

函 数

函数思想萌芽于人类对自然界中变化与依赖关系的长期观测. 公元 16—17 世纪, 科学革命浪潮席卷欧洲. 伽利略通过实验发现, 自由落体的距离与时间的平方成正比; 开普勒通过观察浩瀚的宇宙总结出行星运行的周期与其轨道半长轴之间存在精确的数学关系. 这些发现都强烈地暗示: 自然界中普遍存在着确定的依赖关系, 函数就是刻画这种依赖关系的数学模型. 今天, 函数广泛应用于自然科学、工程技术、经济学、人工智能等众多领域. 无论是描述行星轨道的三角函数, 模拟人口增长的指数函数, 还是构建神经网络的激活函数, 这些函数都以其强大的表达力和普适性, 成为构建现实世界的模型、预测未来趋势、优化系统性能不可或缺的工具.

图 1-1 为本章思维导图.

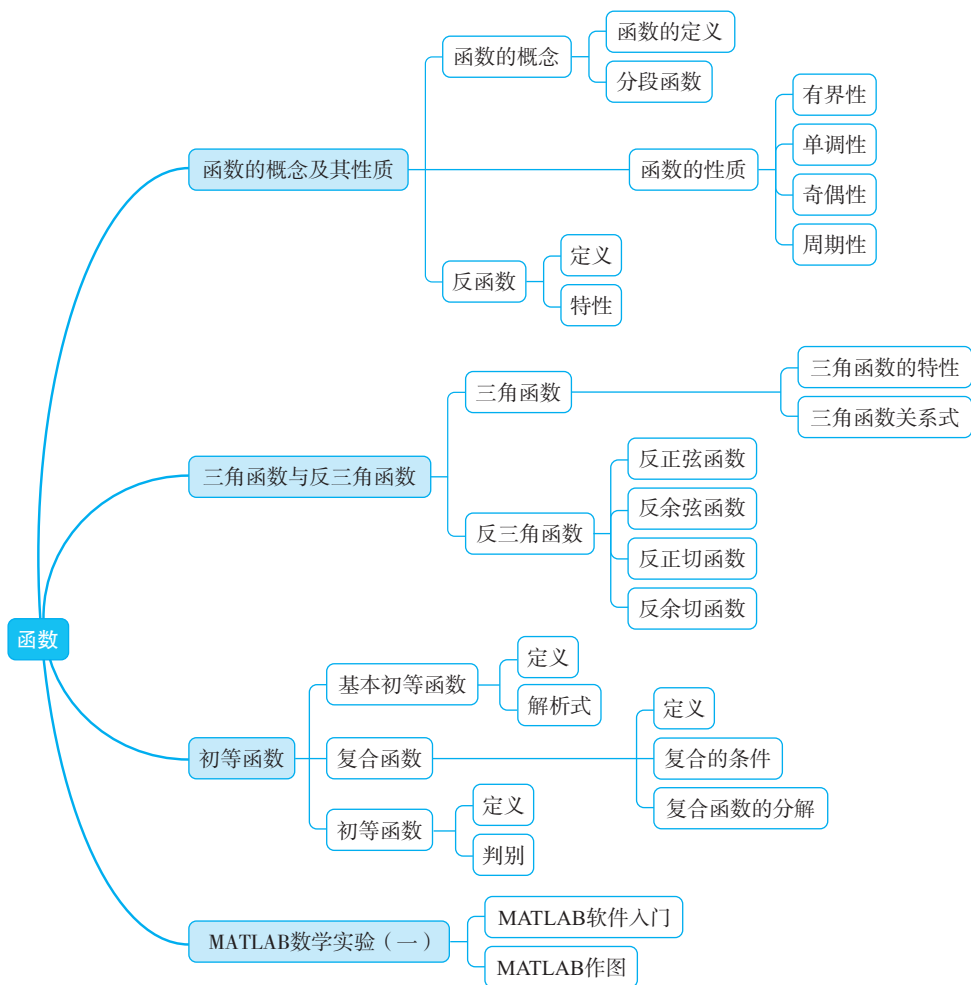


图 1-1



1.1 节课 前自测

1.1 函数的概念及其性质

本节我们将重温函数的概念,学习分段函数与反函数的概念,讨论函数与反函数的主要性质,为后续的学习奠定基础.

一、函数的概念

引例 新能源汽车耗电量问题

近年来,中国新能源汽车(图 1-2)实现跨越式发展,在电动化、智能化、产业链整合和全球化布局上构建了系统性优势,成为国家高端制造的“新名片”.

如果忽略路况、温度等因素,新能源汽车每百公里耗电量 y (单位: $\text{kW} \cdot \text{h}/100\text{km}$) 与车辆行驶的速度 x (单位: km/h) 之间的对应关系为

$$y = 0.001x^2 + 0.1x + 10.$$

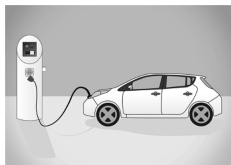


图 1-2

1. 函数的概念



函数的定义

【定义 1】 设 D 是一个非空数集. 如果对于变量 x 在 D 中的每一个取值, 通过某种对应法则 f , 都有唯一确定的 y 与它对应, 就称 y 是 x 的函数, 记作 $y = f(x)$. 其中, x 是自变量, y 是因变量, 数集 D 是函数的定义域. 当 x 取遍 D 中所有值时, 对应的 y 值构成的集合称为函数的值域.

除了可以用 $f(x)$ 表示函数外, 也可以用 $y(x), g(x), \varphi(x), F(x), G(x)$ 等表示函数.

【例 1】 设 $f(x) = 2x^2 - x - 1$, 求 $f(-1), f(\sqrt{2}), f(a), f(2t-1)$.

解 $f(-1) = 2(-1)^2 - (-1) - 1 = 2, f(\sqrt{2}) = 2(\sqrt{2})^2 - \sqrt{2} - 1 = 3 - \sqrt{2},$

$$f(a) = 2a^2 - a - 1, f(2t-1) = 2(2t-1)^2 - (2t-1) - 1 = 8t^2 - 10t + 2.$$

由定义可知, 确定了函数的定义域和对应法则, 这个函数就可以被确定了. 因此, 定义域和对应法则也称为函数的两要素. 判断两个函数是否相同, 关键看函数的两要素是否相同.

【例 2】 下列函数是否相同? 为什么?

$$(1) f(x) = x - 1, g(x) = \frac{x^2 - 1}{x + 1}; (2) f(x) = x^2 - 3x + 1, g(u) = u^2 - 3u + 1.$$

解 (1) $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$; $g(x)$ 在 $x = -1$ 处无定义, 其定义域为 $(-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$. 由于 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的定义域不同, 所以它们不是相同函数.

(2) $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$, $g(u)$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$, 且 $f(x)$ 与 $g(u)$ 的对应法则一样, 所以它们是相同函数.

思考

我们在确定函数的定义域时, 需要注意什么呢?

在实际问题中,函数的定义域可以根据问题的实际意义来确定,比如时间、数量不能为负;如果不考虑函数的实际意义,只研究函数的解析式,定义域就是使解析式有意义的所有实数的集合.

求函数的定义域应注意以下几点:

- (1) $y = \frac{a}{\varphi(x)} \Rightarrow \varphi(x) \neq 0$; (2) $y = \sqrt[n]{\varphi(x)} (n \text{ 为正整数}) \Rightarrow \varphi(x) \geq 0$;
 (3) $y = \log_a \varphi(x) \Rightarrow \varphi(x) > 0$; (4) 反正弦函数、反余弦函数的定义域为 $[-1, 1]$.

如果函数表达式中同时含有上述几种函数,则应取各部分定义域的交集.

【例 3】 求下列函数的定义域.

- (1) $y = \sqrt{1-x^2}$; (2) $y = \sqrt{x+3} - \frac{1}{x-1}$; (3) $y = \frac{1}{x} + \ln(1+x)$.

解 (1) 要使 $\sqrt{1-x^2}$ 有意义,需 $1-x^2 \geq 0$, 即 $-1 \leq x \leq 1$, 所以函数的定义域为 $[-1, 1]$;

(2) 要使函数解析式有意义,需要满足 $x+3 \geq 0$ 且 $x-1 \neq 0$, 即 $x \geq -3$ 且 $x \neq 1$, 所以函数的定义域为 $[-3, 1) \cup (1, +\infty)$;

(3) 要使函数解析式有意义,需要满足 $1+x > 0$, 且 $x \neq 0$, 即 $x > -1$, 且 $x \neq 0$, 所以函数的定义域为 $(-1, 0) \cup (0, +\infty)$.

下面我们介绍在后续学习中常用的一个概念——邻域.

设 a 与 δ 是两个实数,且 $\delta > 0$, 称 $(a-\delta, a+\delta)$ 为以 a 为中心的 δ 邻域,记为 $U(a, \delta)$, 其中, a 称为邻域的中心, δ 称为邻域的半径,称 $(a-\delta, a) \cup (a, a+\delta)$ 为以 a 为中心的去心 δ 邻域,记为 $\dot{U}(a, \delta)$.

2. 分段函数

引例 居民用水费用问题

为促进节约用水、合理配置水资源,我国居民用水费用实行阶梯水价制度. 已知某城市阶梯水价如表 1-1 所示.

表 1-1 某城市阶梯水价

阶梯	用水量/(m^3 /年)	水价/(元 $\cdot \text{m}^{-3}$)
第一阶梯	≤ 180	5
第二阶梯	$180 \sim 260$ (含)	7
第三阶梯	> 260	9

注:以户为单位,一个房产证对应一户.

试写出该市居民用水费用的函数解析式.

解 设年用水量为 $x \text{ m}^3$, 用水费用为 y 元. 根据题目条件,当 $0 \leq x \leq 180$ 时, $y = f(x) = 5x$; 当 $180 < x \leq 260$ 时, $y = f(x) = 180 \times 5 + 7(x - 180) = 7x - 360$; 当 $x > 260$ 时, $y = 180 \times 5 + 80 \times 7 + 9(x - 260) = 9x - 880$.

综合上述分析,该市居民用水费用的函数解析式为

$$y = f(x) = \begin{cases} 5x, & 0 \leq x \leq 180, \\ 7x - 360, & 180 < x \leq 260, \\ 9x - 880, & x > 260. \end{cases}$$



函数的
定义域



邻域



分段函数的
定义

【定义 2】 若函数 $y=f(x)$ 在它的定义域内的不同区间(或不同点)上有不同的表达式,则称它为分段函数.

思考

如何确定分段函数的定义域? 求分段函数的函数值时应该注意什么? 分段函数的图像又是怎么绘制的?

分段函数是几个解析式合起来表示的一个函数,不能理解为几个函数,其定义域是各部分的自变量取值集合的并集. 求分段函数的函数值 $f(x_0)$ 时,要根据 x_0 所在的范围选用相应的解析式,其图像要分段绘制.

【例 4】 设函数 $f(x)=\begin{cases} x^2+1, & -2\leq x<0, \\ 2, & x=0, \\ x+2, & 0<x\leq 3. \end{cases}$

- (1) 求函数的定义域;(2) 求 $f(-2), f(-1), f(0), f(1)$;
(3) 画出函数的图像.

解 (1) 函数的定义域 $[-2, 3]$.

(2) 由于 $-2 \in [-2, 0)$, $f(x) = x^2 + 1$, 所以 $f(-2) = (-2)^2 + 1 = 5$. 同理, $f(-1) = (-1)^2 + 1 = 2$, $f(0) = 2$, $f(1) = 1 + 2 = 3$.

(3) 分段函数的图像如图 1-3 所示.

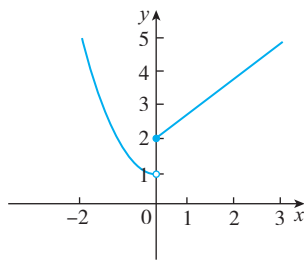


图 1-3

二、函数的性质



函数的性质

1. 有界性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D , 区间 $I \subseteq D$. 如果存在正数 M , 使得对于任意 $x \in I$, 均有 $|f(x)| \leq M$ 成立, 则称函数 $f(x)$ 在 I 内有界; 否则称无界.

例如, 当 $x \in (-\infty, +\infty)$ 时, $|\sin x| \leq 1$ 成立, 函数 $y = \sin x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内有界. 而当 $x \in (0, 1)$ 时, $1 < \frac{1}{x} < +\infty$, 函数 $y = \frac{1}{x}$ 在 $(0, 1)$ 内无界.

【例 5】 判断下列函数在定义域内是否有界.

(1) $f(x) = 3x - 2$; (2) $f(x) = 2\sin x - 3$.

解 (1) $f(x) = 3x - 2$ 的定义域和值域都是 $(-\infty, +\infty)$, 故函数在定义域内无界.

(2) $f(x) = 2\sin x - 3$ 的定义域是 $(-\infty, +\infty)$, 此时 $-1 \leq \sin x \leq 1$, 则 $-5 \leq 2\sin x - 3 \leq -1$, 函数的值域是 $[-5, -1]$. 即存在 $M = 5$, 使得任意 $x \in (-\infty, +\infty)$, 均有 $|f(x)| \leq M$ 成立, 函数在定义域内有界.

2. 单调性

设函数 $y = f(x)$ 的定义域为 D , 区间 $I \subseteq D$. 如果对于 I 内的任意两点 $x_1 < x_2$, 恒有 $f(x_1) < f(x_2)$ ($f(x_1) > f(x_2)$), 则称 $y = f(x)$ 在 I 内单调增加(单调减少). 此时, I 称为 $y = f(x)$ 的单调增(减)区间. 单调增区间和单调减区间统称为函数 $y = f(x)$ 的单调区间.

例如,函数 $y=x^3$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内是单调增加的. 函数 $y=x^2$ 在 $(-\infty, 0]$ 内是单调减少的, $(-\infty, 0]$ 是它的单调减区间; 在 $[0, +\infty)$ 内是单调增加的, $[0, +\infty)$ 是它的单调增区间; $y=x^2$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内不是单调的.

3. 奇偶性

设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称, 如果对于任意的 $x \in D$, 恒有 $f(-x)=f(x)$, 那么称 $f(x)$ 为偶函数; 如果恒有 $f(-x)=-f(x)$, 那么称 $f(x)$ 为奇函数.

偶函数的图像关于 y 轴对称, 奇函数的图像关于原点对称.

【例 6】 判断下列函数的奇偶性.

(1) $f(x)=x \sin x + \cos x$; (2) $f(x)=\ln(\sqrt{x^2+1}+x)$.

解 (1) 函数的定义域是 $(-\infty, +\infty)$. 对任意 $x \in (-\infty, +\infty)$, 有 $f(-x) = (-x) \sin(-x) + \cos(-x) = x \sin x + \cos x = f(x)$. 因此, $f(x)$ 是偶函数.

(2) 函数的定义域是 $(-\infty, +\infty)$. 对任意 $x \in (-\infty, +\infty)$, 有 $f(-x) = \ln[\sqrt{(-x)^2+1}+(-x)] = \ln(\sqrt{x^2+1}-x) = \ln \frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x} = -\ln(\sqrt{x^2+1}+x) = -f(x)$. 因此, $f(x)$ 是奇函数.

4. 周期性

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D . 如果存在正数 T , 使得对于任意的 $x \in D$, 恒有 $x \pm T \in D$, 且 $f(x \pm T)=f(x)$, 则称 $y=f(x)$ 是周期函数, T 是周期. 通常周期函数的周期是指它的最小正周期.

例如, 正弦函数 $y=\sin x$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$. 对于任意 $x \in \mathbf{R}$, 恒有 $x \pm 2\pi \in \mathbf{R}$, 且满足 $\sin(x \pm 2\pi)=\sin x$, 所以 $y=\sin x$ 是周期函数, 2π 是它的最小正周期. 类似的, 余弦函数也是周期函数, 2π 是它的最小正周期. 正切函数、余切函数都是周期函数.

“干支纪年法”与周期性

“干支纪年法”是中国古代一套沿用数千年的纪年系统, 蕴含着深刻的传统文化智慧. 这个系统由十天干(甲、乙、丙、丁……)和十二地支(子、丑、寅、卯……)两部分循环相配, 组合形成 60 种不同的年份名称, 称为“六十甲子”. 每 60 年重复一次, 具有严格的周期性.

三、反函数

引例 两种温度计量单位的换算问题

华氏度(Fahrenheit)和摄氏度(Centigrade)都是用来计量温度的单位. 包括我国在内的很多国家都使用摄氏度, 美国和其他一些国家使用华氏度. 设 C 代表摄氏度, F 代表华氏度, 它们之间的换算关系为

$$C = (F - 32) \div 1.8.$$

显然, C 是 F 的函数. 通过上述关系式, 我们也可以得到

$$F = C \times 1.8 + 32,$$

此时, F 也是 C 的函数.



反函数的
定义

【定义 3】 已知函数 $y = f(x)$, $x \in D$, 值域是 W . 如果对于 W 中的每个数 y , 在 D 中都有唯一确定的 x , 使得 $f(x) = y$, 那么 x 也是 y 的函数, 这个函数称为函数 $y = f(x)$ 的反函数, 记作 $x = f^{-1}(y)$, 其中 y 是自变量, x 是函数.

习惯上总是用 x 表示自变量, 用 y 表示函数, 所以, 我们往往将函数 $y = f(x)$ 的反函数写成 $y = f^{-1}(x)$. 根据定义, 反函数 $y = f^{-1}(x)$ 的定义域为 W , 恰好是函数 $y = f(x)$ 的值域; 反函数 $y = f^{-1}(x)$ 的值域为 D , 恰好是函数 $y = f(x)$ 的定义域.

思考

是不是任意函数都有反函数? 或者说, 具备什么条件的函数才有反函数?

只有一一对应的函数才有反函数. 因为区间上的单调函数是一一对应函数, 所以一定有反函数.

例如, 函数 $y = x^2$ 在 $[0, +\infty)$ 上是单调增加的. 此时, 对于任意的 $y \in [0, +\infty)$ 都存在唯一的 x , 使得 $y = x^2$ 成立, 因此, x 也是 y 的函数, 解析式为 $x = \sqrt{y}$, 这个函数就是 $y = x^2$ 在 $[0, +\infty)$ 上的反函数, 习惯上记作 $y = \sqrt{x}$.

把 $y = x^2$ 在 $[0, +\infty)$ 上的图像与 $y = \sqrt{x}$ 的图像画在同一平面直角坐标系上(图 1-4), 这两个图像关于直线 $y = x$ 对称, 这也是所有互为反函数的图像的特征.

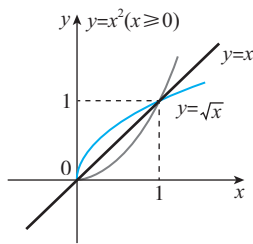


图 1-4

【例 7】 求下列函数的反函数.

(1) $y = \frac{3x+1}{x-2}$; (2) $y = 2^x + 1$.

解 (1) $y = \frac{3x+1}{x-2}$ 的定义域是 $(-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$. 由于 $y = \frac{3x+1}{x-2} = \frac{3(x-2)+7}{x-2} = 3 + \frac{7}{x-2} \neq 3$, 因此函数的值域为 $(-\infty, 3) \cup (3, +\infty)$. 由 $y = \frac{3x+1}{x-2}$, 有 $y(x-2) = 3x+1$, 解得 $x = \frac{2y+1}{y-3}$, 将字母 x 和 y 互换, 则函数 $y = \frac{3x+1}{x-2}$ 的反函数为 $y = \frac{2x+1}{x-3}$, $x \in (-\infty, 3) \cup (3, +\infty)$.

(2) 函数的定义域为 $(-\infty, +\infty)$, 值域为 $(1, +\infty)$. 由 $y = 2^x + 1$ 解得 $2^x = y - 1$, 化成对数式, 得 $x = \log_2(y - 1)$. 将字母 x 和 y 互换, 则函数 $y = 2^x + 1$ 的反函数为 $y = \log_2(x - 1)$, $x \in (1, +\infty)$.

案例 电机制动回收力问题

电动汽车的制动能量回收系统需要在保证安全的前提下最大化能量回收效率. 设总制

动力需求 $F_{\text{total}} = F_{\text{m}} + F_{\text{e}} = 1000p$ (单位: N). 系统根据驾驶员踩下制动踏板的深度 (即制动请求强度 $p, 0 \leq p \leq 1$) 来决定机械刹车力 F_{m} 与电机制动回收力 F_{e} 的分配. 轻度制动时 ($0 \leq p \leq 0.3$), 完全由电机进行能量回收, 机械刹车不介入; 中度制动时 ($0.3 < p \leq 0.7$), 电机提供其最大回收力 (设为恒定 300N), 剩余制动力由机械刹车补足; 紧急制动时 ($p > 0.7$), 为确保绝对制动效能和安全性, 机械刹车提供全部制动力, 电机回收关闭 (避免系统复杂性影响安全). 求电机制动回收力 F_{e} .

解 根据已知条件, 当 $0 \leq p \leq 0.3$ 时, $F_{\text{m}} = 0, F_{\text{e}} = F_{\text{total}} = 1000p$; 当 $0.3 < p \leq 0.7$ 时, $F_{\text{e}} = 300$; 当 $p > 0.7$ 时, $F_{\text{e}} = 0$. 此时, 电机制动回收力 $F_{\text{e}}(p)$ 是制动请求 p 的分段函数:

$$F_{\text{e}}(p) = \begin{cases} 1000p, & 0 \leq p \leq 0.3, \\ 300, & 0.3 < p \leq 0.7, \\ 0, & p > 0.7. \end{cases}$$



1.1 节课
后自测

拓展进阶

- 函数 $f(x) = \sqrt{x-1} + \ln(3-x)$ 的定义域是().
A. $(1, 3)$ B. $[1, 3]$ C. $[1, 3)$ D. $(1, 3]$
- 下列函数中为奇函数的是().
A. $f(x) = x^2 \cos x$ B. $f(x) = x \sin x$
C. $f(x) = e^x$ D. $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$
- 下列函数在其定义域内为单调递增的是().
A. $y = \sin x$ B. $y = e^{-x}$ C. $y = \ln x$ D. $y = \frac{1}{x}$
- 函数 $y = 2x + 3$ 的反函数是().
A. $y = \frac{x-3}{2}$ B. $y = \frac{x+3}{2}$ C. $y = 2x - 3$ D. $y = -2x$



1.1 节拓展
进阶解析

1.2 三角函数与反三角函数

三角函数 (如 $\sin x, \cos x, \tan x$ 等) 和反三角函数 (如 $\arcsin x, \arccos x, \arctan x$ 等) 都是重要的基本初等函数. 微积分学的许多概念 (如极限、连续、导数、积分等) 都以这些函数为例进行讲解和练习. 三角函数也是研究周期现象 (如振动、波动、交流电等) 的数学模型, 在微分方程、傅里叶分析等领域具有不可或缺的地位.

引例 周期现象

图 1-5 和图 1-6 分别记录了某地海边 24h 的潮汐涨落, 以及家用交流电电压的正弦波. 这两种现象虽然一个是自然现象, 一个是物理工程信号, 但蕴含着共同的数学特征——周期性, 而描述这类现象最强大的数学工具就是三角函数.



1.2 节课
前自测

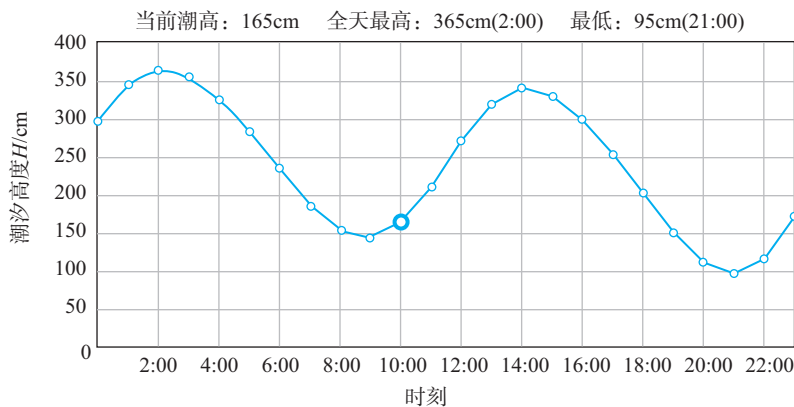


图 1-5

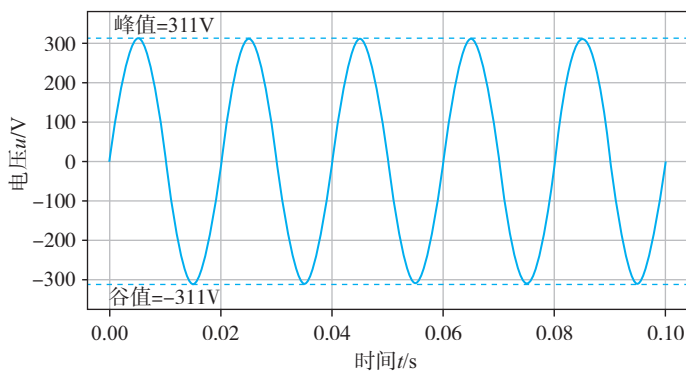


图 1-6

一、三角函数



三角函数

常见的三角函数包括正弦函数、余弦函数、正切函数、余切函数、正割函数、余割函数。

1. 三角函数的性质与图像

(1) 正弦函数

正弦函数 $y = \sin x$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$, 值域为 $[-1, 1]$, 是有界函数. 图像如图 1-7 所示.

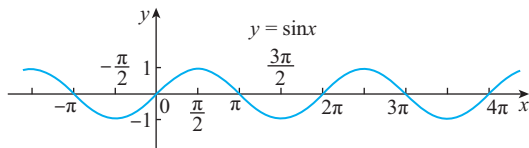


图 1-7

正弦函数的图像关于原点对称, 是奇函数. 正弦函数也是周期函数, 周期是 2π . 正弦函数在定义域上没有单调性, 我们可以把它的定义域划分为若干单调区间, $\left[2k\pi - \frac{\pi}{2}, 2k\pi + \frac{\pi}{2}\right]$ 是正弦函数的单调增区间, $\left[2k\pi + \frac{\pi}{2}, 2k\pi + \frac{3\pi}{2}\right]$ 是正弦函数的单调减区间.

(2) 余弦函数

余弦函数 $y = \cos x$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$, 值域为 $[-1, 1]$, 是有界函数. 图像如图 1-8 所示.

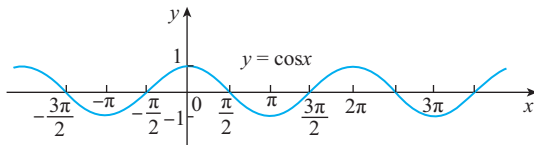


图 1-8

余弦函数的图像关于 y 轴对称, 是偶函数. 余弦函数也是周期函数, 周期是 2π . 余弦函数在定义域上没有单调性, 我们可以把它的定义域划分为若干单调区间, $[2k\pi, (2k+1)\pi]$ 是余弦函数的单调减区间, $[(2k-1)\pi, 2k\pi]$ 是余弦函数的单调增区间.

(3) 正切函数

正切函数 $y = \tan x$ 的定义域为 $\left\{x \in \mathbf{R}, x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}\right\}$, 值域为 $(-\infty, +\infty)$. 图像如图 1-9 所示. 正切函数的图像关于原点对称, 是奇函数. 正切函数也是周期函数, 周期是 π . 正切函数在定义域上没有单调性, 我们可以把它的定义域划分为若干单调区间, $\left(k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2}\right)$ 是正切函数的单调增区间.

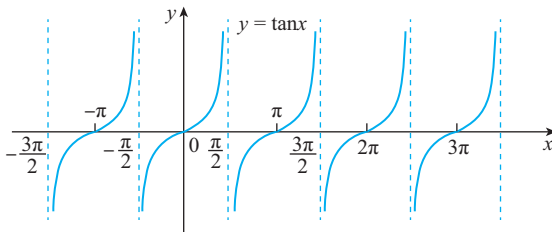


图 1-9

(4) 余切函数

余切函数 $y = \cot x$ 的定义域为 $\{x \in \mathbf{R}, x \neq k\pi\}$, 值域为 $(-\infty, +\infty)$. 图像如图 1-10 所示. 余切函数的图像关于原点对称, 是奇函数. 余切函数也是周期函数, 周期是 π . 余切函数在定义域上没有单调性, 我们可以把它的定义域划分为若干单调区间, $[k\pi, (k+1)\pi]$ 是余切函数的单调减区间.

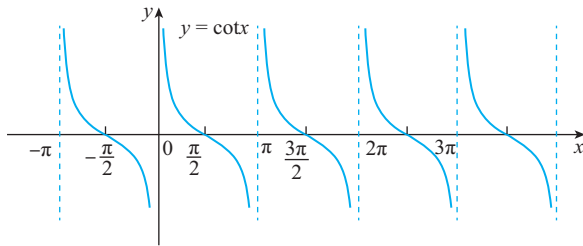


图 1-10

(5) 正割函数

正割函数 $y = \sec x = \frac{1}{\cos x}$ 的定义域为 $\left\{x \in \mathbf{R}, x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}\right\}$, 值域为 $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$. 图像如图 1-11 所示. 正割函数的图像关于 y 轴对称, 是偶函数. 图像每间隔 2π 会重复出现, 正割函数也是周期函数, 周期是 2π .

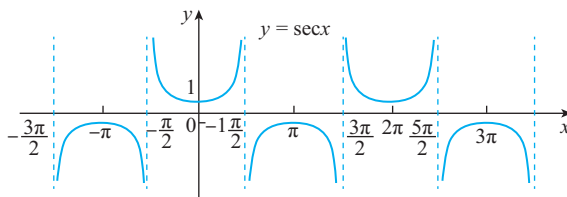


图 1-11

(6) 余割函数

余割函数 $y = \csc x = \frac{1}{\sin x}$ 的定义域为 $\{x \in \mathbf{R}, x \neq k\pi\}$, 值域为 $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$. 图像如图 1-12 所示. 余割函数的图像关于原点对称, 是奇函数. 图像每间隔 2π 会重复出现, 余割函数也是周期函数, 周期是 2π .

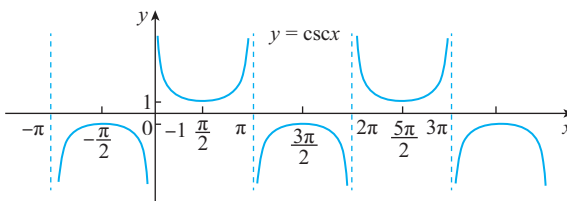


图 1-12

2. 三角函数的关系

上述三角函数之间满足表 1-2 所示的关系式.

表 1-2 三角函数的关系

常用公式	$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}, \tan x = \frac{1}{\cot x}, \sec x = \frac{1}{\cos x}, \csc x = \frac{1}{\sin x}.$
平方关系式	$\sin^2 x + \cos^2 x = 1, \tan^2 x + 1 = \sec^2 x, \cot^2 x + 1 = \csc^2 x.$
二倍角公式	$\sin 2x = 2 \sin x \cos x, \tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x},$ $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2 \cos^2 x - 1 = 1 - 2 \sin^2 x.$
降幂公式	$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}, \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}.$