

第 1 章

函 数

Functions

在中学数学中,我们虽然已经学习了函数的概念以及一些简单的函数,但都是基于初等数学的范畴。在以微分学和积分学为核心的高等数学中,各类函数及其变化性态是主要的研究对象。为了更好地学习微积分学的知识,本章将首先介绍与函数相关的一些基本概念和必备知识,然后列出基本初等函数及其特性,最后引入函数的几种常用表示方法以及一些特殊函数。

1.1 基本概念 *Basic concepts*



英文文档

在给出函数的定义之前,首先简要地介绍集合、区间、绝对值和邻域等一些基本概念。

1.1.1 集合、区间、绝对值和邻域

1. 集合

由于函数都是定义在某些数的范围内的,因此为了更准确地界定考虑对象的范围,我们引入集合这个概念。一般地,具有某种特定性质的事物汇集的总体称为一个**集合(set)**,组成这个集合的事物被称为集合的**元素(element)**。例如:一个班级可以认为是一个集合,班级的每一位同学就是这个集合的元素;直线方程 $y=x+2$ 上的所有点组成了一个集合。通常情况下,集合用大写字母 $A, B, C, \dots$ 表示,集合的元素用小写字母 $a, b, c, \dots$ 表示。

集合与元素之间的关系为:若 a 是集合 A 的元素,则称 a 属于 A ,记作 $a \in A$;若 a 不是集合 A 的元素,则称 a 不属于 A ,记作 $a \notin A$ 。

表示集合的方法通常有两种:一种是列举法,即把集合的全体元素一一列举出来,并用花括号括起来,如由元素 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 组成的集合 A 可以表示为 $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$;另一种是描述法,即利用集合的某种特征来描述其元素,将元素与特征用竖线“|”分开,并将全体用花括号括起来,如 xOy 平面中单位圆周上点的集合 B 可以表示为 $B = \{(x, y) | x^2 + y^2 = 1\}$ 。

若一个集合的元素个数有限,则称这个集合为**有限集(finite set)**,为使有限集的元素个数是确定的数,要求集合中的元素是不能重复的,否则称为**无限集(infinite set)**。不含任何元素的集合称为**空集(empty set)**,记作 $\emptyset$ 。



教学视频



英文教学
视频

最常遇到的数集有：

全体自然数(natural number)的集合,记作 $\mathbf{N}$; 全体整数(integer)的集合,记作 $\mathbf{Z}$; 全体有理数(rational number)的集合,记作 $\mathbf{Q}$; 全体实数(real number)的集合,记作 $\mathbf{R}$; 全体复数(complex number)的集合,记作 $\mathbf{C}$ 。

此外,正整数、正有理数和正实数的集合分别记作 $\mathbf{Z}_+$, $\mathbf{Q}_+$ 和 $\mathbf{R}_+$ 。如果没有特殊声明,本书中用到的数都是实数。

下面给出集合间的关系和运算。

设 A 和 B 是两个集合,若集合 A 的所有元素都属于集合 B ,则称 A 是 B 的**子集(subset)**,记作 $A \subseteq B$ (或 $B \supseteq A$),读作 A 包含于 B (或者 B 包含 A)。若 $A \subseteq B$,且存在元素 $a \in B$ 且 $a \notin A$,则称 A 是 B 的**真子集(proper subset)**,记作 $A \subset B$ (或者 $B \supset A$)。若 $A \subseteq B$,且 $B \subseteq A$,则称集合 A 和 B **相等(equality)**,记作 $A = B$ 。

规定:空集 $\emptyset$ 是任何集合 A 的子集,即 $\emptyset \subseteq A$ 。

对于前面给出的各种数集,显然有如下关系成立:

$$\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R} \subset \mathbf{C} \quad \text{和} \quad \mathbf{Z}_+ \subset \mathbf{Q}_+ \subset \mathbf{R}_+。$$

给定两个集合 A 和 B ,可以定义如下运算:

交集(intersection of sets) $A \cap B = \{x | x \in A \text{ 且 } x \in B\}$;

并集(union of sets) $A \cup B = \{x | x \in A \text{ 或 } x \in B\}$;

差集(difference of sets) $A \setminus B = \{x | x \in A \text{ 且 } x \notin B\}$;

余集(complementary set) $B_A^c = A \setminus B$, 其中 $B \subset A$ 。

集合间的各种运算及其结果可以用如图 1.1 所示的文氏(Venn)图来表示,其中阴影部分表示运算的结果。

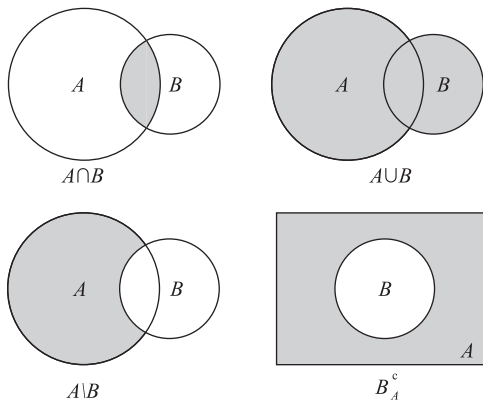
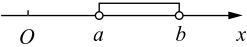
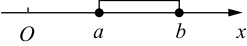
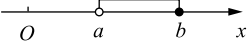
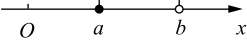
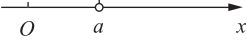
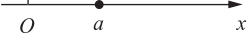
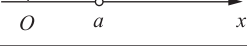
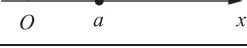


图 1.1

2. 区间

区间(interval)是高等数学课程中经常遇到的一类数集。各种区间的符号、名称、集合表示及在数轴上的图形表示如表 1.1 所示。

表 1.1

符 号	名 称	集合表示	图形表示
(a, b)	有限区间	$\{x a < x < b\}$	
$[a, b]$		$\{x a \leq x \leq b\}$	
$(a, b]$		$\{x a < x \leq b\}$	
$[a, b)$		$\{x a \leq x < b\}$	
$(a, +\infty)$	无限区间	$\{x x > a\}$	
$[a, +\infty)$		$\{x x \geq a\}$	
$(-\infty, a)$		$\{x x < a\}$	
$(-\infty, a]$		$\{x x \leq a\}$	

关于表中记号的几点说明:

(1) 表中的各个区间与集合的记法是严格对应的,不能混淆,特别是开区间(open interval)和闭区间(closed interval)的记法,开区间不包括区间端点,用圆括号表示,闭区间包括区间端点,用方括号表示。

(2) 在有限区间(finite interval)和无限区间(infinite interval)中, $a, b \in \mathbf{R}$, 且 $a < b$, 它们是确定的数。

(3) 无限区间中的 $+\infty$ 和 $-\infty$ 分别读作“正无穷”和“负无穷”,它们仅仅是一种符号,并不表示数,因此用圆括号表示无穷对应的端点,可以分别想象为沿着数轴的正向和负向无限延伸。详细的定义将在后面章节中给出。特别地,全体实数组成的集合 $\mathbf{R}$, 记作

$$\mathbf{R} = (-\infty, +\infty)。$$

3. 绝对值

实数 a 的绝对值(absolute value)记作 $|a|$, 它的定义为

$$|a| = \begin{cases} a, & a \geq 0, \\ -a, & a < 0. \end{cases}$$

该定义表明,实数 a 的绝对值 $|a|$ 是非负的,它的几何意义是数轴上的点到原点的距离。对于任意给定的实数 a, b, c , 不难证明如下等式或不等式成立:

- (1) $|a - b| \geq 0$; (2) $|a - b| = |b - a|$; (3) $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$;
 (4) $|a + b| \leq |a| + |b|$; (5) $|a - c| \leq |a - b| + |b - c|$ (三角不等式);
 (6) $|a - b| \geq ||a| - |b||$ 。

4. 邻域

设 $a \in \mathbf{R}$, $\delta > 0$, 数集 $\{x | |x - a| < \delta\}$ 称为以点 a 为中心, δ 为半径的邻域

(neighborhood), 简称 a 的 δ 邻域, 记作 $U(a, \delta)$, 即

$$U(a, \delta) = \{x \mid |x - a| < \delta\} = (a - \delta, a + \delta).$$

当不需要注明邻域的半径 δ 时, 常把它表示为 $U(a)$, 简称点 a 的邻域。

在后面的应用中, 有时需要把邻域中心去掉, 这时的数集表示为 $\{x \mid 0 < |x - a| < \delta\}$, 并称为点 a 的去心 δ 邻域, 记作 $\dot{U}(a, \delta)$, 即

$$\dot{U}(a, \delta) = \{x \mid 0 < |x - a| < \delta\} = (a - \delta, a) \cup (a, a + \delta) = (a - \delta, a + \delta) \setminus \{a\},$$

如图 1.2 所示。同样, 当不需要注明去心邻域的半径 δ 时, 常将它表示为 $\dot{U}(a)$, 简称 a 的去心邻域(deleted neighborhood)。将 $(a - \delta, a)$ 和 $(a, a + \delta)$ 分别称为点 a 的左邻域(left neighborhood)和右邻域(right neighborhood)。有时点 a 的左邻域和右邻域分别用 $\dot{U}(a^-)$ 和 $\dot{U}(a^+)$ 表示。

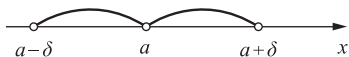


图 1.2

1.1.2 函数的定义

当我们研究某个自然现象的运动规律或分析社会现象的发展过程时, 在同一过程中碰到的各种量, 常常有几个量同时变化, 它们之间存在某种依赖关系, 其中一个量的变化常常引起其他量的变化。例如, 在考虑距离地面高度为 h 的物体作自由落体运动时, 在忽略空气阻力的情况下, 物体到达地面所需的时间 t 和高度 h 应满足关系 $t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$, 其中 g 是重力加

速度。又如, 半径为 r 的球与它的体积 V 应满足的关系为 $V = \frac{4}{3}\pi r^3$, $r \in [0, +\infty)$, 其中 π

是圆周率。再如, 一定质量的理想气体的压强 p 和其体积 V 及温度 T 的关系为 $p = \frac{RT}{V}$, 其中 R 为常数。

由上述例子不难看出, 当高度 h 、半径 r 、体积 V 及温度 T 变化时, 落体的时间 t 、球体的体积 V 和理想气体的压强 p 都随之而变化, 这种依赖关系称为函数关系(functional relationship)。于是有如下关于函数的定义。

定义 1.1 设 D 是实数集 $\mathbf{R}$ 的一个非空子集。若按照对应法则 f , 对 D 中的每一个 x , 均有唯一确定的实数 y 与之对应, 则称 f 是定义在 D 上的函数(function), 函数关系记作

$$f: D \rightarrow \mathbf{R}.$$

数集 D 称为函数 f 的定义域(domain), 函数值的集合 $R(f) = \{f(x) \mid x \in D\}$ 称为函数 f 的值域(range), 有时 f 的值域也记为 $f(D)$ 。一般地, 当泛指或简记定义在集合 D 上的函数时, 将其记作

$$y = f(x), \quad x \in D.$$

关于定义 1.1 的几点说明:

(1) 在函数的定义中出现了两个变量, 即 x 和 y , 这两个变量的联系是通过函数关系 f 建立起来的。其中 x 是主动变化的, 故称为自变量(independent variable), 在泛指或简记函

数的表示中,常用括号将自变量的表示方式界定出来,在具体的函数表示中,在不产生歧义的情况下,自变量一般不用括起来,如 $y = \sin x$; y 随着 x 被动地变化,故称为**因变量**(dependent variable)。

(2) 根据函数的定义,虽然函数都存在定义域,但是在不明确指出函数 $y = f(x)$ 的定义域时,该函数的定义域是使函数有意义的实数 x 的集合 $D = \{x | f(x) \in \mathbf{R}\}$,即**自然定义域**(natural domain)。当不需要指明函数 f 的定义域时,函数又可以简写为“ $y = f(x)$ ”。但对于具有实际意义的函数,它的定义域要受实际意义的约束。例如,自由落体的高度 h 和球体的半径 r 的定义域都应该是区间 $[0, +\infty)$ 。

(3) 由函数的定义可以看到,构成函数的两个基本要素是定义域 D 和对应法则 f 。因此,可以把定义域相同并且对应法则相同的两个函数认为是相同的;而把定义域或对应法则不完全一样的两个函数认为是不同的函数。换句话说,两个函数是否相同,与自变量及因变量使用的符号是没有关系的。例如,如下两组函数

$$y = f(x) = x, \quad x \in D = \{x | x \geq 0\} \quad \text{和} \quad y = g(t) = \sqrt{t^2}, \quad t \in D = \{t | t \geq 0\},$$

$$y = f(x) = \sqrt[3]{x^4 + x^3} \quad \text{和} \quad y = g(x) = x \sqrt[3]{x+1}$$

是相同的函数。又如,如下两组函数

$$y = f(x) = 1 \quad \text{和} \quad y = g(x) = \sec^2 x - \tan^2 x,$$

$$y = f(x) = \ln x^2 \quad \text{和} \quad y = g(x) = 2 \ln x,$$

因为定义域不同,所以它们是不同的函数。

(4) 函数的定义指出:对于每个自变量 $x \in D$,按照对应关系 f ,对应唯一的一个因变量 $y \in \mathbf{R}$,这样的对应就是所谓的单值对应。反之,一个因变量 $y \in R(f)$ 就不一定只有一个自变量 $x \in D$ 与之对应,例如正弦函数 $y = \sin x$ 就是如此。

(5) 在函数的定义中,要求与自变量 x 对应的因变量 y 是唯一确定的,这种函数也称为**单值函数**(single valued function)。如果取消唯一这个要求,即对应于 x 的值,可以有两个以上确定的 y 值与之对应,这种函数 $y = f(x)$ 称为**多值函数**(multivalued function)。例如,函数 $y = \pm \sqrt{R^2 - x^2}$ 是多(双)值函数。今后如果没有特别声明,所讨论的函数都限于单值函数。

(6) 设有函数 $y = f(x)$,对于给定的 $x \in D$,其对应的函数值为 $y = f(x)$,在平面直角坐标系 xOy 中可以画出点 $(x, f(x))$,当自变量 x 在函数 $y = f(x)$ 的定义域内变动并取遍定义域中所有值时,动点 $(x, f(x))$ 的轨迹,即点集 $\{(x, f(x)) | x \in D\}$ 称为函数 $y = f(x)$ 的**图形**(figure)或**图像**(graph)。

1.1.3 具有某种特性的函数

在讨论一些简单的函数时,它们有时表现出了各自不同的特性。掌握这些特性,在处理一些相对复杂的函数时是非常有用的。为了更好地刻画这些特性,下面介绍奇函数、偶函数、周期函数、有界函数、单调函数等概念。

1. 奇函数与偶函数

有这样一些函数,它们的定义域是关于原点对称的,并且函数图形也具有对称性,如关于原点对称或关于 y 轴对称,具有这种对称性的函数称为奇函数或偶函数。

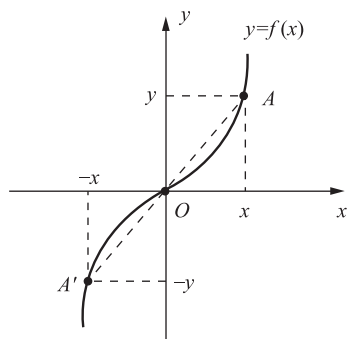
定义 1.2 设函数 $y = f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称,即对于任意的 $x \in D$,都有一 $x \in$

D 。若 $f(-x) = -f(x)$, 则称函数 $y = f(x)$ 是**奇函数(odd function)**; 若 $f(-x) = f(x)$, 则称函数 $y = f(x)$ 是**偶函数(even function)**。

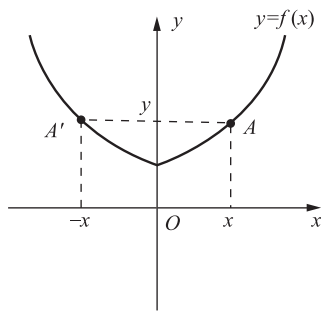
若函数 $y = f(x)$ 是奇函数, 则对于函数图形上的点 (x_0, y_0) , 即 $y_0 = f(x_0)$, 有

$$f(-x_0) = -f(x_0) = -y_0。$$

也就是说, $(-x_0, -y_0)$ 也在函数 $y = f(x)$ 的图形上。由此可知, 奇函数的图形关于原点对称, 如图 1.3(a) 所示。同理可知, 偶函数的图形关于 y 轴对称, 如图 1.3(b) 所示。



(a)



(b)

图 1.3

不难验证, 函数 $y = x^4 + 3x^2 + 2$, $y = \sqrt{1-x^2}$ 和 $y = \frac{\sin x}{x}$ 皆为偶函数; 函数 $y = \frac{1}{x}$, $y = x^3$ 和 $y = x^2 \sin x$ 皆为奇函数。

2. 周期函数

在自变量变化过程中, 有些函数经过一定阶段后又重复原来的状态, 这样的函数称为具有周期性的函数, 如中学物理中做简谐振动的弹簧振子、单摆等。

定义 1.3 设函数 $y = f(x)$ 在数集 D 上有定义。若存在正数 T , 对于任意的 $x \in D$, 有 $x \pm T \in D$, 并且

$$f(x \pm T) = f(x),$$

则称函数 $y = f(x)$ 是**周期函数(periodic function)**, T 称为该函数的一个**周期(period)**。周期函数的图形如图 1.4 所示。

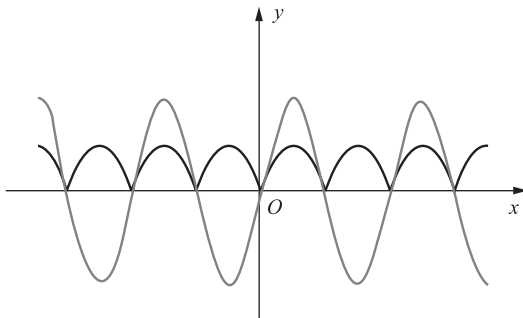


图 1.4

用数学归纳法不难证明,若 T 是函数 $y=f(x)$ 的一个周期,则 $2T, 3T, \dots, nT, \dots$ 也是它的周期,其中 n 是正整数。因此,周期函数的周期不是唯一的。若函数 $y=f(x)$ 存在一个最小的正周期,通常将这个最小正周期称为该函数的**基本周期(fundamental period)**,简称为周期。

例如, $y=\sin x, y=\cos x$ 都是周期为 2π 的周期函数。再如,常值函数 $y=f(x)\equiv 1$ 也是周期函数,任意正的实数都是它的周期。

3. 有界函数

定义 1.4 设函数 $y=f(x)$ 在数集 D 上有定义。若该函数值的集合

$$f(D)=\{f(x)|x\in D\}$$

有上界,即存在数 K ,使得当 $x\in D$ 时,有 $f(x)\leq K$,则称函数 $y=f(x)$ 在 D 上有上界,同时把数 K 称为函数 $y=f(x)$ 在 D 上的一个**上界(upper bound)**。类似地,若函数值的集合有下界,即存在数 k ,使得当 $x\in D$ 时,有 $f(x)\geq k$,则称函数 $y=f(x)$ 在 D 上有下界,同时把数 k 称为函数 $y=f(x)$ 在 D 上的一个**下界(lower bound)**。特别地,若函数 $y=f(x)$ 的函数值集合在 D 上是一个有界集,即存在正数 M ,使得当 $x\in D$ 时,有 $|f(x)|\leq M$,则称函数 $y=f(x)$ 在 D 上是**有界函数(bounded function)**,同时把正数 M 称为函数 $y=f(x)$ 在 D 上的一个**界(bound)**。

仿照定义 1.4,可以类似地给出函数 $y=f(x)$ 在 D 上无上界、无下界、无界的定义。

若函数 $y=f(x)$ 在其定义域上有界,在几何上表示存在正数 M ,使得函数 $y=f(x)$ 在 D 上的图形位于直线 $y=-M$ 和 $y=M$ 之间的带状区域内,如图 1.5 所示。

例如, $y=\sin x, y=\cos x$ 在其定义域上都是有界函数。

函数 $y=\frac{1}{x}, y=x^2$ 在其定义域上都是无界函数。

例 1.1 函数 $y=f(x)$ 在其定义域 D 上有界的充分必要条件是:它既有上界又有下界。

分析 利用函数有上界、下界和有界的定义。

证 必要性 由于函数 $y=f(x)$ 在其定义域 D 上有界,由定义 1.4 可知,存在正数 M ,使得当 $x\in D$ 时,有 $|f(x)|\leq M$,此不等式等价于

$$-M\leq f(x)\leq M, \quad (1.1)$$

因此 $-M, M$ 分别为函数在其定义域 D 上的一个下界和一个上界。

充分性 由于函数 $y=f(x)$ 在其定义域 D 上既有上界又有下界,同样由定义 1.4 可知,存在 K 和 k ,使得当 $x\in D$ 时,有 $k\leq f(x)\leq K$,取 $M=\max\{|K|, |k|\}$,则同样有(1.1)式成立,即函数 $y=f(x)$ 在其定义域 D 上有界。证毕

4. 单调函数

随着自变量的增加,一些函数的函数值也随之增加(或减少),这种函数称为**单调函数(monotone function)**。

定义 1.5 设函数 $y=f(x)$ 在数集 D 上有定义,区间 $I\subset D$ 。若对于 I 上的任意两点,

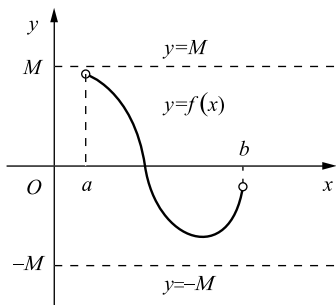


图 1.5

即 $x_1, x_2 \in I$, 只要它们满足 $x_1 < x_2$, 恒有

$$f(x_1) \leq f(x_2),$$

则称函数 $y=f(x)$ 在 I 上 **单调递增** (monotone increasing); 若恒有

$$f(x_1) \geq f(x_2),$$

则称函数 $y=f(x)$ 在 I 上 **单调递减** (monotone decreasing)。这两类函数统称为 **单调函数**。

若上述不等式改为

$$f(x_1) < f(x_2) \quad \text{或} \quad f(x_1) > f(x_2),$$

则称函数 $y=f(x)$ 在 I 上 **严格单调递增** 或 **严格单调递减**, 如图 1.6 所示。

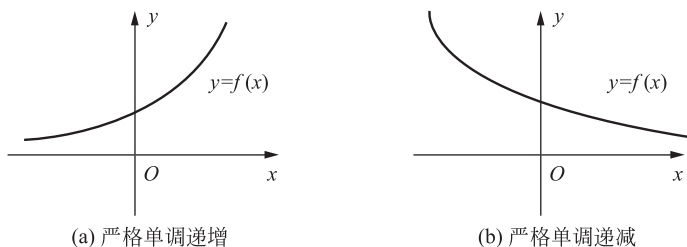


图 1.6

例如, 函数 $y=x^3$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上是严格递增的。又如, 函数 $y=2x^2+1$ 在 $(-\infty, 0]$ 上是严格递减的, 在 $[0, +\infty)$ 上是严格递增的, 但它在 $(-\infty, +\infty)$ 上不是单调函数。



教学视频

1.1.4 函数的四则运算、复合函数和反函数

1. 函数的四则运算

由于函数值是一个数, 而数与数之间是可以进行四则运算的, 所以函数之间同样也有四则运算。

设函数 $y=f(x)$ 和 $y=g(x)$ 的定义域分别为 D_1 和 D_2 。若 $D=D_1 \cap D_2 \neq \emptyset$, 则可以定义这两个函数的和(sum)、差(difference)、积(product)、商(quotient)等运算。

和(差) $f \pm g$: $(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x), x \in D$;

积 $f \cdot g$: $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x), x \in D$;

商 $\frac{f}{g}$: $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, x \in D \setminus \{x \mid g(x) = 0\}$ 。

例 1.2 已知函数 $y=f(x)$ 在关于原点的对称区间 $(-l, l)$ 上有定义, 证明: 它在区间 $(-l, l)$ 上一定可以分解为一个奇函数 $g(x)$ 与一个偶函数 $h(x)$ 的和, 即

$$f(x) = g(x) + h(x)。$$

分析 解决此问题的方法类似于求解方程组, 即求出奇函数 $g(x)$ 与偶函数 $h(x)$ 的表达式即可。

证 设 $g(x)$ 和 $h(x)$ 分别是在对称区间 $(-l, l)$ 上的奇函数和偶函数, 即

$$g(-x) = -g(x), \quad h(-x) = h(x)。$$

函数 $f(x)$ 能否表示为 $f(x) = g(x) + h(x)$ 等价于如下的方程组是否有解, 即

$$\begin{cases} f(x) = g(x) + h(x), \\ f(-x) = -g(x) + h(x)。 \end{cases}$$



证毕 英语教学
视频

不难求得奇函数 $g(x)$ 与偶函数 $h(x)$ 的表达式分别为

$$g(x) = \frac{1}{2}[f(x) - f(-x)] \quad \text{和} \quad h(x) = \frac{1}{2}[f(x) + f(-x)].$$

因此, $f(x) = g(x) + h(x)$ 。

2. 复合函数

在解决一些较为复杂的实际问题时,经常会遇到多个变量的联动变化,即存在两种或两种以上的函数关系嵌套在一起,最终的因变量需要用所谓“中间变量”传递的方法才能表示出来。

例如,设有两个函数 $y = \sin u$, $u = x^2$, 由中间变量 u 的传递可以生成新函数

$$y = \sin u = \sin x^2.$$

在这里, y 是 u 的函数, u 又是 x 的函数,于是通过中间变量 u 的传递得到 y 是 x 的函数。但并不是所有函数都能够有这样的传递关系。例如, $y = \arcsin u$, $u = x^2 + 2$, 由于反正弦函数的定义域为 $[-1, 1]$, 即要求 $-1 \leq u \leq 1$, 而对任意的 $x \in \mathbf{R}$, 第二个函数 $u = x^2 + 2$ 的函数值满足 $u \geq 2$, 它不在 $y = \arcsin u$ 的定义域中, 因此这两个函数不能够通过中间变量 u 传递。为此, 需要给出这类新的函数一个严格的定义。

定义 1.6 设函数 $y = f(u)$ 和 $u = g(x)$ 的定义域分别为 U 和 D 。若对于任意的 $x \in D$, 有 $g(x) \in U$, 则函数

$$y = f[g(x)], \quad x \in D$$

称为由函数 $y = f(u)$ 和函数 $u = g(x)$ 构成的**复合函数(composite function)**, 记作

$$y = (f \circ g)(x) = f[g(x)], \quad x \in D,$$

变量 u 称为中间变量。

关于定义 1.6 的几点说明:

(1) 两个函数 $y = f(u)$ 和 $u = g(x)$ 可以构成复合函数的条件是 $g(D) \subset U$, 即函数 $u = g(x)$ 在 D 上的值域必须包含在函数 $y = f(u)$ 的定义域 U 内, 否则不能构成复合函数。 $f[g(x)]$ 表明外层函数的自变量为 $g(x)$, 换句话说, 不论有多少层函数, 内层函数的值域必须包含在外一层函数的定义域内。

(2) 复合函数的概念可以推广到由有限个函数间传递的情形。例如, 三个函数

$$y = \sqrt{1-u}, \quad u = \sin^2 v, \quad v = x+2$$

构成的复合函数是

$$y = \sqrt{1 - \sin^2(x+2)}, \quad x \in (-\infty, +\infty).$$

(3) 一般地, 我们需要将满足条件的若干个简单的函数组合成复合函数, 但有些情况下为了研究某些复杂函数的性质, 还要将它们“分解”为若干个简单的函数。例如, 函数

$$y = \sin \sqrt[3]{1+2\ln x}, \quad x \in (0, +\infty)$$

可以分解为四个简单函数 $y = \sin u$, $u = \sqrt[3]{v}$, $v = 1+2w$, $w = \ln x$, $x \in (0, +\infty)$ 。

3. 反函数

在高中课程中, 我们已经学习了一些简单函数的反函数。例如, 对数函数是指数函数的反函数, 各个反三角函数是对应的三角函数在**特定区间**的反函数, 等等。

在函数的定义中,按照对应关系 f ,对任意 $x \in D$,在 $\mathbf{R}$ 中有唯一一个 y 与之对应,但对任意一个 $y \in f(D)$,不一定有唯一的 $x \in D$,使 $f(x)=y$ 。例如,正弦函数 $y=\sin x$ 的定义域为 $\mathbf{R}$,它在 $\mathbf{R}$ 上不存在反函数,但是它在区间 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ 上存在反函数 $y=\arcsin x$ 。因此,函数在什么情况下存在反函数,需要给出一个明确的定义。

定义 1.7 设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D ,值域为 $f(D)$ 。若对任意 $y \in f(D)$,有唯一一个 $x \in D$ 与之对应,即 $f(x)=y$,则称函数 $y=f(x)$ 在 D 上存在反函数(inverse function),记作

$$x=f^{-1}(y), \quad y \in f(D)。$$

关于定义 1.7 的几点说明:

(1) 反函数的实质在于它所表示的对应规律,用什么字母来表示反函数中的自变量与因变量是无关紧要的。习惯上仍把自变量记作 x ,因变量记作 y ,则可以将函数 $y=f(x)$ 的反函数 $x=f^{-1}(y)$ 记作 $y=f^{-1}(x)$ 。例如:

直接函数

$$y=2x+1$$

$$y=a^x$$

$$y=x^3$$

求得的反函数

$$x=\frac{y-1}{2}$$

$$x=\log_a y$$

$$x=\sqrt[3]{y}$$

反函数

$$y=\frac{x-1}{2}$$

$$y=\log_a x$$

$$y=\sqrt[3]{x}$$

(2) 相对于反函数 $y=f^{-1}(x)$,原来的函数 $y=f(x)$ 称为直接函数(direct function)。若将反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图形与直接函数 $y=f(x)$ 的图形画在同一坐标平面上,则这两个图形关于直线 $y=x$ 是对称的,如图 1.7 所示。

由函数严格单调的定义不难证明下面的定理成立。

定理 1.1 若函数 $y=f(x)$ 在某区间 X 上严格单调递增(严格单调递减),则函数 $y=f(x)$ 存在反函数,且反函数 $x=f^{-1}(y)$ 在 $f(X)$ 上也严格单调递增(严格单调递减)。

证明从略,留作练习。

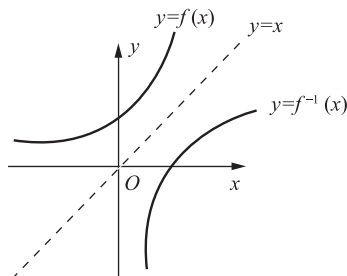


图 1.7

习 题 1.1

思考题

1. 两个给定的函数在什么条件下可以认为是相同的。如下两个函数是否相同?

$$f(x)=1, \quad g(x)=\sin^2 x + \cos^2 x。$$

2. 命题“两个偶函数的和是偶函数,两个奇函数的和是奇函数”是否正确? 说明理由。

3. 任意几个函数是否可以构成复合函数? 若不能,条件是什么?

4. 定理 1.1 中的条件“函数在区间上的严格单调”中的“严格”两字是否可以忽略? 说明理由。



答案及部分
习题详解