

第 2 章

确定信号分析



本章教学基本要求

掌握：

1. 信号分类、特性、分析方法；
2. 数学知识——卷积积分、自相关函数与单位冲击函数；
3. 两种变换——信号的傅里叶变换和希尔伯特变换；
4. 能量谱密度和功率谱密度；
5. 信号通过线性系统后的变化规律。

理解：

1. 信号时域特性与频域特性之间的联系；
2. 信号通过线性系统后的变化机理。



本章核心内容

1. 信号时域特性与频域特性；
2. 信号通过线性系统。

通信系统中利用信号表示信息和传送消息。确定信号是指可以用确定的时间函数表示的信号。实际上，通信系统中的各种信号是许多信号的集合体并具有一定的统计规律性，这种信号称作随机信号，将在第 3 章“随机过程”中进行研究。本章研究的确定信号可以是随机信号的样函数实现，或者是载波信号的数学模型。由于本专业学生已经先修过“信号与系统”等课程，因此本章只是将本课程内容涉及的确定信号分析的关键结论进行简要回顾。

2.1 信号分类

信号的分类方法很多，限于篇幅和内容的需要，我们主要根据信号取值的确定性、周期性以及能量或功率有限性，将信号进行分类，如图 2-1 所示。

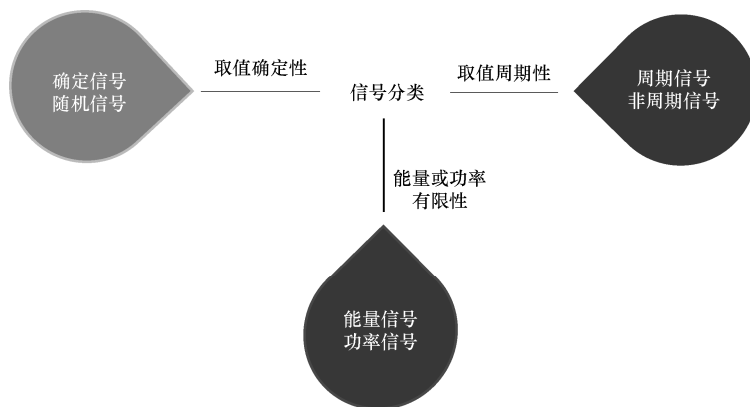


图 2-1 信号分类方法

2.1.1 确定信号和随机信号

确定信号：任何时刻都有确定性取值的信号，因此可以表示为确定的时间函数。例如：信号 $y = A\cos 2\pi t$ ，当 $t=1.25$ 时，信号幅值必为唯一确定值 0；当 $t=1$ 时，信号幅值必为唯一确定值 A 。该类信号往往是人工设计的信号。

随机信号：任意时刻的取值不能唯一确定，或者取值是随机的信号，信号不能用确定的时间函数表示。例如： $y = \sin(\pi t + \varphi_\xi)$ ，其中， φ_ξ 为一个在 $0 \sim 2\pi$ 之间等概率变化的相位，那么，当时间 t 确定后，如 $t=5$ ，此时由于 y 的值也不能确定，该类信号往往是自然界中的信号。在通信系统中，信号和噪声一般也是随机信号，否则通信就没有意义了。

思考：如何研究随机信号的特性？或者说，虽然它的取值不能唯一确定，但是有没有规律性？此类问题将在第 3 章进行研究。

2.1.2 周期信号和非周期信号

周期信号：依一定时间间隔周而复始，而且是无始无终的信号。

表达式： $x(t) = x(t + nT)$ ($n=0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$)

平均值：
$$\overline{x(t)} = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt$$

平均功率：
$$P = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x^2(t) dt$$

非周期信号：在时间上不具有周而复始及无始无终的特性。例如：一个信号在一定时间间隔上周而复始，但不是无始无终，通常称为有限长信号。

2.1.3 能量信号和功率信号

信号的能量和功率是信号分析的基本概念。需要注意的是，这两个概念的积分时间都是

无穷大。

1. 能量信号

能量信号是指所有时间上总能量 E 不为零且有限的信号。一般地，非周期的确定性信号为能量信号，如一个脉冲信号。

具体来讲，设有一个能量信号 $g(t)$ （可以是电压信号，也可以是电流信号），则该信号作用在 $1\ \Omega$ 的电阻上，在无限长的区间上的有限能量为

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |g(t)|^2 dt \quad (2-1)$$

根据帕塞瓦尔定理，对于能量信号 $g(t)$ ，其能量 E 也可以在频域上由频谱密度 $G(f)$ 表示为

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |G(f)|^2 df \quad (2-2)$$

根据积分的意义，由式 (2-2) 可以看出， $|G(f)|^2$ 为该信号的能量谱密度，单位为 J/Hz，物理意义为单位频带内的信号能量，描述了信号能量在各个频率上的分配关系。

2. 功率信号

信号在 $-\infty < t < +\infty$ 内存在，具有无穷大能量，但平均功率为有限值的信号称为功率信号。一般地，周期信号和随机信号是功率有限信号。

分析时，先用截短函数（找一段时间） $g_T(t)$ 将其截为能量信号，如图 2-2 所示。截短后，信号 $g_T(t)$ 的平均功率为

$$P = \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_2} g^2(t) dt \quad (T = t_2 - t_1) \quad (2-3)$$

如果截短区间 $T \rightarrow \infty$ ，即

$$P = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} g_T^2(t) dt \quad (2-4)$$

此时功率 P 仍然是一个有限的非零值，称信号 $g(t)$ 为功率信号。

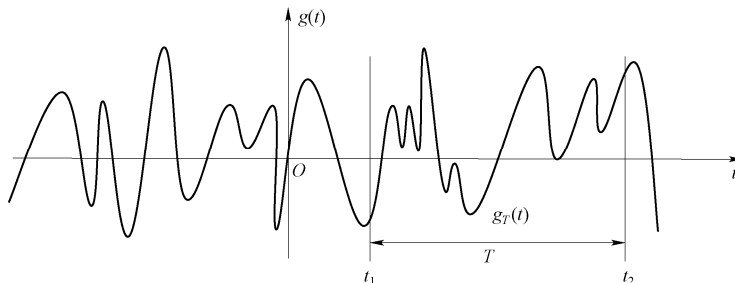


图 2-2 功率信号截短分析示意图

需要注意的是：能量信号和功率信号不相容，也就是说，一个信号可以既不是能量信号也不是功率信号 [如 $g(t)=t^2$]，但不可能既是能量信号又是功率信号，因为能量信号具有零平

均功率，功率信号具有无限大能量。

信号的功率谱密度：类似前面能量谱密度的分析思路，在频域上，信号的平均功率可以表示为

$$\begin{aligned} P &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} |G_T(f)|^2 df \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|G_T(f)|^2}{T} df \end{aligned} \quad (2-5)$$

因此，功率信号 $g(t)$ 或 $G(f)$ 的功率谱密度，即单位频带内的功率分布为

$$P(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|G_T(f)|^2}{T} \quad (2-6)$$

将功率谱密度在整个频率轴上积分，就得到信号的总功率。

应当注意的是，功率谱密度有单边功率谱密度和双边功率谱密度两种定义。从物理的角度看，通常认为频率只存在正的值，即 $f \in (0, +\infty)$ ，所有功率都分布在正半轴上，此时为单边功率谱密度；而数学上的分析则认为频率有正有负，即 $f \in (-\infty, +\infty)$ ，则功率分布在正、负两个半轴上，此时为双边功率谱密度。显然，单边功率谱密度是双边的两倍，但积分之后的总功率不变。

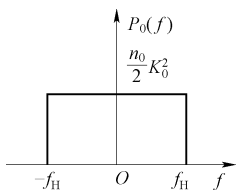


图 2-3 白噪声的功率谱密度

思考：如图 2-3 所示为一种白噪声的功率谱，其带宽范围为 $(-f_H, +f_H)$ ，如果双边功率谱密度为常数： $\frac{n_0}{2} K_0^2$ ，那么该白噪声的功率为多少？如果只考虑正频率，其单边功率谱密度是多少？

2.2 信号分析方法

信号分析方法很多，尤其是随着科技的进步，信号分析的手段也越来越多样。由传统的时域（time domain）分析方法、频域（frequency domain）分析方法，发展到现代的时频域分析方法及其他特殊分析方法。

时域分析是以时间轴为坐标表示动态信号变化，表现出信号的时间特性，称为时域图或波形图，通过示波器来观察。由时域图可以分析出同一形状的波形重复出现的时间长短（周期）、信号波形本身变化的速率（如信号幅值上升和下降边沿陡直的程度）等时间特征。如图 2-4 所示，左边为一个幅值为 4、周期为 0.2 s 的正弦信号与幅值为 10 的直流信号叠加后的时域图。

频域分析是把信号变为以频率轴为坐标，揭示出信号的频域特性，称为频域图。频域图有最大振幅-频率和相位-频率两种图像，通过频谱仪等仪表观测，从频域图很容易发现信号的频率分布规律，如哪些频率占主导等特征。如图 2-4 所示，右边为频域图，可以直观看到信号包含的两种频率成分：幅度为 10 的直流（0 Hz）与幅值为 4 的单频（5 Hz）的正弦信号。

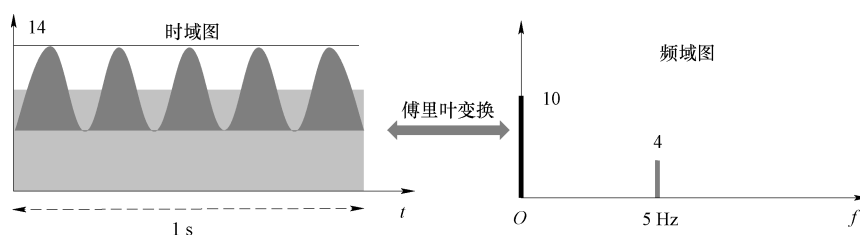


图 2-4 信号的时域、频域分析方法

思考：图 2-5 有 4 个图形，观察图形的横轴属性及信号图形特征，分析哪些是波形图，哪些为频谱图，并分析信号的特征。

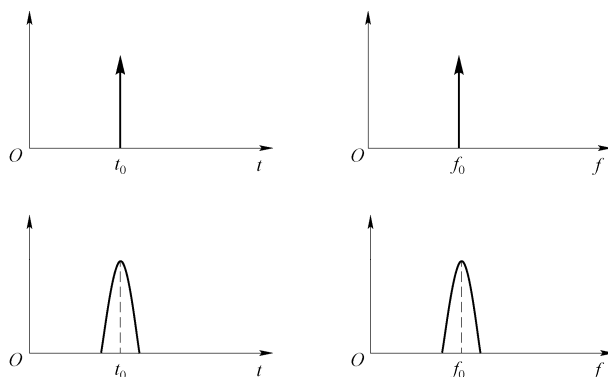


图 2-5 信号的时域图、频域图对比

时域波形描述信号幅度与时间的直接关系，但是对信号的其他细节特性如频率特征，提取困难。信号分析方法的一次重大突破解决了此问题——傅里叶变换，将信号从时域转到了频域。但是，后来人们发现，虽然信号的时域特征和频域特征通过傅里叶变换联系起来，但二者却是绝对分离的，不能实现时频联合分析，即在时域中不包含任何频域信息，在频域中同样找不到任何时域信息。例如：对于信号中的某一频率，不知道这一频率是何时产生的，只能从全局上分析信号。因此，有必要将两者综合起来，这就衍生出了时频域分析方法，如短时傅里叶变换、小波变换、Wigner-Ville 时频分布及 HHT 等，国内外学者仍然在不断研究其改进算法。

2.3 信号时域、频域特性关联规律

根据 2.2 节的分析，研究一个信号可以有时域、频域两个角度，既然是同一信号，其时域特性与频域特性必有对应关系。因此，下面将讨论信号波形的周期性、连续性与该信号频域特性的关联规律。

2.3.1 连续周期信号的傅里叶级数

下面，先从最简单的信号入手，即连续周期信号 $f(t)$ 。如果它满足 Dirichlet 条件（一般现实生活中的物理信号都满足），则其可以展开成许多特定幅度、频率和相位的正弦信号（谐波）之和。具体来说，连续周期信号 $f(t)$ 存在傅里叶级数，即

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_0 t} \quad (2-7)$$

式 (2-7) 表明，连续周期信号 $f(t)$ 由包含特定频率为 $n\omega_0$ 的无穷多个正弦信号（谐波分量）组成。式 (2-7) 为指数形式，也可以写成三角函数级数和，但前者要简单明了。

如图 2-6 所示为一个连续周期方波信号波形与正弦信号的关系仿真结果。图 2-6 (a) 为正弦谐波数量与方波波形的关系。可以看出，符合特定条件的正弦信号波形，只要足够多，完全可以叠加成一个平滑的方波信号。关键问题是“特定条件”是什么？图 2-6 (b) 为方波本身与正弦谐波波形。可以看出，能够组合成方波的正弦波形的幅度、频率及相位均不相同，或者说对它们有特定的要求。具体而言，有必要搞清楚两个问题：符合条件的正弦信号的频率有哪些？其相应的幅度和相位各是多少？

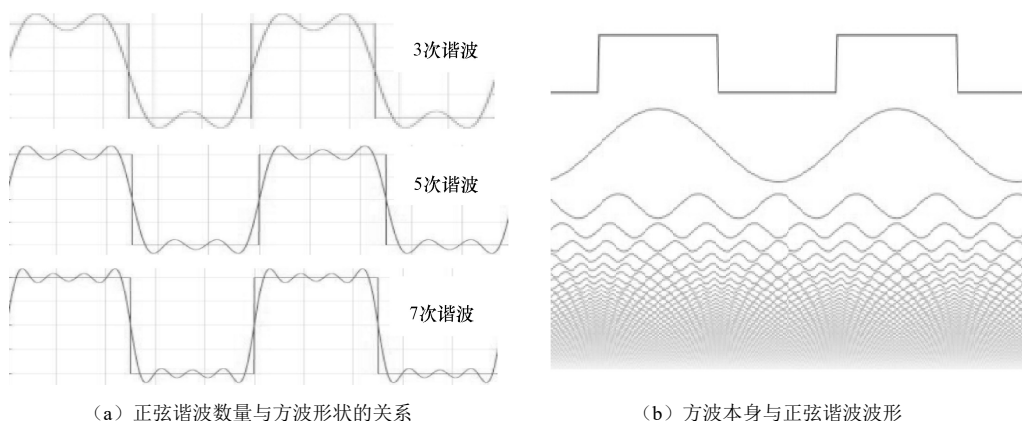


图 2-6 连续周期方波信号与正弦信号的关系仿真结果

第一个问题的答案已经显示在式 (2-7) 中，由于信号 $f(t)$ 具有周期性，所以符合条件的正弦信号的频率只能取基频 ($\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$) 的整数倍，即 $\omega = n\omega_0$ ，为离散谱。

正弦信号频率确定后，其相应的幅度、相位由式 (2-7) 中的系数 F_n 决定， $F_n = F(n\omega_0)$ 是一个与频率有关系的复数，称为信号 $f(t)$ 的频谱。

具体而言，正弦信号的幅度 $|F(\omega)|$ 和相位 $\varphi(\omega)$ 可以由式 (2-8) 求出：

$$F_n = F(n\omega_0) = |F(\omega)| e^{j\varphi(\omega)} = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \quad (2-8)$$

式中： $|F(\omega)|$ 为幅度谱； $\varphi(\omega)$ 为相位谱。

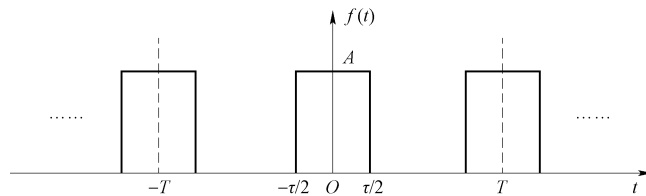
例 2-1 连续周期矩形脉冲序列信号 $f(t)$ 的波形如图 2-7 (a) 所示, 根据其波形特点, 写出波形表达式, 并根据式 (2-8) 分析其谱成分的特征。

解 (1) 根据波形特征, 其波形可以表示为

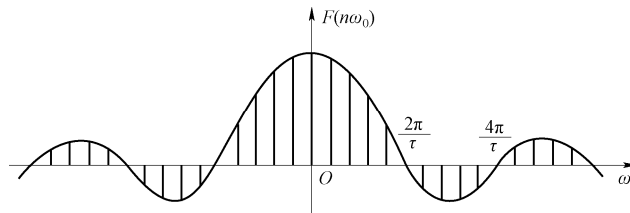
$$f(t) = \begin{cases} A, & nT - \tau/2 \leq t \leq nT + \tau/2 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

(2) 由式 (2-8), 该波形的频谱为

$$\begin{aligned} F(n\omega_0) &= \frac{1}{T} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \\ &= \frac{1}{T} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} A e^{-jn\omega_0 t} dt \\ &= \frac{A}{T} \frac{e^{-jn\omega_0 t} \Big|_{-\tau/2}^{\tau/2}}{-jn\omega_0} \\ &= \frac{A}{T} \frac{-2j \sin\left(n\omega_0 \frac{\tau}{2}\right)}{-jn\omega_0} \\ &= \frac{A\tau}{T} \frac{\sin\left(n\omega_0 \frac{\tau}{2}\right)}{n\omega_0 \frac{\tau}{2}} \\ &= \frac{A\tau}{T} \text{Sa}\left(n\omega_0 \frac{\tau}{2}\right) \end{aligned}$$



(a) 连续周期信号的波形



(b) 连续周期信号的频谱

图 2-7 连续周期信号的波形与频谱

图 2-7 (a)、(b) 分别显示了信号时域波形与频谱图的对应关系, 可以得出如表 2-1 所示的结论。

表 2-1 连续周期矩形脉冲序列信号时域特征与频域特征对比

信号时域特征	信号频域特征
连续性	非周期
周期性	离散

由图 2-7 可以看出, 由于信号时域特性具有周期性, 该信号的频谱为离散谱, 谱线之间的间隔 $\Delta\omega = 2\pi/T$ 。另外, 由于信号波形是连续的 (非离散), 其频谱分布不具备周期性。由图 2-7 (b) 还可以看出, 离散频谱的顶端连线 (包络) 为辛克函数, 原因是信号波形的形状是矩形, 而在数学关系上, 矩形函数和辛克函数是一对傅里叶变换对。

2.3.2 连续非周期信号的傅里叶变换

因为非周期信号可以视为周期无穷大的信号, 因此周期信号的频谱分析可以推广到非周期信号。下面研究当 $T \rightarrow \infty$ 时, 周期信号 $f(t)$ 的傅里叶级数的变化情况。

将式 (2-8) 代入式 (2-7), 有

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \right] e^{jn\omega_0 t} \\ &= \frac{\omega_0}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \right] e^{jn\omega_0 t} \end{aligned}$$

当 $T \rightarrow \infty$ 时, 周期信号变为非周期信号, 离散谱 $n\omega_0 \rightarrow$ 连续谱 ω , $\sum \rightarrow \int$, $\omega_0 \rightarrow d\omega$, 上式变形为

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \right] e^{j\omega t} d\omega$$

$$\text{令} \quad F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \quad (2-9)$$

$$\text{则有} \quad f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (2-10)$$

式 (2-9) 称为信号 $f(t)$ 的傅里叶变换, 式 (2-10) 为信号 $f(t)$ 的傅里叶反变换, 式 (2-9) 与式 (2-10) 为信号 $f(t)$ 的傅里叶变换对, 说明连续非周期信号的时域特性与频域特性之间的数学联系。

由式 (2-10) 可以看出, 一个连续非周期信号 $f(t)$, 如果满足 Dirichlet 条件, 仍然可以展开成许多特定幅度、频率和相位的正弦信号 (谐波) 之和。与式 (2-7) 不同的是, 谐波频率具有连续性, 而不是连续周期信号的离散频率成分, $F(\omega)$ 称为信号 $f(t)$ 的频谱密度, $F(\omega)$ 包含了从零到无限高频的所有频率分量。

例 2-2 矩形信号 $f(t)$ 的波形如图 2-8 (a) 所示, 根据波形特点, 写出其波形表达式,

并根据式(2-9)分析其频域特征。

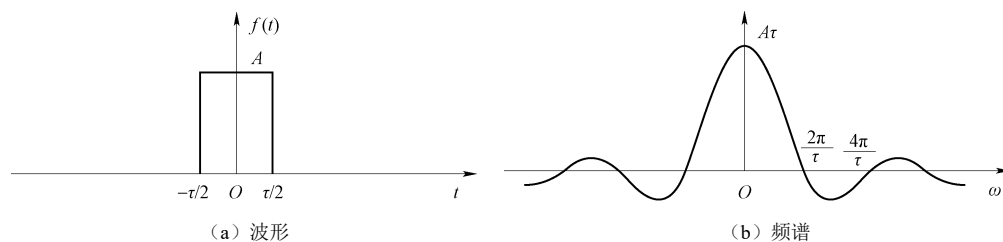


图 2-8 矩形信号波形与频谱

解 (1) 根据波形特征, 其波形可以表示为

$$f(t) = \begin{cases} A, & nT - \tau/2 \leq t \leq nT + \tau/2 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

(2) 根据式(2-9), 该波形的频谱为

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \int_{-\tau/2}^{\tau/2} A e^{-j\omega t} dt = \frac{2A}{\omega} \sin\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) \\ &= A\tau \left(\frac{\sin\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)}{\frac{\omega\tau}{2}} \right) = A\tau \text{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) \end{aligned}$$

由图 2-8 (b) 可以看出, 该波形的频谱特性为非周期、连续、辛克函数, 这是由于信号形状仍为矩形的缘故, 而前面说过, 矩形函数的傅里叶变换为辛克函数。另外, 因为信号波形不具有周期性, 所以该信号不包含离散频率分量, 而是由无穷多的连续频率分量构成。简单来说, 该矩形信号的波形与频谱之间存在规律, 如表 2-2 所示。

表 2-2 矩形信号的时域特征与频域特征

信号时域特征	信号频域特征
连续性	非周期
非周期	连续性

2.3.3 离散的非周期信号具有周期性、连续性频谱

以上讨论了连续性周期信号和连续性非周期信号的频域特征, 发现: 连续性波形信号的频谱是非周期的, 周期性波形的频谱是离散的, 而非周期波形的频谱是连续的。可以看出, 信号的时域特性与频域特性之间存在明显的对应联系, 即周期 \leftrightarrow 离散, 连续 \leftrightarrow 非周期, 我们完全可以根据该规律来分析离散波形信号的频域特征。

如图 2-9 (a) 所示为一个离散的非周期信号的波形, 离散脉冲每隔固定的时间间隔 T 出

现一次，在后续的章节（第 8 章信源编码）中该信号用来表示对模拟信号进行周期性抽样后的结果，即抽样信号。根据信号时域与频域之间的联系规律，可以判断出该信号的频域具有周期性（周期为 $\Delta\omega = 2\pi/T$ ）、连续性的特点，如图 2-9（b）所示，具体的频谱形状来源于模拟信号的频谱。

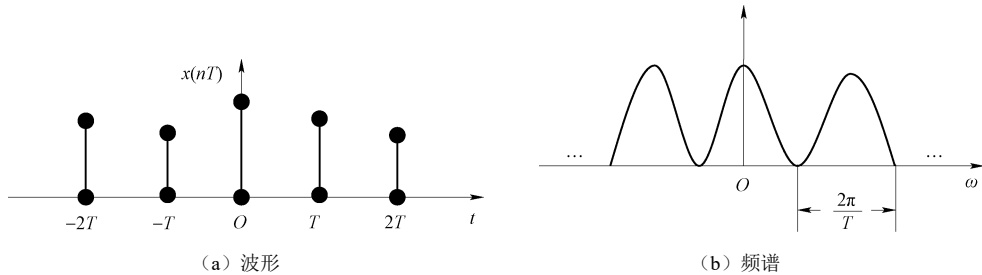


图 2-9 离散信号的波形与频谱

2.3.4 离散的周期信号具有周期性、离散性频谱

如图 2-10（a）所示为一个离散的周期信号的波形，根据信号时域与频域之间的联系规律，可以判断出该信号的频域具有周期性、离散性的特点。如图 2-10（b）所示，需要注意的是，波形图的脉冲间隔 ΔT 、周期长度 T_p 与对应频域变化的周期宽度 $\omega_s = \frac{2\pi}{\Delta T}$ 、离散谱间隔 $\Delta\omega = \omega_0 = \frac{2\pi}{T_p}$ 。

$$\Delta\omega = \omega_0 = \frac{2\pi}{T_p}。$$

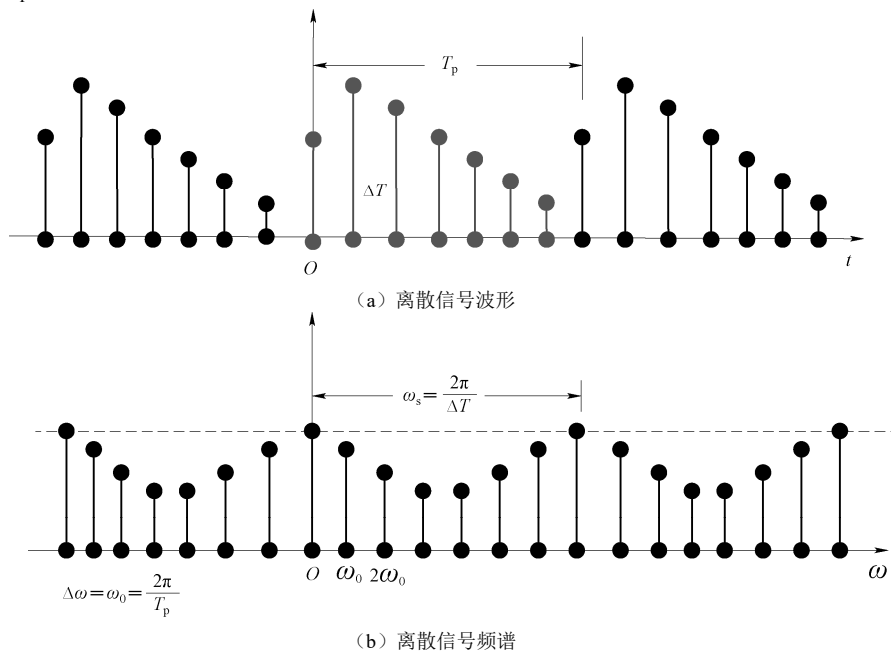


图 2-10 离散信号波形与频谱

2.3.5 傅里叶变换性质

根据前面的分析，已经对傅里叶变换有了初步认识，下面总结了一些傅里叶变换的运算性质及常用函数的傅里叶变换对，方便读者在后续的章节中用来分析通信系统对信号处理后产生的时域、频域变化规律。信号时域表达式用 $f(t)$ 表示，其频域 $F(\omega)$ 由 $f(t)$ 的傅里叶变换产生，即

$$f(t) \leftrightarrow F(\omega)$$

或者表示为

$$\mathcal{F}[f(t)] = F(\omega)$$

如果信号在时域上发生变化形成新的信号，其相应频域变化即傅里叶变换后的结果详见表 2-3，常用函数的傅里叶变换对详见表 2-4。

表 2-3 傅里叶变换的主要性质

性质	信号时域: $f(t)$	信号频域: $F(\omega)$
放大	$af(t)$	$aF(\omega)$
叠加	$af_1(t)+bf_2(t)$	$aF_1(\omega)+bF_2(\omega)$
尺度变换	$f(at)$	$\frac{1}{ a }F\left(\frac{\omega}{a}\right)$
时延	$f(t-t_0)$	$F(\omega)e^{-j\omega t_0}$
频移	$f(t)e^{j\omega_0 t}$	$F(\omega-\omega_0)$
卷积	$f_1(t) \cdot f_2(t)$	$F_1(\omega) \cdot F_2(\omega)$
乘积	$f_1(t) \cdot f_2(t)$	$\frac{1}{2\pi}[F_1(\omega) * F_2(\omega)]$

表 2-4 常用函数的傅里叶变换对

信号时域: $f(t)$	信号频域: $F(\omega)$
$\delta(t)$	1
A	$2\pi A\delta(\omega)$
$f(t) = \begin{cases} 1, & t < \frac{\tau}{2} \\ 0, & t > \frac{\tau}{2} \end{cases}$	$\tau \text{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$
$e^{j\omega_0 t}$	$2\pi\delta(\omega-\omega_0)$
$\cos\omega_0 t$	$\pi[\delta(\omega+\omega_0)+\delta(\omega-\omega_0)]$

2.4 卷积运算

卷积运算是信号与系统中反映输入输出关系的一种运算，本书中经常用卷积运算来研究通信系统中某模块的性质，下面将该运算的一些基本特点进行简要回顾。

2.4.1 卷积定义

函数 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ ，称积分

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_1(a)f_2(t-a)da$$

为 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ 的卷积积分，简称卷积，通常以 $f_1(t) * f_2(t)$ 表示，即

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(a)f_2(t-a)da \quad (2-11)$$

式中 a 为积分变量，实际上就是自变量 t ，为了明确参与积分运算的是哪个量而把 t 写成 a 。

2.4.2 卷积运算过程

需要卷积运算时，可以按照以下几个步骤来进行。

- | | |
|-----------------|--|
| ① 变量转换: | $t \rightarrow a$ |
| ② $f_2(t)$ 翻转: | $f_2(a) \rightarrow f_2(-a)$ |
| ③ $f_2(-a)$ 滑动: | $f_2(-a) \rightarrow f_2(t-a)$ |
| ④ 相乘: | $f_1(a)f_2(t-a)$ |
| ⑤ 积分: | $\int_{-\infty}^{\infty} f_1(a)f_2(t-a)da$ |

2.4.3 卷积运算性质

- | | |
|--------|--|
| ① 交换律: | $f_1(t) * f_2(t) = f_2(t) * f_1(t)$ |
| ② 分配律: | $f_1(t) * [f_2(t) + f_3(t)] = f_1(t) * f_2(t) + f_1(t) * f_3(t)$ |
| ③ 结合律: | $f_1(t) * [f_2(t) * f_3(t)] = f_1(t) * f_2(t) * f_3(t)$ |

2.5 自相关函数

2.5.1 自相关函数定义

信号在通信系统中传输时，有时候需要描述两个信号之间或者某个信号延迟后与原来信号的相似性，仅用“很相似”“不太像”等定性描述显得很模糊，因此需要一个指标来定量描述信号间的相似程度，即相关性，描述相关性的函数即相关函数。

相关函数分为互相关函数和自相关函数。互相关函数表示两个信号的相似程度，自相关函数就是信号 $f(t)$ 与自己（通常是延迟一段时间 τ ）的相似程度，用 $R(\tau)$ 表示。可以看出，自相关函数反映了信号的某个时域特性。

$$\text{能量信号:} \quad R(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)f(t+\tau)dt \quad (2-12)$$

$$\text{功率信号:} \quad R(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)f(t+\tau)dt \quad (2-13)$$

2.5.2 自相关函数性质

(1) 实函数的自相关函数是实偶函数，即

$$R(-\tau) = R(\tau)$$

证明如下。

$$R(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)f(t+\tau)dt \xrightarrow{x=t+\tau} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)f(x-\tau)dx = R(-\tau)$$

(2) 信号的自相关函数与其能量谱密度/功率谱密度构成傅里叶变换与反变换的关系。

证明如下。

对能量信号，有

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{R(\tau)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t)f(t+\tau)dt \right] e^{-j\omega\tau} d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t+\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \right] dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) F(\omega) e^{j\omega t} dt \\ &= F(\omega) \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{j\omega t} dt \\ &= F(\omega) F^*(\omega) = |F(\omega)|^2 = E(\omega) \end{aligned}$$

对功率信号，有

$$\mathcal{F}\{R(\tau)\} = W(\omega)$$

(3) 信号的自相关函数在原点的值等于信号的能量/功率。

能量信号：
$$R(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f^2(t) dt = E$$

功率信号：
$$R(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f^2(t) dt = P$$

(4) 信号的能量/功率自相关函数的最大值出现在原点，即 $R(\tau) \leq R(0)$ 。

2.6 单位冲击函数

2.6.1 单位冲击函数定义

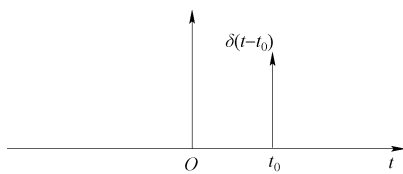


图 2-11 单位冲击函数

如图 2-11 所示,单位冲击函数是物理学家狄拉克在研究物理时定义出来的一个特殊的函数,通常用来表示作用在某个时刻、作用时间极短但强度极大的物理量,它的定义是

$$\delta(t-t_0) = \begin{cases} \infty, & t = t_0 \\ 0, & t \neq t_0 \end{cases} \quad (2-14)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1 \quad (2-15)$$

2.6.2 单位冲击函数性质

这里,只将单位冲击函数在本书中经常用到、非常重要的一个性质进行回顾,即它的筛选性,表示为

$$f(x) * \delta(x-x_0) = f(x-x_0) \quad (2-16)$$

由图 2-12 可以看出,式(2-16)之所以称为筛选性,是因为任何函数 $f(x)$ 只要和一个单位冲击函数进行卷积,卷积后的结果仍然是该函数 $f(x)$,但是函数的位置发生了平移,出现在冲击发生的位置 x_0 处,即 $f(x-x_0)$ 。

单位冲击函数的傅里叶变换也经常用到,详见表 2-4 中的一些结果。

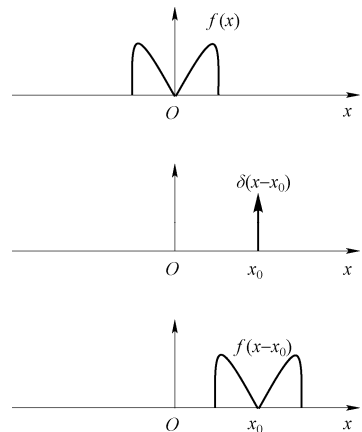


图 2-12 单位冲击函数的筛选性

2.7 线性系统

通信系统由许多部分组成，如滤波器、放大器、信道和调制解调器等，对它们的研究需要用到信号与系统相关理论，其中，线性、时不变系统是具有代表意义的系统分析模型之一。

2.7.1 线性系统定义

如果一个系统对于多个输入信号和的响应是对其中每一个输入信号响应的和，则称该系统为线性的，该特性也称为叠加原理。

由图 2-13 (a) 可以看出，系统输入信号和为

$$X(t) = \sum_{i=1}^N x_i(t)$$

其中， $x_i(t)$ 为输入系统的第 i 个信号， $i=1,2,\dots,N$ ，若 $X(t)$ 通过系统后的输出为 $Y(t)$ ，如图 2-13 (b) 所示，而 $y_i(t)$ 为 $x_i(t)$ 经过系统后的相应输出 [见图 2-13 (b)]，则输出信号的和仍为 $Y(t)$ ，即

$$Y(t) = \sum_{i=1}^N y_i(t)$$

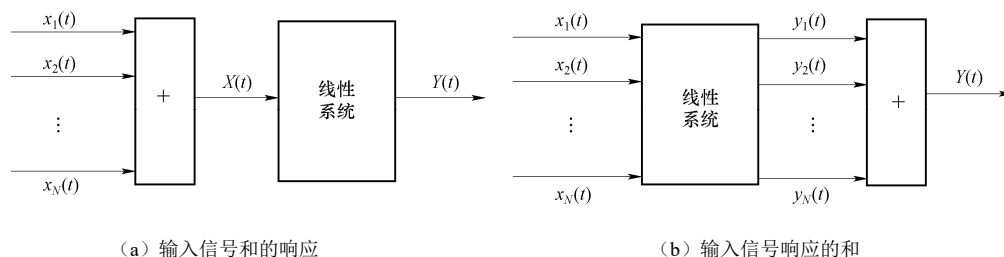


图 2-13 线性系统满足叠加原理

2.7.2 线性系统性质

正如分析信号特性的方法一样，线性系统的性质也分为系统的时域特性和频域特性，分别用 $h(t)$ 和 $H(\omega)$ 表示。

1. 系统的时域特性 $h(t)$

系统的时域特性是如何得到的？其实很简单，只需要给系统输入一个特殊的信号，即单

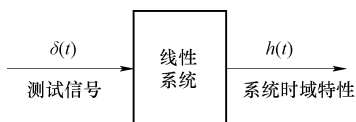


图 2-14 线性系统的时域特性测试过程

位冲击信号 $\delta(t)$ 即可，此时系统输出后的波形 $h(t)$ 是该系统对单位冲击信号的响应结果。不同的系统输出不同的波形 $h(t)$ ，因此可以用其来代表系统的时域特性，这就是 $h(t)$ 也称为系统的“单位冲击响应”的由来，如图 2-14 所示。

2. 时不变系统

如果用线性算子 L 来表示系统对输入信号的运算，系统的单位冲击响应表示为

$$L[\delta(t)] = h(t) \quad (2-17)$$

如果信号 $\delta(t)$ 延迟一段时间，即将 $\delta(t - \tau)$ 输入系统，则系统的单位冲击响应 $h(t)$ 也相应延迟同样的时间延迟，但波形不变，即输出信号为

$$L[\delta(t - \tau)] = h(t - \tau) \quad (2-18)$$

很显然，式 (2-18) 显示该系统特性是恒定的，称为时不变系统或恒参（系统的参量恒定）系统。

3. 信号通过线性时不变系统

下面在已知系统的单位冲击响应 $h(t)$ 前提下，讨论系统输出信号 $y(t)$ 与输入信号 $x(t)$ 之间的对应关系。

1) 输入、输出信号的时域关系

利用单位冲击函数的筛选性 [可参考式 (2-15)]，系统输入信号 $x(t)$ 可表示为

$$x(t) = x(t) * \delta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \delta(t - \tau) d\tau$$

$$y(t) = L[x(t)] = L\left[\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \delta(t - \tau) d\tau\right] = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) L[\delta(t - \tau)] d\tau$$

根据式 (2-18)，有

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau = x(t) * h(t) \quad (2-19)$$

式 (2-19) 是恒参线性系统时域的重要关系式，它通过系统的单位冲击响应 $h(t)$ 将系统的输入信号和输出信号的波形联系起来。如图 2-15 所示，只要知道系统的时域特性 $h(t)$ ，给该系统输入任意信号 $x(t)$ ，则输出信号波形即可确定。

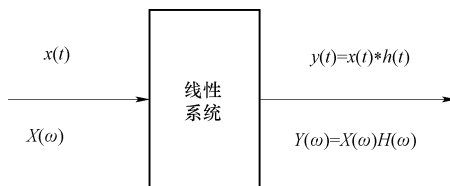


图 2-15 信号通过线性系统

2) 输入、输出信号的频域关系

令： $x(t) \leftrightarrow X(\omega)$ ， $y(t) \leftrightarrow Y(\omega)$ ， $h(t) \leftrightarrow H(\omega)$ ，并根据表 2-3 傅里叶变换的运算性质，信号时域卷积运算变换到频域后为乘积运算，即式 (2-19) 变为

$$x(t) * h(t) \leftrightarrow X(\omega) \cdot H(\omega)$$

由此得

$$Y(\omega) = X(\omega) \cdot H(\omega) \quad (2-20)$$