

第5章

信号与系统的复频域分析

5.1 导言

在现代信号处理与系统分析中,时域和频域分析方法为理解信号特性与系统行为提供了基础工具。然而,当面对复杂动态系统时,传统的傅里叶变换因其对信号绝对可积/可和的严苛要求导致应用受限,例如,无法处理指数增长的发散信号。为突破这一局限,复频域分析应运而生,其核心工具——拉普拉斯变换与 z 变换——通过引入复指数加权因子,将分析域扩展至复平面,成为解决工程实际问题的重要数学框架之一。

拉普拉斯变换作为傅里叶变换的广义形式,通过指数衰减因子 $e^{-\sigma t}$ (σ 为实数)将不满足绝对可积的连续时间信号纳入分析范畴,同时将微分方程转化为代数方程,显著简化了连续系统的求解与稳定性分析。与之对应, z 变换通过复变量 z 的引入,将离散时间信号与差分方程的求解映射至复平面,为数字滤波器设计、离散控制系统及现代数字信号处理提供了理论基础。二者不仅统一了信号与系统的时域、频域特性,还通过零极点分布直观揭示了系统的时域响应、频率响应、稳定性及因果性等关键特征。

复频域分析方法的应用贯穿电路、控制、通信、机械等多个领域,如电力系统稳定性分析、航天器姿态控制、滤波器设计、机械系统振动模态分析等。虽然时域数值分析方法发展迅速,但复频域分析作为经典的系统分析方法仍是现代工程问题建模与优化的基石,对系统初始设计和理论分析具有十分重要的指导价值。

本章将从拉普拉斯变换的定义与性质出发,探讨其与傅里叶变换的关联性,并将其应用于连续时间线性时不变系统分析,特别是系统极点零点分析方法的讨论与运用。继而,通过 z 变换建立离散系统的复频域分析方法,最终揭示两类变换在数学本质与工程应用中的内在统一性。

5.2 连续时间信号的拉普拉斯变换

5.2.1 拉普拉斯变换的定义与收敛域

已知信号 $x(t)$ 满足狄利克雷条件时,存在傅里叶变换和反变换,有

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \quad (5.2.1)$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (5.2.2)$$

但有些常用信号,如单位阶跃信号 $u(t)$ 、符号函数 $\text{sgn}(t)$ 等,虽然存在傅里叶变换,但不能用式(5.2.1)求;而另外一些信号,如指数增长信号 $e^{at}u(t)$ ($a>0$),则不存在傅里叶变换。究其原因,是当 $t \rightarrow \pm\infty$ 时信号的幅度衰减太慢或不衰减,甚至增长,导致式(5.2.1)的积分不满足狄利克雷条件中的绝对可积条件。

为了解决这个问题,我们将信号 $x(t)$ 乘以衰减因子 $e^{-\sigma t}$ (σ 为实数),选择合适的 σ

值,使得 $t \rightarrow \pm\infty$ 时信号 $x(t)e^{-\sigma t}$ 的幅度衰减为 0, 这样 $x(t)e^{-\sigma t}$ 就可满足绝对可积的条件, 从而使得 $x(t)e^{-\sigma t}$ 的傅里叶变换存在

$$\mathcal{F}[x(t)e^{-\sigma t}] = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-\sigma t} e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-(\sigma+j\omega)t} dt$$

显然, 上式积分结果是关于 $(\sigma+j\omega)$ 的函数, 记为 $X(\sigma+j\omega)$ 。这样, 得到一对傅里叶变换对: $x(t)e^{-\sigma t} \leftrightarrow X(\sigma+j\omega)$, 即有

$$X(\sigma+j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-(\sigma+j\omega)t} dt \quad (5.2.3)$$

$$x(t)e^{-\sigma t} = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} X(\sigma+j\omega)e^{j\omega t} d\omega \quad (5.2.4)$$

令 $\sigma+j\omega=s$, 进一步整理得到

$$X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-st} dt \quad (5.2.5)$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} X(s)e^{st} ds \quad (5.2.6)$$

式(5.2.5)和式(5.2.6)构成一**拉普拉斯变换对**, 简称拉氏变换对, 记为 $x(t) \leftrightarrow X(s)$ 。其中, 式(5.2.5)称为 $x(t)$ 的拉氏变换, 式(5.2.6)称为 $X(s)$ 的拉氏反变换, $x(t)$ 称为原函数, $X(s)$ 称为**象函数**。简记为

$$X(s) = \mathcal{L}[x(t)] \quad (5.2.7)$$

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}[X(s)] \quad (5.2.8)$$

由此可见, $x(t)$ 的拉氏变换 $X(s)$ 是 $x(t)e^{-\sigma t}$ 的傅里叶变换。于是可以得到拉普拉斯变换存在的充分条件之一是: $x(t)e^{-\sigma t}$ 绝对可积, 即

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t) \cdot e^{-\sigma t}| dt < +\infty \quad (5.2.9)$$

进一步可知, $X(s)$ 是否存在与 σ 的取值密切相关。把使 $X(s)$ 存在的 σ 的范围称为 $X(s)$ 的**收敛域**(Region of Convergence, ROC), σ 常简写为 $\text{Re}[s]$ 。

收敛域是拉普拉斯变换的重要组成部分, 在求解信号的拉普拉斯变换时, 应同时明确其收敛域。例如, 在分析因果信号 $x_1(t) = e^{\alpha t}u(t)$ 和反因果信号 $x_2(t) = -e^{\alpha t}u(-t)$ 的拉氏变换时, 发现两者结果相同, 仅收敛域不同, 有

$$e^{\alpha t}u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s-\alpha}, \quad \text{Re}[s] > \alpha \quad (5.2.10)$$

$$-e^{\alpha t}u(-t) \leftrightarrow \frac{1}{s-\alpha}, \quad \text{Re}[s] < \alpha \quad (5.2.11)$$

究其原因在于拉氏变换定义式的积分上下限为 $-\infty \sim +\infty$, 既可以处理因果信号, 也可以处理反因果信号。所以, $X(s)$ 必须与收敛域一起, 才能与 $x(t)$ 一一对应。

式(5.2.10)和式(5.2.11)给出了两个常用的拉氏变换对, 它们常用于一阶系统的动态分析, 描述动态衰减等过程。

【例 5.2.1】 求双边信号 $x(t) = e^{\alpha t}u(t) + e^{\beta t}u(-t)$ 的拉氏变换。

解:

$$\begin{aligned}
 X(s) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-st} dt = \int_{-\infty}^0 e^{\beta t} e^{-st} dt + \int_0^{+\infty} e^{\alpha t} e^{-st} dt \\
 &= \begin{cases} \frac{1}{s-\alpha} - \frac{1}{s-\beta}, & \alpha < \operatorname{Re}[s] < \beta, \alpha < \beta \\ \text{不存在}, & \alpha \geq \beta \end{cases} \quad (5.2.12)
 \end{aligned}$$

【例 5.2.2】求矩形脉冲信号 $x(t)=G_{\tau}(t)$ 的拉氏变换。

解:

$$X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-st} dt = \int_{-\tau/2}^{\tau/2} e^{-st} dt = e^{s\tau/2} \frac{1 - e^{-s\tau}}{s}$$

即

$$G_{\tau}(t) \leftrightarrow e^{s\tau/2} \frac{1 - e^{-s\tau}}{s} \quad (5.2.13)$$

因此此矩形脉冲信号幅度有限且持续时间有限,拉氏变换定义式中的积分区间有限,故对所有的 s ,式(5.2.9)均满足, $X(s)$ 都存在。

【例 5.2.3】指出下列信号拉普拉斯变换的收敛域。

- (1) $x(t)=tu(-t)$
- (2) $x(t)=e^{-2t}\sin(t)u(t)$
- (3) $x(t)=t^t u(t)$

解:

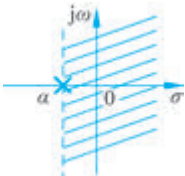
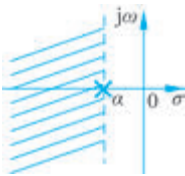
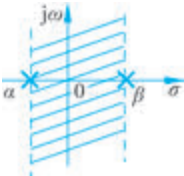
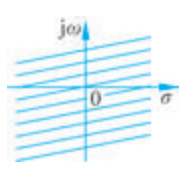
(1) 根据拉普拉斯变换及其收敛域的定义,通过求出使 $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} x(t)e^{-\sigma t}=0$ 时的 σ 的取值,即可得到对应信号 $x(t)$ 的收敛域。因此,对于 $x(t)=tu(-t)$ 的收敛域求解,只需使 $\lim_{t \rightarrow -\infty} te^{-\sigma t}=0$ 满足,则 $\sigma < 0$ 。

(2) 同理,可得信号 $x(t)=e^{-2t}\sin(t)u(t)$ 的收敛域为 $\sigma > -2$,它与信号 $x(t)=e^{-2t}u(t)$ 的收敛域一致,主要在于正弦振荡的幅值有限。

(3) 信号 $x(t)=t^t u(t)$ 的收敛域不存在。原因在于它属于超指数类信号(还包括 e^{t^2} 、 $t!$ 等),增长过快,无法找到合适的 σ 值使其收敛,不存在拉氏变换。

以 s 的实部 σ 为横轴,虚部 $j\omega$ 为纵轴建立平面,称为 s 平面。我们可以在 s 平面上把收敛域用阴影线直观地表示出来,其中,由收敛域边界 σ_c 确定的虚线称为收敛轴。表 5.1 列出了几个典型信号的拉普拉斯变换和收敛域。对于因果信号,因拉氏变换定义式中积分上限为 $+\infty$,则若对于某个 σ_1 该积分收敛,那么对于所有的 $\sigma > \sigma_1$,该积分一定也收敛,所以,因果信号的收敛域为右边收敛。同样,反因果信号的收敛域为左边收敛,双边信号的收敛域若存在,为带状收敛。需要说明的是,在 s 平面表示时,收敛域通常不含收敛轴。而对于幅度有限且时间有限的信号,则在全 s 平面收敛。

表 5.1 几个典型信号的拉普拉斯变换和收敛域

信号类型	无限长信号			时限信号
	因果信号	反因果信号	双边信号	
典型信号	$e^{at}u(t)$	$-e^{at}u(-t)$	$e^{at}u(t) + e^{\beta t}u(-t)$	$G_{\tau}(t)$
拉氏变换及收敛域	$\frac{1}{s-a}, \operatorname{Re}[s] > \alpha$	$\frac{1}{s-a}, \operatorname{Re}[s] < \alpha$	$\frac{1}{s-a} - \frac{1}{s-\beta},$ $\alpha < \operatorname{Re}[s] < \beta$	$e^{s\tau/2} \frac{1-e^{-s\tau}}{s},$ 全 s 平面
收敛域 s 平面表示				
收敛类型	右边收敛	左边收敛	带状收敛	全 s 平面收敛

5.2.2 拉普拉斯变换与傅里叶变换的关系

本章开始,通过引入复变量 $s = \sigma + j\omega$,得到了拉氏变换。显然, $x(t)$ 的拉氏变换 $X(s)$ 是 $x(t)e^{-\sigma t}$ 的傅里叶变换,而傅里叶变换则是 $\sigma = 0$ 时(即 s 平面虚轴上)的拉氏变换。

那么,当已知信号 $x(t)$ 的拉氏变换时,是否能以 $j\omega$ 替换 s 来得到其傅氏变换? 这需要根据收敛边界的不同具体分析。

(1) 当拉氏变换的收敛域包含虚轴时,拉氏变换和傅氏变换都存在,并且 $X(j\omega) = X(s)|_{s=j\omega}$ 。例如指数衰减信号 $x(t) = e^{at}u(t), \alpha < 0$ 。

(2) 当拉氏变换的收敛域以虚轴为边界时,拉氏变换和傅氏变换都存在,但傅氏变换中含有冲激函数,故 $X(j\omega) \neq X(s)|_{s=j\omega}$,如阶跃信号 $u(t)$ 。

此时,有

$$X(j\omega) = X(s)|_{s=j\omega} + \sum_n K_n \pi \delta(\omega - \omega_n) \quad (5.2.14)$$

式中, ω_n 为虚轴上的极点, K_n 为 $X(s)$ 进行部分分式分解的系数,即

$$X(s) = \sum_n \frac{K_n}{s - j\omega_n}$$

(3) 当拉氏变换的收敛域不包含虚轴并且不以虚轴为边界时,拉氏变换存在,但傅氏变换不存在。例如指数增长信号 $x(t) = e^{at}u(t), \alpha > 0$ 。

5.2.3 单边拉普拉斯变换

一个连续时间信号 $x(t)$ 的单边拉普拉斯变换定义为

$$X(s) = \int_{0^-}^{+\infty} x(t) e^{-st} dt \quad (5.2.15)$$

式中,积分下限取 0^- ,是考虑到 $x(t)$ 可能在 $t=0$ 时刻包含冲激函数或其各阶导数。为了区分,式(5.2.5)称为**双边拉氏变换**,记为 $X_B(s)$ 。

显然,单边拉氏变换只关心信号的因果部分,其优势在于不需要指明收敛域就可以与时域一一对应,这种唯一性可以大大简化分析。并且在实际应用中,遇到的连续时间信号大都是因果信号,其在 $t<0$ 时, $x(t)=0$,双边、单边拉氏变换相同。所以本书后续主要讨论单边拉氏变换,如果不特别指明,本书提到的拉氏变换都是指单边拉氏变换。

考虑对于因果信号在 $t<0$ 时 $x(t)=0$,则傅里叶变换的正变换式(5.2.1),可以写成

$$X(j\omega) = \int_0^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt \quad (5.2.16)$$

而 $X(j\omega)$ 仍包括 $+\omega$ 和 $-\omega$ 项,所以单边拉氏反变换表达式的积分限不变。于是,与式(5.2.15)对应的反变换可以写为

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} X(s)e^{st} ds, \quad t > 0^- \quad (5.2.17)$$

下面求几个常用信号的单边拉氏变换。

【例 5.2.4】 求单位冲激信号 $\delta(t)$ 的单边拉氏变换。

解:
$$X(s) = \int_{0^-}^{+\infty} x(t)e^{-st} dt = \int_{0^-}^{+\infty} \delta(t)e^{-st} dt = 1$$

即

$$\delta(t) \leftrightarrow 1 \quad (5.2.18)$$

也是全 s 平面收敛,该例题正好体现拉氏变换积分下限为 0^- 的意义。

【例 5.2.5】 求复指数信号 $x(t)=e^{s_0 t}u(t)$ (s_0 为复常数)的单边拉氏变换。

解:
$$X(s) = \int_{0^-}^{+\infty} x(t)e^{-st} dt = \int_0^{+\infty} e^{s_0 t} e^{-st} dt = \frac{1}{s-s_0}, \operatorname{Re}[s] > \operatorname{Re}[s_0]$$

即

$$e^{s_0 t} u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s-s_0}, \quad \operatorname{Re}[s] > \operatorname{Re}[s_0] \quad (5.2.19)$$

若 s_0 为实数,令 $s_0=a$ (a 为实常数),得到

$$e^{at} u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s-a}, \quad \operatorname{Re}[s] > a \quad (5.2.20)$$

若 $s_0=0$,得到

$$u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s}, \quad \operatorname{Re}[s] > 0 \quad (5.2.21)$$

若 s_0 为虚数,令 $s_0=\pm j\omega_0$,得到

$$e^{\pm j\omega_0 t} u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s \mp j\omega_0}, \quad \operatorname{Re}[s] > 0 \quad (5.2.22)$$

利用欧拉公式,根据式(5.2.22)可以得出

$$\cos(\omega_0 t) u(t) \leftrightarrow \frac{s}{s^2 + \omega_0^2}, \quad \operatorname{Re}[s] > 0 \quad (5.2.23)$$

$$\sin(\omega_0 t)u(t) \leftrightarrow \frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2}, \quad \operatorname{Re}[s] > 0 \quad (5.2.24)$$

将上述结果及其他常用函数信号(将在下节利用性质继续导出)的拉氏变换进行归纳,如表 5.2 所示。

表 5.2 常用的单边拉氏变换对

序 号	$x(t)$	$X(s)$
1	$\delta(t)$	1, 全部 s
2	$\delta(t-t_0), t_0 > 0$	e^{-st_0} , 全部 s
3	$\delta^{(n)}(t)$	s^n , 全部 s
4	$u(t)$	$\frac{1}{s}, \operatorname{Re}[s] > 0$
5	$u(t-t_0), t_0 > 0$	$\frac{1}{s} e^{-st_0}, \operatorname{Re}[s] > 0$
6	$tu(t)$	$\frac{1}{s^2}, \operatorname{Re}[s] > 0$
7	$t^n u(t)$	$\frac{n!}{s^{n+1}}, \operatorname{Re}[s] > 0$
8	$e^{-at} u(t)$	$\frac{1}{s+a}, \operatorname{Re}[s] > -a$
9	$t e^{-at} u(t)$	$\frac{1}{(s+a)^2}, \operatorname{Re}[s] > -a$
10	$\frac{1}{n!} t^n e^{-at} u(t)$	$\frac{1}{(s+a)^{n+1}}, \operatorname{Re}[s] > -a$
11	$\sin(\omega_0 t) u(t)$	$\frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2}, \operatorname{Re}[s] > 0$
12	$\cos(\omega_0 t) u(t)$	$\frac{s}{s^2 + \omega_0^2}, \operatorname{Re}[s] > 0$
13	$e^{-at} \sin(\omega_0 t) u(t)$	$\frac{\omega_0}{(s+a)^2 + \omega_0^2}, \operatorname{Re}[s] > -a$
14	$e^{-at} \cos(\omega_0 t) u(t)$	$\frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega_0^2}, \operatorname{Re}[s] > -a$

由表 5.2 可见,大部分常用信号的单边拉氏变换都存在(也有些信号不存在拉氏变换,如前面提到的超指数信号)。但实际中遇到的一般都是指数阶信号,总能找到合适的 σ 值使其收敛,故常见信号的单边拉氏变换总是存在的。

5.2.4 单边拉普拉斯变换性质

类比傅里叶变换,单边拉普拉斯变换有一些基本性质,这些性质也更加明确地反映了信号时域与复频域的对应变化关系,便于我们理解复频域分析方法。同时,利用这些性质,可以很方便地求得表 5.2 所列的各变换式。学习中应注意与傅里叶变换的性质进行对比。

1. 时移(延时)特性

若 $x(t) \leftrightarrow X(s)$, $\text{Re}[s] > \sigma_c$, 则

$$x(t - t_0)u(t - t_0) \leftrightarrow X(s)e^{-st_0}, \text{Re}[s] > \sigma_c \quad (5.2.25)$$

式中, $t_0 > 0$, σ_c 为收敛边界, 下同。

证明:

$$\mathcal{L}[x(t - t_0)u(t - t_0)] = \int_{0^-}^{+\infty} x(t - t_0)u(t - t_0)e^{-st} dt = \int_{t_0}^{+\infty} x(t - t_0)e^{-st} dt$$

令 $\tau = t - t_0$, 则 $t = \tau + t_0$, $dt = d\tau$, 于是有

$$\mathcal{L}[x(t - t_0)u(t - t_0)] = \int_{0^-}^{+\infty} x(\tau)e^{-s(\tau+t_0)} d\tau = e^{-st_0} \int_{0^-}^{+\infty} x(\tau)e^{-s\tau} d\tau = e^{-st_0} X(s)$$

此性质表明: 若信号波形延迟 t_0 , 则它的拉氏变换应乘以 e^{-st_0} 。

【例 5.2.6】 求矩形脉冲信号 $x(t) = G_\tau\left(t - \frac{\tau}{2}\right)$ 的单边拉氏变换。

解: 方法一: 根据单边拉普拉斯变换的定义求

$$X(s) = \int_{0^-}^{+\infty} x(t)e^{-st} dt = \int_0^\tau e^{-st} dt = \frac{1 - e^{-s\tau}}{s}$$

即

$$G_\tau\left(t - \frac{\tau}{2}\right) \leftrightarrow \frac{1 - e^{-s\tau}}{s} \quad (5.2.26)$$

方法二: 利用时移特性求解。这里需要注意的是原信号 $G_\tau(t)$ 并非因果信号, 因此实际应该利用双边拉普拉斯变换的时移特性, 即 $x(t - t_0) \leftrightarrow e^{-st_0} X_B(s)$, $\alpha < \sigma < \beta$ 。通常情况下, 单边拉普拉斯变换的性质也适用于双边拉普拉斯变换, 所不同的主要是双边拉氏变换下的收敛域确定。根据 5.2.1 节中例 5.2.2 得到的 $G_\tau(t) \leftrightarrow e^{s\tau/2} \frac{1 - e^{-s\tau}}{s}$, 利用时移特性可得到式(5.2.26)结论, 且本题目讨论的是时限信号, 所以时移后的收敛域仍为全 s 平面。

同时, 在运用时移特性时应注意区分信号的以下几种时移情况: $x(t - t_0)$ 、 $x(t - t_0)u(t)$ 、 $x(t)u(t - t_0)$ 、 $x(t - t_0)u(t - t_0)$ 。显然, 当 $x(t)$ 为因果信号时, 若 $t_0 > 0$, 则 $x(t - t_0)u(t - t_0) = x(t - t_0)u(t) = x(t - t_0)$ 。但当 $x(t)$ 为非因果信号时, 三者不一定相等, 相应地, 双边拉普拉斯变换就会有差别。图 5.1 所示为几种时移信号的波形。对于 $x(t)u(t - t_0)$ 这种情况, $x(t)$ 未发生时移, 只是被截取。单边拉普拉斯变换的时移特性针对的是 $x(t - t_0)u(t - t_0)$ 这种情况。

运用时移特性还可以很方便地求周期信号的拉普拉斯变换。

【例 5.2.7】 求如图 5.2 所示周期矩形脉冲信号的拉氏变换。

解: 该周期矩形脉冲信号可写作

$$x_T(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} x(t - nT)u(t - nT)$$

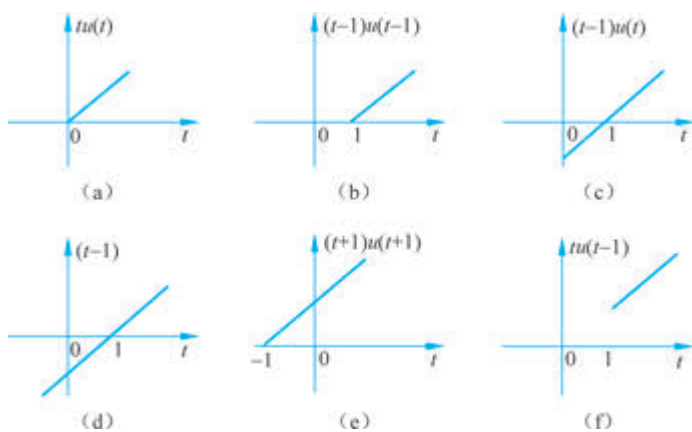


图 5.1 几种时移信号的波形



图 5.2 周期矩形脉冲信号时域波形

已知单个矩形脉冲的拉氏变换。

$$G_{\tau}\left(t - \frac{\tau}{2}\right) = u(t) - u(t - \tau) \leftrightarrow X(s) = \frac{1 - e^{-s\tau}}{s}$$

利用时移特性,可得

$$x_T(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} x(t - nT)u(t - nT) \leftrightarrow X(s)[1 + e^{-sT} + e^{-2sT} + \cdots + e^{-nsT} + \cdots]$$

$$\leftrightarrow X(s) \frac{1}{1 - e^{-sT}} = \frac{1 - e^{-s\tau}}{s(1 - e^{-sT})}$$

2. s 域平移(复频移)特性

若 $x(t) \leftrightarrow X(s)$, $\text{Re}[s] > \sigma_c$, 则

$$x(t)e^{s_0 t} \leftrightarrow X(s - s_0), \quad \text{Re}[s] > \sigma_c + \sigma_0 \quad (5.2.27)$$

式中, $s_0 = \sigma_0 + j\omega_0$ 为复常数。

证明:

$$\mathcal{L}[x(t)e^{s_0 t}] = \int_{0^-}^{+\infty} x(t)e^{-(s-s_0)t} dt = X(s - s_0)$$

此性质表明: 若信号时域函数乘以 $e^{s_0 t}$, 则拉氏变换在 s 域平移 s_0 。

【例 5.2.8】 求 $e^{-at} \sin(\omega_0 t)u(t)$ 的拉氏变换。

解: 利用式(5.2.24)表示的变换对

$$\sin(\omega_0 t)u(t) \leftrightarrow \frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2}, \quad \text{Re}[s] > 0$$

利用 s 域平移特性,有

$$e^{-at} \sin(\omega_0 t) u(t) \leftrightarrow \frac{\omega_0}{(s+a)^2 + \omega_0^2}, \quad \operatorname{Re}[s] > -a \quad (5.2.28)$$

同理可得

$$e^{-at} \cos(\omega_0 t) u(t) \leftrightarrow \frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega_0^2}, \quad \operatorname{Re}[s] > -a \quad (5.2.29)$$

3. 尺度变换特性

若 $x(t) \leftrightarrow X(s), \operatorname{Re}[s] > \sigma_c$, 则

$$x(at) \leftrightarrow \frac{1}{a} X\left(\frac{s}{a}\right), \quad \operatorname{Re}[s] > a\sigma_c \quad (5.2.30)$$

式中, $a > 0$ 为实常数。

证明:

$$\mathcal{L}[x(at)] = \int_{0^-}^{+\infty} x(at) e^{-st} dt$$

令 $\tau = at$, 则 $d\tau = a dt$, 于是有

$$\mathcal{L}[x(at)] = \mathcal{L}[x(\tau)] = \int_{0^-}^{+\infty} x(\tau) e^{-\frac{s}{a}\tau} \left(\frac{1}{a}\right) d\tau = \frac{1}{a} \int_{0^-}^{+\infty} x(\tau) e^{-\frac{s}{a}\tau} d\tau = \frac{1}{a} X\left(\frac{s}{a}\right)$$

【例 5.2.9】 已知 $x(t) \leftrightarrow X(s), \operatorname{Re}[s] > \sigma_c$, 求 $\mathcal{L}[x(at-b)u(at-b)]$, 其中 $a > 0, b > 0$ 。

解: 先利用尺度变换特性

$$\mathcal{L}[x(at)u(at)] = \frac{1}{a} X\left(\frac{s}{a}\right)$$

再由时移特性

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[x(at-b)u(at-b)] &= \mathcal{L}\left\{x\left[a\left(t-\frac{b}{a}\right)\right]u\left[a\left(t-\frac{b}{a}\right)\right]\right\} \\ &= \frac{1}{a} X\left(\frac{s}{a}\right) e^{-\frac{b}{a}s}, \quad \operatorname{Re}[s] > a\sigma_c \end{aligned}$$

也可以先由时移特性得到

$$\mathcal{L}[x(t-b)u(t-b)] = X(s) e^{-bs}$$

再借助尺度变换特性

$$\mathcal{L}[x(at-b)u(at-b)] = \frac{1}{a} X\left(\frac{s}{a}\right) e^{-\frac{b}{a}s}, \quad \operatorname{Re}[s] > a\sigma_c \quad (5.2.31)$$

由此, 我们得到时域既时移又变换时间尺度, 对应的复频域的变化情况。

4. 时域微分特性

若 $x(t) \leftrightarrow X(s), \operatorname{Re}[s] > \sigma_c$, 则

$$\frac{dx(t)}{dt} \leftrightarrow sX(s) - x(0^-), \quad \operatorname{Re}[s] > \sigma_c \quad (5.2.32)$$

证明:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left[\frac{dx(t)}{dt}\right] &= \int_{0^-}^{+\infty} \frac{dx(t)}{dt} e^{-st} dt = x(t)e^{-st} \Big|_{0^-}^{+\infty} + s \int_{0^-}^{+\infty} x(t)e^{-st} dt \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} x(t)e^{-st} - x(0^-) + sX(s)\end{aligned}$$

因为 $X(s)$ 存在, $x(t)$ 必为指数阶信号, 且在收敛域内有 $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t)e^{-st} = 0$, 所以

$$\frac{dx(t)}{dt} \leftrightarrow sX(s) - x(0^-)$$

式中, $x(0^-)$ 是函数 $x(t)$ 在 $t=0^-$ 时刻的取值。

同理可得

$$\frac{d^n x(t)}{dt^n} \leftrightarrow s^n X(s) - s^{n-1} x(0^-) - s^{n-2} x'(0^-) - \cdots - x^{(n-1)}(0^-) \quad (5.2.33)$$

式中, $x^{(n-1)}(0^-)$ 是指 $\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} x(t)$ 在 $t=0^-$ 时刻的取值。

显然, 当 $x(t)$ 为因果信号时, 微分特性有更简洁的形式

$$x^{(n)}(t) \leftrightarrow s^n X(s)$$

已知描述连续时间 LTI 系统的是常系数线性微分方程, 并可利用傅里叶变换的微分性质将其转换为代数方程; 显然, 也可以利用拉氏变换的微分性质将微分方程转换到 s 域进行分析。在 5.4 节中将会看到, 时域微分特性在连续时间系统的复频域分析中的重要性。

5. 时域积分特性

若 $x(t) \leftrightarrow X(s)$, $\text{Re}[s] > \sigma_c$, 则

$$\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \leftrightarrow \frac{X(s)}{s} + \frac{1}{s} x^{(-1)}(0^-), \quad \text{Re}[s] > \sigma_c \quad (5.2.34)$$

式中, $x^{(-1)}(0^-) = \int_{-\infty}^{0^-} x(t) dt$ 。

证明:

$$\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{0^-} x(\tau) d\tau + \int_{0^-}^t x(\tau) d\tau$$

式中, 右侧第一项为常数 $x^{(-1)}(0^-)$, 则其拉氏变换为

$$\mathcal{L}\left[\int_{-\infty}^{0^-} x(\tau) d\tau\right] = \frac{1}{s} x^{(-1)}(0^-)$$

第二项的拉氏变换, 可由分部积分法求解, 有

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left[\int_{0^-}^t x(\tau) d\tau\right] &= \int_{0^-}^{+\infty} \left[\int_{0^-}^t x(\tau) d\tau\right] e^{-st} dt \\ &= \left[-\frac{e^{-st}}{s} \int_{0^-}^t x(\tau) d\tau\right] \Big|_{0^-}^{+\infty} + \frac{1}{s} \int_{0^-}^{+\infty} x(t) e^{-st} dt \\ &= 0 + \frac{1}{s} X(s)\end{aligned}$$

如果函数积分区间从零开始,则有

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t x(\tau) d\tau\right] = \frac{1}{s}X(s) \quad (5.2.35)$$

【例 5.2.10】 求 $x(t) = t^n u(t)$ 的拉氏变换, n 是正整数。

解: 首先根据

$$tu(t) = \int_0^t u(\tau) d\tau, \quad u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s},$$

由积分定理,可得

$$tu(t) \leftrightarrow \frac{1}{s^2} \quad (5.2.36)$$

再由

$$t^2 u(t) = 2 \int_0^t \tau u(\tau) d\tau$$

可得

$$t^2 u(t) \leftrightarrow \frac{2}{s^3} \quad (5.2.37)$$

依次类推,可得

$$t^n u(t) \leftrightarrow \frac{n!}{s^{n+1}} \quad (5.2.38)$$

6. s 域微分特性

若 $x(t) \leftrightarrow X(s)$, $\text{Re}[s] > \sigma_c$, 则

$$-tx(t) \leftrightarrow \frac{dX(s)}{ds} \quad (5.2.39)$$

$$(-t)^n x(t) \leftrightarrow \frac{d^n X(s)}{ds^n} \quad (5.2.40)$$

证明:

由

$$X(s) = \int_{0^-}^{+\infty} x(t) e^{-st} dt$$

则

$$\begin{aligned} \frac{dX(s)}{ds} &= \frac{d}{ds} \int_{0^-}^{+\infty} x(t) e^{-st} dt \\ &= \int_{0^-}^{+\infty} x(t) \frac{d}{ds} e^{-st} dt = \int_{0^-}^{+\infty} [-tx(t)] e^{-st} dt = \mathcal{L}[-tx(t)] \end{aligned}$$

$$\text{同理可得} \quad \frac{d^n X(s)}{ds^n} = \int_0^{+\infty} (-t)^n x(t) e^{-st} dt = \mathcal{L}[(-t)^n x(t)]$$

【例 5.2.11】 求 $x(t) = te^{-at} u(t)$ 的拉氏变换。

解: 根据

$$e^{-at} u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s+a}$$

则由微分特性

$$-te^{-at}u(t) \leftrightarrow \frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s+a}\right) = -\frac{1}{(s+a)^2} \quad (5.2.41)$$

7. s 域积分特性

若 $x(t) \leftrightarrow X(s_1)$, $\operatorname{Re}[s_1] > \sigma_c$, 则

$$\frac{x(t)}{t} \leftrightarrow \int_s^{+\infty} X(s_1) ds_1, \quad \operatorname{Re}[s] > \sigma_c \quad (5.2.42)$$

证明:

$$\begin{aligned} \int_s^{+\infty} X(s_1) ds_1 &= \int_s^{+\infty} \left[\int_{0^-}^{+\infty} x(t) e^{-s_1 t} dt \right] ds_1 \\ &= \int_{0^-}^{+\infty} x(t) \left[\int_s^{+\infty} e^{-s_1 t} ds_1 \right] dt = \int_{0^-}^{+\infty} x(t) \frac{1}{t} e^{-st} dt = \mathcal{L} \left[\frac{x(t)}{t} \right] \end{aligned}$$

【例 5.2.12】 求 $x(t) = \frac{\sin t}{t} u(t)$ 的拉氏变换。

解: 根据

$$\sin tu(t) \leftrightarrow \frac{1}{s^2 + 1}$$

则

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \left[\frac{\sin t}{t} u(t) \right] &= \int_s^{+\infty} \frac{1}{s_1^2 + 1} ds_1 = \arctan s_1 \Big|_s^{+\infty} \\ &= \frac{\pi}{2} - \arctan s = \arctan(1/s) \end{aligned} \quad (5.2.43)$$

8. 初值定理

若 $x(t) \leftrightarrow X(s)$, $\operatorname{Re}[s] > \sigma_c$, 且 $x(t)$ 不含冲激及其各阶导数, 则

$$x(0^+) = \lim_{t \rightarrow 0^+} x(t) = \lim_{s \rightarrow +\infty} sX(s) \quad (5.2.44)$$

证明: 由时域微分特性

$$\begin{aligned} sX(s) - x(0^-) &= \int_{0^-}^{+\infty} \frac{dx(t)}{dt} e^{-st} dt = \int_{0^-}^{0^+} \frac{dx(t)}{dt} e^{-st} dt + \int_{0^+}^{+\infty} \frac{dx(t)}{dt} e^{-st} dt \\ &= x(0^+) - x(0^-) + \int_{0^+}^{+\infty} \frac{dx(t)}{dt} e^{-st} dt \end{aligned}$$

则

$$sX(s) = x(0^+) + \int_{0^+}^{+\infty} \frac{dx(t)}{dt} e^{-st} dt$$

令 $s \rightarrow +\infty$, 对上式两边取极限有

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} sX(s) = x(0^+)$$

9. 终值定理

若 $x(t) \leftrightarrow X(s)$, $\operatorname{Re}[s] > \sigma_c$, 则

$$x(+\infty) = \lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sX(s) \quad (5.2.45)$$

证明: 由时域微分特性

$$sX(s) - x(0^-) = \int_{0^-}^{+\infty} \frac{dx(t)}{dt} e^{-st} dt$$

令 $s \rightarrow 0$, 对上式两边取极限有

$$\lim_{s \rightarrow 0} [sX(s) - x(0^-)] = \lim_{s \rightarrow 0} \int_{0^-}^{+\infty} \frac{dx(t)}{dt} e^{-st} dt = x(+\infty) - x(0^-)$$

所以

$$x(+\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sX(s)$$

10. 卷积定理

若 $x_1(t) \leftrightarrow X_1(s)$, $\sigma > \sigma_1$, 且 $x_2(t) \leftrightarrow X_2(s)$, $\sigma > \sigma_2$, 则

$$x_1(t) * x_2(t) \leftrightarrow X_1(s) \cdot X_2(s) \quad (5.2.46)$$

收敛域至少为两者的重叠部分。

可见, 两个函数卷积的拉氏变换等于两个函数拉氏变换的乘积。

式(5.2.46)为时域卷积定理。同理可得 s 域卷积定理为

$$x_1(t) \cdot x_2(t) \leftrightarrow \frac{1}{2\pi j} [X_1(s) * X_2(s)] \quad (5.2.47)$$

证明:

$$\mathcal{L}[x_1(t) * x_2(t)] = \int_0^{+\infty} \left[\int_0^{+\infty} x_1(\tau) u(\tau) x_2(t - \tau) u(t - \tau) d\tau \right] e^{-st} dt$$

令 $h = t - \tau$, 有

$$\mathcal{L}[x_1(t) * x_2(t)] = \left[\int_0^{+\infty} x_1(\tau) e^{-s\tau} d\tau \right] \left[\int_0^{+\infty} x_2(h) e^{-sh} dh \right] = X_1(s) \cdot X_2(s)$$

【例 5.2.13】 已知 $x_1(t) = e^{-\lambda t} u(t)$, $x_2(t) = u(t)$, 求 $x_1(t) * x_2(t)$ 。

解: 已知

$$e^{-\lambda t} u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s + \lambda} = X_1(s), \quad u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s} = X_2(s)$$

根据卷积定理有

$$\begin{aligned} x_1(t) * x_2(t) &= \mathcal{L}^{-1}[X_1(s) \cdot X_2(s)] = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{\lambda} \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s + \lambda} \right) \right] \\ &= \frac{1}{\lambda} [1 - e^{-\lambda t}] u(t) \end{aligned} \quad (5.2.48)$$

最后, 表 5.3 归纳了单边拉氏变换的主要性质或定理的结论, 并与傅里叶变换进行了对照。

表 5.3 单边拉氏变换的性质

性质名称	拉氏变换	傅里叶变换(对照)
线性	$a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t) \leftrightarrow a_1 X_1(s) + a_2 X_2(s)$	$a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t) \leftrightarrow a_1 X_1(j\omega) + a_2 X_2(j\omega)$
时移特性	$x(t - t_0) u(t - t_0) \leftrightarrow X(s) e^{-st_0}$	$x(t - t_0) \leftrightarrow X(j\omega) e^{-j\omega t_0}$
尺度变换特性	$x(at) \leftrightarrow \frac{1}{a} X\left(\frac{s}{a}\right), \operatorname{Re}[s] > a\sigma_c$	$x(at) \leftrightarrow \frac{1}{ a } X\left(j \frac{\omega}{a}\right), a \neq 0$

续表

性质名称	拉氏变换	傅里叶变换(对照)
复频移特性	$x(t)e^{s_0 t} \leftrightarrow X(s-s_0), \operatorname{Re}[s] > \sigma_c + \sigma_0$	$x(t)e^{j\omega_0 t} \leftrightarrow X[j(\omega-\omega_0)]$
时域微分特性	$x'(t) \leftrightarrow sX(s) - x(0^-)$ $x^{(n)}(t) \leftrightarrow s^n X(s) - s^{n-1}x(0^-) - s^{n-2}x'(0^-) - \dots - x^{(n-1)}(0^-)$	$\frac{dx(t)}{dt} \leftrightarrow j\omega X(j\omega)$ $\frac{d^n x(t)}{dt^n} \leftrightarrow (j\omega)^n X(j\omega)$
时域积分特性	$\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \leftrightarrow \frac{X(s)}{s} + \frac{1}{s}x^{(-1)}(0^-),$ $x^{(-1)}(0^-) = \int_{-\infty}^0 x(\tau) d\tau$	$\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \leftrightarrow \pi X(0)\delta(\omega) + \frac{X(j\omega)}{j\omega}$
复频域微分	$-tx(t) \leftrightarrow \frac{d}{ds}X(s)$	$tx(t) \leftrightarrow j \frac{d}{d\omega}X(j\omega)$
复频域积分	$\frac{x(t)}{t} \leftrightarrow \int_s^{+\infty} X(s) ds$	$-\frac{x(t)}{jt} + \pi x(0)\delta(t) \leftrightarrow \int_{-\infty}^{\omega} X(j\lambda) d\lambda$
卷积定理	$x_1(t) * x_2(t) \leftrightarrow X_1(s) \cdot X_2(s)$ $x_1(t) \cdot x_2(t) \leftrightarrow \frac{1}{2\pi j} X_1(s) * X_2(s)$	$x_1(t) * x_2(t) \leftrightarrow X_1(j\omega) \cdot X_2(j\omega)$ $x_1(t) \cdot x_2(t) \leftrightarrow \frac{1}{2\pi} X_1(j\omega) * X_2(j\omega)$
初值定理	若 $x(t)$ 在 $t=0$ 处不包含冲激信号及其各阶导数, 则 $x(0^+) = \lim_{t \rightarrow 0^+} x(t) = \lim_{s \rightarrow +\infty} sX(s)$	
终值定理	若 $sX(s)$ 的收敛域包含虚轴, 则 $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sX(s)$	

5.3 拉普拉斯反变换求解

在进行系统复频域分析时,经常会遇到求拉普拉斯反变换、回归到时域的问题。对于单边拉普拉斯变换,象函数 $X(s)$ 的拉氏反变换由式(5.2.17)给出,即

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} X(s) e^{st} ds, \quad t > 0^-$$

该积分可以用复变函数积分中的留数定理求得。实际中,常可以借助于拉氏变换的性质或通过部分分式展开后对常用拉氏变换对,得到反变换,从而避免复杂的积分运算。

5.3.1 利用拉普拉斯变换性质求反变换

如果象函数 $X(s)$ 是一些比较简单的函数,可利用常用的拉氏变换对,并借助拉氏变换的若干性质,求出 $x(t)$ 。

【例 5.3.1】 已知 $X(s) = \frac{2}{s} + \frac{s+3}{(s+3)^2+4}$, 求其拉氏反变换 $x(t)$ 。

解: 由于

$$u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s}$$

$$\cos(2t)u(t) \leftrightarrow \frac{s}{s^2+2^2}$$

根据复频移特性, 得

$$e^{-3t} \cos(2t)u(t) \leftrightarrow \frac{s+3}{(s+3)^2+2^2}$$

所以

$$x(t) = 2u(t) + e^{-3t} \cos(2t)u(t)$$

【例 5.3.2】 求 $X(s) = \frac{1}{s^3}(1 - e^{-st_0})$ 的拉氏反变换, $t_0 > 0$ 。

解:

$$X(s) = \frac{1}{s^3}(1 - e^{-st_0}) = \frac{1}{s^3} - \frac{1}{s^3}e^{-st_0}$$

由于

$$\frac{1}{2}t^2 u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s^3}$$

利用时移特性, 得 $\frac{1}{2}(t-t_0)^2 u(t-t_0) \leftrightarrow \frac{1}{s^3}e^{-st_0}$

所以

$$x(t) = \frac{1}{2}t^2 u(t) - \frac{1}{2}(t-t_0)^2 u(t-t_0)$$

5.3.2 部分分式展开法求解反变换

若象函数 $X(s)$ 是 s 的有理分式形式, 即

$$X(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0} \quad (5.3.1)$$

设 $m < n$, 即 $X(s)$ 为有理真分式。若 $m \geq n$, 可利用长除法, 将其整理为有理多项式与有理真分式之和。对式(5.3.1)来说, 其分母多项式 $A(s)$ 称为 $X(s)$ 的特征多项式, $A(s)=0$ 称为特征方程, 它的根 $p_i (i=1, 2, \cdots, n)$ 称为特征根(或极点); 其分子多项式对应的方程 $B(s)=0$, 它的根 $z_j (j=1, 2, \cdots, m)$ 称为 $X(s)$ 的零点。

对 $X(s)$ 求反变换可以归结为求有理真分式的反变换, 可将其进行部分分式展开, 再结合常用的拉氏变换对, 求出 $x(t)$ 。按照极点的不同情况, 部分分式分解方法有以下几种情况。

1. $A(s)=0$ 均为实根, 无重根

假定 $A(s)=0$ 的根 $p_i (i=1, 2, \cdots, n)$ 均为实数根, 且无重根, 则 $X(s)$ 可以展开成如下部分分式

$$X(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{B(s)}{(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_n)} = \sum_{i=1}^n \frac{K_i}{s-p_i} \quad (5.3.2)$$

式中, K_i 为待定系数。显然利用常用变换对, 可求得反变换

$$\begin{aligned} x(t) &= \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{K_1}{s-p_1} \right] + \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{K_2}{s-p_2} \right] + \cdots + \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{K_n}{s-p_n} \right] \\ &= K_1 e^{p_1 t} + K_2 e^{p_2 t} + \cdots + K_n e^{p_n t}, \quad t \geq 0 \end{aligned} \quad (5.3.3)$$

而

$$K_i = (s-p_i)X(s) \Big|_{s=p_i} \quad (5.3.4)$$

2. $A(s)=0$ 均为实根, 有重根

假设 $A(s)=0$ 有一个 k 阶重根 p_1 , 其余单根个数为 $n-k$, 于是 $X(s)$ 可以写成

$$X(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{B(s)}{(s-p_1)^k A_1(s)} \quad (5.3.5)$$

式中, $A_1(s) = (s-p_2)(s-p_3)\cdots(s-p_{n-k+1})$ 。于是

$$X(s) = \frac{K_{11}}{(s-p_1)^k} + \frac{K_{12}}{(s-p_1)^{k-1}} + \cdots + \frac{K_{1k}}{(s-p_1)} + \frac{B_1(s)}{A_1(s)} \quad (5.3.6)$$

式中, $\frac{B_1(s)}{A_1(s)}$ 表示展开式中与 p_1 无关的其余部分, 可以借助式 (5.3.2) 得到; 而系数 $K_{1i} (i=1, 2, \cdots, k)$ 的计算如下

$$\begin{aligned} K_{11} &= (s-p_1)^k X(s) \Big|_{s=p_1} \\ K_{12} &= \frac{d}{ds} [(s-p_1)^k X(s)] \Big|_{s=p_1} \\ &\vdots \\ K_{1i} &= \frac{1}{(i-1)!} \frac{d^{i-1}}{ds^{i-1}} [(s-p_1)^k X(s)] \Big|_{s=p_1} \end{aligned} \quad (5.3.7)$$

由 $\mathcal{L}[t^n u(t)] = \frac{n!}{s^{n+1}}$, 利用复频移特性可得到原函数为

$$\begin{aligned} x(t) &= \mathcal{L}^{-1} \left[\sum_{i=1}^k \frac{K_{1i}}{(s-p_1)^{k+1-i}} \right] + \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{B_1(s)}{A_1(s)} \right] \\ &= e^{p_1 t} \sum_{i=1}^k \frac{K_{1i}}{(k-i)!} t^{k-i} + \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{B_1(s)}{A_1(s)} \right], \quad t \geq 0 \end{aligned} \quad (5.3.8)$$

3. $A(s)=0$ 含有复根

由于 $X(s)$ 为实系数有理式, 当出现复根时, 必然共轭成对, 仍可按照上述实根情况进行处理。例如

$$X(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{B(s)}{A_1(s)[(s+\alpha)^2 + \beta^2]} = \frac{B(s)/A_1(s)}{[(s+\alpha-j\beta)(s+\alpha+j\beta)]} \quad (5.3.9)$$

式中,共轭复根出现在 $-\alpha \pm j\beta$ 处,则式(5.3.9)展开后为

$$X(s) = \frac{K_1}{(s + \alpha - j\beta)} + \frac{K_2}{(s + \alpha + j\beta)} + \dots \quad (5.3.10)$$

其中

$$\begin{aligned} K_1 &= (s + \alpha - j\beta)X(s) \Big|_{s = -\alpha + j\beta} \\ K_2 &= (s + \alpha + j\beta)X(s) \Big|_{s = -\alpha - j\beta} \end{aligned} \quad (5.3.11)$$

那么式(5.3.10)中与共轭复数极点相关部分的反变换 $x_c(t)$ 可以写出

$$x_c(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{K_1}{(s + \alpha - j\beta)} + \frac{K_2}{(s + \alpha + j\beta)} \right] = e^{-\alpha t} (K_1 e^{j\beta t} + K_2 e^{-j\beta t}) \quad (5.3.12)$$

下面看几个例子。

【例 5.3.3】 求 $X(s) = \frac{2s^2 + 3s + 3}{(s+1)(s+3)^3}$ 的拉氏反变换。

解:

$$X(s) = \frac{A}{s+1} + \frac{B_1}{(s+3)^3} + \frac{B_2}{(s+3)^2} + \frac{B_3}{s+3}$$

其中

$$\begin{aligned} A &= (s+1)X(s) \Big|_{s=-1} = \frac{1}{4} \\ B_1 &= (s+3)^3 X(s) \Big|_{s=-3} = -6 \\ B_2 &= \frac{d}{ds} [(s+3)^3 X(s)] \Big|_{s=-3} = \frac{3}{2} \\ B_3 &= \frac{1}{2!} \frac{d^2}{ds^2} [(s+3)^3 X(s)] \Big|_{s=-3} = -\frac{1}{4} \end{aligned}$$

所以

$$X(s) = \frac{1/4}{s+1} + \frac{-6}{(s+3)^3} + \frac{3/2}{(s+3)^2} + \frac{-1/4}{s+3}$$

所以

$$x(t) = \frac{1}{4} e^{-t} u(t) + \left(-3t^2 + \frac{3}{2}t - \frac{1}{4} \right) e^{-3t} u(t)$$

【例 5.3.4】 求 $X(s) = \frac{3s+7}{s^2+2s+3}$ 的拉氏反变换。

解: 本问题既可以按照式(5.3.10)给出的步骤进行求解,也可以将分母作为一个整体,凑成已有的常用变换对以简化求解过程,即

$$X(s) = \frac{3s+7}{s^2+2s+3} = \frac{3(s+1)+4}{(s+1)^2+2} = \frac{3(s+1)}{(s+1)^2+2} + \frac{4}{(s+1)^2+2}$$

利用式(5.2.28)和式(5.2.29)得到

$$x(t) = [3\cos(\sqrt{2}t) + 2\sqrt{2}\sin(\sqrt{2}t)]e^{-t}u(t)$$

5.4 连续时间线性时不变系统的复频域分析

拉氏变换将信号的频域分析拓展到复频域,同样也将连续系统的分析方法拓展到了复频域,成为分析连续时间 LTI 系统的有力数学工具。与频域分析方法类似,系统复频域分析主要从两方面开展:一是系统微分方程求解,二是系统函数分析。

5.4.1 利用单边拉普拉斯变换求解 LTI 系统的全响应

连续时间 LTI 系统通常用常系数线性微分方程来描述,其一般形式如下

$$\begin{aligned} & a_n \frac{d^n}{dt^n} y(t) + a_{n-1} \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} y(t) + \cdots + a_1 \frac{d}{dt} y(t) + a_0 y(t) \\ & = b_m \frac{d^m}{dt^m} x(t) + b_{m-1} \frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}} x(t) + \cdots + b_1 \frac{d}{dt} x(t) + b_0 x(t) \end{aligned} \quad (5.4.1)$$

式中,各系数均为实数。设系统的初始状态为 $y(0^-), y'(0^-), \dots, y^{(n-1)}(0^-)$ 。

求系统响应的过程就是解此微分方程。第 2、第 3 章中分别讨论了微分方程的时域求解方法和频域求解方法,下面继续学习其复频域求解方法。

将式(5.4.1)等号两边取单边拉氏变换,并根据单边拉氏变换的时域微分特性,得

$$x^{(m)}(t) \leftrightarrow s^m X(s) - s^{m-1} x(0^-) - s^{m-2} x'(0^-) - \cdots - x^{(m-1)}(0^-) \quad (5.4.2)$$

$$y^{(n)}(t) \leftrightarrow s^n Y(s) - s^{n-1} y(0^-) - s^{n-2} y'(0^-) - \cdots - y^{(n-1)}(0^-) \quad (5.4.3)$$

这样,就将描述 $y(t)$ 和 $x(t)$ 之间关系的微分方程变换为了描述 $Y(s)$ 和 $X(s)$ 之间关系的代数方程,并且初始状态已自动包含在其中,可直接得出系统的全响应解。

特别是,若输入信号 $x(t)$ 为因果信号,则 $t=0^-$ 时刻 $x(t)$ 及其各阶导数为零,所以有

$$x^{(m)}(t) \leftrightarrow s^m X(s) \quad (5.4.4)$$

【例 5.4.1】 如图 5.3 所示的 RLC 电路系统, $C=1 \text{ F}$, $L=1 \text{ H}$, $R=\frac{5}{2} \Omega$, 电源电压为 1 V , 初始状态为 $i_L(0^-)=1 \text{ A}$, $u_C(0^-)=2 \text{ V}$, 求电路突然接通电源时的全响应电流 $i(t)$ 。

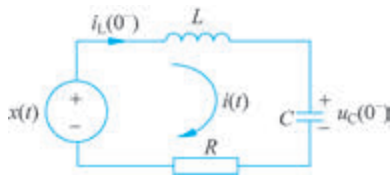


图 5.3 RLC 电路系统

解: 电气网络分析求解是复频域分析方法的一个重要应用领域。电气系统通常是指由电阻、电感、电容、运算放大器等电子元器件组成的电路,也称作电气网络。其中,电阻、电感、电容等本身不含有电源的器件称为无源器件,而像运算放大器这种本身包含电

源的器件称为有源器件。仅由无源器件组成的电气网络称为无源网络。若电气网络中包含有源器件或电源,就称为有源网络。表 5.4 所示为电气网络常用的物理关系式和物理定律。

表 5.4 电气网络常用的物理关系式和物理定律

名 称	时 域	s 域
电阻 R 伏安关系	$u(t) = Ri(t)$	$U_R(s) = RI_R(s)$
电感 L 伏安关系	$u(t) = L \frac{di_L(t)}{dt}$	$U_L(s) = LsI_L(s) - Li_L(0^-)$
电容 C 伏安关系	$u(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i_C(\tau) d\tau$	$U_C(s) = \frac{1}{Cs} I_C(s) + \frac{1}{s} u_C(0^-)$
基尔霍夫电流定律(KCL)	$\sum i(t) = 0$	$\sum I(s) = 0$
基尔霍夫电压定律(KVL)	$\sum u(t) = 0$	$\sum U(s) = 0$

根据 KVL 定律,得

$$L \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i(\tau) d\tau + Ri(t) = x(t)$$

利用拉氏变换的时域微分特性,上式两边取拉氏变换得到

$$LsI(s) - Li_L(0^-) + \frac{1}{Cs} I(s) + \frac{u_C(0^-)}{s} + RI(s) = X(s)$$

$$\text{将 } C=1 \text{ F}, L=1 \text{ H}, R=\frac{5}{2} \Omega, i_L(0^-)=1 \text{ A}, u_C(0^-)=2 \text{ V}, x(t)=u(t), X(s)=\frac{1}{s}$$

代入上式,并整理得

$$\begin{aligned}
 I(s) &= \frac{X(s) + Li_L(0^-) - \frac{u_C(0^-)}{s}}{Ls + R + \frac{1}{Cs}} \\
 &= \frac{s \left[1 - \frac{1}{s} \right]}{s^2 + \frac{5}{2}s + 1} = \frac{2}{s+2} + \frac{-1}{s + \frac{1}{2}}
 \end{aligned}$$

所以全响应电流为

$$i(t) = 2e^{-2t}u(t) - e^{-\frac{1}{2}t}u(t)$$

【例 5.4.2】 如图 5.4 所示的弹簧阻尼系统, $m=1 \text{ kg}$ 为物体的质量, $k=3 \text{ N/m}$ 是弹簧的弹性系数, $f=2 \text{ N} \cdot \text{s/m}$ 为阻尼系数, 外部作用力 $F(t)=10u(t)$ 作为输入量, 物体位移 $y(t)$ 是输出量, 初始条件 $y_0=y(0)$ 且满足 $mg=ky_0, y'(0)=0$ 。列出系统的运动方程, 求解全响应。

解: 弹簧阻尼系统属于牛顿经典力学系统, 直线运动时遵循牛顿第二定律

$$\sum F = m \frac{d^2 y}{dt^2}$$

分析物体受力包含作用力、弹簧弹力、阻尼力和重力。可以得到此二阶系统的微分方程为

$$m \frac{d^2 y(t)}{dt^2} = F(t) - F_k - F_B + mg$$

且 $F_k = k[y(t) + y_0]$, $F_B = f \frac{dy(t)}{dt}$, 代入数据整理后, 得到系统运动方程为

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 2 \frac{dy}{dt} + 3y(t) = 10u(t)$$

利用拉氏变换的时域微分特性, 上式两边取拉氏变换得到

$$[s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0)] + 2[sY(s) - y(0)] + 3Y(s) = \frac{10}{s}$$

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{\frac{10}{s} + (s+2)y(0) + y'(0)}{s^2 + 2s + 3} = \frac{10 + 2s(s+2)}{s(s^2 + 2s + 3)} \\ &= \frac{10}{3s} - \frac{4}{3} \left[\frac{(s+1)}{(s+1)^2 + 2} + \frac{1}{(s+1)^2 + 2} \right] \end{aligned}$$

于是, 得到全响应为

$$y(t) = \frac{10}{3}u(t) - \frac{4}{3}[\cos(\sqrt{2}t) + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin(\sqrt{2}t)]e^{-t}u(t)$$

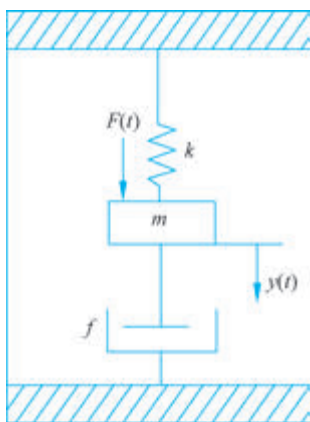


图 5.4 弹簧阻尼系统

5.4.2 连续时间系统的系统函数及系统特性

1. 系统函数

系统函数是描述线性时不变系统特性的重要方式, 也称为传递函数或网络函数。在复频域分析中, 系统函数是系统零状态响应的拉氏变换与激励的拉氏变换之比, 以 $H(s)$ 表示。

根据系统的常系数微分方程式(5.4.1), 可以很容易地得到系统函数。设系统的初始状态为零, 输入 $x(t)$ 的象函数为 $X(s)$, 零状态响应 $y_{zs}(t)$ 的象函数为 $Y_{zs}(s)$, 对式(5.4.1)取拉氏变换, 得到

$$Y_{zs}(s) \sum_{k=0}^n a_k s^k = X(s) \sum_{r=0}^m b_r s^r$$

令 $D(s) = \sum_{k=0}^n a_k s^k$, $N(s) = \sum_{r=0}^m b_r s^r$, 得到

$$Y_{zs}(s) = X(s) \frac{N(s)}{D(s)}$$

则有

$$H(s) = \frac{Y_{zs}(s)}{X(s)} = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0} \quad (5.4.5)$$

可见,系统函数只取决于系统本身,而与激励无关,与系统内部的初始状态也无关。

因此,零状态响应的象函数为

$$Y_{zs}(s) = X(s)H(s) \quad (5.4.6)$$

当输入为单位冲激信号时,即 $x(t) = \delta(t)$ 时, $X(s) = 1$, 此时的零状态响应即为 $h(t)$, 根据式(5.4.6), 其象函数为

$$\mathcal{L}[h(t)] = X(s)H(s) = H(s) \quad (5.4.7)$$

式(5.4.7)说明,单位冲激响应 $h(t)$ 与系统函数 $H(s)$ 是一对拉氏变换对。

对式(5.4.6)取拉氏反变换,并利用卷积定理,得到

$$y_{zs}(t) = \mathcal{L}^{-1}[X(s)H(s)] = \mathcal{L}^{-1}[X(s)] * \mathcal{L}^{-1}[H(s)] = x(t) * h(t) \quad (5.4.8)$$

这与时域分析中得到的结论是完全一致的。可见,拉氏变换把时域中的卷积运算转变为了 s 域中的乘积运算。另外,这也提供了在复频域求解系统零状态响应的思路。

2. 系统的极零点分析

1) 系统的极点、零点和零极点图

由上可知,系统函数 $H(s)$ 是单位冲激响应 $h(t)$ 的象函数,它的零、极点的定义与一般象函数 $X(s)$ 零、极点定义相同。当 $H(s)$ 为有理函数时,即可将式(5.4.5)因式分解后得到

$$H(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = K \frac{\prod_{k=1}^M (s - z_k)}{\prod_{i=1}^N (s - p_i)} \quad (5.4.9)$$

式中: K 为常数; 分子多项式 $N(s) = 0$ 的根为 $z_k (k=1, 2, \cdots, M)$, 称为**零点**; 分母多项式 $D(s) = 0$ 的根为 $p_i (i=1, 2, \cdots, N)$, 称为**极点**。并且,若 $\lim_{s \rightarrow p_1} H(s) = +\infty$ 时, $[(s - p_1)$

$H(s)]_{s \rightarrow p_1}$ 为有限值,则称 $s = p_1$ 处有一阶极点。若 $[(s - p_1)^\alpha H(s)]_{s \rightarrow p_1}$ 直到 $\alpha = n$ 时才等于有限值,则称 $H(s)$ 在 $s = p_1$ 处有 n 阶极点。

在 s 平面上标出 $H(s)$ 的极、零点位置,极点用“ $\times$ ”表示,零点用“ $\circ$ ”表示,若为 n 阶零点或极点,可在旁注以“(n)”,就得到系统函数的零极点图。可见,由零极点图就可以基本得知系统函数信息。零极点图可以表示一个系统,常用来分析系统特性,包括系统时域特性、频域特性和响应分解特性等。

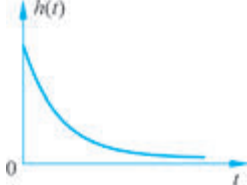
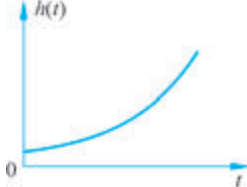
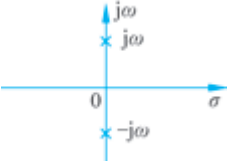
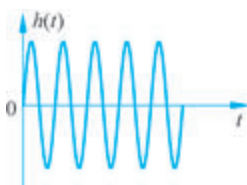
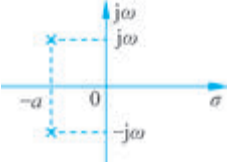
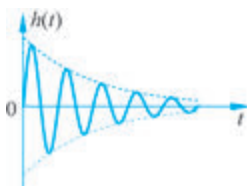
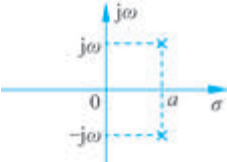
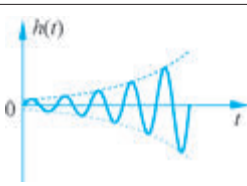
2) 系统时域特性 $h(t)$ 与极点分布的关系

如果对 $H(s)$ 进行部分分式展开,则其每个极点决定着一项时域函数形式。例如,具有一阶极点 $p_i (i=1, 2, \cdots, N)$ 的系统函数,其冲激响应形式为

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}[H(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\sum_{i=1}^N \frac{K_i}{s - p_i}\right] = \sum_{i=1}^N K_i e^{p_i t} \quad (5.4.10)$$

这里的极点 $p_i (i=1,2,\dots,n)$ 可以是实数或复数,在一般情况下,以成对的共轭复数形式出现。各项相应的幅值由系数 K_i 决定,而 K_i 则与零点分布情况有关。显然,根据这些极点与零点的分布情况,就可以写出系统函数 $H(s)$,进而得到单位冲激响应 $h(t)$,获知系统时域特性。表 5.5 所示为几种典型的 s 平面极点分布情况与单位冲激响应之间的关系。

表 5.5 几种典型的 s 平面极点分布情况与单位冲激响应之间的关系

$H(s)$	s 平面上的零、极点	时域波形	$h(t)(t \geq 0)$
$\frac{1}{s}$			$u(t)$
$\frac{1}{s+a}$			$e^{-at}u(t)$
$\frac{1}{s-a}$			$e^{at}u(t)$
$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$			$\sin(\omega t)u(t)$
$\frac{\omega}{(s+a)^2 + \omega^2}$			$e^{-at} \sin(\omega t)u(t)$
$\frac{\omega}{(s-a)^2 + \omega^2}$			$e^{at} \sin(\omega t)u(t)$

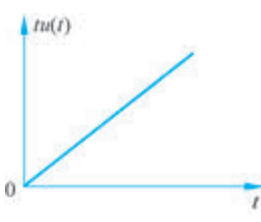
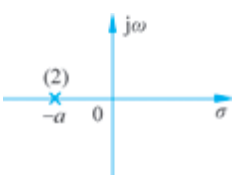
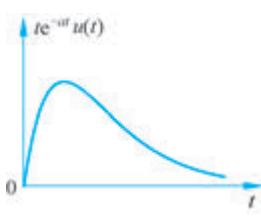
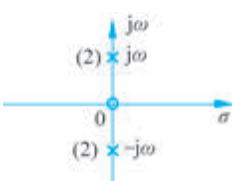
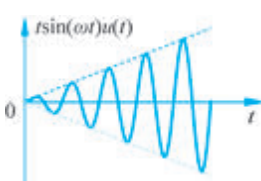
综合以上分析可以得出结论如下：

对于因果系统, $H(s)$ 在左半开平面的极点所对应的特征模式衰减(或振荡衰减), 当 $t \rightarrow \infty$ 时, 这部分响应趋于零; 在虚轴上的一阶极点对应的特征模式不随时间变化(或等幅振荡); 在右半开平面的极点对应的特征模式增长(或振荡增长)。

对于实系统来说, 系统函数 $H(s)$ 一般是关于 s 的有理多项式。如果只含有一阶极点, 根据式(5.4.10), 可以将其分解成表 5.5 中各式的线性组合。

若 $H(s)$ 具有多重极点, 则部分分式展开式的各项所对应的时域函数形式可能具有 $t, t^2, t^3, \dots$ 与指数函数相乘的形式, t 的幂次由极点阶次决定。几种典型情况如表 5.6 所示。

表 5.6 几种典型情况

$H(s)$	s 平面上的零、极点	典型时域模式波形	$h(t)(t \geq 0)$
$\frac{1}{s^2}$			$(C_1 + C_2 t)u(t), C$ 为常数
$\frac{1}{(s+a)^2}$			$(C_1 + C_2 t)e^{-at}u(t), C$ 为常数
$\frac{2\omega s}{(s^2 + \omega^2)^2}$			$(C_1 + C_2 t)\sin(\omega t)u(t)$ $(C_3 + C_4 t)\cos(\omega t)u(t), C$ 为常数

注意, 这里的 $H(s)$ 是单边拉氏变换, 相应的单位冲激响应 $h(t)$ 为因果信号形式, 即仅针对因果系统给出的分析。

以上只分析了 $H(s)$ 极点分布与时域函数的对应关系。至于零点分布的情况则只影响到时域函数的幅度和相位, s 平面零点变动对于 t 平面波形的时域波形的形式一般不会有影响。可以通过下面一个例题加以说明。

【例 5.4.3】 画出下面两个系统函数的零极点分布图, 并考察零初始条件下的单位阶跃响应。

$$(1) H_1(s) = \frac{2s+1}{(s+1)(s+2)}$$

$$(2) H_2(s) = \frac{2s+3}{(s+1)(s+2)}$$

解: 分析可知 $H_1(s)$ 和 $H_2(s)$ 的极点都是 $-1, -2$, $H_1(s)$ 的零点是一 0.5 , $H_2(s)$ 的零点是一 1.5 , 零极点分布如图 5.5 所示。在零初始条件下, 求解它们的单位阶跃响应, 有

$$y_1(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s} \cdot \frac{2s+1}{(s+1)(s+2)} \right] = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1/2}{s} + \frac{1}{s+1} - \frac{3/2}{s+2} \right] = \left[\frac{1}{2} + e^{-t} - \frac{3}{2}e^{-2t} \right] u(t)$$

$$y_2(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s} \cdot \frac{2s+3}{(s+1)(s+2)} \right] = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{3/2}{s} - \frac{1}{s+1} - \frac{1/2}{s+2} \right] = \left[\frac{3}{2} - e^{-t} - \frac{1}{2}e^{-2t} \right] u(t)$$

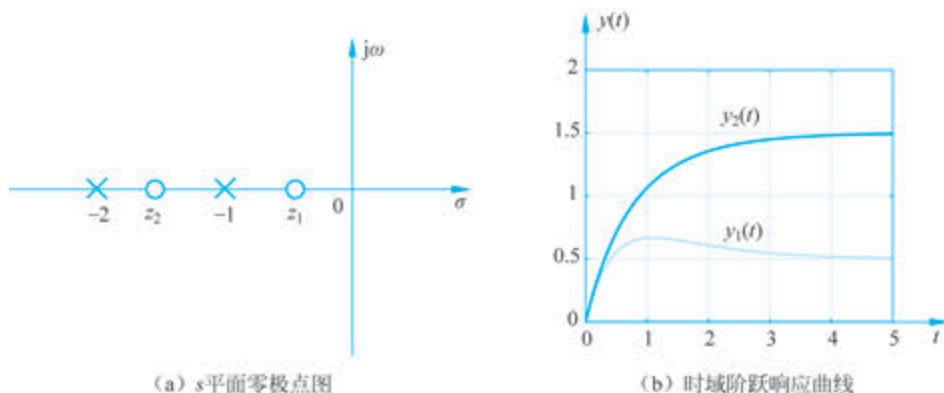


图 5.5 零极点分布对输出响应的影响

由式可知, e^{-t} 和 e^{-2t} 在两个系统的单位阶跃响应中所占的比重有所不同。因为在极点相同的情况下, $H_1(s)$ 的零点更接近原点或虚轴, 增益就越小, 两个衰减模式所占的比重大, 零点的作用明显。 $H_2(s)$ 的零点距原点较远, 增益较大, 则两个模式所占的比重小。可以看出, 尽管两个系统的极点相同, 但零点位置不同, 因此单位阶跃响应的曲线形状会不同。同理, 还可以得到“极点越接近原点或虚轴, 增益效果越强”的结论。

3) 系统频率响应 $H(j\omega)$ 与零极点分布的关系

当系统函数 $H(s)$ 的收敛域包含虚轴时, 在虚轴处 $\sigma=0, s=j\omega$, 因此 $H(j\omega) = H(s) \Big|_{s=j\omega}$, 由式(5.4.9)可得

$$H(j\omega) = H(s) \Big|_{s=j\omega} = K \frac{\prod_{k=1}^M (j\omega - z_k)}{\prod_{i=1}^N (j\omega - p_i)} \quad (5.4.10)$$

此式表明, 系统的频率特性完全取决于零点 z_k 、极点 p_i 在 s 平面上的位置。其中, 任意一个分子因子 $(j\omega - z_k)$ 表示由零点 z_k 引向虚轴上某 $j\omega$ 点的向量, 称为零点向量, 令 $j\omega - z_k = B_k e^{j\psi_k}$, 则 B_k 和 ψ_k 分别是零点向量的长度 $|j\omega - z_k|$ 和幅角 $\angle(j\omega - z_k)$; 任意一个分母因子 $(j\omega - p_i)$ 表示由极点 p_i 引向虚轴上某 $j\omega$ 点的向量, 称为极点向量, 令

$j\omega - p_i = A_i e^{j\theta_i}$, 则 A_i 和 θ_i 分别是极点向量的长度 $|j\omega - p_i|$ 和幅角 $\angle(j\omega - p_i)$, 如图 5.6 所示。

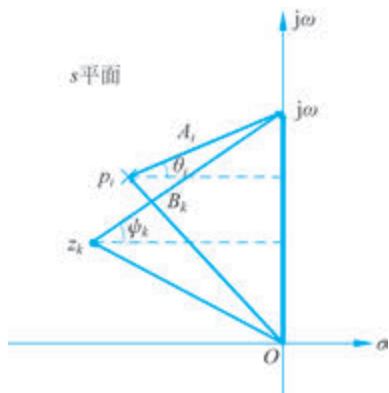


图 5.6 系统函数的极点向量和零点向量

从所有零点向 $j\omega$ 点作零点向量, 从所有极点向 $j\omega$ 点作极点向量。于是, $H(j\omega)$ 可以写为

$$H(j\omega) = K \frac{\prod_{k=1}^M B_k e^{j\psi_k}}{\prod_{i=1}^N A_i e^{j\theta_i}} = K \frac{B_1 B_2 \cdots B_M e^{j(\psi_1 + \psi_2 + \cdots + \psi_M)}}{A_1 A_2 \cdots A_N e^{j(\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_N)}} = |H(j\omega)| e^{j\angle H(j\omega)} \quad (5.4.11)$$

进一步可得到系统的幅频特性和相频特性分别为

$$|H(j\omega)| = K \frac{B_1 B_2 \cdots B_M}{A_1 A_2 \cdots A_N} \quad (5.4.12)$$

$$\angle H(j\omega) = (\psi_1 + \psi_2 + \cdots + \psi_M) - (\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_N) \quad (5.4.13)$$

也即

$$|H(j\omega)| = |K| \frac{\prod_{k=1}^M |j\omega - z_k|}{\prod_{i=1}^N |j\omega - p_i|} \quad (5.4.14)$$

$$\angle H(j\omega) = \sum_{k=1}^M \angle(j\omega - z_k) - \sum_{i=1}^N \angle(j\omega - p_i) \quad (5.4.15)$$

由上可知, 所有零点向量的长度之积乘以 $|K|$, 再除以所有极点向量的长度之积等于 $|H(j\omega)|$; 所有零点向量的幅角之和减去所有极点向量的幅角之和等于 $\angle H(j\omega)$ 。当然, 如果 $K < 0$, 则 $\angle H(j\omega)$ 有一个附加相移 π 。

根据系统函数的零极点分布就可以得到系统的幅频特性和相频特性, 该方法称为 s 平面的几何分析, 可用于直观且方便地表征、研究和设计系统。

此外,系统函数 $H(s)$ 一般为有理函数,其零极点共轭成对出现,频率响应 $H(j\omega)$ 也具有共轭对称性(幅频响应偶对称、相频响应奇对称),在对其进行 s 平面几何分析时,通常只需考虑 $\omega \geq 0$ 的情况。

下面举例说明。

【例 5.4.4】 画出系统函数的零极点图和系统的频率响应 $H(j\omega)$ 。

$$(1) H(s) = \frac{1}{s+a-j\omega_0}, \operatorname{Re}[s] > -a, (a > 0, \omega_0 \geq 0)$$

$$(2) H(s) = s+a-j\omega_0, (\omega_0 \geq 0)$$

解: 系统函数(1)的零极点图如图 5.7(a)所示。

图 5.7(a)构造了极点向量 $(j\omega + a - j\omega_0)$,该向量从极点 $p_1 = -a + j\omega_0$ 引出,指向 $j\omega$ 点。 $j\omega$ 点频率响应的幅度 $|H(j\omega)|$ 和相位 $\angle H(j\omega)$ 分别为

$$|H(j\omega)| = \frac{1}{|j\omega + a - j\omega_0|} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + (\omega - \omega_0)^2}}$$

$$\angle H(j\omega) = -\angle(j\omega + a - j\omega_0)$$

当 ω 在 $(-\infty, +\infty)$ 之间变化时,极点向量的长度 d 在 $\omega = \omega_0$ 时会出现一个极小值,该极小值等于极点到 s 平面虚轴的距离 a 。由于 $|H(j\omega)|$ 等于极点向量长度 d 的倒数,即表示系统的幅频响应会在 $\omega = \omega_0$ 时出现一个极大值,该极大值等于 $1/a$,如图 5.7(b)所示。当 $\omega \rightarrow +\infty$ 时,极点向量的幅角 θ 将趋于 $\pi/2$; 当 $\omega \rightarrow -\infty$ 时,极点向量的幅角 θ 将趋于 $-\pi/2$ 。由于 $\angle H(j\omega)$ 等于极点向量幅角 θ 的负数,则 $\angle H(j\omega)$ 的变化趋势与 θ 相反,如图 5.7(c)所示。

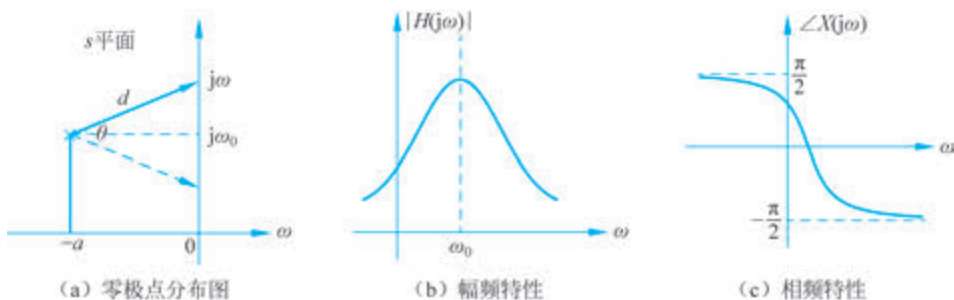


图 5.7 极点的位置与频率响应的关系

系统函数(2)的零极点图如图 5.8(a)所示。

图 5.8(a)构造了零点向量 $(j\omega + a - j\omega_0)$,该向量从零点 $z_1 = -a + j\omega_0$ 引出,指向 $j\omega$ 点。 $j\omega$ 点频率响应的幅度 $|H(j\omega)|$ 和相位 $\angle H(j\omega)$ 分别为

$$|H(j\omega)| = |j\omega + a - j\omega_0| = \sqrt{a^2 + (\omega - \omega_0)^2}$$

$$\angle H(j\omega) = \angle(j\omega + a - j\omega_0)$$

与上类似, $|H(j\omega)|$ 等于零点向量的长度 r ,即表示系统的幅频响应会在 $\omega = \omega_0$ 处出现一个极小值,该极小值等于 a ,如图 5.8(b)所示。而 $\angle H(j\omega)$ 等于零点向量的幅角 ϕ ,所以当 $\omega \rightarrow +\infty$ 时, $\angle H(j\omega)$ 趋于 $\pi/2$, 当 $\omega \rightarrow -\infty$ 时, $\angle H(j\omega)$ 趋于 $-\pi/2$, 如图 5.8(c)所示。

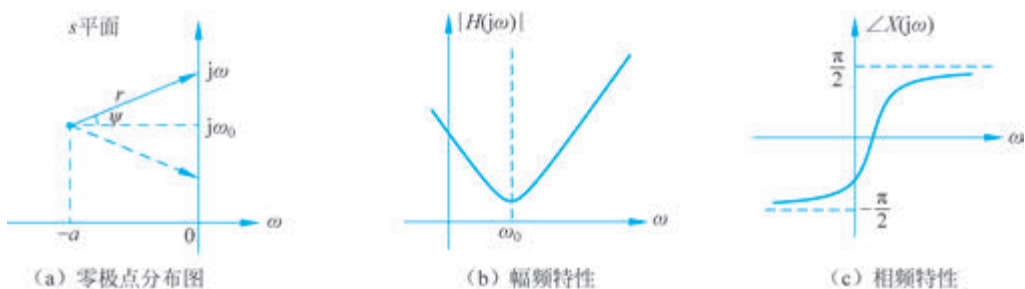


图 5.8 零点的位置与频率响应的关系

由图 5.7 可见,系统幅频响应 $|H(j\omega)|$ 的极值位置与极点 $p_1 = -a + j\omega_0$ 有关。首先, $|H(j\omega)|$ 会在极点的虚部 ω_0 处出现较强的频率选择性,即取最大值为 $1/a$ 。极点越靠近虚轴(a 越小), $|H(j\omega)|$ 的频率选择性也越强。换言之,如果希望 $|H(j\omega)|$ 在 ω_0 处出现较高的增益,就需要极点 $p_1 = -a + j\omega_0$ 尽可能靠近虚轴。由于因果稳定系统的极点都在 s 平面的左半平面,所以 $j\omega_0$ 附近放置的这个极点实部要小于零,例如极点 $p_1 = -a + j\omega_0$ ($a > 0$)。

图 5.8 与图 5.7 刚好相反,系统幅频响应 $|H(j\omega)|$ 在零点的虚部 ω_0 处出现较强的频率阻隔性,即取最小值为 a 。零点 $z_1 = -a + j\omega_0$ 越靠近虚轴(a 越小), $|H(j\omega)|$ 的频率阻隔性就越强。换言之,如果希望 $|H(j\omega)|$ 在 ω_0 处出现零增益,就需要在 $j\omega_0$ 处放置一个零点;如果希望 $|H(j\omega)|$ 在 ω_0 处出现较低增益,则可在 $j\omega_0$ 附近放置一个零点,例如零点 $z_1 = -a + j\omega_0$ ($a > 0$) 或零点 $z_2 = a + j\omega_0$ ($a > 0$)。

【例 5.4.5】 画出系统函数的零极点图和系统的频率响应 $H(j\omega)$ 。

$$(1) H(s) = \frac{s-a}{s+a}, a > 0, \operatorname{Re}[s] > -a$$

$$(2) H(s) = \frac{s}{s+a}, a > 0, \operatorname{Re}[s] > -a$$

解: 系统函数(1)的零极点图如图 5.9(a)所示。

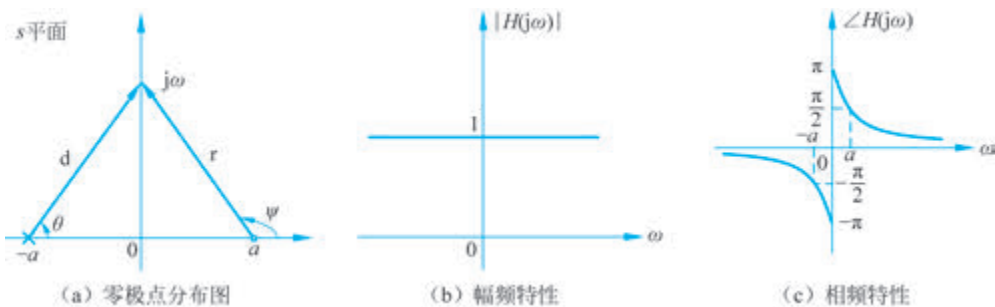


图 5.9 零极点与频率响应

图中,沿 $j\omega$ 轴的任一点,其极点向量 $(j\omega + a)$ 与零点向量 $(j\omega - a)$ 的长度都相等,因此,该系统的幅频特性是一个与频率无关的常数,这样的系统称为全通系统,因为它等增益(或等衰减)地通过所有频率分量,如图 5.9(b)所示。而且,系统相频特性是零点向量

$(j\omega - a)$ 的幅角 ψ 减去极点向量 $(j\omega + a)$ 的幅角 θ , 即 $\angle H(j\omega) = \psi - \theta$, 当 $\omega \rightarrow \pm\infty$ 时, $\psi \rightarrow \theta$, 所以 $\angle H(j\omega) \rightarrow 0$; 而当 $\omega \rightarrow 0^+$ 时, $\psi \rightarrow \pi, \theta \rightarrow 0, \angle H(j\omega) \rightarrow \pi$; 当 $\omega \rightarrow 0^-$ 时, $\psi \rightarrow -\pi, \theta \rightarrow 0, \angle H(j\omega) \rightarrow -\pi$, 如图 5.9(c) 所示。

系统函数(2)的零极点图如图 5.10(a) 所示。

图中, 零点向量 $(j\omega)$ 和极点向量 $(j\omega + a)$ 的长度分别为 r 和 d , 系统的幅频响应为 $|H(j\omega)| = r/d$, 相频响应为 $\angle H(j\omega) = \psi - \theta$ 。当 $\omega = 0$ 时, $d = a, r = 0, |H(j0)| = 0$; 当 $\omega \rightarrow \pm\infty$ 时, $d \rightarrow r, |H(\pm j\infty)| \rightarrow 1$; 而 $\omega \in (0, +\infty)$ 或 $\omega \in (-\infty, 0)$ 时, r 小于 d , $|H(j\omega)| < 1$, 可知系统幅频响应具有高通特性, 如图 5.10(b) 所示。另外, 当 $\omega > 0$ 时, 零点向量的幅角 $\psi = \pi/2$, 极点向量的幅角 θ 变化范围为 $(0, \pi/2)$, 所以 $\angle H(j\omega) \in (\pi/2, 0)$; 当 $\omega < 0$ 时, 零点向量的幅角 $\psi = -\pi/2$, 极点向量的幅角 θ 变化范围为 $(0, -\pi/2)$, 所以 $\angle H(j\omega) \in (-\pi/2, 0)$, 如图 5.10(c) 所示。

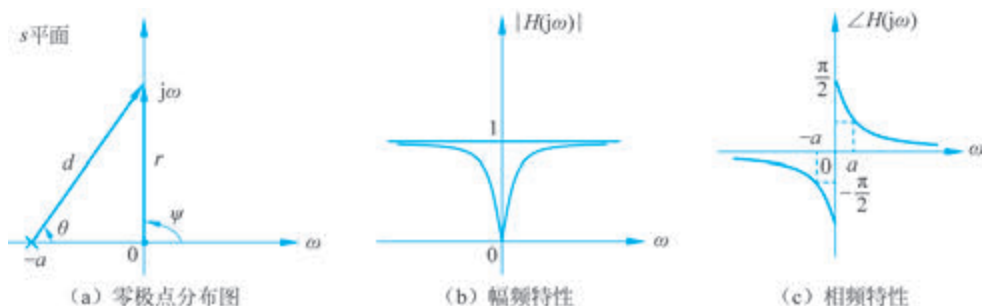


图 5.10 零极点与频率响应

从图 5.9 和图 5.10 可见, 当零点与极点虚部位置相同或相近时, 例如系统函数极点为 $p_1 = -a_1 + j\omega_0$ ($a_1 > 0$), 零点为 $z_1 = a_2 + j\omega_0$, 则零点在 $\omega = \omega_0$ 处对幅频响应的极大值贡献将抵消极点在 $\omega = \omega_0$ 处对幅频响应的极大值贡献, 特别是若零点的实部等于零 (零点在 $j\omega$ 轴上), 这种抵消作用最彻底: 将在 $\omega = \omega_0$ 处直接引入幅频响应的零点。

【例 5.4.6】 试通过下列系统函数的零极点图判断系统的滤波特性。

$$(1) H(s) = \frac{\omega_c}{s + \omega_c}, \omega_c > 0$$

$$(2) H(s) = \frac{1}{(s + \omega_c + j\omega_0)(s + \omega_c - j\omega_0)}, \omega_0 > \omega_c > 0$$

$$(3) H(s) = \frac{(s - j\omega_c)(s + j\omega_c)}{[s + \omega_c \cos(\theta) + j\omega_c \sin(\theta)][s + \omega_c \cos(\theta) - j\omega_c \sin(\theta)]}, (\omega_c > 0)$$

解: 系统函数(1)的极点为 $p_1 = -\omega_c$, 系统函数(2)的极点为 $p_{1,2} = -\omega_c \pm j\omega_0$, 系统函数(3)的极点为 $p_{1,2} = -\omega_c \cos(\theta) \pm j\omega_c \sin(\theta)$, 零点为 $z_{1,2} = \pm j\omega_c$, 系统函数(2)和(3)的极点共轭成对出现, 三个函数的零极点分布如图 5.11 所示。

三个函数的幅频特性如图 5.12 所示。当 ω 沿虚轴取值 $(-\infty, +\infty)$ 时, 图 5.11(a) 中的极点向量长度在 $\omega = 0$ 处最短, 当 $\omega > 0$ 时随 ω 的递增而增加, 因此系统的幅频特性在 $\omega > 0$ 时随 ω 的递增而递减, 在 $\omega = 0$ 处取到极大值, 该系统具有低通滤波器特性, 如

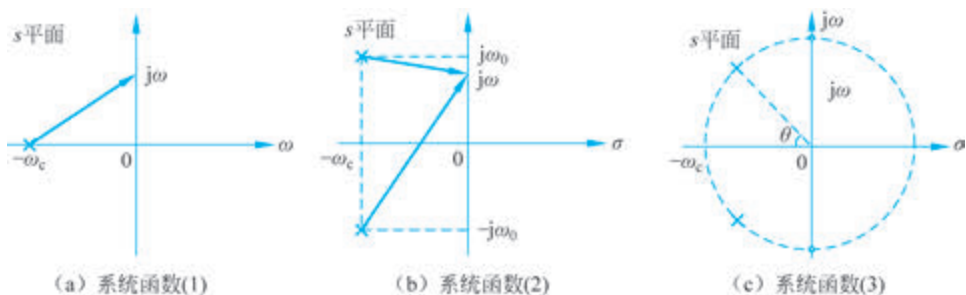


图 5.11 系统零极点图

图 5.12(a)所示。图 5.11(b)中的两个极点向量长度分别在 $\omega = \pm\omega_0$ 处最短,即系统的幅频特性在 $\omega = \pm\omega_0$ 处取到极大值,可见该系统具有带通滤波器特性,如图 5.12(b)所示。当 ω 沿虚轴取值 $(-\infty, \infty)$ 时,图 5.11(c)中的两个极点向量长度分别在 $\omega = \pm\omega_c \sin(\theta)$ 处最短,在其他 ω 处取值增大但均大于零;其两个零点向量长度在 $\omega = \pm\omega_c$ 处取最小值为零,在其他 ω 处取值增大且均大于零,因此该系统在 $\omega = \pm\omega_c$ 处取最小值为零,该系统具有带阻滤波器特性,如图 5.12(c)所示。

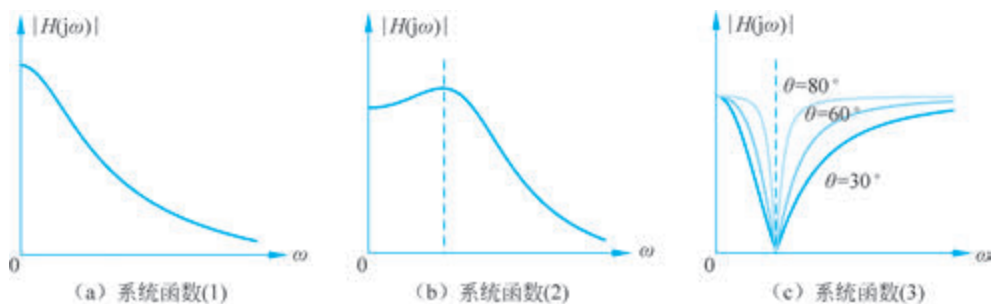


图 5.12 系统幅频特性

工程中,常用 s 平面的几何分析方法来设计模拟滤波器,其理论和设计方法已相当成熟。常用的低通模拟滤波器包括贝塞尔滤波器、巴特沃斯(Butterworth)滤波器、切比雪夫(Chebyshev)滤波器、椭圆滤波器等。各类模拟滤波器均可通过这些低通模拟原型滤波器变换获得。另外,数字滤波器的设计通常也采用先设计一个符合技术指标要求的归一化模拟原型滤波器,然后再按照一定准则将其从 s 平面映射到 z 平面,从而完成数字滤波器的设计。为了使大家对这些经典低通滤波器有所了解,接下来专门对其中的巴特沃斯滤波器和切比雪夫滤波器进行介绍,并从系统函数零极点的角度来分析其滤波特性。

4) 巴特沃斯滤波器与切比雪夫滤波器

【例 5.4.6】中的(1)系统函数 $H(s) = \frac{\omega_c}{s + \omega_c}$ 实际具有低通滤波器特性,但与理想低通滤波器相比,其幅频特性显然差别较大。如果期望从幅频特性出发设计一个物理可实现的非理想低通滤波器,该滤波器的截止频率为 ω_c ,则当 $\omega > \omega_c$ 时,系统频率响应的期望增益应能迅速衰减至 0;而在 $(0, \omega_c)$ 通带内,系统频率响应需要逼近理想低通滤波器

的常数增益,如图 5.13 所示。根据前面 s 平面的几何分析方法,要实现该非理想低通滤波器,就需要在 s 平面 $(0, j\omega_c)$ 范围内布置一个“极点墙”,如图 5.14 所示。当然,实际中组成“极点墙”的极点个数不可能无限。通过选择合适的极点数目,并且按照一定规律来选择极点的分布,可以设计实现非理想低通滤波器,如巴特沃斯低通滤波器。

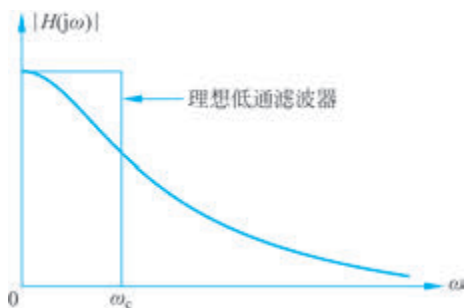


图 5.13 具有单个极点的低通滤波器幅频响应

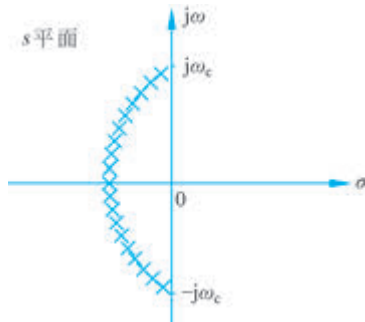


图 5.14 低通滤波器的“极点墙”

通常巴特沃斯滤波器的特性由频率响应的幅度平方函数给出。对 N 阶巴特沃斯低通滤波器,有

$$|B(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \epsilon^2 (\omega/\omega_c)^{2N}} \quad (5.4.16)$$

其中,当 $\epsilon=1$ 时,称为归一化巴特沃斯滤波器; ω_c 为通带截止频率,或称 3 dB 带宽,因为当 $\omega=\omega_c$ 时,有

$$|B(j\omega_c)| = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad 20\log_{10} \left| \frac{B(j0)}{B(j\omega_c)} \right| = 3 \text{ dB} \quad (5.4.17)$$

注意到 $B(s) \Big|_{s=j\omega} = B(j\omega)$, 将 $\epsilon=1$ 时的 $|B(j\omega)|^2$ 函数拓展到整个 s 平面,有

$$B(s)B(-s) = \frac{1}{1 + (s/j\omega_c)^{2N}} \quad (5.4.18)$$

由上可知,巴特沃斯滤波器全部零点都在 $s=\infty$,即不存在有限零点,故又称为“全极点逼近型”。令上式分母为零,得到巴特沃斯滤波器的极点如下

$$(p_i/j\omega_c)^{2N} = -1 = e^{j\pi(2i-1)}, \quad i \in Z \quad (5.4.19)$$

$$p_i = \omega_c e^{\frac{j\pi}{2N}(2i-1+N)}, \quad i = 1, 2, 3, \dots, 2N \quad (5.4.20)$$

根据幅频特性和相频特性公式可知,巴特沃斯滤波器的所有极点向量的长度均为 ω_c ,即所有极点均分布在 s 平面的以 ω_c 为半径的圆上,而所有极点向量的角度以 π/N 间隔遍历,如图 5.15 所示。这些极点关于虚轴对称分布,并且没有一个落在虚轴上;当 N 为奇数时,有一个极点在实轴上,当 N 为偶数时,没有极点落在实轴上。

从系统的因果性和稳定性考虑, s 左半平面的极点应该是巴特沃斯滤波器系统函数 $B(s)$ 的,而 s 右半平面的极点应该是 $B(-s)$ 的,即式(5.4.20)中对应 $B(s)$ 的极点为

$$p_i = \omega_c \left\{ \cos \left[\frac{\pi}{2N} (2i-1+N) \right] + j \sin \left[\frac{\pi}{2N} (2i-1+N) \right] \right\}, \quad i = 1, 2, 3, \dots, N \quad (5.4.21)$$

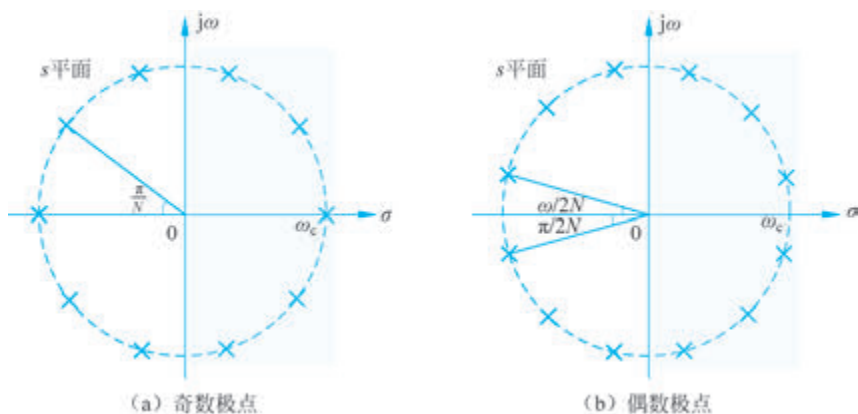


图 5.15 巴特沃斯滤波器的极点分布

即巴特沃斯滤波器系统函数 $B(s)$ 为

$$B(s) = \frac{1}{\prod_{i=1}^N (s - p_i)} \quad (5.4.22)$$

如果要归一化最大幅频响应,则巴特沃斯滤波器系统函数 $B(s)$ 为

$$B(s) = \frac{\omega_c^N}{\prod_{i=1}^N (s - p_i)} \quad (5.4.23)$$

在 MATLAB 中调用函数 $[z, p, k] = \text{buttap}(N)$, 可以设计一个 N 阶标准巴特沃斯滤波器 ($\omega_c = 1 \text{ rad/s}$), 其中 z 为零点矩阵, p 为极点矩阵, k 为增益。由于 N 阶标准巴特沃斯滤波器的系统函数为 $B_0(s) = \frac{1}{\prod_{i=1}^N (s - p_i)}$, 而对于 N 阶非标准巴特沃斯滤波器来说

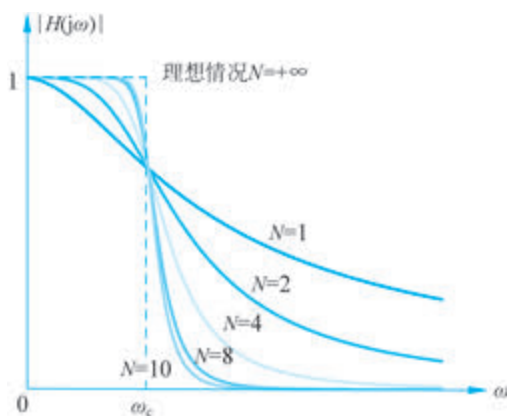
$$B(s) = B_0(s/\omega_c), \text{ 故 } B(s) = \frac{\omega_c^N}{\prod_{i=1}^N (s - p_i \omega_c)}。$$

当系统函数极点数目 N 不同时, 巴特沃斯滤波器的幅频特性是不同的, 如图 5.16 所示。

从图 5.16 可见, 巴特沃斯滤波器具有以下特性: ①在通带内有最平坦的幅频特性; ②阻带内幅频特性随频率升高单调下降; ③滤波器特性完全由极点数目 N 决定, N 越大, 过渡带越窄, 越接近理想特性。因此, 通常将 N 称为巴特沃斯滤波器的阶数。

由于巴特沃斯滤波器的频率特性在通带和阻带内均单调变化, 显然, 如果要求指标比较高, 将造成滤波器阶数比较高。阶数 N 越高, 巴特沃斯滤波器对理想特性逼近得越好, 过渡带越窄, 但付出的代价是系统越复杂。

与巴特沃斯滤波器类似, 切比雪夫低通滤波器的设计思想也是像图 5.14 所示那样, 在 s 平面 ($0, j\omega_c$) 内用有限极点布置一个“极点墙”, 以期频率响应逼近理想低通滤波器。

图 5.16 巴特沃斯滤波器的幅频特性与极点数目 N 的关系

不过, N 阶巴特沃斯滤波器的 N 个极点均匀分布在 s 平面以 ω_c 为半径的圆上, 间隔角度为 π/N ; 而 N 阶切比雪夫低通滤波器的 N 个极点则均匀分布在 s 平面的椭圆上。

切比雪夫滤波器分两类, 一种是通带等起伏、阻带单调, 称为切比雪夫-I 型; 另一种是通带单调、阻带等起伏, 称为切比雪夫-II 型。切比雪夫滤波器与巴特沃斯滤波器属于同一类滤波器, 都是由幅度平方函数确定系统函数。对 N 阶切比雪夫-I 型低通滤波器有

$$|C(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \epsilon^2 T_N^2(\omega/\omega_c)} \quad (5.4.24)$$

令 $\omega/\omega_c = x$, 则 $T_N(x)$ 的定义为

$$T_N(x) = \begin{cases} \cos[N \arccos(x)], & 0 \leq x \leq 1 \\ \cosh[N \operatorname{arccosh}(x)], & 1 < x \leq +\infty \end{cases}, \quad x = \frac{\omega}{\omega_c} \quad (5.4.25)$$

由此可知: 当 $N=0$ 时, $T_0(x)=1$; 当 $N=1$ 时, $T_1(x)=\cos(\arccos(x))=x$; 当 $N=2$ 时, $T_2(x)=2xT_1(x)-T_0(x)$; 以此类推, $T_{N+1}(x)=2xT_N(x)-T_{N-1}(x)$ 。其中, $N=0\sim 7$ 时的 $T_N(x)$ 如表 5.7 所示。

表 5.7 切比雪夫的 $T_N(x)$

N	$T_N(x)$
0	1
1	x
2	$2x^2 - 1$
3	$4x^3 - 3x$
4	$8x^4 - 8x^2 + 1$
5	$16x^5 - 20x^3 + 5x$
6	$32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1$
7	$64x^7 - 112x^5 + 56x^3 - 7x$

根据式(5.4.24)和式(5.4.25), 还可得到 N 阶切比雪夫-I 型低通滤波器如下几点特性。

(1) 由表 5.7 可知, $T_N^2(0) = \begin{cases} 0, & N \text{ 为奇数} \\ 1, & N \text{ 为偶数} \end{cases}$, 因此 $|C(j0)| = \begin{cases} 1, & N \text{ 为奇数} \\ \frac{1}{\sqrt{1+\epsilon^2}}, & N \text{ 为偶数} \end{cases}$ 。

(2) 当 $0 < x < 1$ 时, $T_N^2(x)$ 在 0 和 1 之间变化; 当 $x > 1$ 时, $T_N^2(x)$ 像双曲余弦一样单调增加。即: 当 $0 \leq \frac{\omega}{\omega_c} \leq 1$ 时, $|C(j\omega)|^2$ 在 1 和 $\frac{1}{(1+\epsilon^2)}$ 之间波动; 而当 $\frac{\omega}{\omega_c} > 1$ 时, $|C(j\omega)|^2$ 单调减小。

注意到 $C(s) \Big|_{s=j\omega} = C(j\omega)$, 将 $|C(j\omega)|^2$ 函数拓展到整个 s 平面, 有

$$C(s)C(-s) = \frac{1}{1 + \epsilon^2 T_N^2(s/j\omega_c)} \quad (5.4.26)$$

令其分母为零, 可以得到

$$\epsilon^2 T_N^2(p_k/j\omega_c) = -1 \quad (5.4.27)$$

令 $x = \frac{1}{N} \sinh^{-1} \left(\frac{1}{\epsilon} \right)$, 考虑到系统的因果性和稳定性, 切比雪夫-I 型滤波器的极点为

$$p_i = -\omega_c \sin \left[\frac{(2i-1)\pi}{2N} \right] \sinh(x) + j\omega_c \cos \left[\frac{(2i-1)\pi}{2N} \right] \cosh(x), \quad i = 1, 2, 3, \dots, N \quad (5.4.28)$$

令 $\omega_c \sinh(x) = a$, $\omega_c \cosh(x) = b$, 在图 5.17 中分别以 a 、 b 为半径作小圆和大圆, 按照 π/N 角度等间隔划分, 极点纵坐标由相应大圆上点的纵坐标表示, 极点横坐标由相应的小圆上点的横坐标表示, 则切比雪夫-I 型滤波器的所有极点均分布在 s 平面以 a 为短半轴、 b 为长半轴的椭圆上。这些极点没有一个落在虚轴上; 当 N 为奇数时, 有一个极点在实轴上; 当 N 为偶数时, 没有极点落在实轴上。

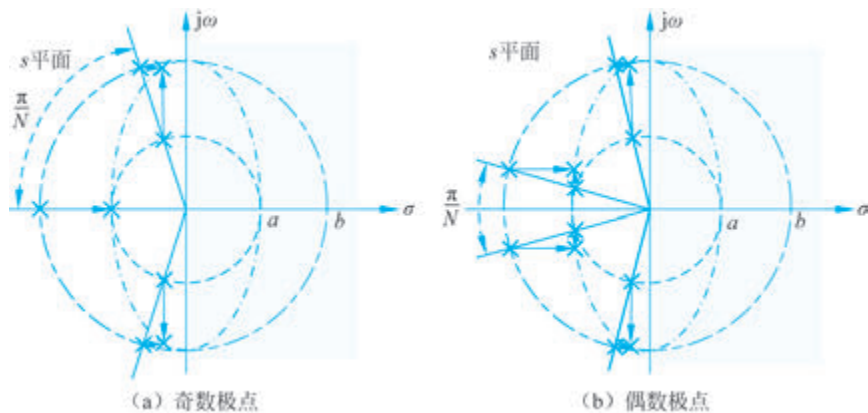


图 5.17 切比雪夫-I 型滤波器的极点分布

在 MATLAB 中调用函数 $[z, p, k] = \text{cheblap}(N, R_p)$, 可以设计一个 N 阶标准切比雪夫-I 型滤波器 ($\omega_c = 1 \text{ rad/s}$), 其中, cheblap 是 Chebyshev Type 1 Analog Prototype 的缩写, z 为零点矩阵, p 为极点矩阵, k 为增益, R_p 为通带最大波纹 (dB)。

当系统函数极点数目 N 不同时,切比雪夫-I 型滤波器的幅频特性是不同的,如图 5.18 所示。

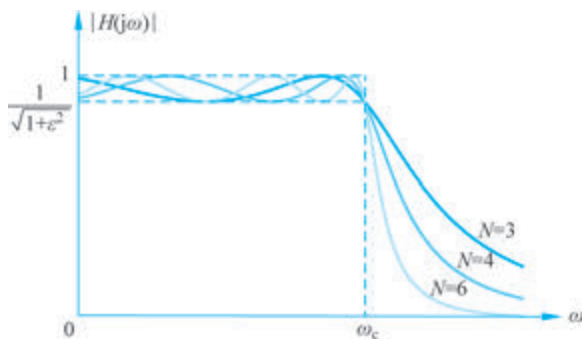


图 5.18 切比雪夫-I 型滤波器的幅频特性与极点数目 N 的关系

由图 5.18 可知,切比雪夫-I 型滤波器具有以下特性: ①在通带内幅频特性等起伏,极值数目等于极点数目 N ; ②阻带内幅频特性随频率升高单调下降; ③滤波器特性完全由极点数目 N 决定, N 越大,过渡带越窄,越接近理想特性。

切比雪夫-II 型滤波器可以通过一种变换与切比雪夫-I 型滤波器联系起来。具体来讲,就是将式(5.4.24)中的 $\epsilon^2 T_N^2(\omega/\omega_c)$ 用倒数来替换,并且将其自变量 ω/ω_c 也用倒数来替换,即可得到 N 阶切比雪夫-II 型低通滤波器,有

$$|C(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + [\epsilon^2 T_N^2(\omega_c/\omega)]^{-1}} \quad (5.4.29)$$

类似, MATLAB 中调用函数 $[z, p, k] = \text{cheb2ap}(N, A_s)$, 可以设计一个 N 阶标准切比雪夫-II 型滤波器 ($\omega_c = 1 \text{ rad/s}$), 其中, z 为零点矩阵, p 为极点矩阵, k 为增益, A_s 为阻带最大衰减 (dB)。也可先设计 N 阶标准切比雪夫-I 型滤波器,然后再利用上述变换。

当系统函数极点数目 N 不同时,切比雪夫-II 型滤波器的幅频特性是不同的,如图 5.19 所示。

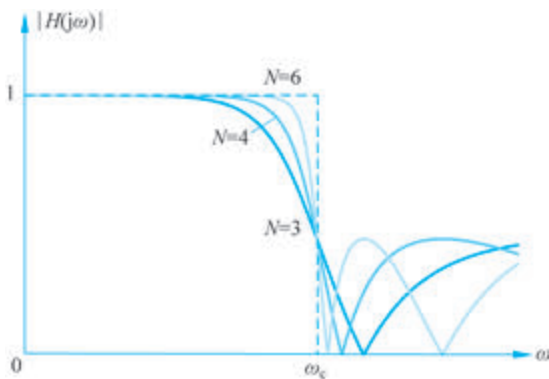


图 5.19 切比雪夫-II 型滤波器的幅频特性与极点数目 N 的关系

从图 5.19 可见,切比雪夫-II 型滤波器具有以下特性:①在通带内幅频特性随频率升高单调下降;②阻带内幅频特性随频率等起伏;③滤波器特性完全由极点数目 N 决定, N 越大,过渡带越窄,越接近理想特性。

无论切比雪夫-I 型还是切比雪夫-II 型滤波器,其阶数 N 越高,对理想特性逼近得越好,过渡带越窄,付出的代价是系统越复杂。但是在相同的设计指标要求下,相比在阻带和通带内均单调变化的巴特沃斯滤波器来说,由于切比雪夫滤波器具有在通带或阻带内等起伏的频率特性,使得逼近误差均匀分布在通带或阻带内,可以降低所要求的滤波器阶数。

5) 系统响应分解与极点分布的关系

在第 2 章时域分析中就系统全响应中的自由响应和强迫响应进行了讨论。从 s 域角度也可以分析这个问题。根据系统函数定义,由 $Y_{zs}(s) = X(s)H(s)$ 可知 $Y_{zs}(s)$ 的零极点由 $H(s)$ 和 $X(s)$ 的零极点决定。如前所述, $H(s)$ 和 $X(s)$ 因式分解后可分别写作

$$H(s) = K_H \frac{\prod_{k=1}^m (s - z_k)}{\prod_{i=1}^n (s - p_i)} \quad (5.4.30)$$

$$X(s) = K_E \frac{\prod_{l=1}^u (s - z_l)}{\prod_{r=1}^v (s - p_r)} \quad (5.4.31)$$

若 $Y_{zs}(s)$ 不含有多重极点,且 $H(s)$ 和 $X(s)$ 没有相同的极点,则将 $Y_{zs}(s)$ 进行部分分式展开后可得到

$$Y_{zs}(s) = \sum_{i=1}^n \frac{K_{Hi}}{(s - p_i)} + \sum_{r=1}^v \frac{K_{Er}}{(s - p_r)} \quad (5.4.32)$$

式中, K_{Hi} 和 K_{Er} 分别表示部分分式展开各项的系数。

从式(5.4.32)可以看出, $Y_{zs}(s)$ 的极点来自两方面:一是系统函数的极点,二是激励信号的极点。对 $Y_{zs}(s)$ 作反变换,得到时域的响应函数表达式为

$$y_{zs}(t) = \sum_{i=1}^n K_{Hi} e^{p_i t} + \sum_{r=1}^v K_{Er} e^{p_r t} \quad (5.4.33)$$

系统零状态响应函数 $y_{zs}(t)$ 由两部分组成:前一部分由系统函数的极点所形成,称为“自由响应”,仅由系统本身特性决定,与激励函数的形式无关;后一部分则仅由激励函数的极点所形成,称为“强迫响应”。但是,系数 K_{Hi} 、 K_{Er} 则与 $H(s)$ 和 $X(s)$ 都有关。即自由响应的时域函数形式仅由 $H(s)$ 决定,但它的幅度和相位却受两者的影响;同样,强迫响应时域函数形式只取决于激励函数 $X(s)$,但它的幅度和相位却与 $H(s)$ 和 $X(s)$ 都相关。

与系统自由响应分量和强迫响应分量密切相关的是瞬态响应分量和稳态响应分量。一般对于稳定系统, $H(s)$ 极点的实部都小于零,则自由响应函数呈现衰减形式,自由响

应就必然是瞬态响应。而对于不稳定系统, $H(s)$ 极点的实部不小于零, 则自然响应不随着时间衰减, 那它就是稳态。若激励 $X(s)$ 极点实部大于零, 则强迫响应就是稳态响应, 否则就是瞬态响应。

【例 5.4.7】 某 LTI 系统 $y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = 2x'(t) + x(t)$, 输入信号 $x(t) = e^{-3t}u(t)$, 初始状态 $y(0^-) = 1, y'(0^-) = 1$, 求全响应并做响应分解。

解: 对原微分方程两边取拉氏变换, 可得

$$s^2 Y(s) - sy(0^-) - y'(0^-) + 3[sY(s) - y(0^-)] + 2Y(s) = 2sX(s) + X(s)$$

整理后得

$$Y(s) = \frac{2s+1}{s^2+3s+2}X(s) + \frac{sy(0^-) + 3y(0^-) + y'(0^-)}{s^2+3s+2}$$

现将 $y(0^-) = 1, y'(0^-) = 1, X(s) = \frac{1}{s+3}$ 代入上式, 得

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{2s+1}{s^2+3s+2} \frac{1}{s+3} + \frac{s+4}{s^2+3s+2} \\ &= \underbrace{\frac{-1/2}{s+1} + \frac{3}{s+2} + \frac{-5/2}{s+3}}_{\text{零状态响应 } Y_{zs}(s)} + \underbrace{\frac{3}{s+1} + \frac{-2}{s+2}}_{\text{零输入响应 } Y_{zi}(s)} = \underbrace{\frac{5/2}{s+1} + \frac{1}{s+2}}_{\text{固有响应 } Y_n(s)} + \underbrace{\frac{-5/2}{s+3}}_{\text{强迫响应 } Y_f(s)} \end{aligned}$$

求反变换得

$$\begin{aligned} y(t) &= \underbrace{-\frac{1}{2}e^{-t}u(t) + 3e^{-2t}u(t) - \frac{5}{2}e^{-3t}u(t)}_{\text{零状态响应 } y_n(t)} + \underbrace{3e^{-t}u(t) - 2e^{-2t}u(t)}_{\text{零输入响应 } y_f(t)} \\ &= \underbrace{\frac{5}{2}e^{-t}u(t) + e^{-2t}u(t)}_{\text{固有响应 } y_n(t)} - \underbrace{\frac{5}{2}e^{-3t}u(t)}_{\text{强迫响应 } y_f(t)} \end{aligned}$$

可见, $Y_{zs}(s)$ 的极点由两部分组成: 一部分是系统特征根形成的极点 $-1, -2$ (称为自然频率或固有频率), 构成系统固有响应 $y_n(t)$; 另一部分是激励信号的象函数 $X(s)$ 的极点 -3 , 构成强迫响应 $y_f(t)$ 。所以说, 固有响应 $y_n(t)$ 的函数形式由系统的特征根决定, 强迫响应 $y_f(t)$ 的函数形式由激励信号决定。

这里需要注意的是, 系统函数 $H(s)$ 同样只能用于分析系统的零状态响应。

3. 系统因果性和稳定性分析

我们知道系统的单位冲激响应 $h(t)$ 或系统函数 $H(s)$ 集中表征了系统的本性。针对系统的因果性和稳定性, 也可以通过考察 $h(t)$ 或 $H(s)$ 进行分析。

1) 系统因果性分析

因果系统是指响应不出现在激励之前的系统。显然, 因果系统的单位冲激响应 $h(t)$ 满足

$$h(t) = 0, \quad t < 0 \quad (5.4.34)$$

因此, 对于一个线性时不变因果系统, 根据 5.2.1 节的讨论, $H(s)$ 的收敛域为 $\text{Re}[s] > \sigma_0, \sigma_0$ 是最右边极点的模值, 即右边收敛。需要强调的是, 反过来结论未必成立, 即收敛

域右边收敛不能保证系统是因果的,只能保证单位冲激响应是一个右边信号。

2) 系统稳定性分析

系统稳定性是系统一个极为重要的特性,也是大多数实际系统能够正常工作的基本条件。在第2章中已经证明,系统稳定的充分必要条件是单位冲激响应 $h(t)$ 绝对可积,即

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)| dt \leq M, \quad M \text{ 为有限正常数} \quad (5.4.35)$$

$H(s)$ 的收敛域也可以与系统的稳定性联系起来,前面学习傅里叶变换时已经指出:信号绝对可积,它的傅里叶变换就存在。也就是说,如果系统稳定,冲激响应 $h(t)$ 绝对可积,那么 $h(t)$ 的傅里叶变换就存在,同时系统稳定。而傅里叶变换是虚轴上的拉氏变换,所以稳定系统的系统函数 $H(s)$ 的收敛域必定包含虚轴。

研究 $H(s)$ 在 s 平面的极点分布情况,也可以判定系统稳定与否。按照 $h(t)$ 呈现衰减或增长两种情况,将系统划分为稳定系统与非稳定系统两大类型。显然,根据 $H(s)$ 极点出现于左半平面或右半平面即可判断系统是否稳定。对于因果系统,若 $H(s)$ 的所有极点都位于左半平面,则其单位冲激响应 $h(t)$ 的幅度(或包络)是衰减的,式(5.4.35)的条件满足,从而系统为稳定系统。

下面通过两个例子重点讨论一阶系统和二阶系统的系统稳定性情况。一阶系统和二阶系统非常广泛地存在于自然科学和工程应用中。常见的一阶系统包括 RC 电路与滤波设计、热传导与温度控制、液位控制、放射性衰变、扩散行为等;二阶系统包括机械振动、RLC 电路、电机控制、量子谐振子、电磁波传播、大气波动等。

【例 5.4.8】 求解一阶系统的传递函数,并分析系统的稳定性。

解: 连续一阶系统的动态行为可以用一阶微分方程进行描述,有

$$\tau \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = Gx(t)$$

式中: τ 为时间常数; G 为系统增益。

对微分方程进行拉普拉斯变换(假定初始条件为零),得

$$\tau s Y(s) + Y(s) = G X(s)$$

得到系统的传递函数为

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{G}{\tau s + 1}$$

稳定性分析: 系统极点 $s = -\frac{1}{\tau}$ (位于左半平面), 系统稳定。

【例 5.4.9】 求解二阶系统的传递函数,并分析系统的稳定性。

解: 连续二阶系统的动态行为可以用二阶微分方程进行描述,有

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 2\zeta\omega_n \frac{dy(t)}{dt} + \omega_n^2 y(t) = G\omega_n^2 x(t)$$

式中: ω_n 为自然频率; ζ 为阻尼比; G 为系统增益。针对不同结构和功能的二阶系统, ζ 、 ω_n 和 G 的物理含义也不相同。

对微分方程进行拉普拉斯变换(假定初始条件为零),得

$$s^2 Y(s) + 2\zeta\omega_n s Y(s) + \omega_n^2 Y(s) = G\omega_n^2 X(s)$$

得到系统的传递函数为

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{G\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

稳定性分析: 系统极点 $s = -\zeta\omega_n \pm \omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1}$, 显然, 二阶系统的时间响应取决于 ζ 和 ω_n 两个参数。

当 $\zeta < -1$ 时, 如图 5.20(a) 所示, 二阶系统具有两个正实极点, 单位冲激响应呈指数增长, 为发散形式, 此时二阶系统不稳定。当 $\zeta = -1$ 时, 系统在 $s = \omega_n$ 处有二重正实极点, 响应含 $e^{\omega_n t}$ 或 $t e^{\omega_n t}$ 项, 系统不稳定。

当 $-1 < \zeta < 0$ 时, 如图 5.20(b) 所示, 两个正实部共轭复极点, 单位冲激响应中指数因子具有正幂指数, 响应呈发散形式, 系统不稳定。

当 $\zeta = 0$ 时, 如图 5.20(c) 所示, 无阻尼情况, 纯虚数共轭极点, 等幅振荡响应, 系统临界稳定。

当 $0 < \zeta < 1$ 时, 如图 5.20(d) 所示, 欠阻尼情况, 负实部共轭复极点, 衰减振荡响应, 系统稳定。

当 $\zeta = 1$ 时, 如图 5.20(e) 所示, 临界阻尼情况, 一个重负实极点, 最快无振荡衰减响应, 系统稳定。

当 $\zeta > 1$ 时, 如图 5.20(f) 所示, 过阻尼情况, 两个负实极点, 无振荡衰减响应, 系统稳定。

各极点分布如图 5.20 所示, 可见仅当极点实部小于零时, 即位于左半开平面情况, 系统稳定。

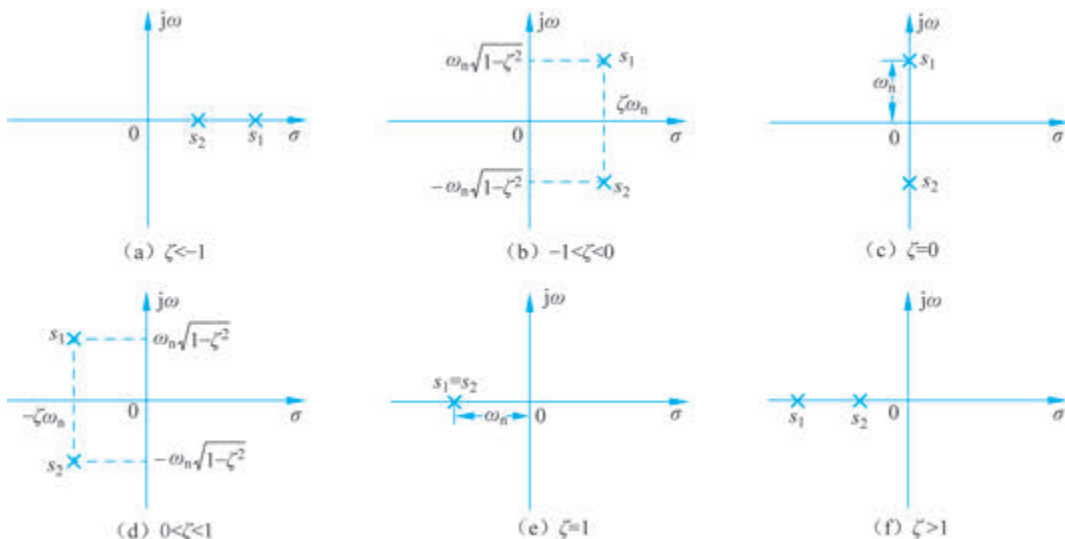


图 5.20 二阶系统极点分布

而对于三阶以上的系统要想求出极点并非易事,劳斯和霍尔维茨提供了一种简便的方法,可以根据系统函数分母多项式的系数,直接判断连续时间因果系统的稳定性,而不必求极点,这就是“劳斯-霍尔维茨稳定性判据”,这里不做详细介绍。

4. 系统其他典型响应介绍

在实际科研和工程应用中,根据需要基于复频域分析方法,除了考察系统的单位冲激响应、系统频响外,还会考察系统的一些其他典型响应,如单位阶跃响应、单位斜坡响应、单位加速度响应等。如表 5.8 所示,归纳了典型输入信号类型,通过将其代入复频域代数方程,进行分析求解。

表 5.8 典型响应对应的输入信号

序号	典型响应	$x(t)$	$X(s)$
1	单位冲激响应	$\delta(t)$	1
2	系统频响	$\sin(\omega_0 t)u(t)$	$\frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2}$
3	单位阶跃响应	$u(t)$	$1/s$
4	单位斜坡响应	$tu(t)$	$1/s^2$
5	单位加速度响应	$\frac{1}{2}t^2 u(t)$	$1/s^3$

5.4.3 连续时间系统模拟

我们可以采用数学模型(如微分方程、系统函数等)来描述一个连续时间系统所具有的输入输出关系。但在实际进行系统设计、模拟和实现时,往往从微分方程或系统函数出发,由基本运算单元(加法器、数乘器和积分器)搭建系统,具体就需要借助图示法,便于分析和描述,如系统框图和信号流图。

1. 信号流图与梅森公式

1) 信号流图

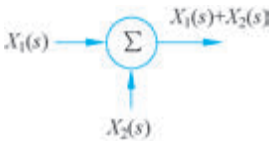
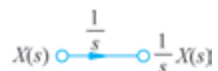
在第 1 章已经学习了连续时间系统的时域框图,结合拉氏变换的线性性质和时域微分性质,也可以画出其对应的 s 域框图,进而列出描述系统的 s 域代数方程进行分析求解。

信号流图是由若干节点和连接这些节点的有向支路组成的信号传递网络,它通过描述组成系统的各元部件之间的信号传递关系,表示系统中各变量的因果关系,从而进一步得到系统的输入输出关系。表 5.9 所示的是三个基本运算单元(加法器、数乘器、积分器)的时域框图、 s 域框图(设初始状态为零)和信号流图表示。

表 5.9 基本运算单元的图形表示

名 称	加 法 器	数 乘 器	积 分 器
时域框图			

续表

名 称	加 法 器	数 乘 器	积 分 器
s 域框图			
信号流图			

在表 5.9 所示的信号流图中,起点和终点的小圆圈表示系统中的变量或信号的点,称为**节点**。有向线段表示信号传输的路径,称为**支路**,信号的传输方向用箭头表示。系统函数 $H(s)$ 标记在线段的一侧(一般是箭头的上方),称为该支路的**增益**。

下面结合图 5.21 来介绍信号流图中的一些常用术语。

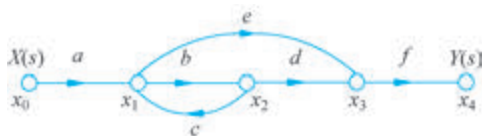


图 5.21 一个典型的信号流图

节点和支路: 信号流图中的每个节点对应于一个变量或信号。连接两个节点之间的有向线段称为支路。支路增益就是该两节点间的系统函数。

源节点: 只有输出支路、没有输入支路的节点,如图 5.21 中的 x_0 ,它一般代表网络中的输入变量,故也称输入节点。

阱节点: 只有输入支路、没有输出支路的节点,如图 5.21 中的 x_4 ,它一般代表网络中的输出变量,故也称输出节点。

混合节点: 既有输入支路,又有输出支路的节点,如图 5.21 中的其他节点。

通路: 从任一节点出发沿着支路箭头方向连续经过各相连的不同支路和节点到达另一节点的路径称为通路。

简单通路: 如果通路与任一节点相遇不多于一次,称为简单通路(或者开通路)。

前向通路: 从源节点到阱节点的简单通路,称为前向通路。

图 5.21 中有两条前向通路: $x_0 \rightarrow x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow x_3 \rightarrow x_4$ 、 $x_0 \rightarrow x_1 \rightarrow x_3 \rightarrow x_4$ 。

前向通路上各支路增益之乘积,称为前向通路总增益,图 5.21 中的两条前向通路,一条的总增益为 $abdf$,另一条为 aef 。

回路: 起点和终点在同一节点且每个节点只通过一次的闭合通路称为简单回路,简称回路。回路中所有支路增益之乘积,称为回路增益。图 5.21 中只有一条回路 $x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow x_1$,其增益为 bc 。

不接触回路: 回路与回路之间没有公共节点的回路称为不接触回路。图 5.21 中没

有不接触回路。

信号流图可以按照以下代数规则进行化简,从而得到源节点和阱节点之间的输入输出关系。

(1) 支路串联,如图 5.22 所示。



图 5.22 支路串联

(2) 支路并联,如图 5.23 所示。



图 5.23 支路并联

(3) 反馈支路,如图 5.24 所示。



图 5.24 反馈支路

(4) 支路节点移动,如图 5.25 所示。



图 5.25 支路节点移动

利用上述基本规则,可以化简信号流图,得到系统函数。

2) 梅森公式

对于复杂的信号流图,通过化简求总增益或系统函数往往是非常烦琐的,而利用梅森公式可直接求出系统函数。

梅森公式为

$$T = \frac{1}{\Delta} \sum_{k=1}^n T_k \Delta_k \quad (5.4.36)$$

式中: T 为流图总增益; Δ 为流图的特征式,有

$$\Delta = 1 - \sum L_a + \sum L_b L_c - \sum L_d L_e L_f + \dots \quad (5.4.37)$$

式中: $\sum L_a$ 为所有回路增益之和; $\sum L_b L_c$ 为所有两两互不接触回路的增益乘积之和; $\sum L_d L_e L_f$ 为所有三个互不接触回路的增益乘积之和; n 为前向通路总数; T_k 为第 k 条前向通路总增益; Δ_k 为第 k 条前向通路的流图因子式,它等于将流图中第 k 条前向通路(包括经过的节点和支路)拆除后,余下部分的流图特征式。

【例 5.4.10】 图 5.26 所示为某系统的信号流图,求系统函数 $H(s)$ 。

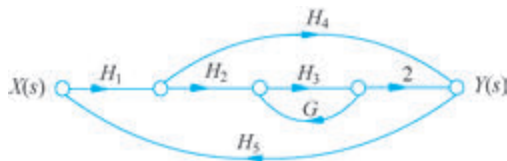


图 5.26 某系统信号流图

解: 三个回路 $L_1 = H_3G$ 、 $L_2 = 2H_1H_2H_3H_5$ 、 $L_3 = H_1H_4H_5$ 中, L_1 、 L_3 回路两两互不接触。所以流图特征式为

$$\begin{aligned}\Delta &= 1 - (L_1 + L_2 + L_3) + L_1L_3 \\ &= 1 - H_3G - 2H_1H_2H_3H_5 - H_1H_4H_5 + H_3GH_1H_4H_5\end{aligned}$$

两条前向通路,第一条: $T_1 = 2H_1H_2H_3$,第二条: $T_2 = H_1H_4$

拆除第一条后,无回路,故 $\Delta_1 = 1$

拆除第二条后,还有一个回路 L_1 ,故 $\Delta_2 = 1 - L_1 = 1 - H_3G$

所以,根据梅森公式,系统函数为

$$\begin{aligned}H(s) &= \frac{T_1\Delta_1 + T_2\Delta_2}{\Delta} \\ &= \frac{2H_1H_2H_3 + H_1H_4(1 - H_3G)}{1 - H_3G - 2H_1H_2H_3H_5 - H_1H_4H_5 + H_3GH_1H_4H_5}\end{aligned}$$

2. 连续时间系统模拟

系统模拟是连接理论和工程实践的重要桥梁。在系统完成理论设计后,一般要建立模型来模拟运行过程,以评估系统性能,确定最终参数和系统方案。模型建立一般依托计算机算法或专用硬件设备,通过搭建由三种基本运算单元构成的网络来完成,这里给出其图示描述,为系统模拟做准备。对于同一系统函数,可以有不同的实现方案,即可以对应多种形式的网络。比较常用的有直接形式、级联形式和并联形式。

1) 直接实现

首先讨论二阶系统,设系统函数为

$$H(s) = \frac{b_1s + b_0}{s^2 + a_1s + a_0} = \frac{b_1s^{-1} + b_0s^{-2}}{1 + a_1s^{-1} + a_0s^{-2}}$$

与梅森公式 $T = \frac{1}{\Delta} \sum_{k=1}^n T_k \Delta_k$ 式(5.4.37)对照,有两条前向通路: $T_1 = b_1s^{-1}$, $\Delta_1 = 1$;

$T_2 = b_0s^{-2}$, $\Delta_2 = 1$ 。

两个回路: $L_1 = -a_1s^{-1}$, $L_2 = -a_0s^{-2}$,没有两两不接触的回路。

可以得到如图 5.27 所示的信号流图。

需要注意的是,对于给定的系统函数,其直接实现形式并不是唯一的。如图 5.28 所示的信号流图也具有与图 5.27 完全相同的系统函数。

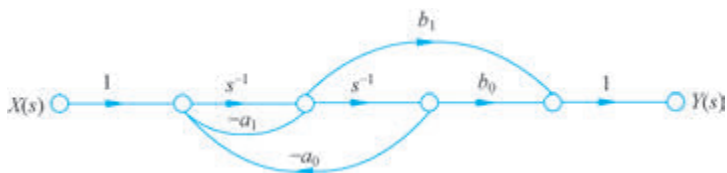


图 5.27 二阶系统直接形式的信号流图

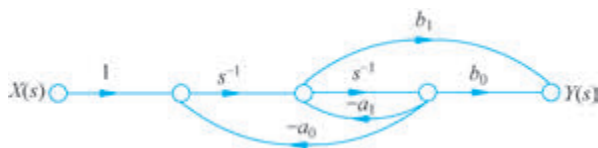
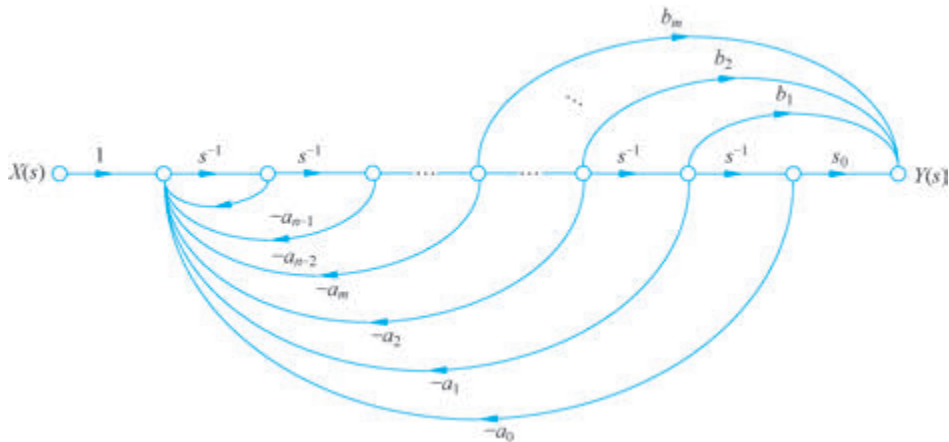


图 5.28 二阶系统直接形式的另一种信号流图

于是,可以很方便地推广至高阶系统:

$$\begin{aligned}
 H(s) &= \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0} \\
 &= \frac{b_m s^{-(n-m)} + b_{m-1} s^{-(n-m+1)} + \cdots + b_1 s^{-(n-1)} + b_0 s^{-n}}{1 + a_{n-1} s^{-1} + \cdots + a_1 s^{-(n-1)} + a_0 s^{-n}} \quad (5.4.38)
 \end{aligned}$$

得到如图 5.29 所示直接形式的信号流图。

图 5.29 n 阶系统直接形式的信号流图

2) 级联和并联实现

级联形式是将系统函数 $H(s)$ 分解成几个简单子系统(如一阶系统或二阶系统)函数的乘积,即

$$H(s) = \prod_{i=1}^N H_i(s) \quad (5.4.39)$$

如图 5.30 所示,其中每个子系统可以用直接形式实现。通常各个子系统选用一阶函数或二阶函数,分别称为一阶节和二阶节。



图 5.30 级联形式

并联形式是将系统函数 $H(s)$ 分解成几个简单子系统函数的和,即

$$H(s) = \sum_{i=1}^N H_i(s) \quad (5.4.40)$$

如图 5.31 所示,其中每个子系统可以用直接形式实现。

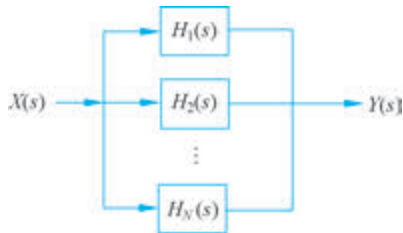


图 5.31 并联形式

级联和并联实现形式调试比较方便,当调节某子系统参数时,只改变该子系统的零点或极点位置,对其余子系统的零极点位置没有影响;而对于直接实现形式,当改变某参数时,所有零极点位置都将受到影响。

【例 5.4.11】 某连续时间系统系统函数为 $H(s) = \frac{2s+4}{s^3+3s^2+5s+3}$, 分别画出直接、级联和并联形式的信号流图。

解: (1) 直接形式,有

$$H(s) = \frac{2s^{-2} + 4s^{-3}}{1 + 3s^{-1} + 5s^{-2} + 3s^{-3}}$$

得到如图 5.32 所示的直接形式的信号流图。

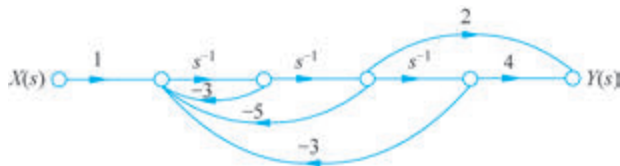


图 5.32 直接形式的信号流图

(2) 级联形式,有

$$\begin{aligned} H(s) &= \frac{2s+4}{s^3+3s^2+5s+3} = \frac{2(s+2)}{(s+1)(s^2+2s+3)} = \frac{2}{s+1} \cdot \frac{s+2}{s^2+2s+3} \\ &= \frac{2s^{-1}}{1+s^{-1}} \cdot \frac{s^{-1}+2s^{-2}}{1+2s^{-1}+3s^{-2}} \end{aligned}$$

得到一种级联形式的信号流图如图 5.33 所示。

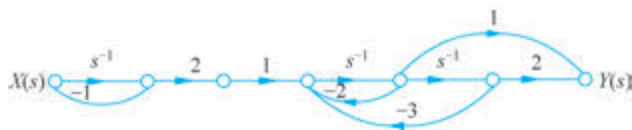


图 5.33 级联形式的信号流图

(3) 并联形式,有

$$\begin{aligned}
 H(s) &= \frac{2s+4}{s^3+3s^2+5s+3} = \frac{2(s+2)}{(s+1)(s^2+2s+3)} = \frac{1}{s+1} + \frac{-s+1}{s^2+2s+3} \\
 &= \frac{s^{-1}}{1+s^{-1}} + \frac{-s^{-1}+s^{-2}}{1+2s^{-1}+3s^{-2}}
 \end{aligned}$$

得到并联形式的信号流图如图 5.34 所示。

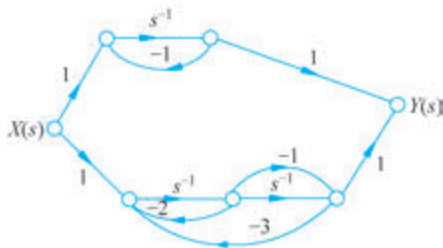


图 5.34 并联形式的信号流图

5.5 离散时间信号的 z 变换

上面主要讨论了拉普拉斯变换,其本质可以看作连续时间傅里叶变换在复平面上的推广。与之类似,接下来讨论的 z 变换是离散时间傅里叶变换在复平面上的推广。

5.5.1 z 变换的定义与收敛域

离散时间信号 $x(n)$ 的傅里叶变换为

$$X(j\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)e^{-j\Omega n} \quad (5.5.1)$$

当 $x(n)$ 满足绝对可和条件时,即

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x(n)| < +\infty \quad (5.5.2)$$

式(5.5.1)才收敛。而许多常用的离散时间信号不满足这个条件,如指数增长信号 $r^n u(n)$, $|r| > 1$ 。采用与连续时间信号同样的方法,将 $x(n)$ 乘以指数信号 r^{-n} ,使 $x(n)r^{-n}$ 满足绝对可和条件,然后再求其傅里叶变换,即

$$\text{DTFT}[x(n)r^{-n}] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)r^{-n}e^{-j\Omega n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)(re^{j\Omega})^{-n} \quad (5.5.3)$$

引入复变量 z ,令 $z=re^{j\Omega}$,上式变为

$$\text{DTFT}[x(n)r^{-n}] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)z^{-n} \quad (5.5.4)$$

将 $\text{DTFT}[x(n)r^{-n}]$ 记为 $X(z)$, 即

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)z^{-n} \quad (5.5.5)$$

式(5.5.5)称为 $x(n)$ 的双边 z 变换。简记为

$$x(n) \leftrightarrow X(z) \quad (5.5.6)$$

如前所述,选择合适的 r 值,才能使 $x(n)r^{-n}$ 满足绝对可和条件,从而使式(5.5.5)收敛, $X(z)$ 才存在。我们把使 $X(z)$ 存在的 r 的范围称为收敛域,常记为 $|z|$ 。下面通过几个例子来分析 z 变换的收敛问题。

【例 5.5.1】 求 $\delta(n)$ 的 z 变换。

$$\text{解: } \delta(n) \leftrightarrow \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(n)z^{-n} = 1$$

显然,对于所有的 z , $\delta(n)$ 的 z 变换都存在,称为全 z 平面收敛。

【例 5.5.2】 求如图 5.35 所示序列的 z 变换。

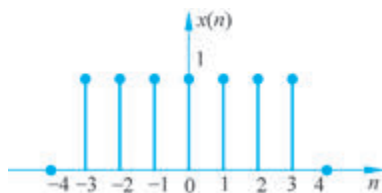


图 5.35 例 5.5.2 图

$$\begin{aligned} \text{解: } X(z) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)z^{-n} \\ &= x(-3)z^3 + x(-2)z^2 + x(-1)z + x(0) + x(1)z^{-1} + x(2)z^{-2} + x(3)z^{-3} \\ &= z^3 + z^2 + z + 1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} \end{aligned}$$

显然,除了 $z=0$ 和 $z=+\infty$ 外, $X(z)$ 都存在,所以其收敛域为 $0 < |z| < +\infty$,也称为全 z 平面收敛,但不包含原点和无穷远点。

对于有限长离散时间信号的收敛域,我们可以得出以下结论:有限长离散时间信号, z 变换是有限项幂级数求和,其收敛域是全 z 平面收敛(但 $|z|=0$ 和 $|z|=+\infty$ 处不一定收敛)。

具体来说,如果 $x(n)$ 是因果的有限长序列,那么 $X(z)$ 是 z 的有限项负幂多项式,在 $|z|=+\infty$ 处收敛而在 $|z|=0$ 处不收敛,故其收敛域为 $0 < |z| \leq +\infty$ 。如果 $x(n)$ 是反因果的有限长序列,那么 $X(z)$ 是 z 的有限项正幂多项式,在 $|z|=0$ 处收敛而在 $|z|=+\infty$ 处不收敛,故收敛域为 $0 \leq |z| < +\infty$ 。

【例 5.5.3】 求因果序列 $x(n)=a^n u(n)$ 的 z 变换。

$$\text{解: } X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a^n u(n) z^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty} (az^{-1})^n$$

当 $|az^{-1}| < 1$, 即 $|z| > |a|$ 时, 上式 $= \frac{1}{1-az^{-1}} = \frac{z}{z-a}$

否则, $X(z)$ 不存在。

得到如下变换对

$$a^n u(n) \leftrightarrow \frac{z}{z-a}, \quad |z| > |a| \quad (5.5.7)$$

【例 5.5.4】 求反因果序列 $x(n) = -a^n u(-n-1)$ 的 z 变换。

$$\text{解: } X(z) = - \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a^n u(-n-1) z^{-n} = - \sum_{n=-\infty}^{-1} a^n z^{-n} = - \sum_{m=1}^{+\infty} (a^{-1} z)^m$$

当 $|a^{-1}z| < 1$, 即 $|z| < |a|$ 时, 上式 $= - \frac{a^{-1}z}{1-a^{-1}z} = \frac{z}{z-a}$

否则, $X(z)$ 不存在。

得到如下变换对

$$-a^n u(-n-1) \leftrightarrow \frac{z}{z-a}, \quad |z| < |a| \quad (5.5.8)$$

上两例中, 两个不同的离散时间信号具有相同的 z 变换, 仅收敛域不同。因此, 与双边拉氏变换一样, 双边 z 变换也必须和收敛域一起才能与时域信号 $x(n)$ 一一对应。

【例 5.5.5】 求双边序列 $x(n] = a^n u(n) + b^n u(-n-1)$ 的 z 变换。

解: 令 $x_1(n) = a^n u(n)$, $x_2(n) = b^n u(-n-1)$, 则 $x(n) = x_1(n) + x_2(n)$

由式(5.5.7)得

$$X_1(z) = \frac{z}{z-a}, \quad |z| > |a| \quad (5.5.9)$$

由式(5.5.8)得

$$X_2(z) = \frac{-z}{z-b}, \quad |z| < |b| \quad (5.5.10)$$

所以, 仅当 $|a| < |b|$ 时, $X(z) = \frac{z}{z-a} - \frac{z}{z-b} = \frac{z(a-b)}{(z-a)(z-b)}, |a| < |z| < |b|$

否则, $X(z)$ 不存在。

将以上三个例子的收敛域在 z 平面中表示, 如图 5.36 所示。

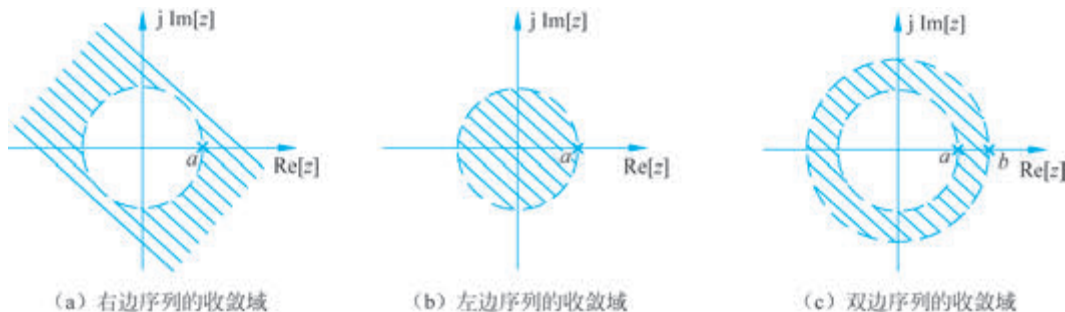


图 5.36 z 变换的收敛域

对于无限长离散时间信号的收敛域,可以得出以下结论:

- (1) 右边序列的收敛域为圆外收敛,当为因果序列时,收敛域包含 $|z| = +\infty$ 。
- (2) 左边序列的收敛域为圆内收敛,当为反因果序列时,收敛域包含 $|z| = 0$ 。
- (3) 双边序列的收敛域若存在,则为环状区域。

5.5.2 z 变换和傅里叶变换、拉普拉斯变换的关系

1. z 变换与傅里叶变换的关系

从上面的讨论可以看出,一方面, $x(n)$ 的 z 变换是 $x(n)r^{-n}$ 的离散时间傅里叶变换;另一方面,当 $x(n)$ 满足绝对可和条件时,令 $X(z)$ 中的 $|z| = 1$ (即 $z = e^{j\Omega}$)即可得到 $x(n)$ 的离散时间傅里叶变换 $X(j\Omega)$,有

$$X(j\Omega) = X(z) \Big|_{z=e^{j\Omega}} \quad (5.5.11)$$

于是,离散时间傅里叶变换就是 z 平面中半径为1的圆上的 z 变换,如图5.37所示。在 z 平面中,这个圆称为单位圆,单位圆在 z 变换讨论中所起的作用类似于 s 平面上的虚轴在拉氏变换讨论中的作用。

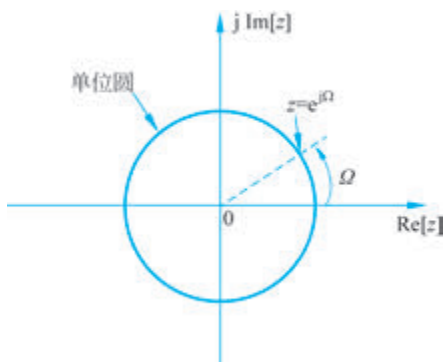


图 5.37 z 平面上的单位圆

2. z 变换与拉普拉斯变换的关系

由第3章采样部分内容可知,离散时间信号可由连续时间信号经过冲激信号采样得到,即

$$x_s(t) = x(t)\delta_T(t) = x(t) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT)\delta(t - nT)$$

因此,可以得到抽样信号的拉普拉斯变换为

$$X_s(s) = \mathcal{L} \left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT)\delta(t - nT) \right] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT)e^{-snT} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)e^{-snT}$$

令 $z = e^{sT}$,则

$$X_s(s) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)z^{-n} = X(z)$$

该表达式正是 z 变换的表达式。

可见,拉普拉斯变换将连续时间信号映射到连续的复平面(s 平面);而 z 变换是其在离散时间的对应,它建立了离散时间序列 $x(n)$ 与复平面(z 平面)上的一个函数 $X(z)$ 之间的关联。

由 z 变换与拉普拉斯变换的关系可知(T 为采样间隔):

$$z = r e^{j\Omega} = e^{sT} = e^{(\sigma + j\omega)T}$$

$$\begin{cases} r = e^{\sigma T} \\ \Omega = \omega T \end{cases}$$

因此, z 平面和 s 平面具有如图 5.38 所示关系。

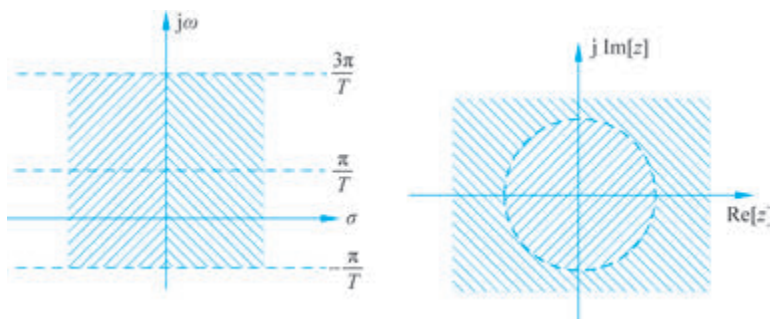


图 5.38 z 平面与 s 平面的对应关系

z 平面单位圆对应 s 平面虚轴; z 平面单位圆内对应 s 左半平面; z 平面单位圆外对应 s 右半平面; z 平面上的角频率 Ω 以 2π 为周期,对应 s 平面角频率 ω 以 $2\pi/T$ 为周期。

5.5.3 双边 z 变换的性质

和我们已经学过的傅里叶变换和拉氏变换一样, z 变换也具有许多性质,这些性质反映了时域信号与其对应 z 域变换之间的关系。掌握这些性质有助于 $x(n)$ 和 $X(z)$ 的互求,也有助于正确分析离散时间信号与系统。

在学习连续时间拉普拉斯变换时指出:由于通常遇到的连续时间信号与系统大都是因果的,所以着重分析了单边拉普拉斯变换。而对于离散时间信号与系统,非因果性也有一定的应用,所以这里的性质学习将兼顾双边和单边 z 变换。

1. 时移特性

若 $x(n) \leftrightarrow X(z)$, $r_1 < |z| < r_2$, 则

$$x(n + n_0) \leftrightarrow z^{n_0} X(z), \quad n_0 \text{ 为整数}, r_1 < |z| < r_2 \quad (5.5.12)$$

证明:

$$\begin{aligned} x(n + n_0) &\leftrightarrow \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n + n_0) z^{-n} \xleftrightarrow{\text{令 } n+n_0=m} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(m) z^{-m+n_0} \\ &= z^{n_0} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(m) z^{-m} \\ &= z^{n_0} X(z) \end{aligned}$$

【例 5.5.6】 求 $\delta(n+1)$ 、 $\delta(n-1)$ 的双边 z 变换。

解： 因为

$$\delta(n) \leftrightarrow 1$$

利用时移特性,得

$$\delta(n+1) \leftrightarrow z$$

$$\delta(n-1) \leftrightarrow z^{-1}$$

以上三个 z 变换的收敛域分别为 $0 \leq |z| \leq +\infty$ 、 $0 \leq |z| < +\infty$ 和 $0 < |z| < +\infty$ 。这是因为,时域移位可能会改变序列的因果性,从而使得 z 变换的收敛情况在 $|z|=0$ 和 $|z|=+\infty$ 处发生变化。

另外,如果某个系统的单位样值响应 $h(n)=\delta(n-1)$,那么零状态响应 $y_{zs}(n)=x(n)*h(n)=x(n-1)$,即系统完成单位延迟的功能。单位延迟器是构成离散时间系统的基本单元之一,其 z 域模型如图 5.39 所示。



图 5.39 单位延迟器 z 域模型

2. 复频移特性

若 $x(n) \leftrightarrow X(z)$, $r_1 < |z| < r_2$, 则

$$z_0^n x(n) \leftrightarrow X\left(\frac{z}{z_0}\right), \quad |z_0| r_1 < |z| < |z_0| r_2 \quad (5.5.13)$$

其中, $z_0 = re^{j\Omega_0}$ 。

证明： 由 z 变换的定义得

$$z_0^n x(n) \leftrightarrow \sum_{n=-\infty}^{+\infty} z_0^n x(n) z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) \left(\frac{z}{z_0}\right)^{-n} = X\left(\frac{z}{z_0}\right)$$

特别地,若 $r=1$,上式变成

$$e^{j\Omega_0 n} x(n) \leftrightarrow X(z e^{-j\Omega_0}), \quad r_1 < |z| < r_2 \quad (5.5.14)$$

式(5.5.14)称为频移特性,表明将 $x(n)$ 乘以一个虚指数序列,等效于在 z 平面的旋转,也就是说 $X(z)$ 的全部零极点位置在 z 平面内旋转一个角度 Ω_0 。

若 $\Omega_0=0$, $r=a$, a 为常数且 $a \neq 0$, 则有

$$a^n x(n) \leftrightarrow X\left(\frac{z}{a}\right), \quad |a| r_1 < |z| < |a| r_2 \quad (5.5.15)$$

式(5.5.15)称为 z 域尺度变换特性,表明将 $x(n)$ 乘以实指数序列,等效于 z 平面尺度展缩。式(5.5.15)中令 $a=-1$,得到

$$(-1)^n x(n) \leftrightarrow X(-z), \quad r_1 < |z| < r_2 \quad (5.5.16)$$

式(5.5.16)称为 z 域翻转特性。

【例 5.5.7】 求下列信号的 z 变换。

(1) $x(n) = \cos(\beta n)u(n)$; (2) $x(n) = a^n \cos(\beta n)u(n)$ 。

解：

(1) 利用变换对 $u(n) \leftrightarrow \frac{z}{z-1}$

再由频移特性得到

$$e^{\pm j\beta n} u(n) \leftrightarrow \frac{z}{z - e^{\pm j\beta}}$$

所以

$$\cos(\beta n)u(n) \leftrightarrow \frac{1}{2} \left[\frac{z}{z - e^{j\beta}} + \frac{z}{z - e^{-j\beta}} \right] = \frac{z^2 - z \cos \beta}{z^2 - 2z \cos \beta + 1}, \quad |z| > 1 \quad (5.5.17)$$

(2) 利用式(5.5.17)、式(5.5.15),得到

$$a^n \cos(\beta n)u(n) \leftrightarrow \frac{\left(\frac{z}{a}\right)^2 - \frac{z}{a} \cos \beta}{\left(\frac{z}{a}\right)^2 - \frac{2z}{a} \cos \beta + 1} = \frac{z(z - a \cos \beta)}{z^2 - 2az \cos \beta + a^2}, \quad |z| > |a| \quad (5.5.18)$$

图 5.40 所示的是 $\beta = \frac{\pi}{3}$ 的余弦序列, 以及 $a = 0.7, \beta = \frac{\pi}{3}$ 的衰减余弦序列的波形及收敛域。

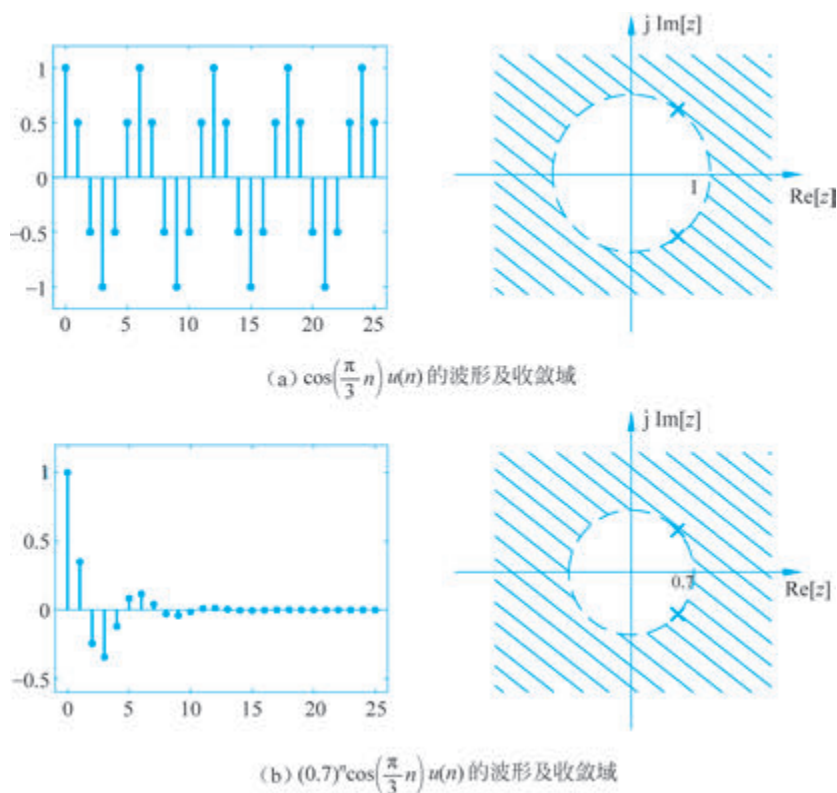


图 5.40 余弦序列、衰减的余弦序列及其收敛域

3. 时域翻转特性

若 $x(n) \leftrightarrow X(z), r_1 < |z| < r_2$, 则

$$x(-n) \leftrightarrow X(z^{-1}), \quad \frac{1}{r_2} < |z| < \frac{1}{r_1} \quad (5.5.19)$$

证明:

$$\begin{aligned}
 x(-n) &\leftrightarrow \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(-n)z^{-n} \\
 &\stackrel{\text{令 } m=-n}{=} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(m)\left(\frac{1}{z}\right)^{-m} \\
 &= X\left(\frac{1}{z}\right), \quad \frac{1}{r_2} < |z| < \frac{1}{r_1}
 \end{aligned}$$

显然,该性质只对双边 z 变换有意义。

由该性质可以看出,如果 z_0 、 p_0 分别为 $x(n)$ 的 z 变换的零点和极点,则 $1/z_0$ 、 $1/p_0$ 为 $x(-n)$ 的 z 变换的零点和极点。

4. 时域卷积定理

若 $x_1(n) \leftrightarrow X_1(z)$, $r_{11} < |z| < r_{12}$, $x_2(n) \leftrightarrow X_2(z)$, $r_{21} < |z| < r_{22}$, 则

$$x_1(n) * x_2(n) \leftrightarrow X_1(z)X_2(z) \quad (5.5.20)$$

其收敛域至少为 $X_1(z)$ 和 $X_2(z)$ 收敛域的公共部分。

证明:

$$\begin{aligned}
 x_1(n) * x_2(n) &\leftrightarrow \sum_{n=-\infty}^{+\infty} [x_1(n) * x_2(n)]z^{-n} \\
 &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[\sum_{m=-\infty}^{+\infty} x_1(m)x_2(n-m) \right] z^{-n} \\
 &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x_1(m) \left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_2(n-m)z^{-(n-m)} \right] z^{-m} \\
 &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x_1(m)z^{-m}X_2(z) = X_1(z)X_2(z)
 \end{aligned}$$

5. z 域微分特性

若 $x(n) \leftrightarrow X(z)$, $r_1 < |z| < r_2$ 则

$$nx(n) \leftrightarrow -z \frac{d}{dz} X(z) \quad (5.5.21)$$

证明: 根据 z 变换的定义式

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)z^{-n}$$

两边对 z 求导,得

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dz} X(z) &= \frac{d}{dz} \left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)z^{-n} \right] \\
 &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{d}{dz} [x(n)z^{-n}] \\
 &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} [(-n)x(n)z^{-n-1}]
 \end{aligned}$$

上式两边同乘以 $-z$,得

$$-z \frac{d}{dz} X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} [nx(n)z^{-n}]$$

所以得到 z 域微分特性

$$nx(n) \leftrightarrow -z \frac{d}{dz} X(z)$$

该性质又称为序列线性加权特性。

【例 5.5.8】 求 $na^{n-1}u(n)$ 的 z 变换。

解: 利用式(5.5.9)表示的变换对

$$a^n u(n) \leftrightarrow \frac{z}{z-a}, \quad |z| > |a|$$

利用 z 域微分特性,得

$$na^n u(n) \leftrightarrow -z \frac{d}{dz} \left[\frac{z}{z-a} \right] = \frac{az}{(z-a)^2}, \quad |z| > |a|$$

两边同除以 a 得

$$na^{n-1} u(n) \leftrightarrow \frac{z}{(z-a)^2}, \quad |z| > |a|$$

5.5.4 单边 z 变换的定义

如果式(5.5.5)的求和以 $n=0$ 为起点,即

$$X(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} x(n)z^{-n} \quad (5.5.22)$$

称为单边 z 变换。简记为

$$x(n)u(n) \leftrightarrow X(z)$$

由此定义可知,当 $x(n)$ 是因果信号时,其单、双边 z 变换相等;否则二者不等。

单边 z 变换的收敛域只有全 z 平面收敛和圆外收敛两种情况,而且单边 z 变换可以与时域信号一一对应,所以可以不标注其收敛域。

5.5.5 单边 z 变换的性质

单边 z 变换有着许多非常重要的性质,其中一些与双边 z 变换性质相同,但也存在几个不同的典型性质,下面进行证明分析。

1. 时移特性

设 m 为大于零的整数,我们首先来求 $x(n)$ 左移序列 $x(n+m)$ 的单边 z 变换,有

$$\begin{aligned} x(n+m) &\leftrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} x(n+m)z^{-n} \xrightarrow{\text{令 } n+m=k} \sum_{k=m}^{+\infty} x(k)z^{m-k} \\ &= z^m \sum_{k=m}^{+\infty} x(k)z^{-k} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= z^m \left[\sum_{k=0}^{+\infty} x(k) z^{-k} - \sum_{k=0}^{m-1} x(k) z^{-k} \right] \\
 &= z^m \left[X(z) - \sum_{k=0}^{m-1} x(k) z^{-k} \right]
 \end{aligned}$$

得到单边 z 变换的时移特性:

若 $x(n) \leftrightarrow X(z)$, 则

$$x(n+m) \leftrightarrow z^m \left[X(z) - \sum_{k=0}^{m-1} x(k) z^{-k} \right] \quad (5.5.23)$$

式(5.5.23)表明, $x(n)$ 超前(左移) m 个单位后的单边 z 变换, 是原来的 z 变换 $X(z)$ 与由纵轴右边移到左边部分的 z 变换之差乘以 z^m , 如图 5.41(b) 所示。

同理可得, $x(n)$ 的右移序列 $x(n-m)$ 的单边 z 变换为

$$x(n-m) \leftrightarrow z^{-m} \left[X(z) + \sum_{k=-m}^{-1} x(k) z^{-k} \right] \quad (5.5.24)$$

即 $x(n)$ 延迟(右移) m 个单位后的单边 z 变换, 是原来的 z 变换 $X(z)$ 与由纵轴左边移到右边部分的 z 变换之和乘以 z^{-m} , 如图 5.41(c) 所示。

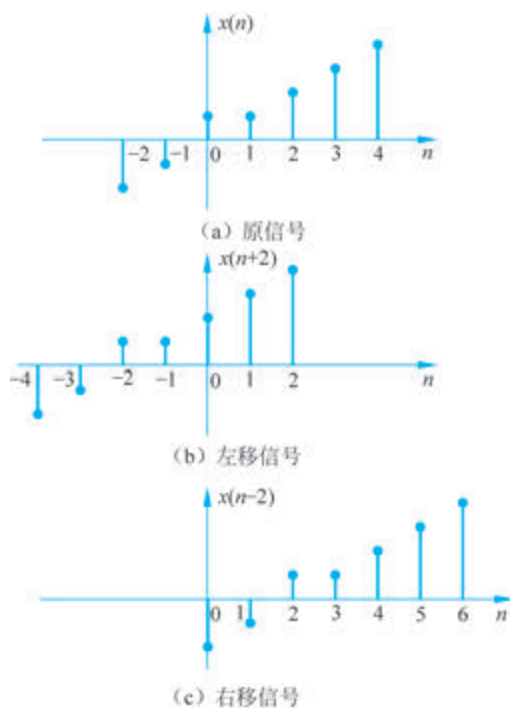


图 5.41 离散时间信号及其左移和右移两个单位后的信号

移位后序列的收敛域与原来相同,但在 $|z|=0$ 和 $|z|=+\infty$ 处的收敛情况可能会发生变化。

观察式(5.5.12)、式(5.5.23)、式(5.5.24)可见,单边 z 变换的时移特性比双边 z 变换复杂,这是因为单边 z 变换的求和下限为 $n=0$ 。

如果 $x(n)$ 是因果序列, 则式(5.5.24) 中的 $\sum_{k=-m}^{-1} x(k)z^{-k}$ 项等于零, 于是得到因果序列右移后的单边 z 变换为

$$x(n-m) \leftrightarrow z^{-m}X(z) \quad (5.5.25)$$

经常用到的是 $m=1, 2$ 的情况, 于是有

$$x(n-1) \leftrightarrow z^{-1}X(z) + x(-1)$$

$$x(n-2) \leftrightarrow z^{-2}X(z) + z^{-1}x(-1) + x(-2)$$

$$x(n+1) \leftrightarrow zX(z) - zx(0)$$

$$x(n+2) \leftrightarrow z^2X(z) - z^2x(0) - zx(1)$$

描述离散时间 LTI 系统的是常系数线性差分方程, 显然可以利用单边 z 变换的时移特性将差分方程转换到 z 域进行分析求解。

2. 初值定理和终值定理

若因果信号 $x(n) \leftrightarrow X(z)$, 则

$$x(0) = \lim_{z \rightarrow +\infty} X(z) \quad (5.5.26)$$

式(5.5.26)称为**初值定理**。

证明: 对于因果信号 $x(n)$, 由于

$$X(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} x(n)z^{-n} = x(0) + x(1)z^{-1} + x(2)z^{-2} + \dots$$

当 $z \rightarrow +\infty$ 时, 上式中的级数除了第一项 $x(0)$ 外, 其他各项都趋于零, 所以有

$$\lim_{z \rightarrow +\infty} X(z) = x(0)$$

可见, 对于因果序列 $x(n)$, 我们可以直接由 $X(z)$ 求得时域序列的初始值, 而不必求反变换。

另外, 由初值定理不难得出, 如果因果信号 $x(n)$ 在 $n=0$ 处取值为有限值, 则 $z \rightarrow +\infty$ 时 $X(z)$ 一定是有限值。

若因果信号 $x(n) \leftrightarrow X(z)$, 且 $X(z)$ 除在 $z=1$ 处可以有一阶极点外, 其他全部极点都在单位圆 $|z|=1$ 以内, 则

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x(n) = \lim_{z \rightarrow 1} [(z-1)X(z)] \quad (5.5.27)$$

式(5.5.27)称为**终值定理**。其证明过程如下。

证明: 根据单边 z 变换的定义

$$x(n+1) - x(n) \leftrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} [x(n+1) - x(n)]z^{-n}$$

根据单边 z 变换的时移特性

$$x(n+1) - x(n) \leftrightarrow zX(z) - zx(0) - X(z)$$

因此有

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} [x(n+1) - x(n)]z^{-n} &= zX(z) - zx(0) - X(z) \\ &= (z-1)X(z) - zx(0) \end{aligned}$$

即

$$(z-1)X(z) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^N [x(n+1) - x(n)]z^{-n} + zx(0)$$

若 $(z-1)X(z)$ 的收敛域包含单位圆,则上式两边可以取 $z \rightarrow 1$ 的极限,即

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)X(z) &= \lim_{z \rightarrow 1} \left\{ \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^N [x(n+1) - x(n)]z^{-n} \right\} + x(0) \\ &= \lim_{N \rightarrow +\infty} \left\{ \lim_{z \rightarrow 1} \sum_{n=0}^N [x(n+1) - x(n)]z^{-n} \right\} + x(0) \\ &= \lim_{N \rightarrow +\infty} \left\{ \sum_{n=0}^N [x(n+1) - x(n)] \right\} + x(0) \\ &= \lim_{N \rightarrow +\infty} [x(1) - x(0) + x(2) - x(1) + \cdots + x(N) - \\ &\quad x(N-1) + x(N+1) - x(N)] + x(0) \\ &= \lim_{N \rightarrow +\infty} x(N+1) \end{aligned}$$

即

$$\lim_{z \rightarrow 1} (z-1)X(z) = \lim_{n \rightarrow +\infty} x(n)$$

应用终值定理时要特别注意条件“ $X(z)$ 除在 $z=1$ 处可以有一阶极点外,其他全部极点都在单位圆 $|z|=1$ 以内”,从以上证明的过程中可以看出,该条件是为了保证 $(z-1)X(z)$ 的收敛域包含单位圆,从而保证 $\lim_{n \rightarrow +\infty} x(n)$ 存在。

z 变换的性质如表 5.10 所示。

表 5.10 z 变换的性质

性质名称		z 变换
线性特性		$a_1 x_1(n) + a_2 x_2(n) \leftrightarrow a_1 X_1(z) + a_2 X_2(z)$
复频移特性		$z_0^n x(n) \leftrightarrow X\left(\frac{z}{z_0}\right), z_0 r_1 < z < z_0 r_2$
z 域微分特性		$nx(n) \leftrightarrow -z \frac{d}{dz} X(z)$
时域卷积定理		$x_1(n) * x_2(n) \leftrightarrow X_1(z) X_2(z)$
时移特性	双边	$x(n \pm n_0) \leftrightarrow X(z) z^{\pm n_0}$
	单边	左移: $x(n+m) \leftrightarrow z^m \left[X(z) - \sum_{k=0}^{m-1} x(k) z^{-k} \right]$ 右移: $x(n-m) \leftrightarrow z^{-m} \left[X(z) + \sum_{k=-m}^{-1} x(k) z^{-k} \right]$
时域翻转特性	双边	$x(-n) \leftrightarrow X(z^{-1}), \frac{1}{r_2} < z < \frac{1}{r_1}$
初值定理	单边	$x(0) = \lim_{z \rightarrow \infty} X(z)$
终值定理	单边	若 $(z-1)X(z)$ 的收敛域包含单位圆,则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x(n) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)X(z)$

利用 z 变换的常用变换对和性质,可以得到更多的 z 变换对,如表 5.11 所示,方便对照查看。

表 5.11 常用 z 变换对

$x(n)$	$X(z)$
$\delta(n)$	$1, 0 \leq z \leq +\infty$
$\delta(n+1)$	$z, 0 \leq z < +\infty$
$\delta(n-1)$	$z^{-1}, 0 < z \leq +\infty$
$a^n u(n)$	$\frac{z}{z-a}, z > a $
$-a^n u(-n-1)$	$\frac{z}{z-a}, z < a $
$a^n u(n) + b^n u(-n-1)$	$\frac{z(a-b)}{(z-a)(z-b)}, a < z < b $
$na^n u(n)$	$\frac{az}{(z-a)^2}, z > a $
$-na^n u(-n-1)$	$\frac{az}{(z-a)^2}, z < a $
$\cos(\beta n) u(n)$	$\frac{z(z-\cos\beta)}{z^2-2z\cos\beta+1}, z > 1$
$\sin(\beta n) u(n)$	$\frac{z\sin\beta}{z^2-2z\cos\beta+1}, z > 1$
$a^n \cos(\beta n) u(n)$	$\frac{z(z-a\cos\beta)}{z^2-2za\cos\beta+a^2}, z > a $
$a^n \sin(\beta n) u(n)$	$\frac{za\sin\beta}{z^2-2za\cos\beta+a^2}, z > a $

5.6 z 反变换求解

首先,与其他几种变换类似,可以利用常用的 z 变换对,结合 z 变换的性质,来求解 $X(z)$ 对应的时域序列 $x(n)$ 。这里不再详述。

对于双边 z 变换,求解反变换时需要特别注意收敛域。

其次,对于有理分式形式的 $X(z)$ 求反变换,可以采用部分分式展开法。另外,观察 z 变换的定义式不难发现, $X(z)$ 也可以看作以 z 为变量的无穷幂级数,因此还可以利用幂级数展开法,直接得到时域序列。

5.6.1 部分分式展开法

当 $X(z)$ 是 z 的有理分式时,可以采用部分分式展开法。需要注意的是, z 反变换与

傅里叶反变换、拉普拉斯反变换不同,这里的常用变换对中的分子含有 z 。因此,建议先提出 z 后,再对剩下的分式做部分分式展开。下面举例说明。

【例 5.6.1】 已知 $X(z) = \frac{z}{z^2 - z - 2}$, 收敛域分别为: ① $|z| > 2$; ② $|z| < 1$; ③ $1 < |z| < 2$ 。求其对应的时域序列 $x(n)$ 。

解: 观察前面列出的几个常用 z 变换对可以发现,对 $X(z)$ 进行部分分式展开时,形式上展成 $\frac{z}{(z-a)^m}$ 的组合比较好。所以令 $X(z) = zX_1(z)$,然后先对 $X_1(z)$ 进行部分分式展开,最终得到

$$X(z) = \frac{z}{z^2 - z - 2} = \frac{z}{(z+1)(z-2)} = \frac{-\frac{1}{3}z}{z+1} + \frac{\frac{1}{3}z}{z-2}$$

有两个极点, $p_1 = -1, p_2 = 2$; 收敛域有三种情况:

① 当收敛域为 $|z| > 2$ 时,有

$$x(n) = -\frac{1}{3}(-1)^n u(n) + \frac{1}{3} \times 2^n u(n)$$

② 当收敛域为 $|z| < 1$ 时,有

$$x(n) = \frac{1}{3}(-1)^n u(-n-1) - \frac{1}{3} \times 2^n u(-n-1)$$

③ 当收敛域为 $1 < |z| < 2$ 时,有

$$x(n) = -\frac{1}{3}(-1)^n u(n) - \frac{1}{3} \times 2^n u(-n-1)$$

5.6.2 幂级数展开法

由 z 变换的定义式 $X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)z^{-n}$ 可以看出,若将 $X(z)$ 写成幂级数的形式,那么该幂级数各对应项的系数就构成了离散时间信号 $x(n)$ 。下面举例说明。

【例 5.6.2】 已知 $X(z) = -2z^{-2} + 2z + 1$, 求反变换。

解: 根据 z 变换的定义,显然

$$x(2) = -2, x(-1) = 2, x(0) = 1, \text{其余 } x(n) = 0$$

所以, $x(n) = \{2, 1, 0, -2\}_{-1}$

如果 $X(z)$ 不是 z 的幂级数形式,可以采用其他方法(如长除法)将其展成幂级数形式。

【例 5.6.3】 已知 $X(z) = \frac{z}{z^2 - z - 2}$, 收敛域为 $|z| > 2$, 试用幂级数展开法求反变换。

解: 由于收敛域为 $|z| > 2$, 故 $x(n)$ 为右边信号, $X(z)$ 为 z 的降幂多项式。用长除法

时除式应按照 z 的降幂排列,即

$$\begin{array}{r}
 z^{-1} + z^{-2} + 3z^{-3} + 5z^{-4} + \dots \\
 z^2 - z - 2 \overline{) z} \\
 \underline{z - 1 - 2z^{-1}} \\
 1 + 2z^{-1} \\
 \underline{1 - z^{-1} - 2z^{-2}} \\
 3z^{-1} + 2z^{-2} \\
 \underline{3z^{-1} - 3z^{-2} - 6z^{-3}} \\
 5z^{-2} + 6z^{-3} \\
 \dots
 \end{array}$$

所以, $x(n) = \{1, 1, 3, 5 \dots\}_1$ 。

【例 5.6.4】 已知 $X(z) = \frac{z}{z^2 - z - 2}$, 收敛域为 $|z| < 1$, 试用幂级数展开法求反变换。

解: 由于收敛域为 $|z| < 1$, 故 $x(n)$ 为左边信号, $X(z)$ 为 z 的升幂多项式。用长除法时除式应按照 z 的升幂排列, 即

$$\begin{array}{r}
 -\frac{1}{2}z + \frac{1}{4}z^2 - \frac{3}{8}z^3 + \dots \\
 -2 - z + z^2 \overline{) z} \\
 \underline{z + \frac{1}{2}z^2 - \frac{1}{2}z^3} \\
 -\frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{2}z^3 \\
 \underline{-\frac{1}{2}z^2 - \frac{1}{4}z^3 + \frac{1}{4}z^4} \\
 \frac{3}{4}z^3 - \frac{1}{4}z^4 \\
 \underline{\frac{3}{4}z^3 + \frac{3}{8}z^4 - \frac{3}{8}z^5} \\
 -\frac{5}{8}z^4 + \frac{3}{8}z^5 \\
 \dots
 \end{array}$$

所以

$$x(n) = \left\{ \dots, -\frac{3}{8}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{2} \right\}_{\uparrow n=-1}$$

从上面两个例题可以看出, 长除法既可展成升幂级数也可展成降幂级数, 这完全取决于收敛域。所以运用长除法之前, 一定要先根据收敛域确定是左边序列还是右边序列, 然后才能正确地决定是按升幂长除, 还是按降幂长除; 只有选择得当才能使长除得到的 $X(z)$ 收敛。另外, 也可看出利用幂级数展开不易得到闭合形式的表达式。

5.7 离散时间线性时不变系统的 z 域分析

5.7.1 利用单边 z 变换求解 LTI 系统的全响应

与连续时间系统分析中拉氏变换相对应, z 变换是分析离散时间 LTI 系统的有力数学工具。本小节讨论运用 z 变换求解系统响应的一些问题。

如前所述, 描述离散时间 LTI 系统的是常系数线性差分方程, 其一般形式如下:

(1) 前向差分表示:

$$y(n+k) + a_{k-1}y(n+k-1) + \cdots + a_1y(n+1) + a_0y(n) = b_mx(n+m) + b_{m-1}x(n+m-1) + \cdots + b_1x(n+1) + b_0x(n) \quad (5.7.1)$$

(2) 后向差分表示:

$$y(n-k) + a_{k-1}y(n-k+1) + \cdots + a_1y(n-1) + a_0y(n) = b_mx(n-m) + b_{m-1}x(n-m+1) + \cdots + b_1x(n-1) + b_0x(n) \quad (5.7.2)$$

式中, 各系数均为实数。若系统用前向差分方程表示, 则系统初始状态由 $y(1)$ 、 $y(2)$ 、 $\cdots$ 、 $y(k)$ 给出, 若系统用后向差分方程表示, 初始状态为 $y(-1)$ 、 $y(-2)$ 、 $\cdots$ 、 $y(-k)$ 。

求系统响应的过程就是解此差分方程。第2章中讨论了差分方程的时域求解方法, 求解过程较为烦琐。下面我们学习用 z 变换的方法求解差分方程。

令 $x(n) \leftrightarrow X(z)$, $y(n) \leftrightarrow Y(z)$, 根据单边 z 变换的时移特性, 即式(5.5.23)和式(5.5.24), 将式(5.7.1)和式(5.7.2)等号两边取 z 变换, 就可以将描述 $y(n)$ 和 $x(n)$ 之间关系的差分方程变换为描述 $Y(z)$ 和 $X(z)$ 之间关系的代数方程, 并且初始状态已自然地包含在其中, 可直接得出系统的全响应解, 求解步骤简明且有规律。现举例说明。

【例 5.7.1】 某因果离散系统的差分方程为 $y(n) - 4y(n-1) + 3y(n-2) = x(n)$, 初始条件为 $y(-1) = 0$, $y(-2) = 1/2$, $x(n) = 2^n u(n)$, 求系统的全响应 $y(n)$ 。

解: 对原差分方程两边取 z 变换, 可得

$$Y(z) - 4[z^{-1}Y(z) + y(-1)] + 3[z^{-2}Y(z) + z^{-1}y(-1) + y(-2)] = X(z)$$

将 $y(-1) = 0$, $y(-2) = 1/2$, $X(z) = \frac{z}{z-2}$ 代入上式得

$$\begin{aligned} Y(z) &= \frac{X(z)}{1 - 4z^{-1} + 3z^{-2}} + \frac{4y(-1) - 3z^{-1}y(-1) - 3y(-2)}{1 - 4z^{-1} + 3z^{-2}} \\ &= \frac{z^2}{z^2 - 4z + 3} \cdot \frac{z}{z-2} + \frac{-\frac{3}{2}z^2}{z^2 - 4z + 3} \\ &= \underbrace{\frac{\frac{1}{2}z}{z-1} + \frac{\frac{9}{2}z}{z-3} + \frac{-4z}{z-2}}_{\text{零状态响应 } Y_{zs}(z)} + \underbrace{\frac{\frac{3}{4}z}{z-1} + \frac{-\frac{9}{4}z}{z-3}}_{\text{零输入响应 } Y_{zi}(z)} \end{aligned}$$

$$= \underbrace{\frac{5}{4}z}_{\text{自由响应 } Y_n(z)} + \underbrace{\frac{9}{4}z}_{\text{自由响应 } Y_n(z)} + \underbrace{\frac{-4z}{z-2}}_{\text{强迫响应 } Y_f(z)}$$

所以

$$\begin{aligned} y(n) &= \underbrace{\frac{1}{2}u(n) + \frac{9}{2}3^n u(n) - 4 \times 2^n u(n)}_{y_{zs}(n)} + \underbrace{\frac{3}{4}u(n) - \frac{9}{4}3^n u(n)}_{y_{zi}(n)} \\ &= \underbrace{\frac{5}{4}u(n) + \frac{9}{4} \times 3^n u(n)}_{y_n(n)} - \underbrace{4 \times 2^n u(n)}_{y_f(n)} \end{aligned}$$

可见, $Y(z)$ 的极点由两部分组成: 一部分是系统特征根形成的极点 1、3; 另一部分是激励信号 $X(z)$ 的极点 2。其中, 固有响应 $Y_n(z)$ 的极点就是系统函数的极点(特征根, 又称为固有频率), 所以说, 固有响应 $y_n(n)$ 的函数形式由系统特征根决定。而强迫响应 $Y_f(z)$ 的极点就是激励信号 $X(z)$ 的极点, 所以说, 强迫响应 $y_f(n)$ 的函数形式由激励信号决定。

5.7.2 离散时间系统的系统函数及系统特性

1. 系统函数

如前所述, 根据描述 LTI 离散时间系统的常系数线性差分方程, 设系统初始状态为零, 输入 $x(n)$ 的 z 变换记为 $X(z)$, 零状态响应 $y_{zs}(n)$ 的 z 变换记为 $Y_{zs}(z)$, 对式(5.7.1)两边取 z 变换, 得到

$$Y_{zs}(z) \sum_{l=0}^k a_l z^l = X(z) \sum_{r=0}^m b_r z^r \quad (5.7.3)$$

令 $A(z) = \sum_{l=0}^k a_l z^l$, $B(z) = \sum_{r=0}^m b_r z^r$, 得到

$$Y_{zs}(z) = X(z) \frac{B(z)}{A(z)} \quad (5.7.4)$$

令

$$H(z) = \frac{Y_{zs}(z)}{X(z)} = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \cdots + b_1 z + b_0}{a_k z^k + a_{k-1} z^{k-1} + \cdots + a_1 z + a_0} \quad (5.7.5)$$

$H(z)$ 称为离散时间系统的**系统函数**。可见, 根据描述系统的差分方程容易写出系统函数 $H(z)$, 反之亦然。系统函数只取决于系统本身, 而与激励无关, 与系统内部的初始状态也无关。

因此, 零状态响应

$$Y_{zs}(z) = X(z) H(z) \quad (5.7.6)$$

式(5.7.5)和式(5.7.6)中的 $H(z)$ 就是单位样值响应 $h(n)$ 的 z 变换, 即

$$\mathbf{Z}[h(n)] = X(z) H(z) = H(z) \quad (5.7.7)$$

也即,单位样值响应 $h(n)$ 与系统函数 $H(z)$ 是一对 z 变换对。

【例 5.7.2】 设离散系统的差分方程 $y(n)-0.6y(n-1)-0.16y(n-2)=5x(n)$, 试求其系统函数 $H(z)$ 和单位样值响应 $h(n)$ 。

解: 设初始状态为零,上式两边求双边 z 变换,得到

$$Y_{zs}(z)-0.6z^{-1}Y_{zs}(z)-0.16z^{-2}Y_{zs}(z)=5X(z)$$

所以有

$$(1-0.6z^{-1}-0.16z^{-2})Y_{zs}(z)=5X(z)$$

所以系统函数为

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{5}{1-0.6z^{-1}-0.16z^{-2}} = \frac{5z^2}{z^2-0.6z-0.16} \\ &= \frac{5z^2}{(z+0.2)(z-0.8)} = \frac{z}{z+0.2} + \frac{4z}{z-0.8} \end{aligned}$$

由于题目中未指明系统的因果性,应根据收敛域分情况讨论。显然收敛域存在三种可能:

(1) 当收敛域为 $|z|>0.8$ 时,有

$$h(n) = (-0.2)^n u(n) + 4 \times 0.8^n u(n)$$

(2) 当收敛域为 $|z|<0.2$ 时,有

$$h(n) = -(-0.2)^n u(-n-1) - 4 \times 0.8^n u(-n-1)$$

(3) 当收敛域为 $0.2<|z|<0.8$ 时,有

$$h(n) = (-0.2)^n u(n) - 4 \times 0.8^n u(-n-1)$$

综上所述, z 变换的方法不仅能求解因果系统,也能求解非因果系统,而且求解方法较为简便。

一般来说,离散时间 LTI 系统的系统函数是关于 z 的有理多项式,分母多项式 $A(z)=0$ 的根称为**极点**(特征根),分子多项式 $B(z)=0$ 的根称为**零点**。

在 z 平面标出 $H(z)$ 的零极点位置,极点用“ $\times$ ”表示,零点用“ $\circ$ ”表示,就得到 $H(z)$ 的**零极点分布图**。零极点图可以表示一个系统,常用来分析系统特性。

例 5.7.2 系统的零极点分布图如图 5.42 所示。

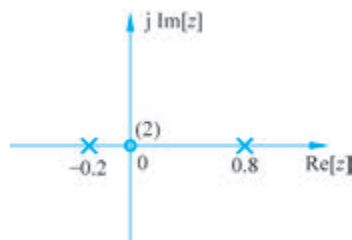


图 5.42 例 5.7.2 系统的零极点分布图

2. 系统因果性和稳定性

1) 系统因果性分析

已知因果系统的时域特征,单位样值响应 $h(n)$ 满足

$$h(n) = 0, \quad n < 0 \quad (5.7.8)$$

显然,由于 $n < 0$ 时 $h(n)$ 的样值点均为零,则其对应的系统函数 $H(z)$ 为 z 的负幂多项式,故因果系统的 $H(z)$ 收敛域必定包含无穷远点。

2) 系统稳定性分析

稳定性是系统一个极为重要的特性,也是系统能够正常工作的基本条件。离散时间

系统为稳定系统的充分必要条件是,单位样值响应 $h(n)$ 满足绝对可和,即

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h(n)| \leq M, \quad M \text{ 为有限正常数} \quad (5.7.9)$$

前面讨论离散时间傅里叶变换的收敛性时已经指出:只要信号绝对可和,它的傅里叶变换就存在。也就是说,如果单位样值响应 $h(n)$ 绝对可和,那么系统函数 $H(z)$ 的收敛域包含单位圆,则系统是稳定的。

前面分别得出了系统因果和系统稳定的条件,表 5.12 进行了总结。

表 5.12 系统因果性和稳定性分析

系统特性	时域特点	z 域特点
因果系统	$h(n)=0, n<0$	收敛域必定包含无穷远点
稳定系统	$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} h(n) \leq M, M \text{ 为有限正常数}$	收敛域包含单位圆
因果稳定系统	$h(n)=0, n<0$, 并且 $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} h(n) \leq M$, M 为有限正常数	所有极点都位于单位圆内

【例 5.7.3】 已知某离散时间系统的系统函数为 $H(z) = \frac{z}{z^2 - \frac{7}{2}z + 3}$, 画出收敛域, 讨论其因果性和稳定性, 并说明原因。

解: 有两个一阶极点, $p_1=2, p_2=\frac{3}{2}$, 收敛域可以有三种情况, 如图 5.43 所示。

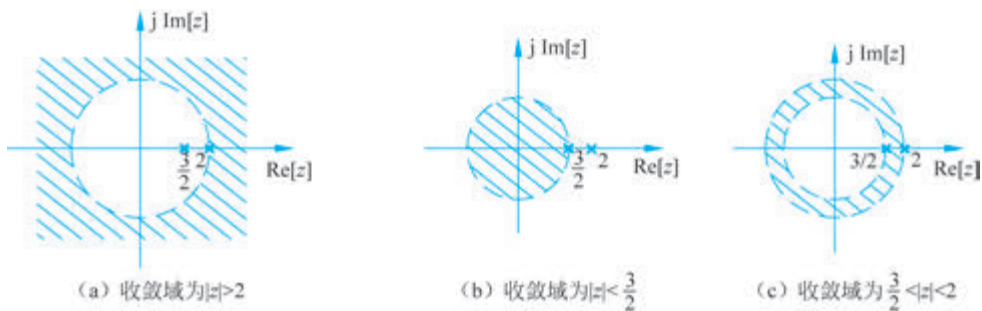


图 5.43 例 5.7.3 中的收敛域

(1) 收敛域为 $|z| > 2$, 如图 5.43(a) 所示。因为收敛域不包含单位圆, 故系统不稳定; 因为收敛域包含无穷远点, 故系统是因果系统。

(2) 收敛域为 $|z| < \frac{3}{2}$, 如图 5.43(b) 所示。因为收敛域包含单位圆, 故系统稳定; 因为收敛域不包含无穷远点, 故系统是非因果系统。

(3) 收敛域为 $\frac{3}{2} < |z| < 2$, 如图 5.43(c) 所示。因为收敛域不包含单位圆, 故系统不稳定; 因为收敛域不包含无穷远点, 故系统是非因果系统。

3. 系统零极点位置与系统频率响应

在学习连续时间信号的傅里叶变换和拉氏变换时已经看到,对于连续时间信号,在 s 平面虚轴上的拉氏变换就是其傅里叶变换,同时讨论了根据系统函数 $H(s)$ 的零极点图,用几何的方法可确定出频率响应 $H(j\omega)$ 。对于离散时间信号 $x(n)$,在 z 平面单位圆上的 z 变换就是其离散时间傅里叶变换,同样可以利用系统函数 $H(z)$ 的零极点图,用几何方法确定其频率响应 $H(j\Omega)$ 。但是,由于这种情况是在 $|z|=1$ 的单位圆上求值,所以应该考虑从极点或零点到单位圆上的向量,而不是到虚轴上的向量。

设系统函数为

$$H(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = K \frac{\prod_{i=1}^M (z - z_i)}{\prod_{k=1}^N (z - p_k)}$$

当收敛域包含单位圆时,频率响应为

$$H(j\Omega) = H(z) \Big|_{z=e^{j\Omega}} = K \frac{\prod_{i=1}^M (e^{j\Omega} - z_i)}{\prod_{k=1}^N (e^{j\Omega} - p_k)} = |H(j\Omega)| e^{j\angle H(j\Omega)}$$

令 $e^{j\Omega} - p_k = A_k e^{j\theta_k}$, $e^{j\Omega} - z_i = B_i e^{j\varphi_i}$, 则

$$\begin{aligned} H(j\Omega) &= |H(j\Omega)| e^{j\angle H(j\Omega)} = K \frac{\prod_{i=1}^M B_i e^{j\varphi_i}}{\prod_{k=1}^N A_k e^{j\theta_k}} \\ &= K \frac{B_1 B_2 \cdots B_M e^{j(\varphi_1 + \varphi_2 + \cdots + \varphi_M)}}{A_1 A_2 \cdots A_N e^{j(\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_N)}} \\ &= K \frac{B_1 B_2 \cdots B_M}{A_1 A_2 \cdots A_N} e^{[j(\varphi_1 + \varphi_2 + \cdots + \varphi_M) - (\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_N)]} \end{aligned}$$

故幅频特性为

$$|H(j\Omega)| = K \frac{B_1 B_2 \cdots B_M}{A_1 A_2 \cdots A_N} \quad (5.7.10)$$

相频特性为

$$\angle H(j\Omega) = (\varphi_1 + \varphi_2 + \cdots + \varphi_M) - (\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_N) \quad (5.7.11)$$

所以,系统的幅频特性是各个零点到单位圆上的向量长度之积,再除以各个极点到单位圆上的向量长度之积;相频特性是各个零点到单位圆上的向量幅角之和,再减去各个极点到单位圆上的向量幅角之和。零极点向量图如图 5.44 所示。当然,这里假定 $K > 0$,当 $K < 0$ 时,还有一个附加相位 π 。

这样,利用式(5.7.10)和式(5.7.11),就可以根据零极点图,利用几何图解法对系统

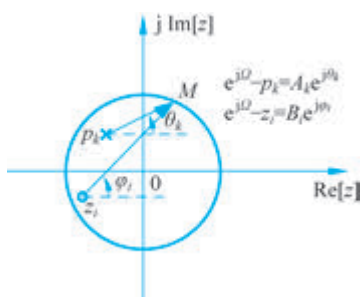


图 5.44 零极点向量图

的幅频特性和相频特性进行分析。

当 Ω 从 $0 \sim 2\pi$ 变化时, 即复变量 z 从 $z=1$ 沿单位圆逆时针方向旋转一周时, 各极点向量和零点向量的模和幅角也随之变化, 从而得到系统的幅频特性和相频特性。当旋转到某个极点 p_k 附近, 使得相应向量的长度最短时, 该极点对此 Ω 处的幅频响应有增强的作用。极点 p_k 越靠近单位圆, 则幅频响应在峰值附近越尖锐; 若极点落在单位圆上, 则峰值趋于无穷大。零点的作用恰好相反。

位于原点处的零极点对系统幅频特性不产生作用, 因而在 $z=0$ 处加入或者去除极点或零点, 幅频特性不变, 而只会影响相频特性。

【例 5.7.4】 求图 5.45 所示一阶因果离散时间系统 ($0 < a < 1$ 为常数) 的频率响应, 大致画出幅频特性图, 并分析系统的滤波特性。



图 5.45 一阶因果离散时间系统

解: 该系统的系统函数为

$$H(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}} = \frac{z}{z - a}$$

由上式可得, 零点 $z_1=0$, 极点 $p_1=a$ 。

由于 $0 < a < 1$, 收敛域包含单位圆, $H(j\Omega)$ 存在, 为

$$H(j\Omega) = H(z) \Big|_{z=e^{j\Omega}} = \frac{e^{j\Omega}}{e^{j\Omega} - a} = \frac{1}{1 - ae^{-j\Omega}} = \frac{1}{1 - a\cos\Omega + ja\sin\Omega}$$

幅频特性为

$$|H(j\Omega)| = \frac{1}{\sqrt{(1 - a\cos\Omega)^2 + a^2\sin^2\Omega}} = \frac{1}{\sqrt{1 + a^2 - 2a\cos\Omega}}$$

相频特性为

$$\angle H(j\Omega) = -\arctan \frac{a\sin\Omega}{1 - a\cos\Omega}$$

当 $a=0.2$ 和 $a=0.9$ 时, 频率响应分别如图 5.46(a)、图 5.46(b) 所示。由图可见, 系统完成低通滤波功能。

下面用零极点图来分析系统的幅频特性。

该系统的零极点图如图 5.47 所示。

在单位圆上取一点 M , 对应的相角为 Ω , 过极点和零点分别向 M 连线得到向量 **A** 和 **B**。由于零点位于原点, 向量 **B** 的模始终为 1。而当 $\Omega=0$ 时, M 点与极点距离最近, 即向量 **A** 的模最小, 此时 $|H(j\Omega)|$ 最大; 当 Ω 从 0 逐渐增大到 π , 向量 **A** 的模逐渐增大, 所

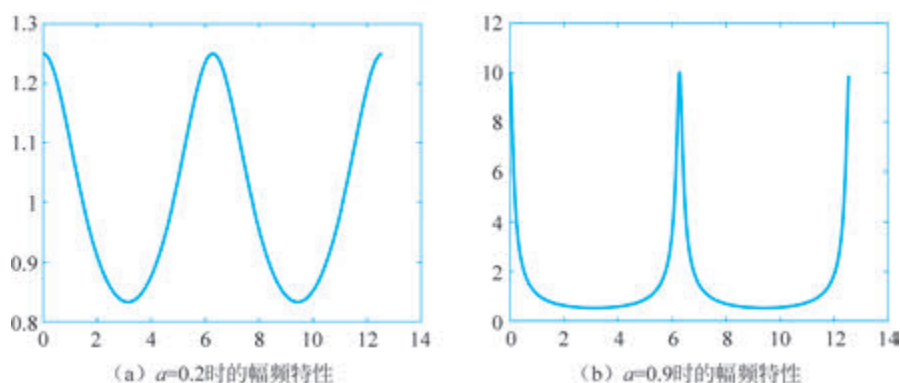


图 5.46 频率响应

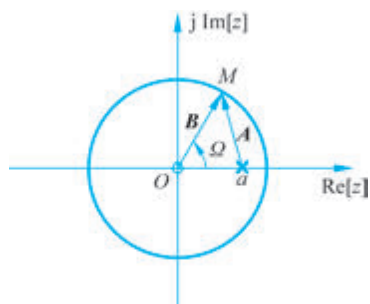


图 5.47 零极点图

以系统幅频特性 $|H(j\Omega)|$ 逐渐减小；当 $\Omega = \pi$ 时， $|H(j\Omega)|$ 最小； Ω 从 π 继续逐渐增大到 2π ， A 的模逐渐减小，所以 $|H(j\Omega)|$ 逐渐增大。并且， a 越接近 1，极点越靠近单位圆，当 $\Omega = 2n\pi$ 时 $|H(j\Omega)|$ 的峰值越尖锐。这与图 5.46 中的分析结果是一致的。

5.7.3 离散时间系统模拟

与连续时间系统类似，离散时间系统也可以用方框图或信号流图来表示，二者可以相互转换。掌握了这些图形表示方法，我们也可以像连续时间系统一样，反过来从系统函数或差分方程等出发，进行系统的模拟。

表 5.13 所示为基本运算单元的框图和流图表示。可以根据信号流图，利用梅森公式求解系统函数 $H(z)$ ，也可以根据 $H(z)$ 画出信号流图为系统模拟做准备。下面举例说明。

表 5.13 基本运算单元的框图和流图表示

名 称	框 图 表 示	流 图 表 示
加法器		

续表

名 称	框 图 表 示	流 图 表 示
标量乘法器(数乘器)	$X(z) \rightarrow [a] \rightarrow aX(z)$	$X(z) \xrightarrow{a} aX(z)$
单位延时器	$X(z) \rightarrow [z^{-1}] \rightarrow z^{-1}X(z)$	$X(z) \xrightarrow{z^{-1}} z^{-1}X(z)$

【例 5.7.5】 已知某离散时间系统的框图如图 5.48(a)所示,画出其流图表示形式,求出系统函数和差分方程。

解: 流图表示如图 5.48(b)所示。

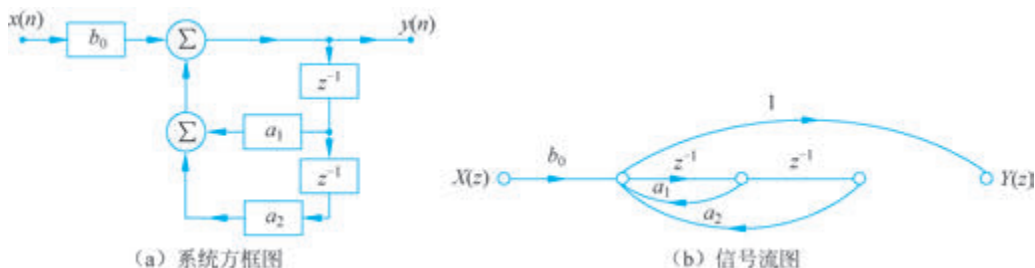


图 5.48 例 5.7.5

两个回路分别为 $L_1 = a_1 z^{-1}$ 、 $L_2 = a_2 z^{-2}$, 其流图特征式为

$$\Delta = 1 - (L_1 + L_2) = 1 - a_1 z^{-1} - a_2 z^{-2}$$

只有一条前向通路, $T_1 = b_0$, 拆除后, 无回路, 故 $\Delta_1 = 1$ 。

所以, 根据梅森公式, 容易得出系统函数为

$$H(z) = \frac{T_1 \Delta_1}{\Delta} = \frac{b_0}{1 - a_1 z^{-1} - a_2 z^{-2}}$$

所以有

$$Y(z) - a_1 z^{-1} Y(z) - a_2 z^{-2} Y(z) = b_0 X(z)$$

因此, 该离散时间系统的差分方程为

$$y(n) - a_1 y(n-1) - a_2 y(n-2) = b_0 x(n)$$

【例 5.7.6】 已知某离散系统的系统函数为

$$H(z) = \frac{1 + 0.4z^{-1}}{1 - z^{-1} + 0.24z^{-2}}$$

结合梅森公式等, 画出该系统信号流图表示的直接、级联和并联实现形式。

解:

(1) 直接实现形式: 由 $H(z) = \frac{1 + 0.4z^{-1}}{1 - z^{-1} + 0.24z^{-2}}$, 结合梅森公式, 给出直接实现形式的信号流图如图 5.49(a)所示。

(2) 级联实现形式: 由 $H(z) = \frac{1 + 0.4z^{-1}}{1 - z^{-1} + 0.24z^{-2}} = \frac{1 + 0.4z^{-1}}{(1 - 0.4z^{-1})(1 - 0.6z^{-1})} =$

$\frac{1+0.4z^{-1}}{1-0.4z^{-1}} \cdot \frac{1}{1-0.6z^{-1}}$, 结合梅森公式, 给出级联实现形式的信号流图如图 5.49(b) 所示。

(3) 并联实现形式: 由 $H(z) = \frac{1+0.4z^{-1}}{1-z^{-1}+0.24z^{-2}} = \frac{1+0.4z^{-1}}{(1-0.4z^{-1})(1-0.6z^{-1})} = \frac{-4}{1-0.4z^{-1}} + \frac{5}{1-0.6z^{-1}}$, 结合梅森公式, 给出并联实现形式的信号流图如图 5.49(c) 所示。

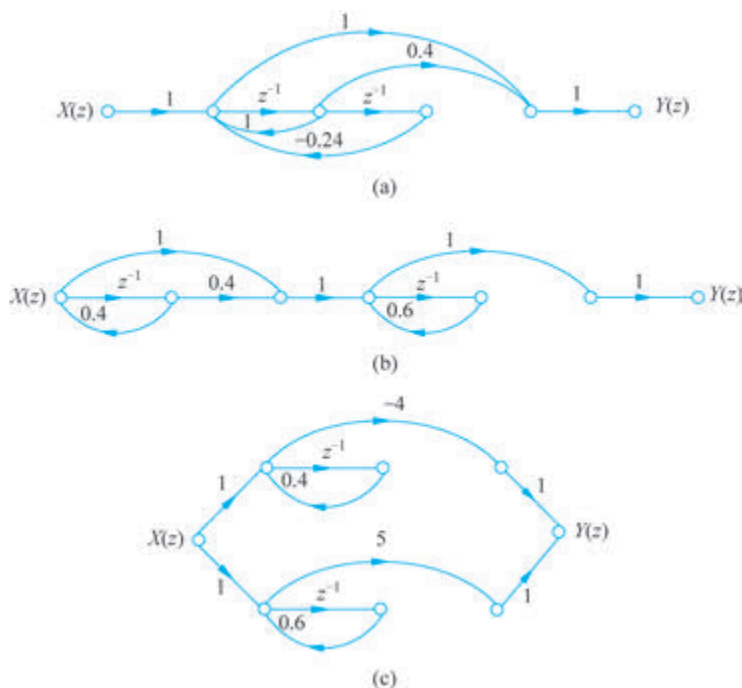


图 5.49 三种实现形式的信号流图

5.8 综合应用案例: PID 控制器

比例-积分-微分(Proportional-Integral-Derivative, PID)控制器是工业控制领域应用最广泛的反馈控制器。它的工作原理是通过持续测量系统实际输出与期望设定值之间的误差,并将该误差信号分别进行比例、积分和微分三种数学运算,最后将这三个运算结果组合起来,生成最终的控制信号,以此来驱动被控对象,使其输出精确地达到或维持在期望状态。

连续时间 PID 方程是 PID 控制器在理论分析和模拟仿真中最核心的数学模型,其中,输入是误差信号 $e(t)$, 输出为控制信号 $u(t)$ 。方程的标准形式如下

$$u(t) = K_p e(t) + K_i \int_0^t e(\tau) d\tau + K_d \frac{de(t)}{dt} \quad (5.8.1)$$

式中: $u(t)$ 是控制器输出; $e(t) = r(t) - y(t)$ 是误差信号, 作为控制器输入; K_p 为比例增益; K_i 为积分增益; K_d 为微分增益。

我们可以将该方程分解为三个独立的、物理意义清晰的部分来理解。

第一项: 比例项(Proportional Term), 即

$$u_p(t) = K_p e(t)$$

这一项最直接。它表示控制器的输出与当前时刻的误差大小成正比。这里的 K_p 是比例增益, 可以把它想象成一个放大倍数。误差 $e(t)$ 一出现, 比例项就立刻产生一个纠正力。它提供了控制器最快速、最直接的反应, 主要作用是减小误差。增大 K_p 可以使系统响应更快, 但如果过大, 会导致系统剧烈振荡甚至失稳, 就像开车时方向盘打得太急一样。

第二项: 积分项(Integral Term), 即

$$u_i(t) = K_i \int_0^t e(\tau) d\tau$$

这一项是 PID 控制器的精髓之一。它表示控制器的输出与误差从过去某个时刻(通常是 0 时刻)到当前时刻的历史累积总和成正比。 K_i 是积分增益。积分项的核心作用是消除稳态误差。所谓稳态误差, 是指当系统响应进入稳定状态(不再有剧烈变化)后, 其最终输出值与期望设定值之间依然存在的、无法消除的固定偏差。它不是暂时的波动, 而是系统在特定条件下“力所不能及”的、持续存在的误差。因此, 即使当前的瞬时误差 $e(t)$ 非常小甚至为零, 只要历史上曾经存在过误差, 积分项的输出 $u_i(t)$ 就不会是零, 而是一个累积起来的固定值。所以, PID 的这一项特别擅长对抗系统存在的持续、恒定的干扰。

第三项: 微分项(Derivative Term), 即

$$u_d(t) = K_d \frac{de(t)}{dt}$$

这一项最具“预见性”。它表示控制器的输出与误差信号在当前时刻的变化率(斜率)成正比。 K_d 是微分增益。微分项不关心误差本身有多大, 而是关心误差正在以多快的速度变大或变小。如果误差正在快速增大, 微分项就会产生一个强大的反向输出, 试图“踩刹车”, 抑制这种增长趋势。因此, 它的主要作用是预测未来误差, 增加系统的阻尼, 从而减小超调、抑制振荡、提高稳定性。就像一个有经验的司机, 看到车头开始快速偏离车道时, 会提前平稳地回正方向, 而不是等到完全偏离了再猛打方向盘。

最终的控制器输出 $u(t)$ 是这三项的线性叠加: 比例项提供当下的、基于现状的快速反应; 积分项回顾过去, 致力于彻底消灭残差; 微分项展望未来, 努力使过程平稳过渡。通过精心调整 K_p 、 K_i 、 K_d 这三个参数, 工程师可以像“调音”一样, 让系统在响应速度(快速性)、稳定精度(准确性)和过渡过程(平稳性)之间取得最佳平衡。

对式(5.8.1)两边取拉普拉斯变换(设初始条件为零), 有

$$U(s) = K_p E(s) + \frac{K_i}{s} E(s) + K_d s E(s) \quad (5.8.2)$$

可得 PID 控制器的传递函数为

$$G_c(s) = K_p + \frac{K_i}{s} + K_d s = \frac{K_d s^2 + K_p s + K_i}{s} \quad (5.8.3)$$

下面来分析如图 5.50 所示的常见单位负反馈系统。其中, PID 控制器的传递函数记作 $G_c(s)$, 被控对象的系统传递函数记作 $G_p(s)$, 反馈 $H(s)=1$ 。



图 5.50 负反馈系统

首先, 选择一个典型的一阶惯性系统作为被控对象, 这是许多物理系统 (如电机速度、温度系统) 的简化模型, 即

$$G_p(s) = \left(\frac{K}{Ts + 1} \right)$$

式中: K 为增益; T 为时间常数。

由图 5.50 易知, 系统的开环传递函数 $G_{ol}(s)$ 为

$$G_{ol}(s) = G_c(s) \cdot G_p(s) = \left(\frac{K_d s^2 + K_p s + K_i}{s} \right) \cdot \left(\frac{K}{Ts + 1} \right)$$

根据反馈理论, 闭环传递函数 $G_{cl}(s)$ (即增加单位负反馈) 为

$$G_{cl}(s) = \frac{G_{ol}(s)}{1 + G_{ol}(s)} \quad (5.8.4)$$

代入 $G_{ol}(s)$, 有

$$G_{cl}(s) = \frac{\frac{K(K_d s^2 + K_p s + K_i)}{s(Ts + 1)}}{1 + \frac{K(K_d s^2 + K_p s + K_i)}{s(Ts + 1)}}$$

整理后得到闭环传递函数为

$$G_{cl}(s) = \frac{K(K_d s^2 + K_p s + K_i)}{(T + KK_d)s^2 + (1 + KK_p)s + KK_i}$$

这个过程展示了从基本元件到完整闭环系统的建模过程, 是理解 PID 控制一阶系统的基础。

类似地, 若被控对象是一个典型的二阶系统, 例如质量-弹簧-阻尼系统, 其系统传递函数的标准形式为

$$G_p(s) = \frac{K}{s^2 + a_1 s + a_0}$$

式中: K 为系统增益; $a_1 = 2\xi\omega_n$, 为阻尼相关项; $a_0 = \omega_n^2$, 为固有频率平方; $\omega_n = 1/\tau$, 是无阻尼自然频率; ξ 为阻尼比。

由式 (5.8.4) 易知其闭环传递函数为

$$G_{cl}(s) = \frac{K(K_d s^2 + K_p s + K_i)}{s(s^2 + a_1 s + a_0) + K(K_d s^2 + K_p s + K_i)}$$

因此, 当被控对象为典型二阶系统, 并采用 PID 控制器时, 闭环传递函数为

$$G_{cl}(s) = \frac{K(K_d s^2 + K_p s + K_i)}{s^3 + (a_1 + KK_d)s^2 + (a_0 + KK_p)s + KK_i}$$

得到闭环系统的传递函数后,就可以基于我们掌握的复频域分析方法为PID设计提供强有力的支撑,将时域性能指标转化为频域设计约束,使控制器设计更加系统化和科学化。归纳起来,可以采用三种核心分析方法来全面评估系统性能:首先,通过极点分析法,直接求解特征方程的根(闭环极点),根据极点在 s 左半平面的分布来判断系统的绝对稳定性,并通过极点的实部和虚部量化预测时域响应的衰减速度、振荡频率、超调量和调节时间等动态性能;其次,利用频率响应分析法,通过分析带宽、谐振峰值、谐振频率等频域指标来评估系统跟踪速度、抗干扰能力以及对噪声的敏感度;最后,运用稳态误差分析法,借助终值定理计算系统对不同类型输入(阶跃、斜坡等)的稳态跟踪精度,并通过分析系统型别和误差常数来揭示积分环节的作用。这三种方法相辅相成,共同构成了从稳定性、动态品质到稳态精度的完整复频域分析体系,为控制器设计与优化提供了精确的理论依据。

习题 5.1

一、判断题

1. 拉普拉斯变换的收敛域(ROC)是 s 平面上使信号拉普拉斯变换绝对可积的区域。对于右边信号,其ROC总是某条竖线以右的区域。()
2. 若信号 $x(t)$ 是时限的(即仅在有限区间非零),则其拉普拉斯变换的ROC是整个 s 平面。()
3. 拉普拉斯变换的初值定理 $x(0^+) = \lim_{s \rightarrow +\infty} sX(s)$ 适用于任何信号。()
4. 利用部分分式展开法求拉普拉斯反变换时,展开系数的确定与所指定的ROC无关。()
5. 系统函数 $H(s)$ 的零极点图完全决定了系统的时域特性和频率响应特性。()

二、计算/简答题

1. 计算下列信号的单边拉氏变换。

- (1) $x(t) = e^{-2t}u(t) + e^{-3t}u(t)$
- (2) $x(t) = e^{-2t}u(t) + e^{-t}\cos(3t)u(t)$
- (3) $x(t) = \sin(2t)u(t)$
- (4) $x(t) = e^{2t}u(-t+3)$
- (5) $x(t) = e^{-3t}\cos(4t)u(t)$
- (6) $\delta''(t)$
- (7) $x(t) = u(t) - u(t-2)$
- (8) $x(t) = tu(t)$
- (9) $x(t) = t^3u(t)$
- (10) $x(t) = (1 - e^{-at})u(t)$

2. 利用单边拉氏变换性质计算下列信号的单边拉氏变换。

$$(1) x(t) = u(t-2)$$

$$(2) x(t) = e^{-(t-1)} u(t-1)$$

$$(3) x(t) = t^2 e^{-(t-1)} u(t-1)$$

$$(4) x(t) = \sin[\omega_0(t-\tau)] u(t-\tau)$$

$$(5) x(t) = \delta(t) + \frac{d}{dt}[e^{-t} u(t)]$$

$$(6) x(t) = \frac{d}{dt}[t e^{-t} u(t)]$$

$$(7) x(t) = \int_0^t e^{-\tau} \cos(\tau) d\tau \cdot u(t)$$

$$(8) x(t) = \frac{d^2}{dt^2}[\sin(t) u(t)]$$

$$(9) x(t) = t e^{-at} \sin(\omega_0 t) u(t)$$

$$(10) x(t) = e^{-2t} * [e^{-t} u(t)]$$

$$(11) x(t) = [1 - \cos(\omega_0 t)] e^{-at} u(t)$$

$$(12) x(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \delta(t - nT)$$

3. 求下列单边信号的拉普拉斯反变换。

$$(1) X(s) = \frac{1}{s^2 - 3s + 2}$$

$$(2) X(s) = \frac{s}{s^2 + 2s + 5}$$

$$(3) X(s) = \frac{s^3 + 7s + 8}{s^2 + 2s + 5}$$

$$(4) X(s) = \frac{s^3 + 7s + 8}{(s+1)^2(s+5)}$$

$$(5) X(s) = \frac{e^{-2s}}{s^2 + 4}$$

$$(6) X(s) = \frac{1}{(s^2 + 5)^2}$$

4. 利用拉普拉斯变换求解下列微分方程描述的因果系统全响应 $y(t)$, 并进行响应分解, 即分别指出其零状态响应和零输入响应分量, 自然响应和强迫响应分量, 以及稳态响应和瞬态响应分量。

$$(1) y''(t) + 5y'(t) + 6y(t) = 3x(t), x(t) = u(t), y(0^-) = 1, y'(0^-) = -1$$

$$(2) y''(t) + 5y'(t) + 6y(t) = 3x(t) + x'(t), x(t) = e^{-2t} u(t), y(0^-) = 0, y'(0^-) = 1$$

$$5. \text{ 已知系统函数 } H_1(s) = \frac{s+3}{s^2+2s+5}, H_2(s) = \frac{2s+1}{(s+1)(s+2)^2}.$$

- (1) 画出各系统函数对应的零极点图。
- (2) 指出各系统函数可能的收敛域。
- (3) 据(2)分析各系统的因果性和稳定性。

6. 设某连续系统的系统函数 $H(s)$ 如下, 分别求出其直接实现形式、级联实现形式和并联实现形式, 并画出对应的信号流图。

$$(1) H(s) = \frac{5s+3}{s^3+5s^2+4s-6}$$

$$(2) H(s) = \frac{2s+1}{(s+1)(s+2)^2}$$

三、综合题

1. 一个连续 LTI 系统的系统函数为 $H(s) = \frac{s+1}{s^2+5s+6}$ 。

- (1) 画出 $H(s)$ 的零极点图。
- (2) 讨论为使系统因果稳定, ROC 应如何选择? 并写出对应的 ROC。
- (3) 在(2)确定的 ROC 下, 求该系统的单位冲激响应 $h(t)$ 。
- (4) 写出描述该系统的微分方程。
- (5) 若输入 $x(t) = e^{-t}u(t)$, 求系统的零状态响应 $y_{zs}(t)$ 。

2. 已知描述某因果线性时不变系统的微分方程为

$$y'''(t) + 6y''(t) + 11y'(t) + 6y(t) = x'(t) + 2x(t)$$

- (1) 求系统函数。
- (2) 画出零极点图并判断系统稳定性。
- (3) 求单位冲激响应 $h(t)$ 。
- (4) 若输入信号为 $x(t) = e^{-t}u(t) + e^{-2t}u(t)$, 求系统的零状态响应。
- (5) 求系统的单位阶跃响应 $s(t)$ 。
- (6) 试分析系统的频率响应特性。

习题 5.2

一、判断题

1. 序列 $x(n) = \delta(n) - \delta(n-1)$ 的 z 变换为 $X(z) = 1 - z^{-1}$, 其 ROC 是整个 z 平面 (可能除去 $|z|=0$)。 ()
2. z 变换的终值定理 $\lim_{n \rightarrow +\infty} x(n) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)X(z)$ 成立的前提是 $(z-1)X(z)$ 的 ROC 包含单位圆。 ()
3. 一个离散时间序列的 z 变换, 其收敛域(ROC)内可以包含极点。 ()
4. 一个离散时间系统的系统函数 $H(z)$ 的极点全部在单位圆内, 则该系统一定是因果稳定系统。 ()
5. 两个离散系统级联, 总系统函数等于两个子系统函数相乘, 总系统的 ROC 等于两个子系统 ROC 的交集。 ()

二、计算/简答题

1. 计算下列信号 z 变换。

$$(1) x(n) = \delta(n-k), k > 0$$

$$(2) x(n) = nu(n)$$

$$(3) x(n) = a^{|n|}, 0 < |a| < 1$$

$$(4) x(n) = u(n) + 2^n u(-n-1)$$

$$(5) x(n) = \left(-\frac{1}{2}\right)^n u(n) - \left(-\frac{1}{3}\right)^n u(-n-1)$$

$$(6) x(n) = R_{10}(n)$$

2. 利用 z 变换性质计算下列信号的 z 变换。

$$(1) x(n) = na^{n-1}u(n)$$

$$(2) x(n) = n^2 u(n)$$

$$(3) x(n) = (n+1)a^n u(n)$$

$$(4) x(n) = a^n \sin(\omega_0 n) u(n)$$

$$(5) x(n) = a^{n-2} u(n-2)$$

$$(6) x(n) = u(-n)$$

$$(7) x(n) = a^{-n} u(-n)$$

$$(8) x(n) = [u(n) - u(n-5)] * a^n u(n)$$

$$(9) x(n) = \sum_{k=0}^n a^k$$

3. 已知 z 变换 $X(z)$ 及 ROC, 求对应反变换。

$$(1) X(z) = \frac{z}{(z-0.5)(z-2)}, 0.5 < |z| < 2$$

$$(2) X(z) = \frac{z^2}{(z-1)^2(z-0.8)}, |z| > 1$$

$$(3) X(z) = \frac{1}{1-0.5z^{-1}} + \frac{1}{1-2z^{-1}}, |z| > 2$$

4. 已知

$$x(n) \leftrightarrow X(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}} + \frac{1}{1 - 2z^{-1}}$$

画出零极点图, 分析收敛域的可能情况, 并讨论其因果性和稳定性。

5. 利用单边 z 变换求解下列差分方程描述的因果系统的全响应, 并进行响应分解, 即指出零输入响应和零状态响应分量, 自然响应和强迫响应分量, 稳态响应和瞬态响应分量。

$$(1) y(n) - 0.5y(n-1) = x(n), x(n) = u(n), y(-1) = 2$$

$$(2) y(n) - y(n-1) - 2y(n-2) = x(n-1), x(n) = u(n), y(-1) = 0, y(-2) = 1$$

6. 利用平面几何法分析下列系统的滤波特性。

$$(1) H(z) = \frac{1}{1 - 0.8z^{-1}}$$

$$(2) h(n) = \delta(n) - \delta(n-1)$$

7. 某理想低通滤波器的截止频率为 Ω_c , 单位样值响应记作 $h(n)$, 求单位样值响应为 $h_1(n) = (-1)^n h(n)$ 的滤波器的频率响应。画出该滤波器的幅度谱, 并判断该滤波器属于何种类型的滤波器。

8. 给出下列系统函数的直接实现形式、级联实现形式和并联实现形式, 并画出对应的信号流程图。

$$(1) H(z) = \frac{1 + 0.2z^{-1}}{1 - z^{-1} + 0.24z^{-2}}$$

$$(2) H(z) = \frac{1 - 2z^{-2} + z^{-4}}{1 - z^{-1} + 0.24z^{-2}}$$

三、综合题

1. 考虑一个用于噪声抑制的简单一阶离散时间滤波器, 其差分方程为

$$y(n) = a \cdot y(n-1) + (1-a) \cdot x(n), \quad 0 < a < 1$$

(1) 求该滤波器的系统函数 $H(z)$ 及单位脉冲响应 $h(n)$ 。

(2) 定性分析该滤波器是低通、高通还是全通滤波器? 解释原因。

(3) 当 $a = 0.9$ 时, 计算该滤波器的一 3 dB 截止频率(数字角频率)近似值。(提示: $|H(e^{j\Omega_c})|^2 = 0.5$)

2. 有两个离散时间系统, 系统函数分别为

$$H_1(z) = \frac{z}{z - 0.8}, \quad H_2(z) = \frac{z}{z + 0.5}$$

(1) 若两系统级联, 求总系统函数 $H(z)$, 判断其因果稳定性(假设子系统因果)。

(2) 若两系统并联, 求总系统函数 $H_{\text{total}}(z)$ 。

(3) 针对(1)中的级联系统, 画出其直接实现形式的信号流程图。