t) * u(t)$, 则

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\left[\int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau\right] &= \mathcal{F}[f(t) * u(t)] = \mathcal{F}[f(t)] \cdot \mathcal{F}[u(t)] \\ &= F(\omega) \cdot \left[\frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)\right] \\ &= \frac{F(\omega)}{j\omega} + \pi F(0)\delta(\omega) \end{aligned}$$

此例题也证明了时域积分特性。

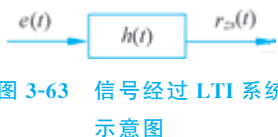


图 3-63 信号经过 LTI 系统示意图

时域卷积定理提供了另一种求解系统零状态响应的方法。当信号 $e(t)$ 通过如图 3-63 所示的系统时, 根据零状态响应的卷积分析法可知, $r_{zs}(t) = e(t) * h(t)$ 。

设 $e(t) \leftrightarrow E(\omega)$, $h(t) \leftrightarrow H(\omega)$, $r_{zs}(t) \leftrightarrow R_{zs}(\omega)$, 由时域

卷积定理可以知道

$$R_{zs}(\omega) = E(\omega) \cdot H(\omega) \quad (3.4-21)$$

通过时域卷积定理可以将时域卷积转换为频域相乘运算, 从而得到零状态响应的频谱函数, 再利用傅里叶反变换, 即可求得零状态响应的时域表示。在 3.7 节系统的频域分析中会具体讨论利用频域方法来求解系统的响应。

2. 频域卷积定理

若 $f_1(t) \leftrightarrow F_1(\omega)$, $f_2(t) \leftrightarrow F_2(\omega)$, 则

$$f_1(t) \cdot f_2(t) \leftrightarrow \frac{1}{2\pi} [F_1(\omega) * F_2(\omega)] \quad (3.4-22)$$

证明: $\mathcal{F}^{-1}[F_1(\omega) * F_2(\omega)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} F_1(\lambda) F_2(\omega - \lambda) d\lambda \right] e^{j\omega t} d\omega$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F_1(\lambda) \left[\int_{-\infty}^{+\infty} F_2(\omega - \lambda) e^{j\omega t} d\omega \right] d\lambda \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} F_1(\lambda) \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F_2(\omega - \lambda) e^{j(\omega - \lambda)t} d\omega \right] e^{j\lambda t} d\lambda \\
 &= f_2(t) \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\lambda) e^{j\lambda t} d\lambda = 2\pi f_1(t) \cdot f_2(t)
 \end{aligned}$$

即

$$f_1(t) \cdot f_2(t) \leftrightarrow \frac{1}{2\pi} [F_1(\omega) * F_2(\omega)]$$

式(3.4-22)说明时域中两信号相乘运算对应频域中频谱函数的卷积运算,幅度乘以 $1/2\pi$ 。

例 3-24 已知 $\cos\omega_0 t \leftrightarrow \pi[\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)]$, 求 $\cos(\omega_0 t)u(t)$ 的傅里叶变换。

解: 因为 $u(t) \leftrightarrow \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$, 由频域卷积定理可知

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}[\cos(\omega_0 t)u(t)] &\leftrightarrow \frac{1}{2\pi} [\pi\delta(\omega + \omega_0) + \pi\delta(\omega - \omega_0)] * \left[\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} \right] \\
 &= \frac{\pi}{2} [\pi\delta(\omega + \omega_0) + \pi\delta(\omega - \omega_0)] + \frac{1}{2} \left[\frac{1}{j(\omega + \omega_0)} + \frac{1}{j(\omega - \omega_0)} \right] \\
 &= \frac{\pi}{2} [\pi\delta(\omega + \omega_0) + \pi\delta(\omega - \omega_0)] + \frac{\omega}{j(\omega^2 - \omega_0^2)}
 \end{aligned}$$

例 3-25 已知信号 $f_1(t) = 100\text{Sa}(100t)$, $f_2(t) = 50\text{Sa}(50t)$, 画出 $f_1(t) + f_2(t)$ 、 $f_1(t) \cdot f_2(t)$ 和 $f_1(t) * f_2(t)$ 的频谱图。

解: 根据对称性, 可知

$$F_1(\omega) = \mathcal{F}[100\text{Sa}(100t)] = \pi G_{200}(\omega)$$

$$F_2(\omega) = \mathcal{F}[50\text{Sa}(50t)] = \pi G_{100}(\omega)$$

$f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ 的频谱分别如图 3-64(a) 和 (b) 所示。

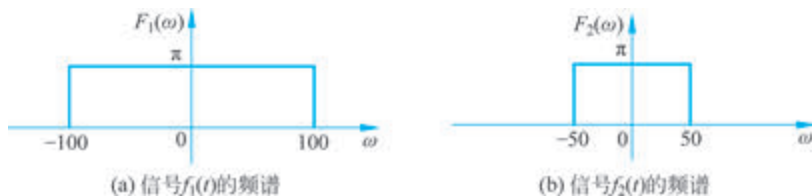


图 3-64 例 3-25 信号的频谱图

根据傅里叶变换的线性特性, 可知

$$F_3(\omega) = \mathcal{F}[f_1(t) + f_2(t)] = F_1(\omega) + F_2(\omega)$$

根据傅里叶变换的频域卷积定理, 可知

$$F_4(\omega) = \mathcal{F}[f_1(t) \cdot f_2(t)] = \frac{1}{2\pi} F_1(\omega) * F_2(\omega)$$

根据傅里叶变换的时域卷积定理, 可知

$$F_5(\omega) = \mathcal{F}[f_1(t) * f_2(t)] = F_1(\omega) \cdot F_2(\omega)$$

故 $f_1(t) + f_2(t)$ 、 $f_1(t) \cdot f_2(t)$ 和 $f_1(t) * f_2(t)$ 的频谱分别如图 3-65(a)、(b)、(c) 所示。

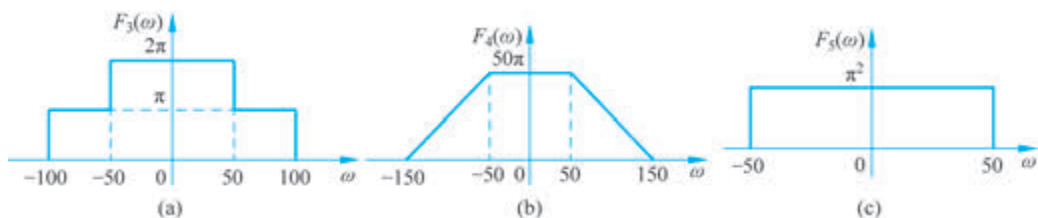


图 3-65 $f_1(t) + f_2(t)$ 、 $f_1(t) \cdot f_2(t)$ 和 $f_1(t) * f_2(t)$ 的频谱图

合理运用傅里叶变换的相关性质,有助于复杂信号的频谱分析。表 3-2 整理了傅里叶变换的基本性质和定理。

表 3-2 傅里叶变换的基本性质和定理

性质和定理	时间函数 $f(t)$	频谱函数 $F(\omega)$
线性特性	$k_1 f_1(t) + k_2 f_2(t)$	$k_1 F_1(\omega) + k_2 F_2(\omega)$
对称性	$F(t)$	$2\pi f(-\omega)$
时移特性	$f(t \pm t_0)$	$F(\omega) e^{\pm j\omega t_0}$
尺度变换特性	$f(at)$	$\frac{1}{ a } F\left(\frac{\omega}{a}\right)$
时域微分特性	$\frac{d^n f(t)}{dt^n}$	$(j\omega)^n F(\omega)$
频移特性	$f(t) e^{\pm j\omega_0 t}$	$F(\omega \mp \omega_0)$
时域积分特性	$\int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau$	$\pi F(0) \delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} F(\omega)$
频域微分特性	$(-jt)^n f(t)$	$\frac{d^n F(\omega)}{d\omega^n}$
时域卷积定理	$f_1(t) * f_2(t)$	$F_1(\omega) \cdot F_2(\omega)$
频域卷积定理	$f_1(t) \cdot f_2(t)$	$\frac{1}{2\pi} F_1(\omega) * F_2(\omega)$

思考题

1. 分析傅里叶变换的相关性质有什么意义?
2. 傅里叶变换的线性特性在实际中有什么作用?
3. 尺度变换特性揭示了信号时域脉宽和频域带宽之间的反比关系,这在实际通信中有什么作用?
4. 两个时域信号进行卷积,卷积结果的频率范围是多少?



3.5 周期信号的傅里叶变换

3.4节中利用频移特性推导出了 $\cos\omega_0 t$ 和 $\sin\omega_0 t$ 的傅里叶变换,即

$$\cos\omega_0 t = \frac{1}{2}(e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}) \leftrightarrow \pi\delta(\omega - \omega_0) + \pi\delta(\omega + \omega_0) \quad (3.5-1)$$

$$\sin\omega_0 t = \frac{1}{2j}(e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}) \leftrightarrow j\pi[\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0)] \quad (3.5-2)$$

以正弦信号 $\cos\omega_0 t$ 为例,其傅里叶变换形式的频谱如图 3-66 所示。

由傅里叶级数理论可知,正弦信号 $\cos\omega_0 t$ 的傅里叶级数形式的频谱如图 3-67 所示。

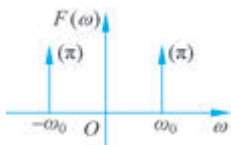


图 3-66 $\cos\omega_0 t$ 傅里叶变换形式的频谱图

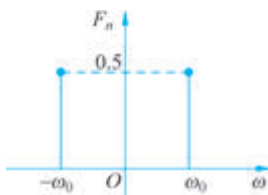


图 3-67 $\cos\omega_0 t$ 傅里叶级数形式的频谱图

对于任意的周期信号来说,根据 3.2 节分析可知,周期信号可以展开为无穷多个正弦信号的叠加,因此周期信号的傅里叶变换中包含有无穷多个冲激信号。

设 $f_T(t)$ 是周期为 T_1 的周期信号,其复指数形式的傅里叶级数展开式为

$$f_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_n e^{jn\omega_0 t}$$

对 $f_T(t)$ 进行傅里叶变换,有

$$F(\omega) = \mathcal{F}[f_T(t)] = \mathcal{F}\left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_n e^{jn\omega_0 t}\right] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_n \mathcal{F}[e^{jn\omega_0 t}]$$

由傅里叶变换的频移特性,可得

$$\mathcal{F}[e^{jn\omega_0 t}] = 2\pi\delta(\omega - n\omega_0)$$

结合线性特性,有

$$F(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_n \mathcal{F}[e^{jn\omega_0 t}] = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_n \delta(\omega - n\omega_0) \quad (3.5-3)$$

式(3.5-3)表明,周期信号的傅里叶变换是无穷多个强度为 $2\pi F_n$ 、出现在频率为 $n\omega_0$ 处的冲激信号之和,其中 F_n 为周期信号复指数形式的谱系数。

例 3-26 求如图 3-68 所示周期冲激信号 $\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_1)$ 的傅里叶变换。

解: 根据式(3.5-3)可知,要计算周期信号的傅里叶变换,需先求解其谱系数 F_n 。由

谱系数公式 $F_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$, 计算得到

$$F_n = \frac{1}{T_1} \int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} \delta(t) e^{-jn\omega_0 t} dt = \frac{1}{T_1}$$

可以看出周期冲激信号的谱系数是常数,也就是说,周期冲激信号的各频率分量的大小是相等的。将谱系数代入式(3.5-3),可得

$$\delta_T(t) \leftrightarrow 2\pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T_1} \delta(\omega - n\omega_0) = \omega_0 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - n\omega_0) \quad (3.5-4)$$

周期冲激信号的频谱如图 3-69 所示,可以看出周期冲激信号的频谱仍是周期冲激信号,冲激的强度和周期都是 ω_0 。

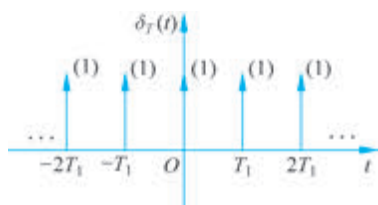


图 3-68 周期冲激信号

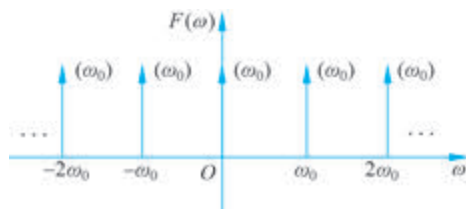


图 3-69 周期冲激信号的频谱图

例 3-27 求如图 3-70 所示周期矩形脉冲信号的傅里叶变换。

解: 在 3.2.5 节中计算过该周期矩形信号的谱系数为

$$F_n = \frac{E\tau}{T_1} \text{Sa}\left(n\omega_0 \frac{\tau}{2}\right)$$

因此该信号的傅里叶变换为

$$\begin{aligned} F_T(\omega) &= 2\pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_n \delta(\omega - n\omega_0) = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{E\tau}{T_1} \text{Sa}\left(n\omega_0 \frac{\tau}{2}\right) \delta(\omega - n\omega_0) \\ &= E\tau\omega_0 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \text{Sa}\left(n\omega_0 \frac{\tau}{2}\right) \delta(\omega - n\omega_0) \end{aligned} \quad (3.5-5)$$

周期矩形脉冲信号傅里叶变换的频谱如图 3-71 所示。

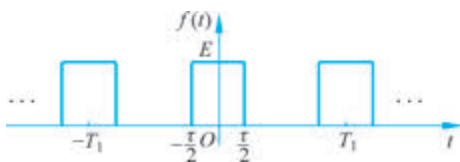


图 3-70 周期矩形脉冲信号

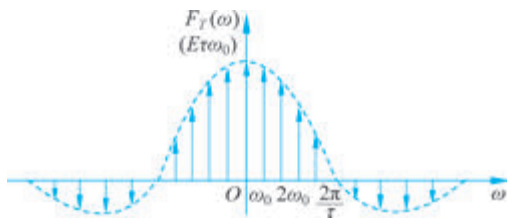


图 3-71 周期矩形脉冲信号的频谱图

可以看出,周期矩形脉冲信号的频谱由间隔为 ω_0 的无穷多个冲激信号构成,其强度的包络线形状为抽样函数。

周期信号的傅里叶变换通过在频域中呈现离散冲激串的形式,反映了信号谐波分量的分布情况。其本质是将周期信号分解为基频及其整数倍频率的正弦分量之和,并通过冲激函数的强度表示各频率分量的振幅与相位信息。

思考题

1. 如何计算周期信号的傅里叶变换?
2. 周期信号的傅里叶变换和周期信号的傅里叶级数展开之间有什么联系和区别?

3.6 能量谱和功率谱

信号的频谱反映了信号所包含的频率分量信息,这对于信号的滤波、去噪、特征提取等处理非常重要。通过分析非周期信号的频谱,可以识别出信号中的主要频率分量,并据此设计滤波器来增强或抑制特定的频率成分。实际中除了频谱,还常常采用能量谱或功率谱来表示信号的能量或功率随频率的变化情况。

3.6.1 能量谱

当信号 $f(t)$ 为实信号时,能量 E 可表示为

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} f^2(t) dt \quad (3.6-1)$$

若 $f(t)$ 为能量信号,则能量 $E < \infty$ 。设信号 $f(t)$ 的傅里叶变换为 $F(\omega)$,将傅里叶反变换的公式

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

代入式(3.6-1)中,可得

$$\begin{aligned} E &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega \right] dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{j\omega t} dt \right] d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) F(-\omega) d\omega \end{aligned} \quad (3.6-2)$$

由于 $F(-\omega) = F^*(\omega)$,则

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) F(-\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |F(\omega)|^2 d\omega$$

即

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} f^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |F(\omega)|^2 d\omega \quad (3.6-3)$$

从式(3.6-3)中可以看出, $|F(\omega)|^2$ 反映了信号的能量在频域的分布情况,表示单位频率的能量,因此把 $|F(\omega)|^2$ 称为信号的能量谱密度函数,简称为能量谱,一般记作 $E(\omega)$,即

$$E(\omega) = |F(\omega)|^2 \quad (3.6-4)$$

可以看出,信号的能量谱 $E(\omega)$ 只由信号的振幅谱决定,与信号的相位谱无关。因此信号 $f(t)$ 与其时移信号的能量谱是相同的。

例 3-28 试求如图 3-72 所示的门函数的能量谱。

解: 由常用信号的傅里叶变换对,可知

$$EG_{\tau}(t) \leftrightarrow E\tau \text{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$$

根据式(3.6-4),得到

$$E(\omega) = E^2\tau^2 \text{Sa}^2\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$$

门函数的能量谱如图 3-73 所示。

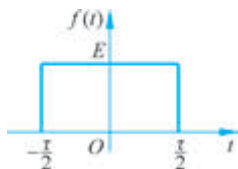


图 3-72 门函数

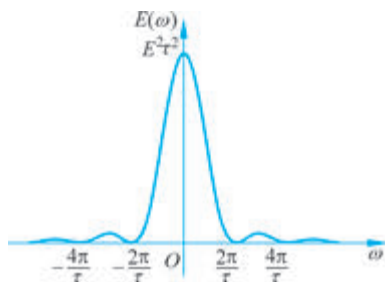


图 3-73 门函数的能量谱

若将式(3.6-3)中的 ω 用频率 f 替代,则可得

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} |F(f)|^2 df \quad (3.6-5)$$

式(3.6-5)表明, $|F(f)|^2$ 对频率 f 的积分就等于信号的能量,因此能量谱也可用 $E(f)$ 表示,即 $E(f) = |F(f)|^2$,它表示单位频率的能量,体现了信号能量随频率 f 的变化情况。

能量谱用于表征单位频带内的信号能量。通信系统中可以根据能量谱来分析信号质量,如果信号的能量谱比较均匀,没有突然的波动或者干扰,说明信号质量比较好;如果能量谱中有很多杂乱的尖峰或者低谷,说明信号可能受到了干扰,此时可以采取相关措施来改善信号质量,如调整传输功率或者更换信道,让通信更加顺畅。

3.6.2 功率谱

通常将周期信号的平均功率定义为在 1Ω 电阻上消耗的平均功率。当周期信号 $f(t)$ 为实信号时,其功率可表示为

$$P = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f^2(t) dt \quad (3.6-6)$$

若 $f(t)$ 为功率信号,其能量为无穷大,即 $\int_{-\infty}^{+\infty} f^2(t) dt \rightarrow \infty$,此时可以从 $f(t)$ 中截

取长度为 T 的有限长信号 $f_T(t)$, 一般取 $-\frac{T}{2} \sim \frac{T}{2}$, 则 $f_T(t)$ 的能量是有限的, 根据式(3.6-3)可知, 此信号的能量为

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} f_T^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |F_T(\omega)|^2 d\omega$$

当 $T \rightarrow \infty$ 时, 信号 $f_T(t)$ 趋近原信号 $f(t)$ 。由信号平均功率计算公式, 可知 $f(t)$ 的平均功率为

$$P = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|F_T(\omega)|^2}{T} d\omega \quad (3.6-7)$$

从式(3.6-7)的积分式子中可以看出, $\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|F_T(\omega)|^2}{T}$ 代表了单位频率的信号功率, 即信号的功率谱密度函数, 简称为功率谱, 可以用 $P(\omega)$ 来表示, 即

$$P(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|F_T(\omega)|^2}{T} \quad (3.6-8)$$

则信号的平均功率为

$$P = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} P(\omega) d\omega \quad (3.6-9)$$

若频率用 f 来表示, 则式(3.6-9)可改写为

$$P = \int_{-\infty}^{+\infty} P(f) df \quad (3.6-10)$$

实际工程应用中, 周期信号通常为功率信号。将周期信号的傅里叶级数展开式式(3.2-2)代入式(3.6-6), 可得

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \left[a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t) \right]^2 dt \\ &= a_0^2 + \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \left[\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t) \right]^2 dt \end{aligned}$$

根据三角函数的正交性, 可得

$$P = a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n^2 + b_n^2) = a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} c_n^2 \quad (3.6-11)$$

式(3.6-11)说明, 周期信号的平均功率等于直流功率和各次谐波平均功率之和。结合之前介绍的三角形式的傅里叶级数和复指数形式的傅里叶级数系数之间的关系, 式(3.6-11)也可以写为

$$P = |F_0|^2 + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} |F_n|^2 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |F_n|^2 \quad (3.6-12)$$

式(3.6-11)、式(3.6-12)称为帕塞瓦尔(Parseval)等式。它表明, 周期信号的平均功率等于该信号在完备正交函数集中各分量功率之和, 揭示了信号在不同表示形式(时域和频域)之间能量的守恒性, 为信号分析和处理提供了重要的数学工具和理论基础。

比较式(3.6-10)和式(3.6-12)可知

$$\int_{-\infty}^{+\infty} P(f) df = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |F_n|^2$$

根据冲激信号的特性, $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |F_n|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |F_n|^2 \delta(f - nf_0) df$, 因此有

$$P(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |F_n|^2 \delta(f - nf_0) \quad (3.6-13)$$

显然, 周期信号的功率谱是离散等间隔分布的, 间隔就是基频 f_0 , 且只由信号的振幅谱决定, 与相位谱无关。

例 3-29 已知图 3-74 所示的周期矩形脉冲信号, 其幅度 $E=1\text{V}$, 周期 $T=100\text{ms}$, 脉冲宽度 $\tau=20\text{ms}$, 试计算该信号频谱在第一个零点以内各分量的功率与总功率的比值。

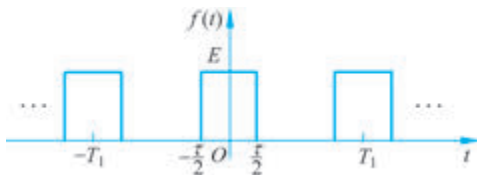


图 3-74 周期矩形脉冲信号

解: 该信号的总功率为

$$P = \frac{1}{T} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} f^2(t) dt = \frac{1}{T} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} f^2(t) dt = \frac{1}{100 \times 10^{-3}} \int_{-10 \times 10^{-3}}^{10 \times 10^{-3}} 1^2 dt = 0.2 (\text{W})$$

该信号的傅里叶级数展开式为

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_n e^{jn\omega_0 t}$$

由 3.3.3 节可知, 其谱系数

$$F_n = \frac{E\tau}{T_1} \text{Sa}\left(n\omega_0 \frac{\tau}{2}\right) = 0.2 \text{Sa}(0.2n\pi)$$

频谱的第一个零点位于 $n=5$ 处, 此时角频率 $5\omega_0 = 5 \times \frac{2\pi}{T} = 100\pi (\text{rad/s})$ 。根据式(3.6-12)可知, 该信号第一个零点以内各分量的功率为

$$\begin{aligned} P_{5\omega_1} &= |F_0|^2 + 2 \sum_{n=1}^5 |F_n|^2 \\ &= 0.2^2 + 2[0.2 \text{Sa}(0.2\pi)]^2 + 2[0.2 \text{Sa}(0.4\pi)]^2 + 2[0.2 \text{Sa}(0.6\pi)]^2 + \\ &\quad 2[0.2 \text{Sa}(0.8\pi)]^2 + 0 \\ &= 0.1806 (\text{W}) \end{aligned}$$

因此, 各分量的功率与总功率的比值为

$$\frac{P_{5\omega_1}}{P} = \frac{0.1806}{0.2} = 0.903 = 90.3\%$$

即第一个零点以内各分量的功率占总功率的 90.3%。也就是说, 该信号的能量主要集中在

在第一个零点以内。在一定误差允许的条件下,可以用这部分低频分量来表示信号。在3.3.2节中,通常将低于第一零点的频率范围称为周期矩形脉冲信号的频带宽度。

例 3-30 计算如图 3-74 所示的周期矩形脉冲信号的功率谱 $P(f)$ 。

解: 根据傅里叶级数分析可知,该信号的谱系数为

$$F_n = \frac{E\tau}{T_1} \text{Sa}\left(\frac{n\omega_0\tau}{2}\right) = \frac{E\tau}{T_1} \text{Sa}(\pi n f_0 \tau)$$

由式(3.6-12),得

$$\begin{aligned} P(f) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |F_n|^2 \delta(f - n f_0) \\ &= \frac{E^2 \tau^2}{T_1^2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \text{Sa}^2(\pi n f_0 \tau) \delta(f - n f_0) \end{aligned}$$

其中, $f_0 = \frac{1}{T_1}$ 。当 $T_1 = 5\tau$ 时,周期矩形脉冲信号的功率谱如图 3-75 所示。

功率谱用于表征单位频带内的信号功率,即信号功率在频域的分布状况。在无线通信系统中,功率谱分析可以用于频谱分析和带宽分配等任务。如果信号的功率谱不符合相关标准,就可能在某些频率上产生过高的功率,这些高功率信号可能会泄漏到相邻的频带中,从而对使用这些频带的其他通信系统造成干扰。为了避免这种情况,在系统设计过程中需要进行严格的功率谱分析和测试,实现信道质量的评估,从而对通信系统进行优化。因此,在设计无线通信系统时,确保信号的功率谱符合相关标准是至关重要的,这不仅保护其他通信系统的正常运行,还可以提高整个无线通信网络的可靠性和稳定性。

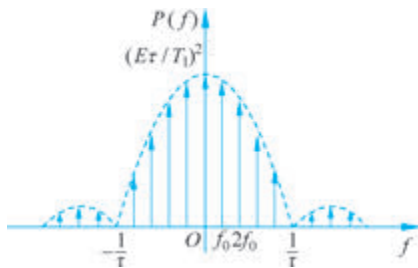


图 3-75 周期矩形脉冲信号的功率谱

通过前面的分析可知,频谱反映的是信号的振幅和相位随频率的分布情况,它描述了信号的频域特征。而能量谱和功率谱则反映了信号的能量或功率随频率的变化情况。在通信系统中,信号传输过程中会受到噪声的影响,噪声是一个随机信号。由于傅里叶变换是针对确定信号的,所以噪声没有对应的频谱信号。但大部分随机信号是平稳的,而平稳随机信号的功率谱是存在的。因此能量谱和功率谱对于研究信号的能量或功率的分布、决定信号所占有频率等问题有着重要的作用,通常信号的带宽还有以下两种定义方式。

(1) 部分功率包含带宽(百分比带宽)。

有时也以集中一定百分比的能量(或功率)的频率范围来定义信号的带宽。设信号的全部能量(或功率)为 $\int_{-\infty}^{+\infty} s(f)df$, 在某频带范围内的能量(或功率)为 $\int_{-B}^B s(f)df$, 部分功率包含带宽是指该带宽内所占有的能量是整个频谱内总能量的一个百分数,即

$$\int_{-B}^B s(f)df = \alpha \int_{-\infty}^{+\infty} s(f)df \quad (3.6-14)$$

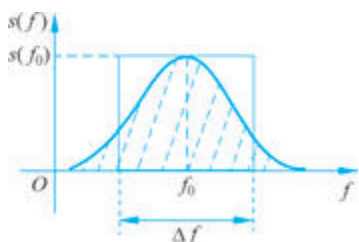


图 3-76 等效带宽示意图

式中, α 为功率百分比, 常见取值为 90%、95%、98% 等。如 98% 功率带宽是指在这个频率范围内的信号功率占总信号功率的 98%。

(2) 等效带宽。

等效带宽是指用一个矩形频谱来代替信号的频谱, 矩形频谱的振幅为信号频谱中心频率 f_0 处的振幅, 如图 3-76 所示。

该矩形频谱的能量与信号的能量相同, 即

$$\int_{-\infty}^{+\infty} s(f) df = s(f_0) \cdot \Delta f \quad (3.6-15)$$

式中, 矩形频谱的宽度 Δf 即为所要计算的信号等效带宽。

思考题

1. 分析信号的能量谱和功率谱有什么作用?
2. 如何计算信号的能量谱或功率谱?

3.7 系统的频域分析

对于 LTI 连续时间系统的分析, 信号经过系统的响应求解是一个重要的内容。第 2 章介绍了响应的时域分析法, 本节将从频域角度来讨论系统响应的求解, 并对系统特性进行分析。

3.7.1 频响函数

1. 频响函数的定义

LTI 连续时间系统的时域分析中, 系统的零状态响应由激励信号 $e(t)$ 和系统单位冲激响应 $h(t)$ 的卷积决定, 即

$$r_{zs}(t) = e(t) * h(t)$$

设激励 $e(t)$ 的傅里叶变换为 $E(\omega)$, 单位冲激响应 $h(t)$ 的傅里叶变换为 $H(\omega)$ 。根据傅里叶变换的时域卷积定理, 可以得到零状态响应的傅里叶变换为

$$R_{zs}(\omega) = E(\omega)H(\omega) \quad (3.7-1)$$

为书写方便, 接下来本节中零状态响应简写为 $r(t)$, 其傅里叶变换简写为 $R(\omega)$ 。由式(3.7-1)可得到

$$H(\omega) = \frac{R(\omega)}{E(\omega)} \quad (3.7-2)$$

通常定义 $H(\omega)$ 为系统频域响应函数, 简称为频响函数或系统函数。注意, 虽然



视频

式(3.7-2)中 $H(\omega)$ 等于激励和响应的频谱函数之比,实际上频响应函数是由系统本身决定的,与激励、响应无关。

根据 3.3.1 节傅里叶反变换公式

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

可知,任意信号可表示为无穷多个复指数信号 $e^{j\omega t}$ 的组合,即 $e^{j\omega t}$ 是傅里叶变换的基本单元。当频率为 ω_0 的复指数信号 $e^{j\omega_0 t}$ 经过冲激响应为 $h(t)$ 的系统时,其零状态响应为

$$\begin{aligned} r(t) &= e^{j\omega_0 t} * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) e^{j\omega_0(t-\tau)} d\tau \\ &= e^{j\omega_0 t} \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) e^{-j\omega_0 \tau} d\tau \\ &= e^{j\omega_0 t} \cdot H(\omega_0) \end{aligned} \quad (3.7-3)$$

式(3.7-3)表明,当激励是复指数信号 $e^{j\omega_0 t}$ 时,系统零状态响应仍是相同复频率的复指数信号,只是“振幅”变化了 $H(\omega_0)$ 倍。若信号包含了多个频率的复指数信号,则每一个频率分量都由对应频率的频响函数值进行加权输出,因此可以根据频响函数 $H(\omega)$ 确定系统对不同频率信号的作用。所以 $H(\omega)$ 体现了系统的频域特性。

将 $H(\omega)$ 写成式(3.7-4)所示的极坐标形式

$$H(\omega) = |H(\omega)| e^{j\varphi(\omega)} \quad (3.7-4)$$

则称其振幅 $|H(\omega)|$ 随频率 ω 的变化曲线为系统的幅频特性曲线,相位 $\varphi(\omega)$ 随频率 ω 的变化曲线为系统的相频特性曲线。幅频特性曲线和相频特性曲线统称为系统的频率特性曲线。

2. 频响函数的物理意义

从频域的角度来看,信号经过系统就是激励信号的傅里叶变换与系统频响函数进行相乘运算,若将激励信号和响应的频谱函数都写成模与幅角的形式,即

$$\begin{aligned} E(\omega) &= |E(\omega)| e^{j\varphi_e(\omega)} \\ R(\omega) &= |R(\omega)| e^{j\varphi_r(\omega)} \end{aligned}$$

根据式(3.7-1)可以得到

$$|R(\omega)| = |E(\omega)| \cdot |H(\omega)| \quad (3.7-5)$$

$$\varphi_r(\omega) = \varphi_e(\omega) + \varphi_h(\omega) \quad (3.7-6)$$

从式(3.7-5)和式(3.7-6)可以看出,信号经过系统后,激励信号的振幅和相位发生了改变,从而得到了响应信号。响应的振幅是频率 ω 处频响函数振幅和激励信号振幅的乘积,响应的相位是频率 ω 处频响函数相位和激励信号相位的叠加。同一个信号经过不同系统,由于系统频响函数不同,对其振幅和相位的改变量不同,产生的响应也不同。因此,通过观察系统频响函数的波形,能够了解系统对激励信号的作用。

设激励信号 $e(t)$ 的频谱函数 $E(\omega)$ 如图 3-77(a) 所示,系统的频响函数 $H(\omega)$ 如图 3-77(b) 所示, $e(t)$ 经过系统后,信号中频率 $|\omega| < 3$ 的部分振幅均变为原来的 2 倍,而频率

$|\omega| \geq 3$ 的部分振幅则全部变为 0, 输出信号中只保留了 $(-3, 3)$ 的频率分量, 输出信号频谱函数 $R(\omega)$ 如图 3-77(c) 所示。

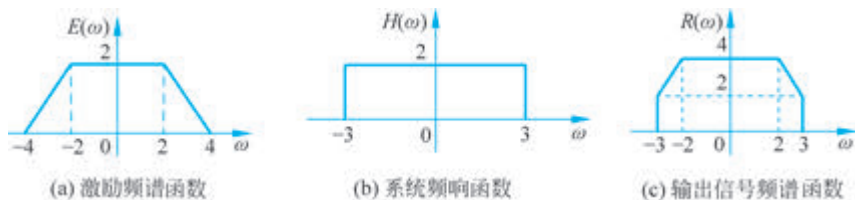


图 3-77 系统作用示意

3. 频响函数的求解

系统的频响函数体现了系统自身特性, 有时为了分析系统特性, 需要从已知的系统结构中获得系统频响函数。由于系统的描述存在多种方式, 所以频响函数的求解也存在多种方法。

1) 系统以微分方程的形式表示

LTI 系统的数学模型为常系数微分方程, n 阶微分方程的一般形式为

$$\begin{aligned} & a_n \frac{d^n r(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} r(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{dr(t)}{dt} + a_0 r(t) \\ &= b_m \frac{d^m e(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} e(t)}{dt^{m-1}} + \cdots + b_1 \frac{de(t)}{dt} + b_0 e(t) \end{aligned}$$

要计算系统的频响函数, 可以对方程两边同时取傅里叶变换。设 $e(t) \leftrightarrow E(\omega)$, $h(t) \leftrightarrow R(\omega)$, 由傅里叶变换的时域微分特性可得

$$\begin{aligned} & [a_n (j\omega)^n + a_{n-1} (j\omega)^{n-1} + \cdots + a_1 (j\omega) + a_0] R(\omega) \\ &= [b_m (j\omega)^m + b_{m-1} (j\omega)^{m-1} + \cdots + b_1 (j\omega) + b_0] E(\omega) \end{aligned} \quad (3.7-7)$$

故频响函数为

$$H(\omega) = \frac{R(\omega)}{E(\omega)} = \frac{b_m (j\omega)^m + b_{m-1} (j\omega)^{m-1} + \cdots + b_1 (j\omega) + b_0}{a_n (j\omega)^n + a_{n-1} (j\omega)^{n-1} + \cdots + a_1 (j\omega) + a_0} \quad (3.7-8)$$

例 3-31 已知某 LTI 系统的微分方程为

$$\frac{d^2}{dt^2} r(t) + 5 \frac{d}{dt} r(t) + 6r(t) = 2 \frac{d}{dt} e(t) + e(t)$$

求该系统的频响函数 $H(\omega)$ 和单位冲激响应 $h(t)$ 。

解: 对方程两边取傅里叶变换, 得

$$(j\omega)^2 R(\omega) + 5(j\omega)R(\omega) + 6R(\omega) = 2(j\omega)E(\omega) + E(\omega)$$

系统频响函数为

$$H(\omega) = \frac{R(\omega)}{E(\omega)} = \frac{2(j\omega) + 1}{(j\omega)^2 + 5(j\omega) + 6}$$

因 $h(t) \leftrightarrow H(\omega)$, 可以从频响函数 $H(\omega)$ 入手来计算单位冲激响应 $h(t)$ 。

将 $H(\omega)$ 分解为



视频

$$H(\omega) = \frac{2(j\omega) + 1}{(j\omega)^2 + 5(j\omega) + 6} = \frac{-3}{j\omega + 2} + \frac{5}{j\omega + 3}$$

由 $Ee^{-at}u(t) \leftrightarrow \frac{E}{j\omega + a}$ 可知, 单位冲激响应为

$$h(t) = -3e^{-2t}u(t) + 5e^{-3t}u(t)$$

2) 系统以电路模型的形式表示

当系统以电路模型给出时, 可以先列出系统的微分方程, 再利用前面介绍的方法计算系统的频响函数。当然, 也可以将电路中的激励、响应和所有元件均用频域形式来表示, 就可以得到电路的频域模型, 从而建立系统的频域方程, 从频域上来分析电路。

图 3-78 是关联参考方向下电阻元件的时域模型, 其时域伏安关系为

$$v_R(t) = i_R(t) \cdot R$$

对上式两边同时进行傅里叶变换, 可得电阻元件的频域伏安关系为

$$V_R(\omega) = I_R(\omega) \cdot R \quad (3.7-9)$$

从式(3.7-9)可以看出, 电阻元件的频域电压等于电阻值乘以流过它的频域电流, 故电阻的频域模型如图 3-79 所示。

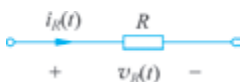


图 3-78 电阻元件的时域模型



图 3-79 电阻元件的频域模型

关联参考方向下电容元件的时域模型如图 3-80 所示, 其时域伏安关系为

$$i_C(t) = C \frac{dv_C(t)}{dt}$$

对上式两边同时进行傅里叶变换, 利用时域微分特性可以得到

$$I_C(\omega) = j\omega C \cdot V_C(\omega) \quad (3.7-10)$$

也可以改写为

$$V_C(\omega) = \frac{1}{j\omega C} \cdot I_C(\omega) \quad (3.7-11)$$

式(3.7-10)和式(3.7-11)是电容元件伏安关系的频域表示。可以看出, 电容的频域电压等于 $\frac{1}{j\omega C}$ 与频域电流的乘积, 因此可以将 $\frac{1}{j\omega C}$ 看成广义的阻抗值, 称为电容元件的频域容抗。电容元件的频域模型如图 3-81 所示。



图 3-80 电容元件的时域模型



图 3-81 电容元件的频域模型

关联参考方向下电感元件的时域模型如图 3-82 所示, 其时域伏安关系为

$$v_L(t) = L \cdot \frac{di_L(t)}{dt}$$

由傅里叶变换的微分特性,可以得到

$$V_L(\omega) = j\omega L \cdot I_L(\omega) \quad (3.7-12)$$

式(3.7-12)为电感元件伏安关系的频域表示,其中电感元件的频域电压等于频域感抗 $j\omega L$ 与频域电流的乘积。电感元件的频域模型如图 3-83 所示。

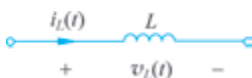


图 3-82 电感元件的时域模型



图 3-83 电感元件的频域模型

时域中的 KVL 和 KCL 定律分别为

$$\sum_{i=1}^n v_i(t) = 0 \quad \sum_{j=1}^m i_j(t) = 0$$

由傅里叶变换的线性特性可得

$$\sum_{i=1}^n V_i(\omega) = 0 \quad \sum_{j=1}^m I_j(\omega) = 0 \quad (3.7-13)$$

式(3.7-13)可以看作频域的 KVL 和 KCL 定律。由于电路方程由元件的伏安关系和电路结构共同确定,故结合元件的频域伏安关系和频域 KVL、KCL 定律,即可列出电路的频域方程,从而分析得到电路的频响应函数。

例 3-32 如图 3-84 所示电路中, $v(t)$ 是激励, $v_R(t)$ 是响应,试求该系统的频响应函数,并画出频率特性曲线。

解: 电路的频域模型如图 3-85 所示。

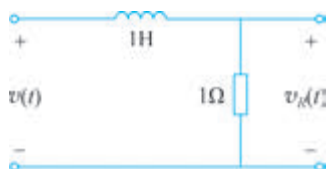


图 3-84 例 3-32 电路图

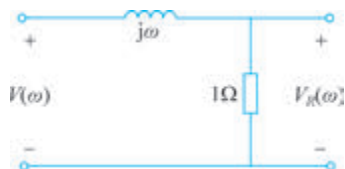


图 3-85 频域电路模型

由电路分压定理可得频响应函数为

$$H(\omega) = \frac{V_R(\omega)}{V(\omega)} = \frac{1}{1 + j\omega}$$

其幅频特性和相频特性分别为

$$|H(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{\omega^2 + 1}}$$

$$\varphi(\omega) = \arctan(-\omega)$$

故系统的频率特性曲线如图 3-86 所示。

从图 3-86 中可以看出,当信号经过该系统时,信号的低频部分衰减较小,高频部分衰减较大,通常称此电路具有低通特性。

例 3-33 如图 3-87 所示电路,激励为 $e(t)$,响应为 $r(t)$,求系统的频响应函数 $H(\omega)$ 。

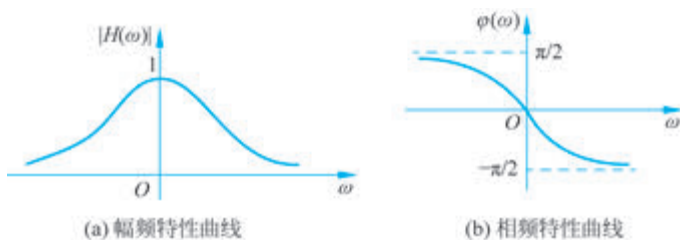


图 3-86 系统频率特性曲线

解：电路的频域模型如图 3-88 所示。

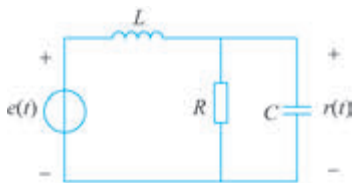


图 3-87 例 3-33 电路图

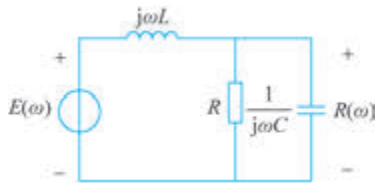


图 3-88 频域电路模型

根据基尔霍夫电压定律,可列得电路方程为

$$j\omega L \left[\frac{R(\omega)}{R} + \frac{R(\omega)}{1/j\omega C} \right] + R(\omega) = E(\omega)$$

整理得

$$[(j\omega)^2 RLC + j\omega L + R]R(\omega) = RE(\omega)$$

由系统频响函数的定义,可知

$$H(\omega) = \frac{R(\omega)}{E(\omega)} = \frac{R}{(j\omega)^2 RLC + j\omega L + R}$$

从上述两个例题中可以看出,利用元件伏安关系和基尔霍夫定律的频域表示,将时域电路模型转换成频域模型,有时可以简化系统方程的建立过程。

3.7.2 系统响应的频域求解

LTI 连续时间系统分析的一个重要任务就是求解信号经过系统的响应。根据激励信号的不同特点,有着不同的求解方法。

1. 激励为正弦信号时的响应

当信号经过系统时,系统对其各频率分量进行振幅放大和相移。设系统的激励信号为正弦信号,即

$$e(t) = \sin(\omega_0 t)$$

可以看出,该信号中只包含了 ω_0 一个频率分量。故输出信号中仍然只含有频率 ω_0 的分量,仅是振幅和相位发生了变化。

由傅里叶变换的频移特性,可知信号 $e(t)$ 的频谱函数为



视频

$$E(\omega) = j\pi[\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0)]$$

若系统的频响函数为

$$H(\omega) = |H(\omega)| e^{j\varphi(\omega)}$$

则响应的频谱函数为

$$\begin{aligned} R(\omega) &= H(\omega)E(\omega) \\ &= j\pi H(\omega)[\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0)] \\ &= j\pi[H(-\omega_0)\delta(\omega + \omega_0) - H(\omega_0)\delta(\omega - \omega_0)] \\ &= j\pi[|H(-\omega_0)| e^{j\varphi(-\omega_0)} \delta(\omega + \omega_0) - |H(\omega_0)| e^{j\varphi(\omega_0)} \delta(\omega - \omega_0)] \\ &= j\pi |H(\omega_0)| [e^{j\varphi(-\omega_0)} \delta(\omega + \omega_0) - e^{j\varphi(\omega_0)} \delta(\omega - \omega_0)] \end{aligned}$$

系统响应为

$$\begin{aligned} r(t) &= \mathcal{F}^{-1}[R(\omega)] \\ &= \frac{j}{2} |H(\omega_0)| [e^{-j\varphi(\omega_0)} e^{-j\omega_0 t} - e^{j\varphi(\omega_0)} e^{j\omega_0 t}] \\ &= |H(\omega_0)| \frac{1}{2j} [e^{j(\omega_0 t + \varphi(\omega_0))} - e^{-j(\omega_0 t + \varphi(\omega_0))}] \\ &= |H(\omega_0)| \sin[\omega_0 t + \varphi(\omega_0)] \end{aligned} \quad (3.7-14)$$

式(3.7-14)说明,当正弦信号作用于 LTI 系统时,系统的零状态响应仍为同频率的正弦信号,仅是振幅放大了 $|H(\omega_0)|$ 倍,相位改变了 $\varphi(\omega_0)$ 。

由于 $\sin(\omega_0 t)$ 和 $\cos(\omega_0 t)$ 之间只相差 $\frac{\pi}{2}$ 的相位,式(3.7-14)也适用于激励为 $\cos\omega_0 t$ 的情况,这里就不再重复证明了。

例 3-34 已知系统的频响函数 $H(\omega) = \frac{1}{j\omega + 1}$, 激励 $e(t) = \cos(2t - 45^\circ)$, 求系统的零状态响应 $r(t)$ 。

解: 激励信号的频率为 $\omega = 2\text{rad/s}$, 因此需确定系统频响函数 $H(\omega)$ 在该频率处的振幅和相位。

$$H(\omega) \Big|_{\omega=2} = \frac{1}{1 + 2j} = \frac{1}{\sqrt{5}} e^{-j63.5^\circ}$$

可知

$$|H(2)| = \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad \varphi(2) = -63.5^\circ$$

因此响应为

$$r(t) = \frac{1}{\sqrt{5}} \cos(2t - 45^\circ - 63.5^\circ) = \frac{1}{\sqrt{5}} \cos(2t - 108.5^\circ)$$

2. 激励为一般周期信号时的响应

当激励 $e(t)$ 为一般周期信号时,可以利用傅里叶级数将周期信号展开为正弦信号的

集合,即

$$e(t) = c_0 \cos \theta_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} c_n \cos(n\omega_1 t + \theta_n)$$

当系统频响函数 $H(\omega) = |H(\omega)| e^{j\varphi(\omega)}$ 时,结合式(3.7-14),利用 LTI 系统的线性特性,可得到此时的零状态响应为

$$r(t) = c_0 |H(0)| \cos(\theta_0 + \varphi_0) + \sum_{n=1}^{+\infty} c_n |H(n\omega_1)| \cos[n\omega_1 t + \theta_n + \varphi(n\omega_1)] \quad (3.7-15)$$

上式表明,当激励中包含有多个频率分量时,系统根据频响函数对每个频率分量分别进行振幅加权和相移。

例 3-35 已知系统的频域特性曲线如图 3-89 所示,当激励 $e(t) = \sin t + \sin\left(3t - \frac{\pi}{6}\right)$ 时,求系统响应 $r(t)$ 。

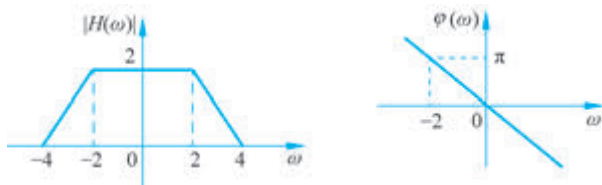


图 3-89 例 3-35 系统频域特性曲线

解: 激励中包含 $\omega = 1$ 和 $\omega = 3$ 两个频率,根据式(3.7-15)可知,要求解系统响应,需知道系统频响函数在这两个频率处的振幅和相位。从图中可以看出

$$H(\omega) \Big|_{\omega=1} = 2, \quad \varphi(\omega) \Big|_{\omega=1} = -\frac{\pi}{2}$$

$$H(\omega) \Big|_{\omega=3} = 1, \quad \varphi(\omega) \Big|_{\omega=3} = -\frac{3\pi}{2}$$

因此系统响应为

$$\begin{aligned} r(t) &= 2 \times \sin\left(t - \frac{\pi}{2}\right) + 1 \times \sin\left(3t - \frac{\pi}{6} - \frac{3\pi}{2}\right) \\ &= 2\sin\left(t - \frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(3t + \frac{\pi}{3}\right) \end{aligned}$$

3. 激励为非周期信号时的响应

非周期信号可以看成由不同频率的正弦信号组合而成。但由于非周期信号的频谱是连续谱,其包含从 $0 \sim +\infty$ 的连续频率分量,不可能单独求解每个频率分量的振幅加权倍数和相移量。因此当系统激励信号为非周期信号时,可利用 $R(\omega) = E(\omega) \cdot H(\omega)$ 先求得响应的傅里叶变换 $R(\omega)$,然后利用反变换得到系统响应的时域表示,即 $r(t) = \mathcal{F}^{-1}[R(\omega)]$ 。

例 3-36 已知某 LTI 系统的频响函数 $H(\omega) = \frac{1}{j\omega + 2}$, 求激励为 $e(t) = e^{-3t}u(t)$ 时, 系统的零状态响应 $r(t)$ 。

解: 根据常用信号的傅里叶变换对, 可知

$$e(t) = e^{-3t}u(t) \leftrightarrow E(\omega) = \frac{1}{j\omega + 3}$$

故可得

$$R(\omega) = E(\omega)H(\omega) = \frac{1}{j\omega + 2} \cdot \frac{1}{j\omega + 3} = \frac{1}{j\omega + 2} - \frac{1}{j\omega + 3}$$

则零状态响应为

$$r(t) = (e^{-2t} - e^{-3t})u(t)$$

例 3-37 已知描述某 LTI 系统的微分方程为

$$\frac{d^2}{dt^2}r(t) + 5\frac{d}{dt}r(t) + 4r(t) = \frac{d}{dt}e(t) + e(t)$$

当激励为 $e(t) = e^{-t}u(t)$ 时, 求零状态响应 $r(t)$ 。

解: 对微分方程两边做傅里叶变换, 得该系统的频域方程为

$$(j\omega)^2 R(\omega) + 5j\omega R(\omega) + 4R(\omega) = j\omega E(\omega) + E(\omega)$$

整理可得

$$R(\omega) = \frac{j\omega + 1}{(j\omega)^2 + 5j\omega + 4} E(\omega)$$

根据已知条件可知, 激励信号的傅里叶变换为

$$E(\omega) = \mathcal{F}[e(t)] = \frac{1}{1 + j\omega}$$

可得

$$\begin{aligned} R(\omega) &= \frac{j\omega + 1}{(j\omega)^2 + 5j\omega + 4} \cdot \frac{1}{1 + j\omega} = \frac{1}{(j\omega)^2 + 5j\omega + 4} \\ &= \frac{\frac{1}{3}}{j\omega + 1} + \frac{-\frac{1}{3}}{j\omega + 4} \end{aligned}$$

故零状态响应为

$$r(t) = \frac{1}{3}(e^{-t} - e^{-4t})u(t)$$

从上述例子可以看出, 利用频域分析法可将时域的微分方程转换为频域的代数方程, 降低了计算复杂度。



视频

3.7.3 无失真传输

由前面的分析知道, 输入信号经过系统, 受到系统频响函数 $H(\omega)$ 的作用, 其幅度和

相位可能会发生改变。若输出信号波形与输入信号波形形状不一样,通常称信号经过系统后发生了失真。信号的失真可分为线性失真和非线性失真。

线性失真由信号经过线性系统引起,此时输出信号中不产生新的频率分量,仅是信号中各频率分量的振幅或相位发生了相对变化。非线性失真一般由信号经过非线性系统引起,此时信号经过系统会产生新的频率分量。

在信号传输中,有时希望能够无失真传输。无失真是指输入信号经过系统后,所产生的输出与输入相比波形形状相同,只是幅度发生变化,有一定的时延,波形的变化情况如图 3-90 所示。即输入-输出关系为

$$r(t) = Ke(t - t_0) \quad (3.7-16)$$

式中, K 和 t_0 为常数。



图 3-90 无失真时激励响应关系图

对式(3.7-16)两边做傅里叶变换,设 $e(t) \leftrightarrow E(\omega)$, $r(t) \leftrightarrow R(\omega)$, 利用时移特性可得

$$R(\omega) = KE(\omega)e^{-j\omega t_0} \quad (3.7-17)$$

故无失真传输系统的频响应函数为

$$H(\omega) = \frac{R(\omega)}{E(\omega)} = Ke^{-j\omega t_0} \quad (3.7-18)$$

对 $H(\omega)$ 进行傅里叶反变换,可得系统的单位冲激响应为

$$h(t) = K\delta(t - t_0) \quad (3.7-19)$$

式(3.7-18)和式(3.7-19)分别称为无失真传输系统的频域条件和时域条件。同时从式(3.7-18)可以看出,无失真传输系统的幅频函数和相频函数分别为

$$\begin{aligned} |H(\omega)| &= K \\ \varphi(\omega) &= -\omega t_0 \end{aligned} \quad (3.7-20)$$

对应的系统幅频特性曲线和相频特性曲线如图 3-91 所示。

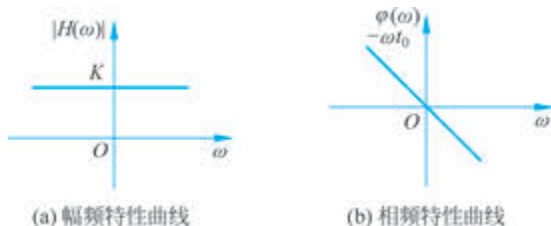


图 3-91 系统频率特性曲线

从图 3-91 可以看出,无失真传输系统的幅频特性为常数,这意味着系统对各频率分量幅度放大相同的倍数;相频特性为斜率为 $-t_0$ 且经过原点的直线,这表明系统对各频率分量产生的相移均与频率成正比,此时各频率分量产生相同的延迟时间 t_0 ,移位后各分量的相对位置保持不变。

上述结论也可以通过下面的分析得到。设输入信号为 $e(t) = A_1 \sin \omega_1 t + A_2 \sin \omega_2 t$,系统频响函数 $H(\omega) = |H(\omega)| e^{j\varphi(\omega)}$,则系统输出为

$$\begin{aligned} r(t) &= A_1 |H(\omega_1)| \sin[\omega_1 t + \varphi(\omega_1)] + A_2 |H(\omega_2)| \sin[\omega_2 t + \varphi(\omega_2)] \\ &= A_1 |H(\omega_1)| \sin \omega_1 \left[t + \frac{\varphi(\omega_1)}{\omega_1} \right] + A_2 |H(\omega_2)| \sin \omega_2 \left[t + \frac{\varphi(\omega_2)}{\omega_2} \right] \end{aligned} \quad (3.7-21)$$

若系统是无失真传输系统,则输出 $r(t) = Ke(t - t_0)$,故可得

$$\begin{aligned} |H(\omega_1)| &= |H(\omega_2)| = K \\ \frac{\varphi(\omega_1)}{\omega_1} &= \frac{\varphi(\omega_2)}{\omega_2} = -t_0 \end{aligned}$$

当信号 $e(t)$ 中包含更多频率分量时,同样可以推导出上述结论。若信号经过系统,各频率分量幅度的加权倍数不同,则输出信号产生幅度失真;若各频率分量的相位改变量不与其频率成正比,则输出信号产生相位失真。

根据无失真传输系统的相频特性曲线可以看出,此时相频特性曲线的斜率为常数,即

$$\frac{d\varphi(\omega)}{d\omega} = \frac{d(-\omega t_0)}{d\omega} = -t_0 \quad (3.7-22)$$

令

$$\tau = -\frac{d\varphi(\omega)}{d\omega} \quad (3.7-23)$$

通常定义 τ 为群时延或群延时。群时延是通信系统和网络中一项重要特性,是以一组频率分量之间的时延差值来衡量相位失真。信号在传输过程中,若系统对各频率分量的时延不同,则产生相位失真,相位失真将导致信号产生码间干扰。无失真传输系统的群时延是与频率无关的常数,即 $\tau = t_0$ 。

例 3-38 如图 3-92 所示电路系统,为使该系统无失真传输信号,求元件 R_1 、 R_2 、 C_1 和 C_2 的参数需满足的条件。

解: 系统的频域电路如图 3-93 所示。

根据元件的分压关系,可得

$$U_2(\omega) = \frac{R_2 \parallel \frac{1}{j\omega C_2}}{R_1 \parallel \frac{1}{j\omega C_1} + R_2 \parallel \frac{1}{j\omega C_2}} U_1(\omega)$$

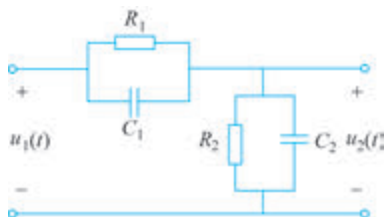


图 3-92 例 3-38 电路系统

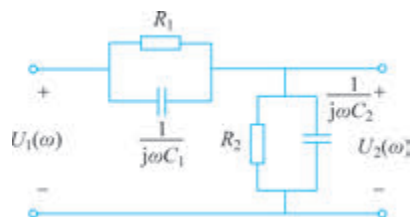


图 3-93 系统频域电路

系统频响函数为

$$\begin{aligned} H(\omega) &= \frac{U_2(\omega)}{U_1(\omega)} = \frac{\frac{R_2}{1 + j\omega C_2 R_2}}{\frac{R_1}{1 + j\omega C_1 R_1} + \frac{R_2}{1 + j\omega C_2 R_2}} \\ &= \frac{C_1}{C_1 + C_2} \frac{j\omega + \frac{1}{R_1 C_1}}{j\omega + \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 (C_1 + C_2)}} \end{aligned}$$

根据无失真传输系统的频域条件可知,当 $\frac{1}{R_1 C_1} = \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 (C_1 + C_2)}$, 即 $R_1 C_1 = R_2 C_2$ 时,系统可无失真传输信号。

例 3-39 某 LTI 系统的幅频、相频特性曲线如图 3-94 所示,输入信号分别为 $e_1(t) = 2\cos 2t + \sin 5t$ 和 $e_2(t) = 2\cos 5t + \sin 8$ 。

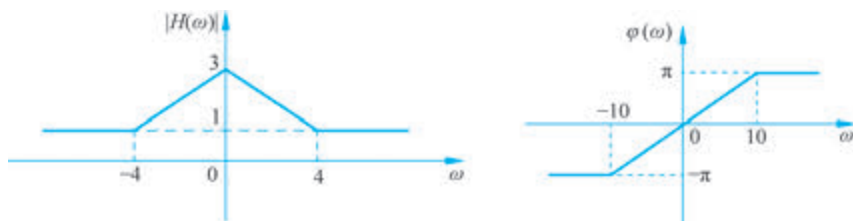


图 3-94 例 3-39 系统频率特性曲线

- (1) 分别求 $e_1(t)$ 和 $e_2(t)$ 经过系统的输出 $r_1(t)$ 和 $r_2(t)$;
- (2) 判断 $e_1(t)$ 和 $e_2(t)$ 经过系统有无失真,若有失真,说明失真的类型。

解: (1) 信号 $e_1(t)$ 中包含了 $\omega = 2$ 和 $\omega = 5$ 两个频率分量, $e_2(t)$ 中包含了 $\omega = 5$ 和 $\omega = 8$ 两个频率分量,从系统频率特性曲线中可以看出

$$\begin{aligned} H(\omega) \Big|_{\omega=2} &= 2, & \varphi(\omega) \Big|_{\omega=2} &= \frac{\pi}{5} \\ H(\omega) \Big|_{\omega=5} &= 1, & \varphi(\omega) \Big|_{\omega=5} &= \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

$$H(\omega) \Big|_{\omega=8} = 1, \quad \varphi(\omega) \Big|_{\omega=8} = \frac{4\pi}{5}$$

利用频域分析方法可得

$$\begin{aligned} r_1(t) &= 2 \times 2 \cos\left(2t + \frac{\pi}{5}\right) + \sin\left(5t + \frac{\pi}{2}\right) \\ &= 4 \cos\left[2\left(t + \frac{\pi}{10}\right)\right] + \sin\left[5\left(t + \frac{\pi}{10}\right)\right] \\ r_2(t) &= 1 \times 2 \cos\left(5t + \frac{\pi}{2}\right) + 1 \times \sin\left(8t + \frac{4\pi}{5}\right) \\ &= 2 \cos\left[5\left(t + \frac{\pi}{10}\right)\right] + \sin\left[8\left(t + \frac{\pi}{10}\right)\right] \end{aligned}$$

(2) 观察系统频率特性曲线可以看出,系统对 $e_1(t)$ 中 $\omega=2$ 的频率分量放大了 2 倍, $\omega=5$ 的频率分量放大了 1 倍,频率分量放大的倍数不相同,所以 $e_1(t)$ 经过系统产生了幅度失真。由于 $\omega=2$ 和 $\omega=5$ 的频率分量的相移均与频率成正比,因此信号 $e_1(t)$ 经过该系统无相位失真。而系统对 $e_2(t)$ 所包含的 $\omega=5$ 和 $\omega=8$ 的两个频率分量幅度放大了相同的倍数,相移也与频率成正比,因此信号 $e_2(t)$ 经过该系统没有失真。

从图 3-94 中可以看出,例 3-39 中所示的系统不满足无失真传输系统的条件,为失真系统。但信号 $e_2(t)$ 经过该系统无失真,这是因为 $e_2(t)$ 包含的两个频率分量经过系统后,放大倍数相同,相移与频率成正比。在实际系统中,想要信号经过系统后无失真,只需要在信号包含的频率范围内,系统的频率特性满足无失真条件即可。此例中,频率满足 $4 \leq |\omega| \leq 10$ 的信号均可无失真传输。



视频

3.7.4 理想低通滤波器

信号经过系统时,有时需要将信号中的某些频率分量保留,同时抑制其他频率分量,这个过程通常称为滤波,而具有这种频率选择功能的系统就称为滤波器。通常按照保留信号的频段范围不同,滤波器可分为低通滤波器(LPF)、高通滤波器(HPF)、带通滤波器(BPF)和带阻滤波器(BSF)。有时为了分析方便,常常将滤波网络的某些性能理想化,这种滤波网络就称为理想滤波器。图 3-95 给出了四种理想滤波器的幅频特性。

一般将信号能通过的频率范围称为通带,信号被抑制的频率范围称为阻带。所以低通滤波器的通带范围为 $|\omega| < \omega_C$,阻带为 $|\omega| > \omega_C$, ω_C 为截止频率。与低通滤波器刚好相反,信号通过理想高通滤波器,当 $|\omega| > \omega_C$ 时,信号无失真通过;当 $|\omega| < \omega_C$ 时,信号被完全滤除。带通滤波器能让 $\omega_L < |\omega| < \omega_H$ 范围内的频率分量通过,其余范围的频率分量滤除,带阻滤波器则刚好与之相反,其中 ω_H 、 ω_L 分别称为上截止频率和下截止频率。本节以理想低通滤波器为例进行分析。

理想低通滤波器的幅频特性和相频特性曲线如图 3-96 所示。

从图 3-96 可以看出,理想低通滤波器的振幅谱函数为

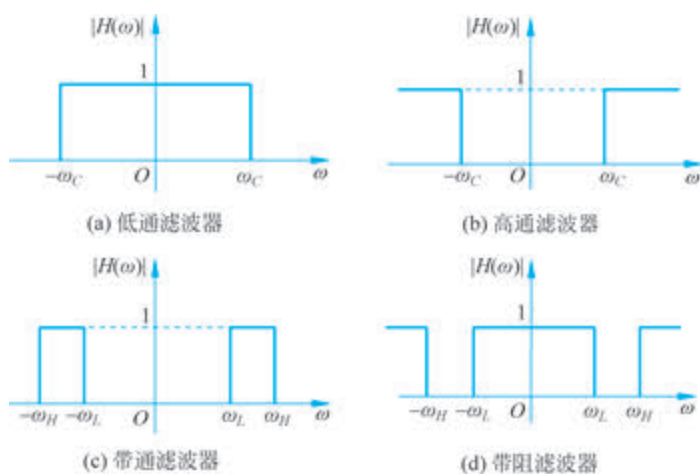


图 3-95 理想滤波器的幅频特性

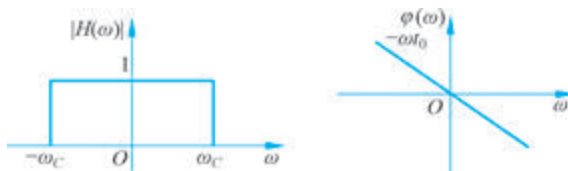


图 3-96 理想低通滤波器的频率特性曲线

$$|H(\omega)| = \begin{cases} 1, & |\omega| < \omega_C \\ 0, & |\omega| > \omega_C \end{cases} \quad (3.7-24)$$

相位谱函数为

$$\varphi(\omega) = -\omega t_0 \quad (3.7-25)$$

可以看出,信号通过理想低通滤波器时,在通带范围内,各频率分量的振幅均放大相同的倍数,相移与频率成正比,可以无失真传输;而在阻带范围内,各频率分量振幅均衰减为 0,无法通过。

1. 理想低通滤波器的单位冲激响应

理想低通滤波器的频响函数为

$$H(\omega) = \begin{cases} e^{-j\omega t_0}, & |\omega| < \omega_C \\ 0, & |\omega| > \omega_C \end{cases}$$

对频响函数 $H(\omega)$ 进行傅里叶反变换,可得

$$\begin{aligned} h(t) &= \mathcal{F}^{-1}[H(\omega)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} H(\omega) e^{j\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_C}^{\omega_C} e^{-j\omega t_0} e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi j} \left. \frac{e^{j\omega(t-t_0)}}{\omega} \right|_{-\omega_C}^{\omega_C} \end{aligned}$$

$$= \frac{\sin \omega_C (t - t_0)}{\pi (t - t_0)} = \frac{\omega_C}{\pi} \text{Sa}[\omega_C (t - t_0)] \quad (3.7-26)$$

也可借助傅里叶变换的性质来计算系统的单位冲激响应,将频响函数写为

$$\begin{aligned} H(\omega) &= e^{-j\omega t_0} [u(\omega + \omega_C) - u(\omega - \omega_C)] \\ &= G_{2\omega_C}(\omega) e^{-j\omega t_0} \end{aligned} \quad (3.7-27)$$

根据傅里叶变换的对称性,可知

$$G_{2\omega_C}(\omega) \leftrightarrow \frac{\omega_C}{\pi} \text{Sa}(\omega_C t)$$

结合傅里叶变换的时移特性,可得到

$$G_{2\omega_C}(\omega) e^{-j\omega t_0} \leftrightarrow \frac{\omega_C}{\pi} \text{Sa}[\omega_C (t - t_0)]$$

即理想低通滤波器的单位冲激响应为

$$h(t) = \frac{\omega_C}{\pi} \text{Sa}[\omega_C (t - t_0)] \quad (3.7-28)$$

单位冲激信号经过理想低通滤波器后,波形的变化情况如图 3-97 所示。



图 3-97 单位冲激信号经过理想低通滤波器

从图 3-97 中可以看出,单位冲激信号经过理想低通滤波器产生了失真。由于 $\delta(t) \leftrightarrow 1$,即单位冲激信号的频带宽度无穷大,信号经过低通滤波器后,大于 ω_C 的频率分量被完全滤除,所以输出波形与输入波形有很大的不同。

由于冲激信号是在 $t=0$ 时刻加入到系统中,而 $t < 0$ 时 $h(t) \neq 0$,可以看出理想低通滤波器为非因果系统。

2. 理想低通滤波器的单位阶跃响应

当单位阶跃信号通过理想低通滤波器时,其输出为

$$\begin{aligned} g(t) &= u(t) * h(t) = \int_{-\infty}^t h(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^t \frac{\omega_C}{\pi} \text{Sa}[\omega_C (\tau - t_0)] d\tau \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\omega_C (t - t_0)} \text{Sa}(\lambda) d\lambda = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^0 \text{Sa}(\lambda) d\lambda + \frac{1}{\pi} \int_0^{\omega_C (t - t_0)} \text{Sa}(\lambda) d\lambda \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^{\omega_C (t - t_0)} \text{Sa}(\lambda) d\lambda \end{aligned}$$

令 $\text{Si}(y) = \frac{1}{\pi} \int_0^y \frac{\sin x}{x} dx$, 则

$$g(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \text{Si}[\omega_c(t - t_0)] \quad (3.7-29)$$

图 3-98 给出了单位阶跃信号及其经过理想低通滤波器后的波形。

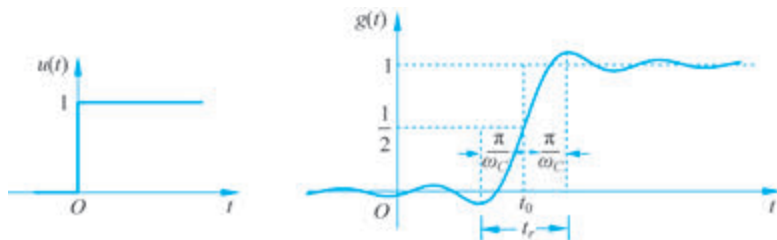


图 3-98 单位阶跃信号经过理想低通滤波器

由于阶跃信号中高于 ω_c 的频率分量被去除,经过低通滤波器后,函数值的阶跃变化变成了平滑的缓升。阶跃响应的最小值出现在 $t_0 - \frac{\pi}{\omega_c}$ 处,最大值出现在 $t_0 + \frac{\pi}{\omega_c}$ 处。通常称响应由最小值到最大值经历的时间为上升时间,记为 t_r ,则有

$$t_r = \frac{2\pi}{\omega_c} \quad (3.7-30)$$

可以看出,上升时间 t_r 与截止频率 ω_c 成反比。截止频率 ω_c 越小,允许通过的高频分量越少,输出信号上升越缓慢,信号失真严重;截止频率 ω_c 越大,允许通过的高频分量越多,输出信号上升速度越快,信号波形越接近阶跃信号。因此截止频率的选择对输出信号波形有着决定性影响。

例 3-40 已知激励信号 $e(t)$ 的频谱 $E(\omega)$ 如图 3-99(a) 所示,信号经过如图 3-99(b) 所示系统,分别画出信号 $x_1(t)$ 、 $x_2(t)$ 以及 $r(t)$ 的频谱图。

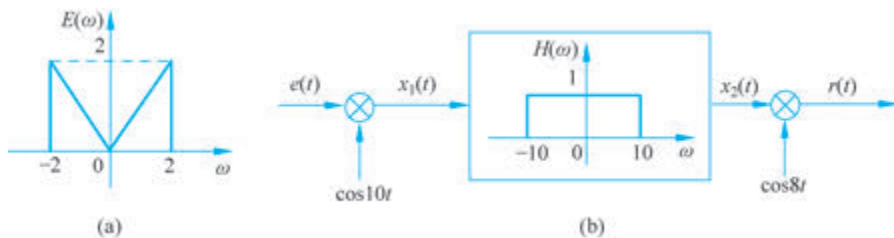


图 3-99 例 3-40 用图

解: 根据图 3-99(b) 可知

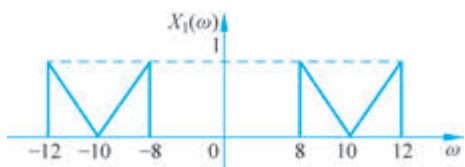
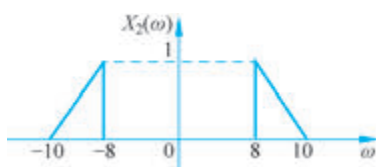
$$x_1(t) = e(t) \cdot \cos 10t$$

由傅里叶变换的频移特性,得

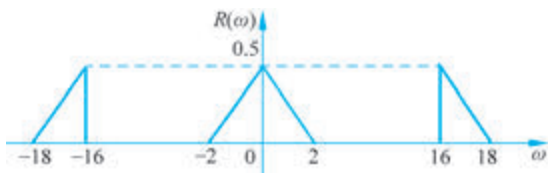
$$x_1(t) \leftrightarrow X_1(\omega) = \frac{1}{2} [E(\omega + 10) + E(\omega - 10)]$$

所以 $x_1(t)$ 的频谱 $X_1(\omega)$ 如图 3-100 所示。

因为 $X_2(\omega) = X_1(\omega) \cdot H(\omega)$, $H(\omega)$ 为低通滤波器,所以 $x_2(t)$ 的频谱如图 3-101 所示。

图 3-100 $x_1(t)$ 的频谱图图 3-101 $x_2(t)$ 的频谱图

由于 $r(t) = x_2(t) \cdot \cos 8t$, 故 $R(\omega) = \frac{1}{2}[X_2(\omega+8) + X_2(\omega-8)]$, 频谱图如图 3-102 所示。

图 3-102 $r(t)$ 的频谱图

3. 系统的物理可实现性

理想低通滤波器是非因果系统, 是物理不可实现的。系统的物理可实现性可以根据系统的单位冲激响应和频响函数进行判断。

从时域来看, 系统物理可实现的条件是系统满足因果性, 即

$$h(t) = 0, \quad t < 0 \quad (3.7-31)$$

从频域来看, 若系统幅频函数 $|H(\omega)|$ 满足平方可积条件, 即

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |H(\omega)|^2 d\omega < \infty \quad (3.7-32)$$

则系统物理可实现的必要条件为

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\ln |H(\omega)||}{1 + \omega^2} d\omega < \infty \quad (3.7-33)$$

此条件由佩利和维纳证明, 因此称为佩利-维纳准则。若系统频响函数不满足此条件, 则该系统是物理不可实现的。

对于理想低通滤波器, 其幅频函数平方的积分为

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |H(\omega)|^2 d\omega = \int_{-\omega_c}^{\omega_c} |H(\omega)|^2 d\omega = \int_{-\omega_c}^{\omega_c} d\omega = 2\omega_c < \infty$$

当 $|\omega| > \omega_c$ 时, 理想低通滤波器的频响函数 $H(\omega) = 0$, 此时 $|\ln |H(\omega)|| \rightarrow \infty$, 故

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\ln |H(\omega)||}{1 + \omega^2} d\omega \rightarrow \infty$$

因此理想低通滤波器不满足佩利-维纳准则, 为物理不可实现系统。实际上所有的理想滤波器由于幅频特性在某个频带内的幅值为零, 都是物理不可实现的。

例 3-41 图 3-103 是由电阻和电容组成的两个一阶 RC 电路, 已知 $R = 1\Omega, C = 1F$,

$u_s(t)$ 为激励。分别计算以 $u_C(t)$ 和 $u_R(t)$ 为响应时,系统的频响应函数 $H(\omega)$,并画出幅频特性曲线。

解: (1) 以 $u_C(t)$ 为响应时,系统(a)的频域电路模型如图 3-104 所示。

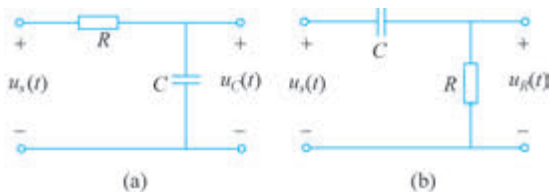


图 3-103 例 3-41 用图

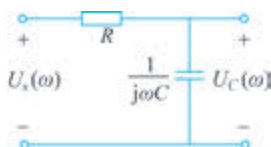


图 3-104 系统(a)的频域电路模型

根据元件分压关系,可得

$$H_1(\omega) = \frac{U_C(\omega)}{U_s(\omega)} = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{1}{j\omega RC + 1}$$

代入元件参数,有

$$H_1(\omega) = \frac{1}{j\omega + 1}$$

(2) 以 $u_R(t)$ 为响应时,系统(b)的频域电路模型如图 3-105 所示。

此时系统的频响应函数为

$$H_2(\omega) = \frac{U_R(\omega)}{U_s(\omega)} = \frac{R}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{j\omega}{j\omega + 1}$$

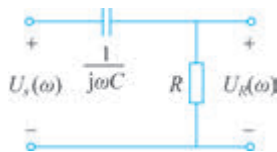


图 3-105 系统(b)的频域电路模型

两个系统的幅频函数分别为

$$|H_1(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{\omega^2 + 1}}, \quad |H_2(\omega)| = \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 + 1}}$$

对应的幅频特性曲线分别如图 3-106(a)和(b)所示。

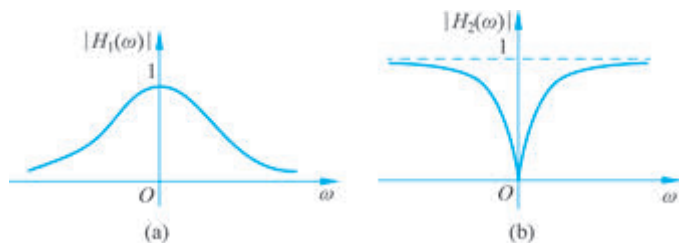


图 3-106 系统幅频特性曲线

从图中可以看出,信号经过系统(a)[图 3-106(a)]时,信号中高频分量的衰减比低频分量大,所以该系统具有低通特性,可以作为一个简单的低通滤波器,通常称为 RC 低通滤波器。而信号经过系统(b)[图 3-106(b)]时,信号中低频分量的衰减比高频分量大,所

以该系统可以作为一个简单的高通滤波器。

RC 低通滤波器的实现比较简单,抗干扰能力强,有较好的低频性能。从其幅频特性曲线中也可以看出,与理想滤波器不同的是:实际滤波器的通带幅度不是常数;阻带幅度

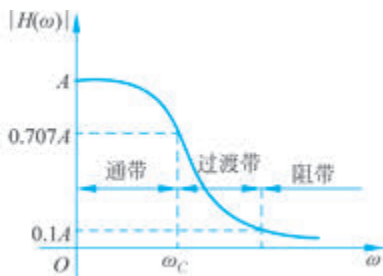


图 3-107 实际滤波器的幅频特性曲线示意图

度相对较小,但不是零;同时在通带和阻带之间存在一定频率范围的过渡带,如图 3-107 所示。实际滤波器的截止频率通常定义为幅值等于 0.707 倍最大幅值点(即 -3dB 点)的频率,幅值小于最大幅值的 $\frac{1}{10}$ 的频率范围(小于 -20dB)称为阻带。通常在设计滤波器时,要求滤波器的通带幅度尽量接近常数,过渡带的宽度越窄越好,同时通带外的频率成分衰减得越快越好。高通滤波器、带通滤波器和带阻滤波器也存在类似的特性。

思考题

1. 如何根据系统的频响应函数分析系统作用?
2. 请比较时域和频域方法在求解系统响应时的优劣。
3. 完全符合无失真传输条件的系统是否存在? 实际中如何实现信号的无失真传输?
4. 滤波器的截止频率对输出信号有什么影响?

3.8 信号的时域采样与重建

在实际工程应用中,有时需要将连续时间信号转换为数字信号,通常称为模/数转换(A/D 转换)。模/数转换通常包括采样、量化和编码,本节重点讨论信号时域采样的过程和要求,以及信号的时域重建。

3.8.1 信号的时域采样

从连续信号中抽取出一系列离散样值的过程称为采样。时域采样的过程可以用如图 3-108 所示的开关来实现。

设原信号 $f(t)$ 的波形如图 3-109(a) 所示,采样信号为 $f_s(t)$ 。当开关 K 处于位置“1”时,输出信号 $f_s(t) = f(t)$; 当开关 K 切换到位置“2”时, $f_s(t) = 0$ 。当开关在位置“1”和“2”之间进行周期切换时,就可以完成信号的时域采样。采样信号 $f_s(t)$ 的波形如图 3-109(b) 所示。

图 3-108 的开关可以用乘法运算来模拟,如图 3-110

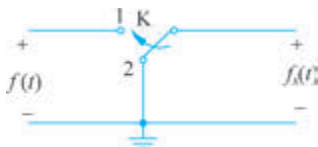


图 3-108 开关示意图



视频

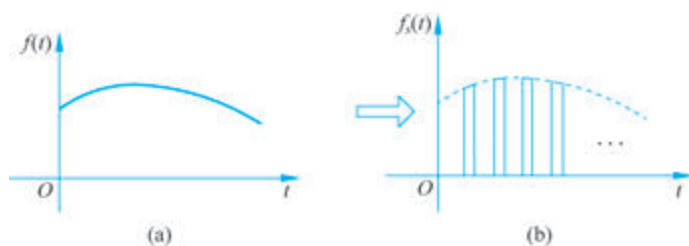


图 3-109 原信号及其时域采样波形

所示。信号的采样过程可以看作输入信号 $f(t)$ 与采样脉冲 $p(t)$ 相乘的结果,即

$$f_s(t) = f(t) \cdot p(t) \quad (3.8-1)$$

式中, $p(t)$ 是周期为 T_s 的矩形脉冲信号,也称为开关函数。 T_s 称为采样周期,也称为采样间隔,表示多长时间采样一次; $f_s = 1/T_s$ 称为采样频率,表示每秒采样的次数, $\omega_s = 2\pi/T_s$ 称为采样角频率,有时也简称为采样频率。

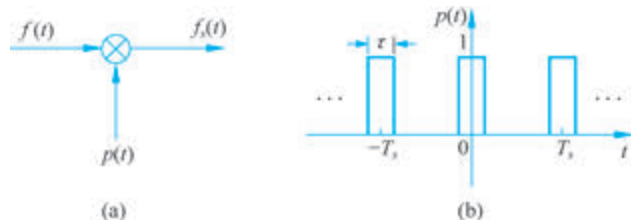


图 3-110 采样过程模型

实际应用中,采样脉冲可以有多种形式,本节主要讨论理想采样和自然采样。

1. 理想采样

首先考虑一种理想化的采样情况,采样脉冲为周期冲激信号,即

$$p(t) = \delta_{T_s}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_s) \quad (3.8-2)$$

此时称为理想采样。根据式(3.8-1),采样信号为

$$\begin{aligned} f_s(t) &= f(t) \cdot p(t) = f(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_s) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(nT_s) \delta(t - nT_s) \end{aligned} \quad (3.8-3)$$

周期冲激信号 $p(t)$ 的频谱函数为

$$P(\omega) = \omega_s \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - n\omega_s) \quad (3.8-4)$$

根据频域卷积定理,采样信号 $f_s(t)$ 的频谱函数为

$$F_s(\omega) = \frac{1}{2\pi} F(\omega) * P(\omega) = \frac{1}{2\pi} F(\omega) * \omega_s \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - n\omega_s)$$

$$= \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F(\omega - n\omega_s) \quad (3.8-5)$$

式(3.8-5)表明,理想采样时,采样信号的频谱函数 $F_s(\omega)$ 是原信号频谱函数 $F(\omega)$ 以 ω_s 为间隔的周期重复,且幅度乘以 $\frac{1}{T_s}$ 。

设信号 $f(t)$ 为带限信号,其时域波形如图 3-111(a) 所示,图 3-111(b) 为其频谱图,最高频率为 ω_m ; 图 3-111(c) 和 (d) 给出了理想采样脉冲信号的时域波形和频谱图; 图 3-111(e) 为采样信号的时域波形,图 3-111(f) 为采样频率 $\omega_s > 2\omega_m$ 时采样信号的频谱图。

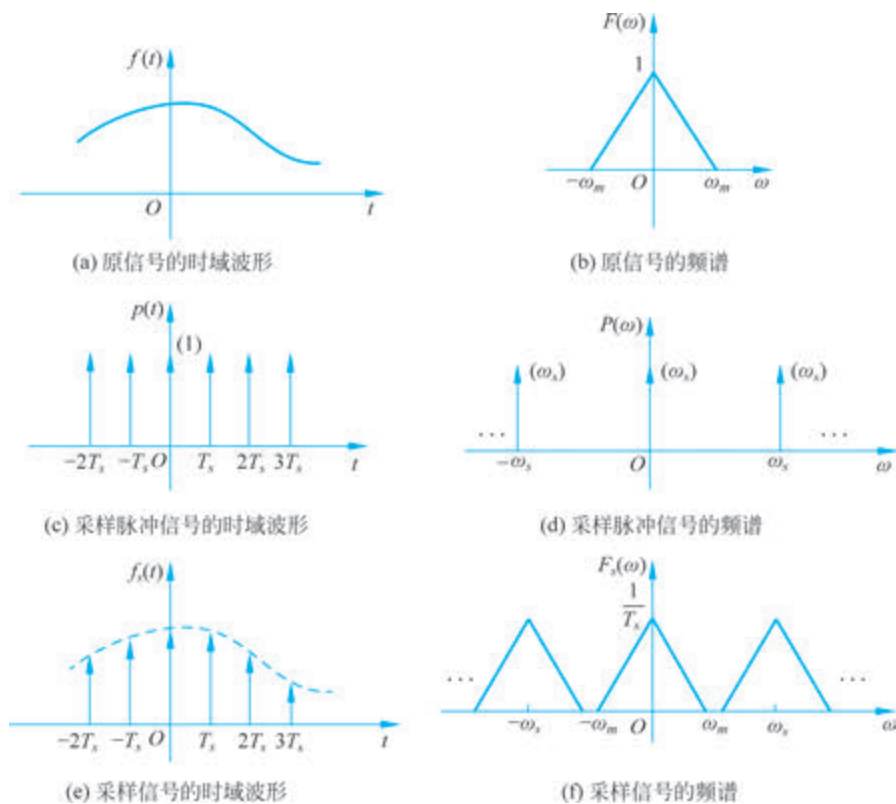


图 3-111 理想采样信号的时域波形和频谱图 ($\omega_s > 2\omega_m$)

图 3-112 和图 3-113 分别给出了当采样频率 $\omega_s = 2\omega_m$ 和 $\omega_s < 2\omega_m$ 时,采样脉冲和采样信号的频谱图。

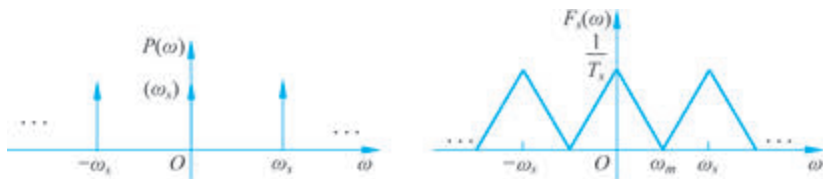
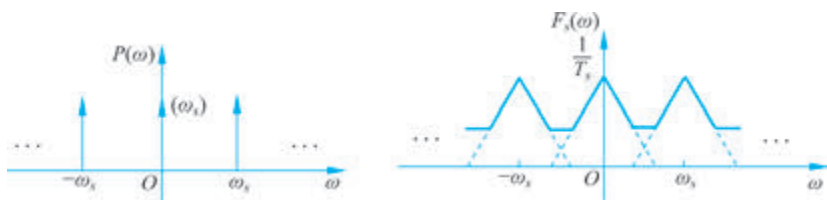


图 3-112 $\omega_s = 2\omega_m$ 时采样脉冲和采样信号的频谱图

图 3-113 $\omega_s < 2\omega_m$ 时采样脉冲和采样信号的频谱图

比较图 3-111~图 3-113 可以看出,当采样频率大于或等于信号最高频率的两倍时,即 $\omega_s \geq 2\omega_m$,理想采样之后信号的频谱是原信号频谱的周期重复,重复周期是 ω_s ,频谱幅度是原信号频谱的 $1/T_s$ 倍。当采样频率降低时,采样脉冲间隔变大,采样信号的频谱之间的间隔变小。当 $\omega_s < 2\omega_m$ 时,采样信号的频谱会发生混叠。

2. 自然采样

当采样脉冲为图 3-114 所示的周期矩形脉冲时,这种采样方式称为自然采样。

周期矩形脉冲信号的傅里叶谱系数为

$$F_n = \frac{\tau}{T_s} \text{Sa}\left(\frac{n\omega_s \tau}{2}\right)$$

式中, $\omega_s = \frac{2\pi}{T_s}$ 。由 3.5 节的分析可知,此时采样脉冲的频谱函数为

$$P(\omega) = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_n \delta(\omega - n\omega_s) = \frac{2\pi\tau}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \text{Sa}\left(\frac{n\omega_s \tau}{2}\right) \delta(\omega - n\omega_s) \quad (3.8-6)$$

故自然采样时,采样信号 $f_s(t)$ 的频谱函数为

$$\begin{aligned} F_s(\omega) &= \frac{1}{2\pi} F(\omega) * P(\omega) \\ &= \frac{1}{2\pi} F(\omega) * \frac{2\pi\tau}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \text{Sa}\left(\frac{n\omega_s \tau}{2}\right) \delta(\omega - n\omega_s) \\ &= \frac{\tau}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \text{Sa}\left(\frac{n\omega_s \tau}{2}\right) F(\omega - n\omega_s) \end{aligned} \quad (3.8-7)$$

图 3-115 给出了原信号、采样脉冲和采样信号的时域波形,以及 $\omega_s > 2\omega_m$ 时的各信号所对应的频谱图。

与理想采样类似,自然采样信号的频谱也是原信号频谱以 ω_s 为间隔进行重复,只是幅度加权系数不再是常数,而是 $\frac{\tau}{T_s} \text{Sa}\left(\frac{n\omega_s \tau}{2}\right)$ 。当 $\omega_s \geq 2\omega_m$ 时,采样信号的频谱不发生混叠;当 $\omega_s < 2\omega_m$ 时,采样信号的频谱会发生混叠。

例 3-42 如图 3-116(a)所示系统,信号 $f(t)$ 的频谱函数如图 3-116(b)所示,频响函数如图 3-116(c)所示,用 $\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT)$ 对其进行理想采样,其中 $T = \frac{\pi}{4}$ s。

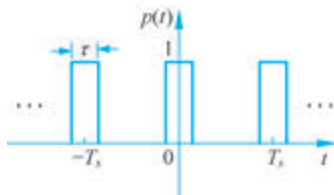


图 3-114 自然采样脉冲波形

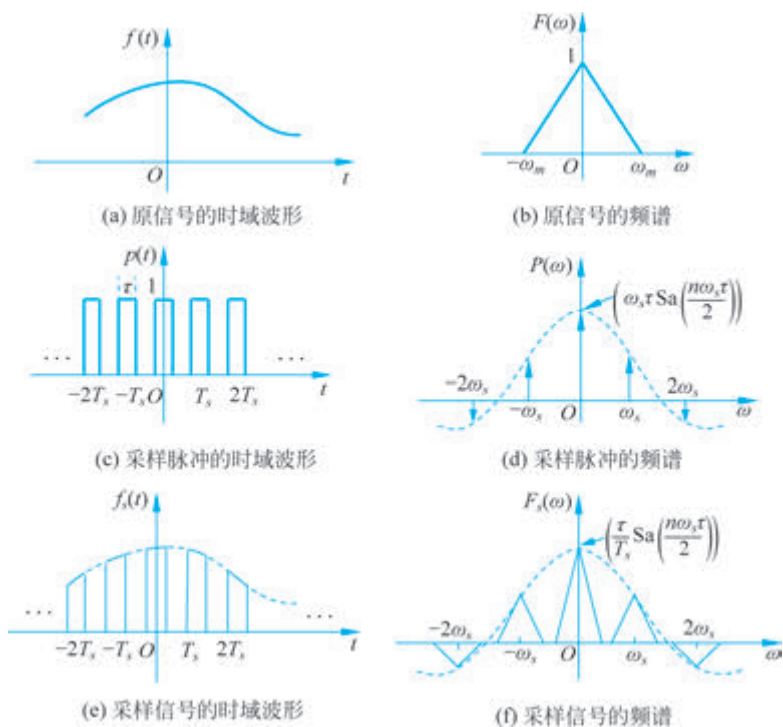


图 3-115 自然采样信号的时域波形和频谱图 ($\omega_s > 2\omega_m$)

- (1) 画出采样信号 $f_s(t)$ 的频谱图;
- (2) 画出输出信号 $y(t)$ 的频谱图。

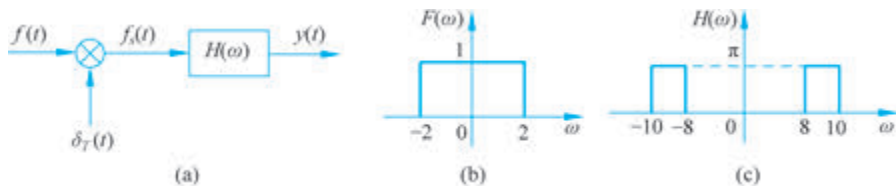


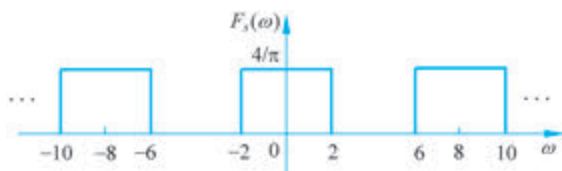
图 3-116 例 3-42 用图

解: (1) 当采样间隔 $T = \frac{\pi}{4}$ s 时, 采样频率 $\omega_s = \frac{2\pi}{T} = 8$ rad/s。理想采样时采样信号的频谱函数为

$$F_s(\omega) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F(\omega - n\omega_s) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F(\omega - 8n)$$

所以采样信号 $f_s(t)$ 的频谱图如图 3-117 所示。

(2) 从图 3-116(c) 中可以看出, $H(\omega)$ 为增益是 π 的带通滤波器。信号通过该滤波器, 频率 $8 < |\omega| < 10$ 的部分保留, 幅度放大 π 倍, 其余频率分量被滤除。因此输出信号 $y(t)$ 的频谱如图 3-118 所示。

图 3-117 采样信号 $f_s(t)$ 的频谱图图 3-118 输出信号 $y(t)$ 的频谱图

3.8.2 时域采样定理

通过对理想采样和自然采样两种情况的分析可以看出,若信号 $f(t)$ 的最高频率为 ω_m ,当采样频率 $\omega_s \geq 2\omega_m$ 时, $F_s(\omega)$ 中各频谱分量之间互相不重叠,完整保留了原信号的全部信息,可以从采样信号 $f_s(t)$ 中恢复出原信号 $f(t)$ 。这一结论早在 1928 年由美国工程师奈奎斯特提出,因此也称为奈奎斯特采样定理。

采样定理的具体内容为:带宽有限的连续信号 $f(t)$,如果其最高频率为 f_m ,对其进行等间隔采样,当采样间隔小于等于 $1/(2f_m)$ 时,采样后的信号频谱中包含了原信号的全部信息,可以恢复出原信号。

采样定理给出了从采样信号中恢复出原始信号的条件,即采样间隔 T_s 要满足

$$T_s \leq \frac{1}{2f_m} \quad (3.8-8)$$

或采样频率满足

$$f_s \geq 2f_m \quad \text{或} \quad \omega_s \geq 2\omega_m \quad (3.8-9)$$

通常将满足采样定理要求的最低采样频率 $f_s = 2f_m$ 称为奈奎斯特采样频率,把最大采样间隔 $T_s = \frac{\pi}{\omega_m} = \frac{1}{2f_m}$ 称为奈奎斯特采样间隔。

例 3-43 已知信号 $f(t)$ 的频率范围为 $(-\omega_m, \omega_m)$,对下列信号进行理想采样,计算不失真恢复信号的奈奎斯特采样频率。

$$(1) f_1(t) = f(2t); \quad (2) f_2(t) = f^2(t); \quad (3) f_3(t) = f(t) + f\left(\frac{t}{4}\right)$$

解: (1) $f_1(t)$ 是对 $f(t)$ 进行时域尺度变换运算的结果,根据傅里叶变换的尺度变换特性,可得到信号 $f_1(t)$ 的频谱函数为

$$F_1(\omega) = \frac{1}{2}F\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

信号时域压缩,频谱扩展,因此 $f_1(t)$ 的最高频率为 $2\omega_m$ 。根据采样定理,可知信号 $f_1(t)$ 的奈奎斯特采样频率 $\omega_s = 4\omega_m$ 。

(2) 由傅里叶变换的频域卷积定理可知, $f_2(t)$ 的频谱函数为

$$F_2(\omega) = F(\omega) * F(\omega)$$

因此 $f_2(t)$ 的最高频率为 $2\omega_m$ 。根据采样定理,可知信号 $f_2(t)$ 的奈奎斯特采样频率 $\omega_s = 4\omega_m$ 。

(3) 由傅里叶变换的线性和尺度变换特性可知, $f_3(t)$ 的频谱函数为

$$F_3(\omega) = F(\omega) + 4F(4\omega)$$

$F(4\omega)$ 的频率范围为 $(-\frac{1}{4}\omega_m, \frac{1}{4}\omega_m)$ 。频域信号的频谱函数相加, 范围取大, 因此 $f_3(t)$ 的最高频率为 ω_m 。根据采样定理, 可知信号 $f_3(t)$ 的奈奎斯特采样频率 $\omega_s = 2\omega_m$ 。

当满足采样定理时, 要从无混叠的频谱 $F_s(\omega)$ 中恢复出原信号的频谱 $F(\omega)$, 只需将信号通过理想低通滤波器, 提取出原信号的频谱 $F(\omega)$ 即可。

信号恢复过程可以表示为

$$F(\omega) = F_s(\omega)H(\omega) \quad (3.8-10)$$

其中理想低通滤波器的频响函数为

$$H(\omega) = \begin{cases} T_s, & |\omega| < \omega_c \\ 0, & |\omega| > \omega_c \end{cases} \quad (3.8-11)$$

要恢复原信号频谱, $\omega_s > 2\omega_m$ 时低通滤波器的截止频率应满足 $\omega_m < \omega_c < \omega_s - \omega_m$, 如图 3-119 所示; 当 $\omega_s = 2\omega_m$ 时, 低通滤波器的截止频率 $\omega_c = \omega_m$, 如图 3-120 所示; 而当 $\omega_s < 2\omega_m$ 时, 采样频率较小, $F_s(\omega)$ 发生频谱混叠, 无法从采样信号 $f_s(t)$ 中恢复出原信号 $f(t)$ 。

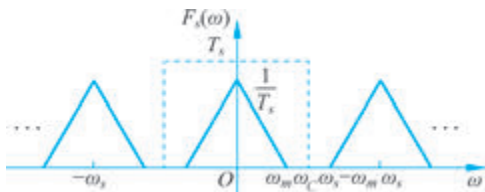


图 3-119 $\omega_s > 2\omega_m$ 时信号恢复示意图

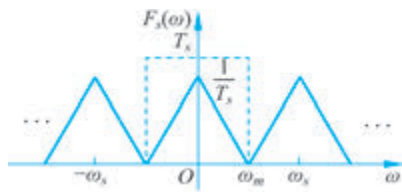


图 3-120 $\omega_s = 2\omega_m$ 时信号恢复示意图

实际工程中, 由于时间有限的信号, 其频谱往往是无限范围, 此时直接对信号进行采样, 会造成频谱混叠, 因此需要将信号的频率限定在一定范围内。通常的做法是将信号通过一个低通滤波器, 去除信号中的高频分量, 然后再对信号进行采样, 如图 3-121 所示。此时的低通滤波器也称为抗混叠滤波器。采用抗混叠滤波器虽然避免了频谱混叠, 但由于损失了高频成分, 会带来信号的失真, 所以只能在允许一定失真的情况下, 近似恢复原信号。

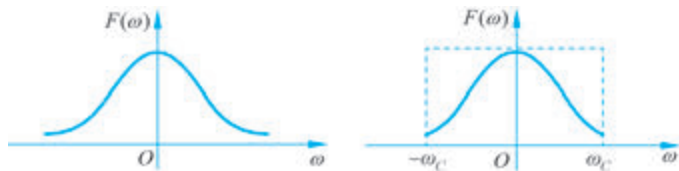


图 3-121 信号通过抗混叠滤波器

由于理想滤波器是物理不可实现的, 实际滤波器存在一个过渡带。若采样频率等于信号最高频率的两倍时, 通过滤波器得到的不仅是原信号的频率成分, 如图 3-122 所示。

因此在实际工程中,要想采样后能恢复原信号,通常要求采样频率 ω_s 大于信号最高频率 ω_m 的两倍,一般采样频率取信号最高频率的 3~5 倍。

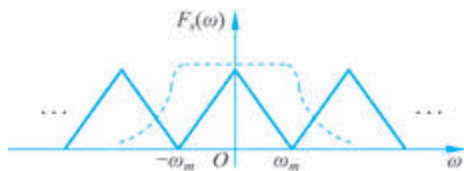


图 3-122 信号通过实际滤波器

3.8.3 信号的时域重建

3.8.2 节从频域分析了采样后信号恢复的过程。由于信号时域和频域是一一对应的关系,因此也可以从时域恢复信号。通常将由离散时间信号恢复出对应连续时间信号的过程称为信号的时域重建。

由式(3.8-3)可知,采样信号 $f_s(t)$ 的表达式为

$$f_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(nT_s)\delta(t - nT_s)$$

根据时域卷积定理,式(3.8-10)所表示的信号恢复过程从时域可以表示为

$$f(t) = f_s(t) * h(t)$$

由于理想低通滤波器的单位冲激响应 $h(t) = \frac{\omega_c T_s}{\pi} \text{Sa}(\omega_c t)$, 因此可以推得

$$\begin{aligned} f(t) &= f_s(t) * h(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(nT_s)\delta(t - nT) * \frac{T_s \omega_c}{\pi} \text{Sa}(\omega_c t) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{T_s \omega_c}{\pi} f(nT_s) \text{Sa}[\omega_c(t - nT_s)] \end{aligned} \quad (3.8-12)$$

当 $\omega_c = \frac{1}{2}\omega_s$ 时,式(3.8-12)可以简化为

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(nT_s) \text{Sa}\left[\frac{\pi}{T_s}(t - nT_s)\right]$$

采样信号 $\text{Sa}\left[\frac{\pi}{T_s}(t - nT_s)\right]$ 在采样点 $t = nT_s$ 取值为 1, 在其他采样点取值为 0, 所以有 $f(t)|_{t=nT_s} = f(nT_s)$ 。采样点之间, $f(t)$ 由各个加权的抽样函数叠加而成。

根据采样定理知道,对于最高频率为 ω_m 的带限信号 $f(t)$, 可以用采样频率 $\omega_s \geq 2\omega_m$ 采集的样本点恢复出来, 因此只要知道各采样点值 $f(nT_s)$, 就可以确定原信号 $f(t)$ 。图 3-123 给出了当 $\omega_c = \frac{1}{2}\omega_s$ 时, 时域和频域的信号恢复过程。

由于 $f_s(t)$ 是一系列的冲激信号, 冲激强度为离散样本值 $f(nT)$ 。根据冲激信号的运算特点可知, $f_s(t) * h(t)$ 就是将 $h(t)$ 平移 nT 后、以 $f(nT)$ 进行加权后求和, 此时可

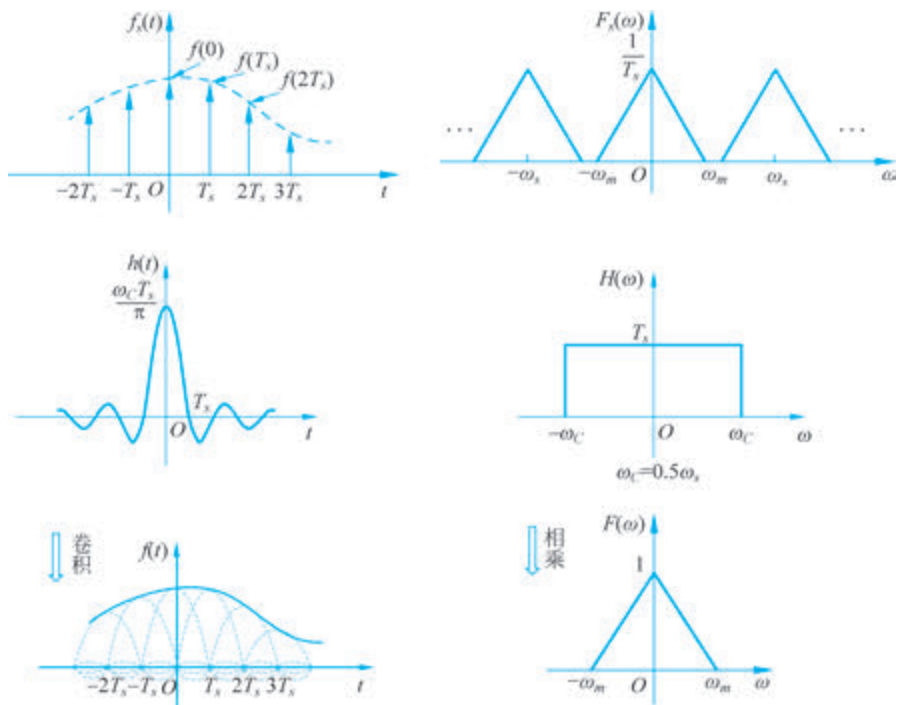


图 3-123 时域和频域的信号恢复过程

以在样本点 $f(nT)$ 之间拟合出一条连续曲线,从而得到连续信号 $f(t)$ 。这种由样本值来重建某一函数的过程称为内插。此处利用理想低通滤波器的单位冲激响应的内插通常称为带限内插,即只要 $f(t)$ 是带限的,采样频率满足采样定理的条件,就能实现信号的重建。

思考题

1. 为什么要对连续时间信号进行采样?
2. 对连续时间信号进行采样,采样频率的大小对采样信号的频谱有什么影响?
3. 信号经过采样,要恢复原信号有什么要求?
4. 实际系统中对信号进行采样,需要考虑哪些因素?

3.9 频域分析方法在通信系统中的应用

3.9.1 直序扩频技术

在通信系统中,信号在信道中传输时,可能会受到各种噪声、干扰的影响,为了提升抗干扰能力,常采用扩频通信这种方式。

香农(C. E. Shannon)在信息论研究中总结出了信道容量公式,即香农公式:

$$C = B \times \log_2(1 + S/N)$$

式中, C 是信道容量(即极限传输速率); B 是信道频带宽度; S 是有用信号的平均功率; N 是噪声平均功率。该公式表明,在一定信道容量下,带宽和信噪比可以互换,使用大带宽可以有效降低通信系统对信噪比的要求。

图 3-124 为扩频调制系统的简化模型。发射机部分包括信道编码器、扩频码发生器和调制器,接收机部分包括解调器、扩频码发生器和信道解码器。信号通过信道完成从发射机到接收机的信息传输,在发送端通过调制器完成扩频,在接收端通过解调器完成解扩。

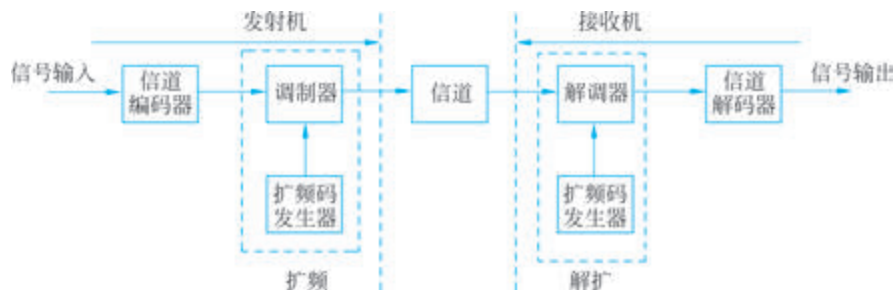


图 3-124 扩频调制系统的简化模型

扩频调制包括直接序列扩频、跳频扩频、线性调频扩频和跳时扩频等方式,本节以直接序列扩频(简称为直序扩频)为例进行详细说明。直序扩频技术用宽带伪噪声序列(扩频码)直接调制窄带原始发射信号,因为伪噪声序列的带宽远远大于原始发射信号带宽,从而起到扩展发射信号频谱的作用,降低了信号的功率谱,使得信号在频域上看起来就像背景噪声一样,难以被检测和识别。

在发送端,信号与高速扩频码序列相乘。例如,原始基带信号是二进制数据 1 0 1,扩频前通常将其转变为双极性信号 1 -1 1,每个符号持续时间为 T_b ,其波形如图 3-125(a)所示。设扩频码伪随机码为 1 0 1 0 0 1 1 0 1 1,每个符号持续时间为 $T_c = T_b/10$,波形如图 3-125(b)所示。将基带信号与扩频码相乘,相当于用扩频码序列将一个数据符号的波形切分为多个时间小块,扩频信号的波形如图 3-125(c)所示。

根据傅里叶变换的尺度变换特性可知,信号持续时间与信号占有频带成反比,即

$$f(at) \leftrightarrow \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

故经过扩频运算,从时域来看信号的脉冲变窄,从频域来看信号的频率范围展宽,信号的功率谱幅度下降,如图 3-126 所示。

扩频后的信号通过调制在信道中传输。如果不考虑传输过程中的干扰和噪声,当接收机在收到信号后,利用跟发送端一致的扩频码与接收信号进行相乘,实现解扩。解扩过程如图 3-127 所示。

在信道传输过程中,如果信号受到干扰,则干扰信号的扩频(解扩)如图 3-128 所示。由于干扰信号只在接收端进行了一次扩频,因此其带宽被展宽,功率降低。解扩前后信

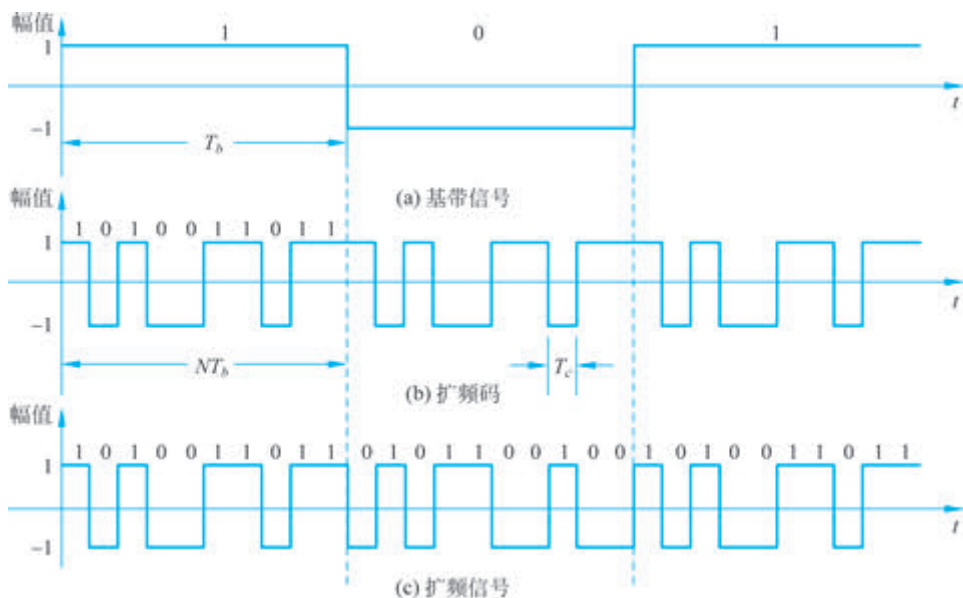


图 3-125 基带信号扩频过程示意

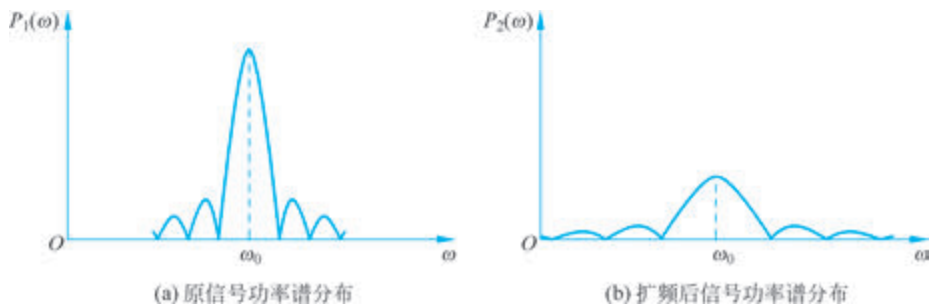


图 3-126 扩频前后信号的功率谱变化示意

号和干扰的功率谱如图 3-129 所示。

扩频通信被广泛应用在军事通信、卫星通信、移动通信等领域,它具有以下几个优点:

(1) 抗干扰能力强。干扰信号在接收端的解扩过程中,由本地扩频码扩展成宽带信号,功率谱大大降低,而有用信号则恢复成窄带信号,再通过窄带滤波器滤除大部分宽带干扰信号,只让窄带的有用信号通过,提升了抗干扰能力。

(2) 低截获概率。扩频将信号能量扩展到较宽的频带上,使其功率谱降低,普通接收机难以将信号从噪声背景中区分出来,较难检测、识别和定位干扰信号的存在。

(3) 可以实现码分多址。若不同用户使用不同的相互正交的扩频码进行扩频,则在接收端,只有用与发送端相同的扩频码进行解扩时,才能恢复出该用户信号,而其他用户信号因为扩频码不匹配,功率谱较低,会被视为噪声而滤除掉,实现了多用户在同一时间、同一频率上的信号传输。

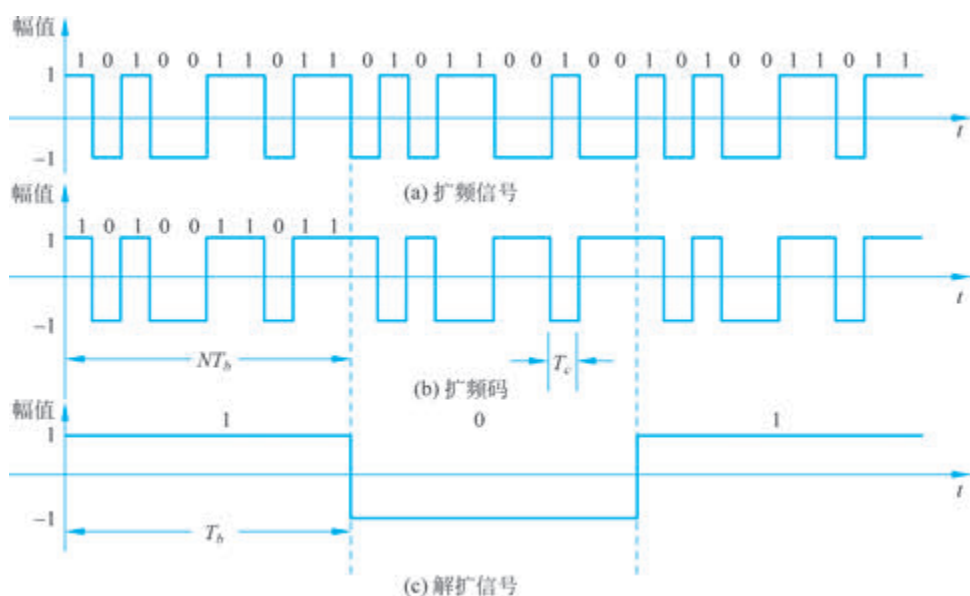


图 3-127 解扩过程示意



图 3-128 干扰信号的扩频(解扩)

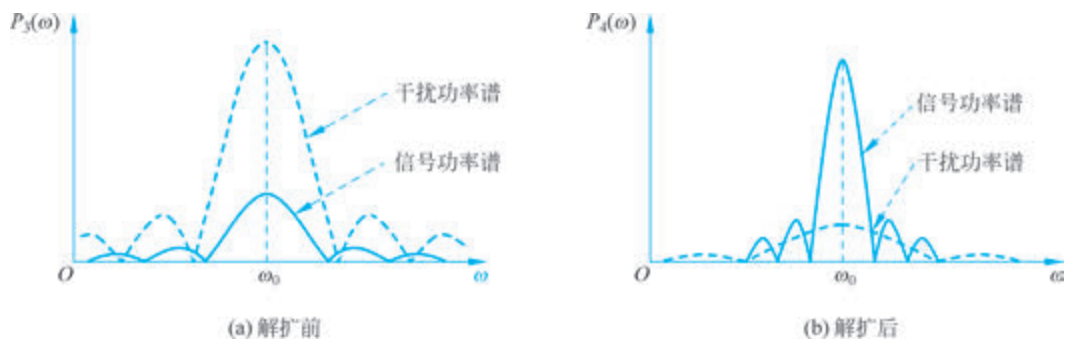


图 3-129 解扩前后信号和干扰的功率谱示意

3.9.2 信号调制解调

根据 3.4 节中傅里叶变换的频移特性可知,通过信号与 $e^{\pm j\omega_0 t}$ 相乘,可以实现信号频谱的搬移。这一特性在通信中的一种重要应用就是调制解调。

实际应用中,很多信号的能量主要集中在低频部分,要将信号以无线电形式进行远

距离传输,一般要求天线长度应大于波长的 $1/4$ 。设某信号的频率为 4000Hz ,其波长 λ 为 75km ,则天线长度要达到近 20km ,显然这是不可行的。但若能将信号搬移到一个较高的频率上,如 100MHz ,则只需要 0.75m 长的天线即可。在通信中,通常把这种信号频谱从低频段搬移到高频段的过程称为调制,在接收端将信号频谱从较高频率搬回到低频、恢复出原信号的过程称为解调。

本节以幅度调制和频率调制为例,介绍模拟调制系统的基本原理。

1. 幅度调制

幅度调制由调制信号控制载波信号的幅度,以实现载波幅度随着调制信号做线性变换。实际中常用的载波信号为正弦信号 $\cos\omega_0 t$ 。

(1) 常规调幅。

常规调幅简称为调幅(AM),是出现最早的调制方式之一。其采用的方法是将调制信号 $m(t)$ 叠加一个直流偏量 A_0 后,再与载波 $\cos\omega_0 t$ 相乘,即

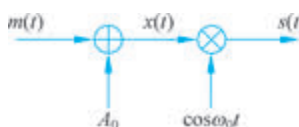


图 3-130 调幅系统模型

信号 $m(t)$ 叠加一个直流偏量 A_0 后,再与载波 $\cos\omega_0 t$ 相乘,即

$$s(t) = [A_0 + m(t)]\cos\omega_0 t \quad (3.9-1)$$

调幅系统模型如图 3-130 所示。

设调制信号 $m(t)$ 的频谱函数为 $M(\omega)$,由傅里叶变换的频移特性可知,调幅信号 $s(t)$ 的频谱函数为

$$S(\omega) = \pi A_0 [\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)] + \frac{1}{2} [F(\omega + \omega_0) + F(\omega - \omega_0)] \quad (3.9-2)$$

调幅过程中信号的时域波形和频谱变化如图 3-131 所示。

从图 3-131 中的时域波形可以看出,AM 信号的外包络形状与调制信号 $m(t)$ 的形状一致,因此 AM 信号的解调通常使用包络检波的方法来恢复信号,如图 3-132 所示。

包络检波电路利用二极管的单向导通性进行。当输入信号为正半周时,二极管导通,对电容 C 充电;当输入信号为负半周和输入电压较小时,二极管截止,电容 C 对 R 放电,检波电路的输出电压 $u(t)$ 随着 $s(t)$ 的包络线变化而变化。同时 R 和 C 组合构成低通滤波器,可以滤除高频部分,在输出端就可以得到还原的低频信号,最后隔去直流 A_0 即可得到原信号 $m(t)$ 。

从图 3-131 中的频谱波形可以看出,AM 信号的频谱由载波分量、上边带、下边带三部分组成。上边带的频谱结构与调制信号的频谱结构相同,下边带是上边带的镜像。所以 AM 信号的带宽是基带信号带宽 ω_m 的 2 倍。AM 信号的总功率包括载波功率和边带功率两部分。显然只有边带功率才与调制信号有关,也就是说,载波分量并不携带信息,因此有用功率(用于传输有用信息的边带功率)占信号总功率的比例相对较低,其调制效率比较低。但 AM 的优点是系统结构简单、价格低廉,所以仍应用于无线电广播中。

(2) 双边带调制。

在 AM 信号中,载波分量不携带信息,导致 AM 的调制效率低。为了提高调制效率,可以在传输信号中去掉载波分量,这种调制方式称为抑制载波双边带调制,简称为双边带(DSB)调制。

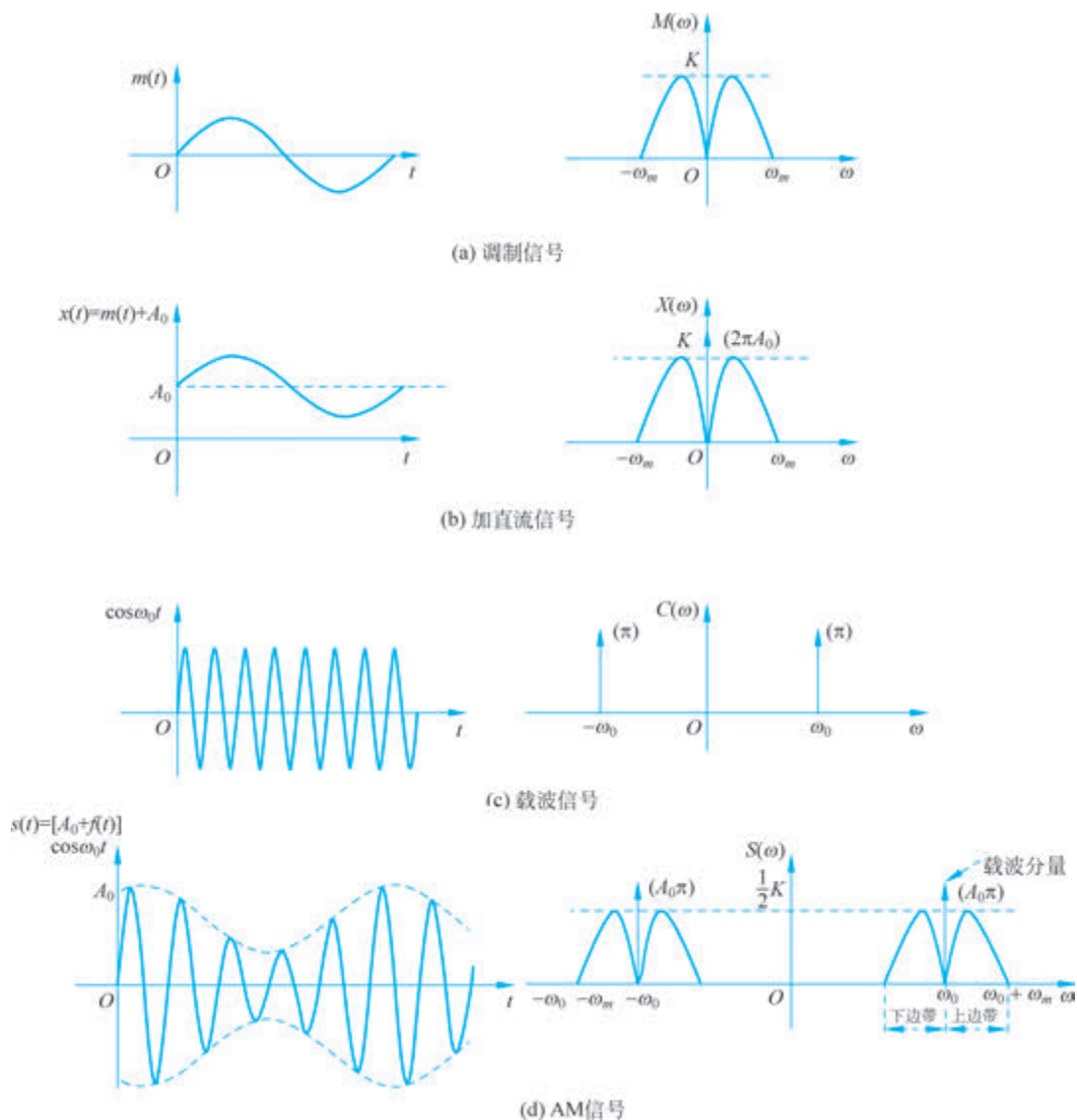


图 3-131 调幅时的调制信号、加直流信号、载波信号和 AM 信号的时域波形和频谱图

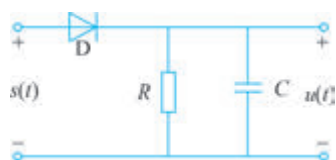


图 3-132 AM 信号的解调包络检波电路示意图

设调制信号为 $m(t)$, 则振幅已调信号 $s(t)$ 可表示为

$$s(t) = m(t) \cos\omega_0 t \quad (3.9-3)$$

若 $m(t)$ 的频谱函数为 $M(\omega)$, $s(t)$ 的频谱函数为 $S(\omega)$, 可知

$$S(\omega) \leftrightarrow \frac{1}{2} [M(\omega + \omega_0) + M(\omega - \omega_0)] \quad (3.9-4)$$

图 3-133 给出了调制过程中信号时域波形和频谱图的变化情况。

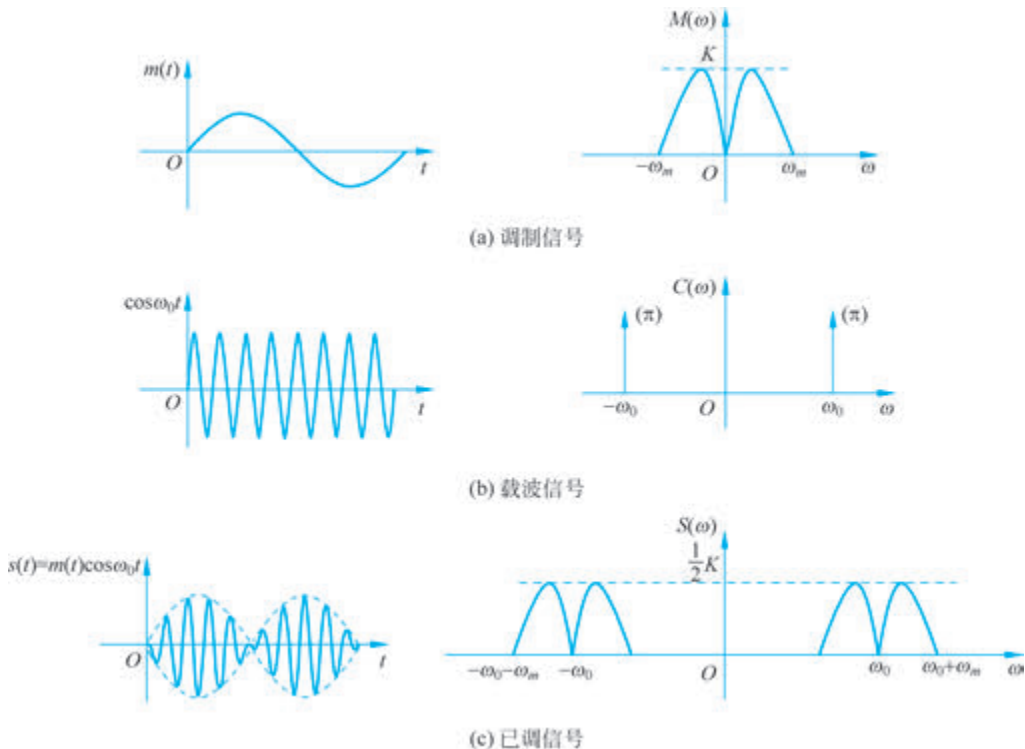


图 3-133 调制过程中信号的时域波形和频谱图

在信号接收端,要从已调信号 $s(t)$ 中恢复出调制信号 $m(t)$,此时需要将已调信号的频谱搬回到低频处,采用的方法仍然是将信号 $s(t)$ 与 $\cos \omega_0 t$ 相乘,则

$$\begin{aligned} g(t) &= s(t) \cos \omega_0 t = m(t) \cos \omega_0 t \times \cos \omega_0 t = m(t) \times \frac{1}{2} (1 + \cos 2\omega_0 t) \\ &= \frac{1}{2} m(t) + \frac{1}{2} m(t) \cos 2\omega_0 t \end{aligned} \quad (3.9-5)$$

可计算得到 $g(t)$ 的频谱函数为

$$G(\omega) = \frac{1}{2} M(\omega) + \frac{1}{4} [M(\omega + 2\omega_0) + M(\omega - 2\omega_0)]$$

为还原出信号 $m(t)$,只需要将信号 $g(t)$ 经过增益为 2 的低通滤波器即可,滤波器的截止频率满足 $\omega_m \leq \omega_c \leq 2\omega_0 - \omega_m$ 。接收端的解调模型如图 3-134 所示。

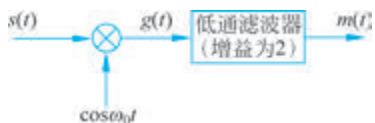


图 3-134 解调模型

这种解调方式需要在接收端产生与发送端同频同相的本地载波信号,因此称为相干解调。获取相干载波的方法有多种,当已调信号频谱中含有载波分量时,可以使用滤波或者载波跟踪锁相环的方式提取载

波；当已调信号频谱中不含载波分量时，可以使用插入导频法或非线性变换法提取载波。有兴趣的读者可以自行查阅相关资料。

2. 频率调制

正弦载波有幅度、频率和相位三个参量。调制信号的信息不仅可以携带于载波的幅度变化中，而且可以携带于载波的频率或相位变化中。载波的频率随调制信号的变化而变化称为频率调制或调频(FM)，载波的相位随调制信号的变化而变化称为相位调制或调相(PM)，频率调制和相位调制统称为角度调制。本节中仅介绍频率调制。

设调频信号的一般表达式为

$$s(t) = A \cos[\omega_0 t + \varphi(t)] \quad (3.9-6)$$

定义 $\theta(t) = \omega_0 t + \varphi(t)$ 为已调信号的瞬时相位， $\varphi(t)$ 是相对于载波相位 $\omega_0 t$ 的瞬时相位偏移， $\frac{d}{dt}[\omega_0 t + \varphi(t)]$ 是信号的瞬时角频率， $\frac{d}{dt}\varphi(t)$ 是相对于载波频率 ω_0 的瞬时频率偏移。

频率调制是指载波的瞬时频率偏移量随着调制信号 $m(t)$ 的变化而变化，即

$$\frac{d}{dt}\varphi(t) = K_F m(t)$$

式中， K_F 为比例系数，称为调频灵敏度 [$\text{rad}/(\text{s} \cdot \text{V})$]。

此时相位偏移为

$$\varphi(t) = K_F \int m(\tau) d\tau$$

可以看出，相位偏移随 $m(t)$ 的积分作线性变化，将其代入式(3.9-6)中可得调频信号为

$$s(t) = A \cos \left[\omega_0 t + K_F \int m(\tau) d\tau \right] \quad (3.9-7)$$

当调制信号振幅增强时，已调信号的波形变密集；而当调制信号振幅减弱时，已调信号的波形变稀疏，波形的变化体现了载波信号的频率偏移变化情况。图 3-135 给出了单频率正弦波调频的示意图。

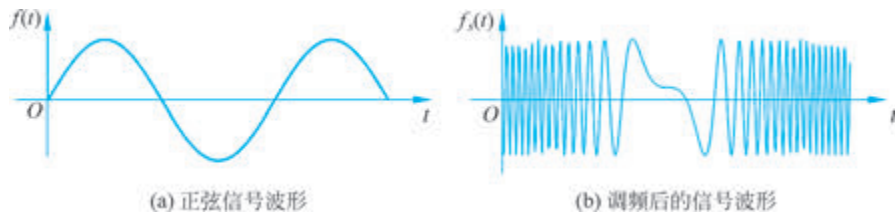


图 3-135 单频率正弦波调频的示意图

调频信号的产生主要有直接调频和间接调频两种方法。直接调频是用调制信号直接控制载波振荡器的频率，使其按调制信号的规律线性地变化，主要优点是在实现线性调频的要求下，可以获得较大的频率偏移；缺点是频率稳定度不高，需采用稳频措施。间接调频首先将调制信号 $m(t)$ 积分，然后对载波进行调相，从而产生一个窄带调频信号，再经 n 次倍频器得到宽带调频信号。间接调频的优点是频率稳定度好；缺点是需要多次

倍频和混频,电路较复杂。有兴趣的读者可以查看通信相关专业书籍。

调制在通信系统中起着重要的作用,它能将调制信号变成适合在信道中传输的已调信号,提高系统的传输效率,改善系统的抗噪性能。信号调制解调可用于频分复用。频分复用是一种按照频率来划分信道的复用方式。频分复用系统的原理如图 3-136 所示。在发送端,各路信号分别与不同频率的载波相乘,调制到多个频率范围互不重叠的子通道中。在接收端,采用不同的带通滤波器将多路信号分开,再通过解调恢复出原信号。频分复用实现了多路信号在同一信道内的同时传输,能够有效提高信道的利用率。频分复用主要用于模拟信号的传输,如调频广播、有线电视等,其优点是技术成熟、信道利用率高。

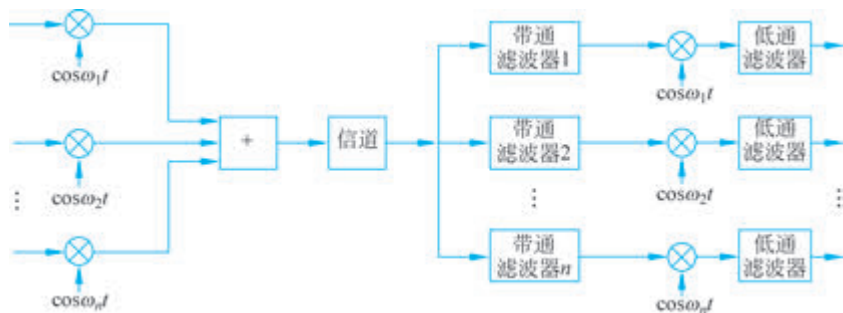


图 3-136 频分复用系统的原理示意图

3.9.3 滤波器

滤波器是一种能够选择性地保留或抑制特定频率成分的系统。以通信系统为例,接收端通常需要进行时钟恢复、符号定时、信道均衡等操作,这些都需要滤波器来实现。此外,在调制解调、射频前端等环节中,滤波器也扮演着不可或缺的角色。图 3-137 为数字基带传输系统的示意图。



图 3-137 数字基带传输系统的示意图

发送端利用发送滤波器限制输入信号的频带范围,并将传输码元变换为适合信道传输的基带信号波形。在接收端采用接收滤波器接收信号,尽可能滤除信道噪声和符号间干扰对系统性能的影响,对信道特性进行平衡,使输出的基带信号波形有利于采样判决。

3.7 节中按照保留信号的频段范围不同,将滤波器分为低通、高通、带通和带阻四种类型。由于理想滤波器在物理上无法实现,实际滤波器按照逼近理想滤波器特性的数学方法不同,可分为巴特沃斯滤波器、切比雪夫 I 型滤波器、椭圆滤波器、贝塞尔滤波器等类型,其频响应函数分别为

$$\text{巴特沃斯滤波器} \quad |H(\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_C}\right)^{2N}}$$

$$\text{切比雪夫 I 型滤波器} \quad |H(\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \epsilon^2 C_N^2\left(\frac{\omega}{\omega_C}\right)}$$

式中, ϵ 为表示通带波形大小的参数, $\epsilon < 1$; C_N 为 N 阶切比雪夫多项式。

$$\text{椭圆滤波器} \quad |H(\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \epsilon^2 U_N^2}$$

式中, ϵ 表示波形大小; U_N 为 N 阶雅可比椭圆函数。

$$\text{贝塞尔滤波器} \quad H(\omega) = \frac{B_N(0)}{B_N\left(\frac{\omega}{\omega_C}\right)}$$

式中, B_N 为 N 阶贝塞尔公式。

图 3-138 以低通滤波器为例, 分别给出了 $N=4$ 时巴特沃斯、切比雪夫 I 型、椭圆、贝塞尔低通滤波器的频率响应曲线。

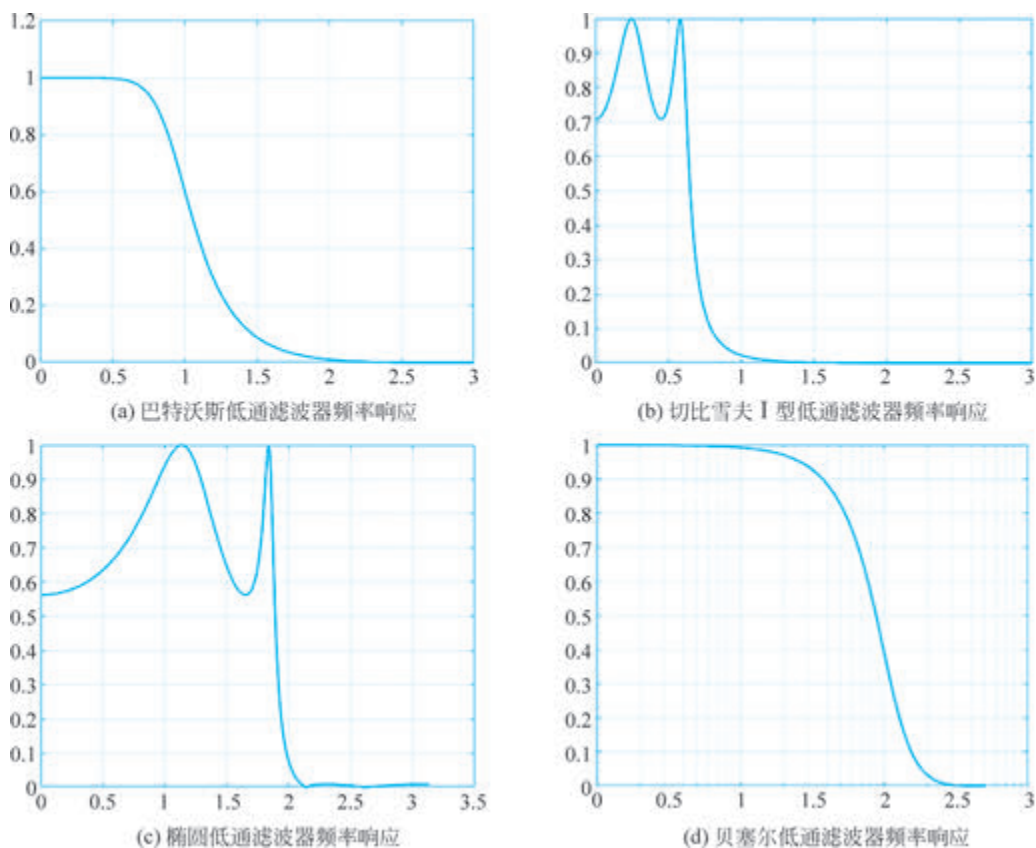


图 3-138 四种低通滤波器频率响应曲线

从图 3-138 中可以看出,不同类型的滤波器具有不同的特性,实际应用中要根据具体的要求合理选择参数。

1. 通带、阻带和过渡带

3.7.4 节中提到实际滤波器的截止频率 ω_c (或 f_c) 通常为幅值等于 0.707 倍最大幅值点 (即 -3dB 点) 的频率。截止频率决定了滤波器允许通过或抑制的频率范围。通常把幅值大于最大值 0.707 倍的频率范围称为滤波器的通带; 而幅值小于最大幅值的 1/10 的频率范围 (小于 -20dB) 称为阻带, 是信号被显著衰减的频率范围; 过渡带则是指通带到阻带之间的频率区域, 过渡带越窄, 滤波器选择性越强, 但设计复杂度越高。对于带通和带阻滤波器, 还存在上截止频率 ω_H 和下截止频率 ω_L 。从图 3-138 中可以看出, 巴特沃斯和贝塞尔低通滤波器的过渡带下降速度较慢, 切比雪夫 I 型和椭圆低通滤波器的过渡带比较陡峭, 适合对过渡带陡峭度要求高的场景。

2. 波纹系数

波纹系数 R_p 主要用来描述滤波器在通带或阻带内幅频响应的波动程度, 一般可以根据通带或阻带内幅度的最大值和最小值来计算, 即

$$R_p = 20 \log \left(\frac{|H(\omega)|_{\max}}{|H(\omega)|_{\min}} \right)$$

波纹系数越小, 说明通带或阻带内的响应越平坦。通带波纹大时, 通带内信号幅度波动明显, 信号失真明显; 阻带波纹大时, 阻带衰减不足, 可能出现干扰信号泄漏。不同类型的滤波器, 其通带波纹特性不同。从图 3-138 中可以看出, 巴特沃斯低通滤波器的通带和阻带均较平坦, 切比雪夫 I 型低通滤波器的通带波纹比较明显, 椭圆低通滤波器的通带和阻带均有波纹, 贝塞尔低通滤波器则具有最平坦的幅度和相位响应, 适合对相位一致性要求高的场景。

3. 滤波器阶数

阶数指的是滤波器的多项式阶数, 反映了滤波器传递函数的复杂度。图 3-139 以巴特沃斯和切比雪夫 I 型低通滤波器为例给出了不同阶数时的频率响应曲线, 可以看出滤波器阶数 N 越高, 过渡带越陡峭, 阻带衰减越大。一般来说, 二十阶滤波器的过渡带宽度可能仅为二阶滤波器的 1/10, 频率选择性显著提升, 在阻带内对噪声和干扰的抑制更强, 适用于通信系统和精密测量设备。但阶数高也就意味着需要更多元件, 电路结构复杂, 导致电路体积增大。同时, 高阶也意味着需要更多的计算资源和时间消耗, 相位特性更复杂, 稳定性差。

4. 品质因素

在带通、带阻滤波器中还有一个重要的参数是品质因素 Q , 它是衡量滤波器频率选择性和能量效率的核心参数, 直接决定滤波器的带宽、陡峭度和插入损耗等性能。

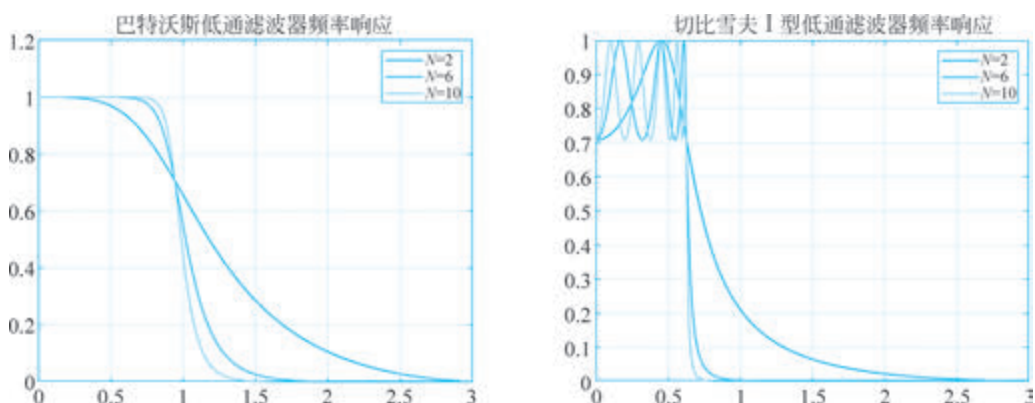
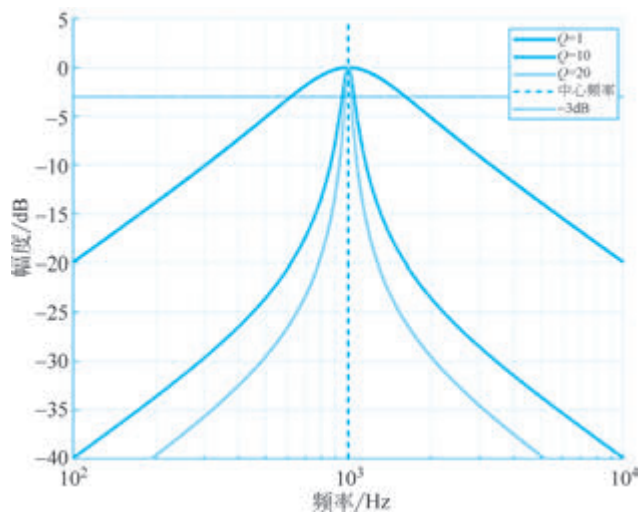


图 3-139 不同阶数时的巴特沃斯和切比雪夫 I 型低通滤波器频率响应曲线

图 3-140 给出了不同 Q 值时带通滤波器的幅频特性曲线。可以看出,当 Q 值小时,滤波器的频率选择性比较差;当 Q 值大时,滤波器具有陡峭过渡带,频率选择性高,抑制干扰能力强。然而, Q 值大也会造成插入损耗大,相位非线性严重,设计相对复杂。

图 3-140 不同 Q 值时带通滤波器的幅频特性曲线

除了以上参数,不同滤波器设计、使用时还有其他参数需要综合考虑,本书就不做进一步介绍了,有兴趣的读者可以查阅相关资料。

3.9.4 信号采样

3.8 节中详细介绍了将模拟信号转换成数字信号的第一步——时域采样,通过分析采样前后的信号频谱,得出了奈奎斯特采样定理,即对低通带有限信号进行采样时,当采样频率大于或等于信号最高频率的两倍时,能够从采样信号中无失真地恢复出原信号。实际上,信号采样后能否恢复的关键是看采样信号的频谱是否混叠,有时采样频率

低于奈奎斯特采样频率,但如果采样信号的频谱没有发生混叠,也是可以恢复信号的。通常将采样频率低于信号最高频率两倍的采样称为欠采样,将采样频率远高于信号最高频率两倍的采样称为过采样。

1. 欠采样

3.8 节中讨论的信号的主要能量集中在低频范围($0 \sim \omega_m$),这类信号通常称为低通(基带)信号,所以奈奎斯特采样定理又称为低通采样定理。对于低通信号来说,当采样频率小于奈奎斯特采样频率时,采样时会发生频谱混叠,在信号恢复时会导致信息失真。如果信号频谱分布在非零中心频率 ω_0 两侧的有限带宽 $[\omega_L, \omega_H]$ 内,此时信号的带宽为 $B = \omega_H - \omega_L$ 。这样的信号称为带通信号,其频谱示意图如图 3-141 所示,其中“+”表示正频率部分,“-”表示负频率部分。带通信号也可以通过调制技术将基带信号频谱搬移至高频段而形成。

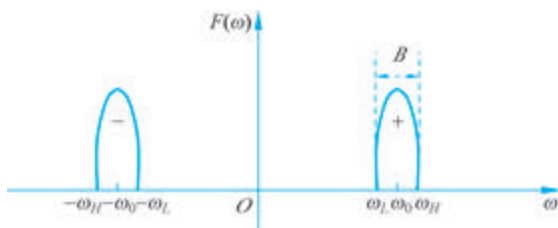


图 3-141 带通信号频谱示意图

可以看出,由于带通信号频谱波形之间有较大空隙,如果按照奈奎斯特采样定理对带通信号进行采样会形成频带的浪费。可以证明,当 $B \ll \omega_0$ 时,对频率范围为 $[\omega_L, \omega_H]$ 的带通信号进行采样,只要最低采样频率满足 $\frac{2\omega_H}{n} \leq \omega_s \leq \frac{2\omega_L}{n-1}$,就能恢复原信号,其中 n 是满足 $n \leq \frac{\omega_H}{B}$ 的正整数。这称为带通采样定理,此时即使采样频率小于奈奎斯特采样频率,采样信号频谱也不会发生混叠,如图 3-142 所示。因此,接收机只需要采用带通滤波器即可无失真地恢复出原始信号。

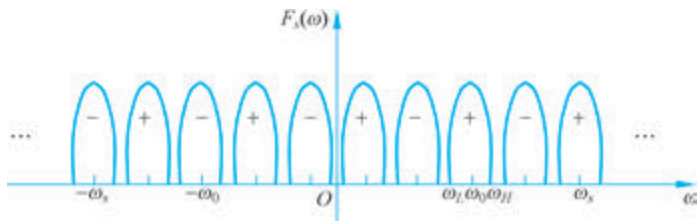


图 3-142 采样频率小于奈奎斯特采样频率时的信号频谱示意图

带通采样定理在频分复用信号数字化、数字接收机的中频采样信号数字化等方面有着重要的作用。在对高频信号进行采样时,可以有效降低采样频率,从而降低对射频 ADC 的要求,可以采用中低端的通用 ADC 实现数字化,价格低、功率小,降低了硬件成

本和系统复杂度。

2. 过采样

3.8节中提到,由于实际滤波器存在过渡带,当采样频率等于信号最高频率的两倍时,通过滤波器得到的不仅是原信号的频率成分,所以采样频率一般要大于信号最高频率的两倍。而过采样时采样频率 ω_s 远高于奈奎斯特采样频率(即 $\omega_s \gg 2\omega_m$),通常为4倍、8倍、64倍甚至更高。

一般信号在采样前要经过抗混叠滤波器,抗混叠滤波器需要一个非常陡峭的滚降特性(即过渡带非常窄),才能在 ω_m 和 $\omega_s - \omega_m$ 之间极窄的频带内将信号衰减到足够低。这种模拟滤波器设计难度大、成本高且会引入相位失真。而过采样时,由于 $(\omega_s - \omega_m) \gg \omega_m$,为抗混叠滤波器提供了一个很宽的过渡带,放宽了對抗混叠滤波器的性能要求,有效避免了高频噪声混叠到有效频带内。同时,信号采样量化过程中会引入量化噪声,而量化噪声在频域上是均匀分布的,增大采样频率也增加了采样点数,量化噪声功率会被分散到更宽的频带。由于有用信号主要集中在低频范围,通过低通滤波器可以滤除带外噪声,降低带内噪声功率,从而显著提高信噪比。在通信系统中,过采样有助于更精确地进行载波同步。

习题 3

3-1 求图 3-143 所示周期信号的三角形式的傅里叶级数展开式。

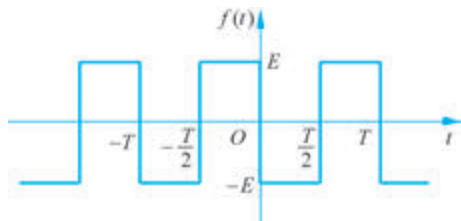


图 3-143 题 3-1 图

3-2 求图 3-144 所示周期信号的复指数形式的傅里叶级数展开式。

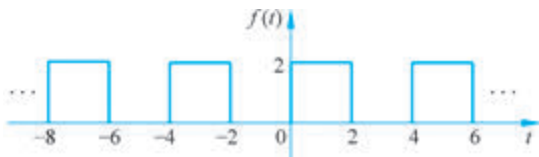


图 3-144 题 3-2 图

3-3 信号 $f(t) = 3\sin(2t + \pi/6) + \cos(3t + \pi/3) - \cos(4t + \pi/8)$, 画出该信号的三角形式的傅里叶级数频谱图。

3-4 已知周期信号的单边频谱如图 3-145 所示,写出该信号标准三角形式的傅里叶级数展开式。

3-5 画出题 3-4 所示信号的双边频谱图,并写出其复指数形式的傅里叶级数展开式。

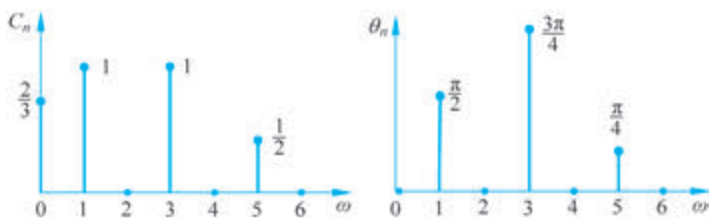


图 3-145 题 3-4 图

3-6 周期信号 $f(t)$ 的双边频谱如图 3-146 所示, 请写出其三角形式的傅里叶级数展开式。

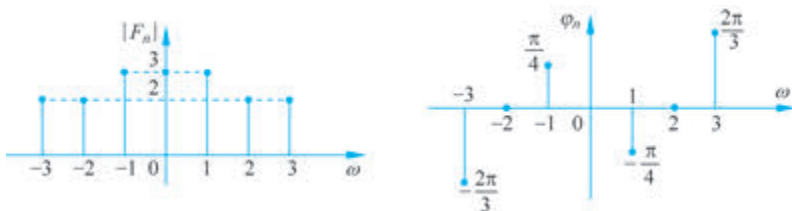


图 3-146 题 3-6 图

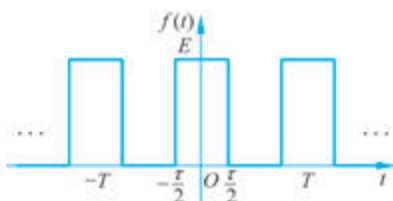


图 3-147 题 3-7 图

3-7 已知周期矩形信号的波形如图 3-147 所示。求:

(1) 当信号 $f_1(t)$ 参数为 $\tau=0.5\mu\text{s}$ 、 $T=4\mu\text{s}$ 、 $E=1\text{V}$ 时, 该信号的直流分量和谱线间隔;

(2) 当信号 $f_2(t)$ 的参数为 $\tau=1.5\mu\text{s}$ 、 $T=3\mu\text{s}$ 、 $E=3\text{V}$ 时, 该信号的直流分量和谱线间隔。

3-8 求信号 $f(t)=2u(t+1)-2u(t-3)$ 的傅里叶变换。

3-9 已知信号的频谱函数为 $F(\omega)=\frac{1}{(j\omega)^2+5j\omega+4}$, 求原信号 $f(t)$ 。

3-10 已知 $f(t)\leftrightarrow F(\omega)$, 利用傅里叶变换的性质, 求下列信号的傅里叶变换。

- (1) $f_1(t)=f\left(\frac{1}{3}t\right)$; (2) $f_2(t)=f(t+3)$;
 (3) $f_3(t)=f(3t-4)$; (4) $f_4(t)=f(2-2t)$;
 (5) $f_5(t)=f(t)\cos t$; (6) $f_6(t)=f(t-1)e^{-j\omega_0 t}$;
 (7) $f_7(t)=t\frac{d}{dt}f(t)$; (8) $f_8(t)=(t-3)f(t-3)$ 。

3-11 求下列信号的傅里叶变换。

- (1) $G_2(3t)$; (2) e^{j2t} ; (3) $\frac{\sin 2t}{t}$ 。

3-12 已知门函数 $EG_T(t)$ 的频谱函数为 $G(\omega)=E\tau\text{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$, 求图 3-148 所示信号

$f(t)$ 的频谱函数 $F(\omega)$ 。

3-13 求图 3-149 所示信号 $f(t)$ 的傅里叶变换 $F(\omega)$, 并画出频谱图。

$$f(t) = \begin{cases} \cos \omega_0 t, & |t| \leq T \\ 0, & |t| > T \end{cases}$$

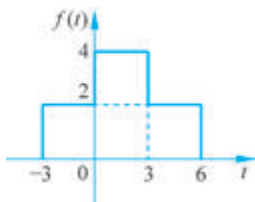


图 3-148 题 3-12 图

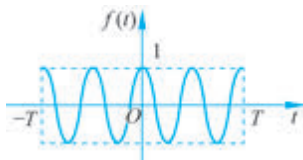


图 3-149 题 3-13 图

3-14 已知信号 $f(t)$ 的波形如图 3-150 所示, 求其傅里叶变换 $F(\omega)$ 。

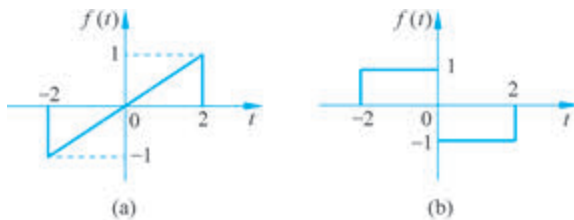


图 3-150 题 3-14 图

3-15 $f_1(t)$ 与 $f_2(t)$ 的波形如图 3-151 所示, 已知 $\mathcal{F}[f_1(t)] = F_1(\omega)$, 求 $f_2(t)$ 的频谱函数 $F_2(\omega)$ 。

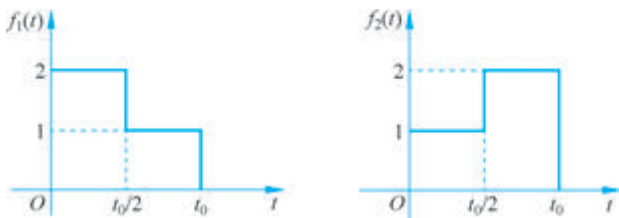


图 3-151 题 3-15 图

3-16 利用傅里叶变换的对称性, 求下列信号的傅里叶反变换。

(1) $F(\omega) = u(\omega + \omega_0) - u(\omega - \omega_0)$;

(2) $F(\omega) = \delta(\omega - \omega_0)$ 。

3-17 已知信号 $f(t)$ 的傅里叶变换 $F(\omega)$ 如图 3-152 所示, 求信号 $f(t)$ 。

3-18 已知信号 $f_1(t)$ 与 $f_2(t)$ 的频谱分别如图 3-153 所示, 画出 $f_1(t) + f_2(t)$ 、 $f_1(t) * f_2(t)$ 、 $f_1(t) \cdot f_2(t)$ 的频谱图。



图 3-152 题 3-17 图

3-19 求图 3-154 所示周期信号的傅里叶变换。

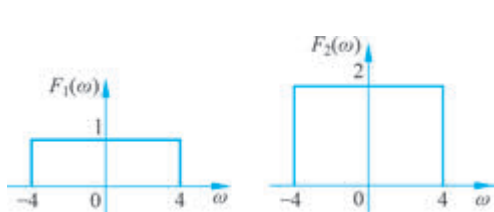


图 3-153 题 3-18 图

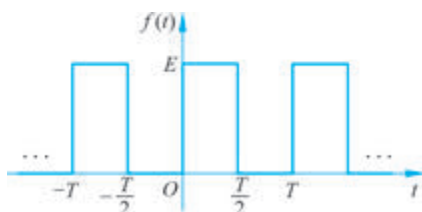


图 3-154 题 3-19 图

3-20 已知 LTI 系统的微分方程为 $\frac{d^2}{dt^2}r(t) + 6 \frac{d}{dt}r(t) + 8r(t) = 2e(t)$, 其中激励为 $e(t)$, 响应为 $r(t)$, 求系统频响函数 $H(\omega)$ 和单位冲激响应 $h(t)$ 。

3-21 求图 3-155 所示电路系统的频响函数 $H(\omega)$, 其中 $u(t)$ 为输入, $u_1(t)$ 为输出。

3-22 电路结构如图 3-156 所示, 激励信号为 $u(t)$, 响应为 $u_c(t)$, 求该电路系统的频响函数 $H(\omega)$ 。

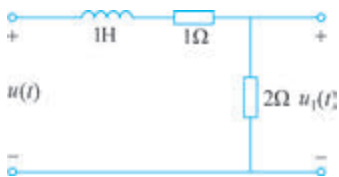


图 3-155 题 3-21 图

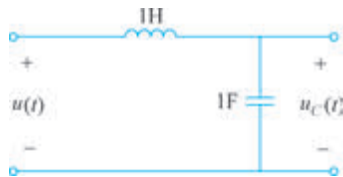


图 3-156 题 3-22 图

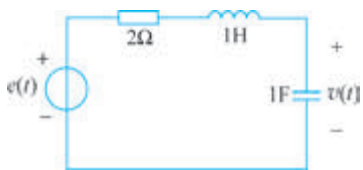


图 3-157 题 3-23 图

3-23 图 3-157 所示电路系统中, 激励为 $e(t)$, 响应为 $v(t)$, 求系统的频响函数 $H(\omega)$ 和单位冲激响应 $h(t)$ 。

3-24 某二阶系统的频响函数为 $H(\omega) = \frac{j\omega + 3}{(j\omega)^2 + 3j\omega + 2}$, 写出该系统的微分方程, 并求单位冲

激响应 $h(t)$ 。

3-25 某 LTI 系统的频响函数 $H(\omega) = -2j\omega$, 当激励为下列信号时, 分别求零状态响应 $r(t)$ 。

- (1) $\sin t$; (2) $\cos\left(2t + \frac{\pi}{6}\right)$; (3) $2\sin 2t - \cos 3t$ 。

3-26 已知 LTI 系统的微分方程为

$$\frac{d^2}{dt^2}r(t) + 7 \frac{d}{dt}r(t) + 10r(t) = e(t) + e'(t)$$

当激励 $e(t) = e^{-t}u(t)$ 时, 求系统的零状态响应 $r(t)$ 。

3-27 如图 3-158(a) 所示系统中, 已知 $e_1(t) = \cos 2t$, $e_2(t) = \cos 5t$, 系统频响函数 $H(\omega)$ 如图 3-158(b) 所示, 试求响应 $r(t)$ 。

3-28 已知某 LTI 系统的频响函数 $H(\omega) = \frac{1-j\omega}{1+j\omega}$, 求单位冲激响应 $h(t)$, 并计算当

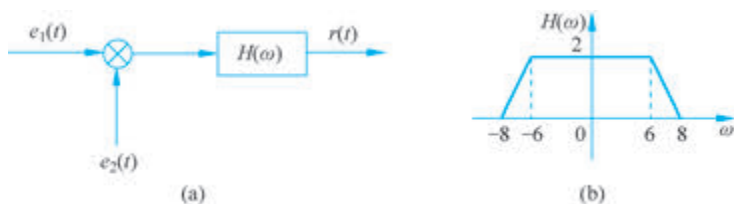


图 3-158 题 3-27 图

激励 $e(t) = e^{-2t}u(t)$ 时的零状态响应 $r(t)$ 。

3-29 已知 LTI 系统的激励为 $e(t) = \sin 2t + \cos 5t$, 经过频响函数如图 3-159 所示的系统, 求输出 $r(t)$, 并判断输出的失真情况。

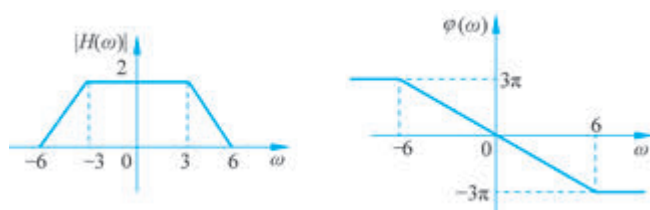


图 3-159 题 3-29 图

3-30 设系统的频响函数为

$$H(\omega) = \begin{cases} e^{-2j\omega}, & |\omega| < 6 \\ 0, & |\omega| > 6 \end{cases}$$

若系统激励为 $e(t) = \frac{\sin 4t}{t} \cos 6t$, 求系统响应 $r(t)$ 。

3-31 已知某信号 $e(t)$ 的频谱如图 3-160(a) 所示, 信号经过图 3-160(b) 所示系统, 画出系统 A、B、C、D 各点信号的频谱图。

$$H_1(\omega) = \begin{cases} 2, & |\omega| \leq 100 \\ 0, & |\omega| > 100 \end{cases} \quad H_2(\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| \leq 50 \\ 0, & |\omega| > 50 \end{cases}$$

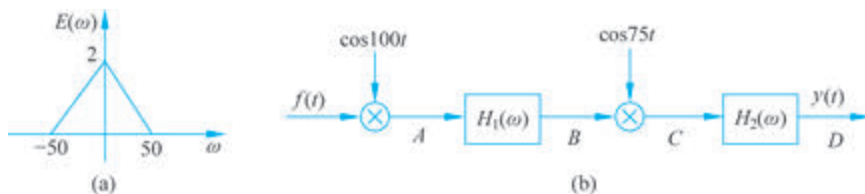


图 3-160 题 3-31 图

3-32 已知某系统如图 3-161(a) 所示, 其中信号 $e(t)$ 的频谱如图 3-161(b) 所示, 理想低通滤波器的频响函数如图 3-161(c) 所示, 分别画出 $x(t)$ 和 $r(t)$ 的频谱图。

3-33 信号经过如图 3-162(a) 所示系统, 已知信号 $e(t)$ 的频谱如图 3-162(b) 所示,

$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT)。$$

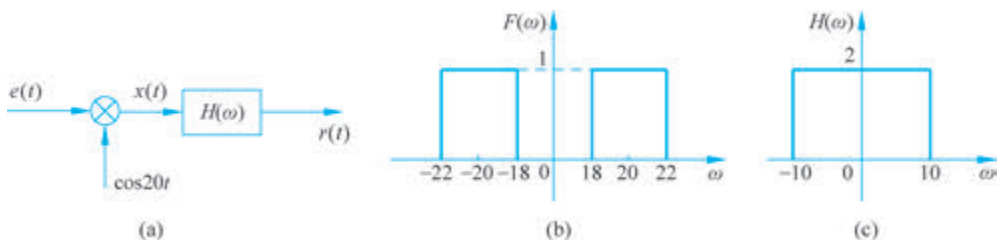


图 3-161 题 3-32 图

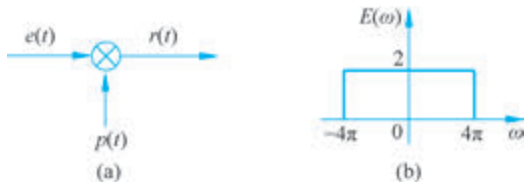


图 3-162 题 3-33 图

- (1) 当 $T=0.1\text{s}$ 时,画出 $r(t)$ 的频谱图;
- (2) 当 $T=1/3\text{s}$ 时,画出 $r(t)$ 的频谱图。

3-34 已知信号 $f_1(t)$ 的最高频率为 50Hz , 信号 $f_2(t)$ 的最高频率为 80Hz , 若对下列信号进行时域采样, 求最小采样频率 f_s 。

- (1) $f_1^2(t)$; (2) $f_1(t) * f_2(t)$;
- (3) $f_1(t) + f_1\left(\frac{t}{2}\right)$; (4) $f_1(t) \cdot f_2(t)$ 。

3-35 若对下列信号进行采样, 求无失真恢复信号的最小采样频率 ω_s 。

- (1) $\text{Sa}(50t)$; (2) $\text{Sa}^2(50t)$; (3) $\text{Sa}^5(50t) + \text{Sa}^4(80t)$ 。