第 1 章　导论和纵览

1.1　拉格朗日形式和哈密顿形式

力学研究粒子、刚体、连续介质 (流体、等离子体和弹性材料) 的动力学, 以及诸如电磁和引力学的场论. 这门科学在量子力学、控制理论以及物理学的其他领域、工程学, 甚至化学和生物学中都起着至关重要的作用. 显然, 力学是一门大学科, 它在自然科学中起着基础性的作用. 在数学的发展中, 力学也扮演着关键的角色. 从由牛顿力学刺激而创立的微积分开始, 时至今日它仍在促发着群表示论、几何学和拓扑学中激动人心的进步; 同时, 这些数学的发展反过来又被应用到物理和工程学的许多有趣的问题上.

力学研究中, 对称性在基本原理的基础表述和具体应用方面都起到了重要作用, 如对于旋转结构稳定性的判别. 本书的主题即是强调对称性在力学各个方面中的作用.

这篇导论很快地论及众多问题, 学生们不要期望在这一阶段就很好地理解一切. 在以后的章节里我们对很多问题都要重温.

拉格朗日力学和哈密顿力学

力学有两个主要的观点, 拉格朗日力学和哈密顿力学. 在某种意义上, 拉格朗日力学更基本一些, 因为它基于变分原理, 并且它可以最直接地推广到广义相对论的框架. 在另一种意义上, 哈密顿力学更基本一些, 因为它直接地基于能量的概念, 并且它与量子力学联系得更为紧密. 幸运的是, 在许多情形中这两个分支是等价的, 具体细节详见第 7 章. 毫无疑问, 量子力学和广义相对论的统一仍是力学中最杰出的问题之一. 事实上, 弦理论曾尝试做此统一, 而力学和对称性的方法则是弦理论发展中的重要因素.

拉格朗日力学

力学的拉格朗日表述形式基于下述发现, 即在牛顿的基本力学定律 $F = ma$ 的背后有变分原理. 选取一个位形空间Q, 用坐标 $q^i (i = 1, 2, \cdots)$ 描述所研究系统的构型. 然后引进拉格朗日函数 $L(q^1, \cdots, q^n, \dot{q}^1, \cdots, \dot{q}^n, t)$, 其缩写为 $L(q^i, \dot{q}^i, t)$. 通常, L 是系统的动能减去势能, 取 $\dot{q}^i = \dfrac{\mathrm{d}q^i}{\mathrm{d}t}$ 为系统的速度. 哈密顿变分原理即为

$$\delta \int_a^b L(q^i, \dot{q}^i, t)\mathrm{d}t = 0. \tag{1.1.1}$$

此原理中, 在一个固定的时间区间 $[a,b]$ 上选取连接 Q 中两个固定点的曲线 $q^i(t)$, 并做积分, 这个积分可看作是曲线的函数. 哈密顿原理表明, 这个函数在位于曲线空间中的解曲线处有一个驻点. 如果我们令 δq^i 是一个变分, 即一族曲线关于一个参数的导数, 那么由链式法则, 式 (1.1.1) 等价于对所有变分 δq^i 有

$$\sum_{i=1}^{n}\int_a^b\Big(\frac{\partial L}{\partial q^i}\delta q^i+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\delta \dot{q}^i\Big)\mathrm{d}t=0. \tag{1.1.2}$$

利用关于混合求导的等式, 可以得到

$$\delta\dot{q}^i=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta q^i.$$

由此, 对式 (1.1.2) 的第 2 项进行分部积分, 并利用在 $t=a$ 处和 $t=b$ 处的边界条件 $\delta q^i=0$, 式 (1.1.2) 即成为

$$\sum_{i=1}^{n}\int_a^b\Big[\frac{\partial L}{\partial q^i}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\Big)\Big]\delta q^i\mathrm{d}t=0. \tag{1.1.3}$$

由于 δq^i 是任意的 (除去在端点处为零), 式 (1.1.2) 等价于欧拉 - 拉格朗日方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}-\frac{\partial L}{\partial q^i}=0,\quad i=1,2,\cdots,n. \tag{1.1.4}$$

正如哈密顿 [Hamilton, 1834] 所领悟到的那样, 如果不加固定的端点条件, 人们可以得到有价值的信息. 在第 7 章和第 8 章中我们将就此问题作更深入的探讨.

对于 N 个在三维欧几里得空间中运动着的粒子组成的系统, 我们选取位形空间为 $Q=\mathbb{R}^{3N}=\mathbb{R}^3\times\cdots\times\mathbb{R}^3$ (N个$\mathbb{R}^3$), 并且 L 通常是动能减去势能的形式:

$$L(q_i,\dot{q}_i,t)=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}m_i\|\dot{q}_i\|^2-V(q_i)^{①}, \tag{1.1.5}$$

这里我们把 Q 中的点记为 $q_1,\cdots,q_N$, 其中 $q_i\in\mathbb{R}^3$. 这种情况下, 欧拉 - 拉格朗日方程组 (1.1.4) 化为牛顿第二定律

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m_i\dot{q}_i)=-\frac{\partial V}{\partial q_i},\quad i=1,\cdots,N, \tag{1.1.6}$$

即具有势能 V 的质点的运动规律 $F=ma$. 后面我们将会看到, 许多例子中需要更一般的拉格朗日函数.

① 本书矩阵、向量、矢量、张量等均采用白体的形式.

通常, 在拉格朗日力学中, 人们先认定一个位形空间 Q (坐标为 $(q^1, \cdots, q^n)$), 然后再构造速度相空间 TQ, 它也被称为 Q 的切丛 . TQ 上的坐标记为

$$(q^1, \cdots, q^n, \dot{q}^1, \cdots, \dot{q}^n),$$

而拉格朗日函数可看作函数 $L : TQ \to \mathbb{R}$.

在此阶段, 已可与几何学建立有趣的联系. 如果 $g_{ij}(q)$ 是一个给定的度规张量, 或质量矩阵 (目前, 只需将其看作一个与 q 有关的正定对称 $n \times n$ 矩阵), 并且考虑动能拉格朗日函数

$$L(q^i, \dot{q}^i) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}(q) \dot{q}^i \dot{q}^j, \tag{1.1.7}$$

那么可以直接验证 (具体细节请参看 7.5 节) 欧拉 - 拉格朗日方程等价于测地线运动方程. 这样, 就可以应用守恒律 (力学框架中它是对称性的结果) 来证明有趣的几何事实. 例如, 可以用这种方法容易地证明有关旋转曲面上测地线的定理.

拉格朗日形式可以被扩展到无穷维的情形. 一种方法 (但不是惟一的一种) 是用场 $\varphi^1, \cdots, \varphi^m$ 代替 q^i, 例如, 诸 φ^j $(j = 1, \cdots, m)$ 可以是空间点 x^i 和时间的函数. 这样, L 即为 $\varphi^1, \cdots, \varphi^m, \dot{\varphi}^1, \cdots, \dot{\varphi}^m$ 以及场的空间导数的函数. 后面我们将会看到与此相关的各种例子, 但我们强调, 经恰当的解释, 变分原理和欧拉 - 拉格朗日方程保持不变. 在欧拉 - 拉格朗日方程中, 人们用下文中定义的泛函导数来代替偏导数.

哈密顿力学

为了过渡到哈密顿形式, 我们引进共轭动量

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}, \quad i = 1, \cdots, n, \tag{1.1.8}$$

作变量变换 $(q^i, \dot{q}^i) \mapsto (q^i, p_i)$, 并引进哈密顿函数

$$H(q^i, p_i, t) = \sum_{j=1}^{n} p_j \dot{q}^j - L(q^i, \dot{q}^i, t). \tag{1.1.9}$$

记住上述变量变换, 并利用链式法则, 做下述计算:

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{q}^i + \sum_{j=1}^{n} \left(p_j \frac{\partial \dot{q}^j}{\partial p_i} - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j} \frac{\partial \dot{q}^j}{\partial p_i} \right) = \dot{q}^i \tag{1.1.10}$$

和

$$\frac{\partial H}{\partial q^i} = \sum_{j=1}^{n} p_j \frac{\partial \dot{q}^j}{\partial q^i} - \frac{\partial L}{\partial q^i} - \sum_{j=1}^{n} \left(-\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j} \frac{\partial \dot{q}^j}{\partial q^i} \right) = -\frac{\partial L}{\partial q^i}, \tag{1.1.11}$$

其中式 (1.1.8) 被用了两次. 利用式 (1.1.4) 和式 (1.1.8), 我们发现式 (1.1.11) 等价于

$$\frac{\partial H}{\partial q^i} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}p_i. \tag{1.1.12}$$

这样, 欧拉 - 拉格朗日方程等价于哈密顿方程

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}q^i}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\partial H}{\partial p_i}, \\ \dfrac{\mathrm{d}p_i}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{\partial H}{\partial q^i}, \end{cases} \tag{1.1.13}$$

其中 $i = 1, \cdots, n$. 类似于前面的情形, 关于依赖于时间的场 $\varphi^1, \cdots, \varphi^m$ 及其共轭动量 $\pi_1, \cdots, \pi_m$ 的哈密顿偏微分方程是

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \varphi^a}{\partial t} = \dfrac{\delta H}{\delta \pi_a}, \\ \dfrac{\partial \pi_a}{\partial t} = -\dfrac{\delta H}{\delta \varphi^a}, \end{cases} \tag{1.1.14}$$

其中 $a = 1, \cdots, m$, H 是场 φ^a 和 π_a 的泛函, 变分导数或泛函导数由如下方程定义:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\delta H}{\delta \varphi^1}\delta\varphi^1 \mathrm{d}^n x = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}[&H(\varphi^1 + \varepsilon\delta\varphi^1, \varphi^2, \cdots, \varphi^m, \pi_1, \cdots, \pi_m) \\ &- H(\varphi^1, \varphi^2, \cdots, \varphi^m, \pi_1, \cdots, \pi_m)], \end{aligned} \tag{1.1.15}$$

类似地定义 $\dfrac{\delta H}{\delta \varphi^2}, \cdots, \dfrac{\delta H}{\delta \pi_m}$. 方程 (1.1.13) 和方程 (1.1.14) 可以被改写为泊松括号形式

$$\dot{F} = \{F, H\}, \tag{1.1.16}$$

相应于以上两种情形, 该括号分别由

$$\{F, G\} = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{q}^i}\frac{\partial G}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i}\frac{\partial G}{\partial q^i}\right) \tag{1.1.17}$$

和

$$\{F, G\} = \sum_{a=1}^{m}\int_{\mathbb{R}^n}\left(\frac{\delta F}{\delta \varphi^a}\frac{\delta G}{\delta \pi_a} - \frac{\delta F}{\delta \pi_a}\frac{\delta G}{\delta \varphi^a}\right)\mathrm{d}^n x \tag{1.1.18}$$

给出.

相应于任一位形空间 Q(坐标为 $(q_1, \cdots, q^n)$) 都有一个相空间 T^*Q, 称为 Q 的余切丛, 它具有坐标 $(q^1, \cdots, q^n, p_1, \cdots, p_n)$. 在这个空间上, 正则括号(1.1.17) 是内蕴定义的, 意思是, $\{F, G\}$ 的值与坐标的选取无关. 由于泊松括号满足 $\{F, G\} = -\{G, F\}$, 特别地,

$\{H,H\}=0$, 从式 (1.1.16) 得到 $\dot{H}=0$, 即能量是守恒的. 这是力学系统中许多深刻而漂亮的守恒性质中最基本的一个.

在哈密顿框架中也有一个*变分原理*. 对于欧拉 - 拉格朗日方程, 我们处理 q-空间 (位形空间) 中的曲线, 而对于哈密顿方程我们处理 (q,p)-空间 (动量相空间) 中的曲线. 容易验证, 此时变分原理为

$$\delta\int_a^b\left[\sum_{i=1}^n p_i\dot{q}^i-H(q^j,p_j)\right]\mathrm{d}t=0, \tag{1.1.19}$$

在端点处要求 $p_i\delta q^i=0$.

这个公式是分析质点动力学和场论中许多重要系统的基础, 对此可参见一些典型的教材, 如 Whittaker [1927], Goldstein [1980], Arnold [1989], Thirring [1978], 以及 Abraham 和 Marsden [1978]. 支持这一公式的重要的几何结构是辛几何和泊松几何. 这些结构如何通过*勒让德变换*与欧拉 - 拉格朗日方程及变分原理相联系是本质的要点. 此外, 人们已经知道如何在无穷维的情形下严格地处理众多泛函分析方面的困难; 例如, 可参阅 Chernoff 和 Marsden [1974] 以及 Marsden 和 Hughes [1983].

练习

1.1-1 通过直接计算证明, 经典的泊松括号满足*雅可比恒等式*. 即若 F 和 K 都是 $2n$ 个变量 $(q^1,q^2,\cdots,q^n,p_1,p_2,\cdots,p_n)$ 的函数, 并定义

$$\{F,K\}=\sum_{i=1}^n\left(\frac{\partial F}{\partial q^i}\frac{\partial K}{\partial p_i}-\frac{\partial K}{\partial q^i}\frac{\partial F}{\partial p_i}\right),$$

则恒等式 $\{L,\{F,K\}\}+\{K,\{L,F\}\}+\{F,\{K,L\}\}=0$ 成立.

1.2 刚体

某些力学系统不遵循在 1.1 节中所述的正则形式, 这在 19 世纪已经很清楚. 例如, Clebsch [1857, 1859] 发现, 为了获得流体的哈密顿形式的描述, 有必要引进某些非物理势②. 我们将在下面的 1.4 节中讨论流体.

欧拉的刚体方程

在无外力的情形, 一个刚体绕其质心旋转的欧拉方程通常写为如下形式 (在第 15 章详细地推导):

② 关于 Clebsch 势的几何解释和进一步的文献, 请参阅 Marsden 和 Weinstein [1983], Marsden, Ratiu 和 Weinstein [1984a, 1984b], Cendra 和 Marsden [1987], 以及 Cendra, Ibort 和 Marsden [1987].

$$\begin{cases} I_1\dot{\Omega}_1 = (I_2 - I_3)\Omega_2\Omega_3, \\ I_2\dot{\Omega}_2 = (I_3 - I_1)\Omega_3\Omega_1, \\ I_3\dot{\Omega}_3 = (I_1 - I_2)\Omega_1\Omega_2, \end{cases} \tag{1.2.1}$$

其中 $\Omega = (\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3)$ 是*体角速度向量*(从固定在刚体中的一个坐标架处看到的刚体的角速度), 而 I_1, I_2, I_3 是依赖于刚体的形状和质量分布 (刚体的首要的惯性矩) 的常数.

方程组 (1.2.1) 是否在某些意义下是拉格朗日形式或哈密顿形式的? 由于有奇数个方程, 它们显然不能被写成如方程组 (1.1.13) 那样的正则哈密顿形式.

获得刚体方程的拉格朗日 (或哈密顿) 形式的一个经典的方法是引入刚体的三个欧拉角 θ, φ, ψ 以及它们的速度 $\dot{\theta}, \dot{\varphi}, \dot{\psi}$ (或共轭动量 $p_\theta, p_\varphi, p_\psi$) 来描述刚体的位置, 这样得出的方程组具有欧拉 - 拉格朗日 (或正则哈密顿) 形式. 然而, 这样做需要用到 6 个方程, 而许多问题用式 (1.2.1) 中的 3 个方程更便于研究.

拉格朗日形式

为了获得式 (1.2.1) 的拉格朗日形式, 引进拉格朗日函数

$$L(\Omega) = \frac{1}{2}(I_1\Omega_1^2 + I_2\Omega_2^2 + I_3\Omega_3^2), \tag{1.2.2}$$

第 15 章中将会详细说明, 这个函数是刚体的 (旋转) 动能. 然后, 将式 (1.2.1) 写为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \Omega} = \frac{\partial L}{\partial \Omega} \times \Omega. \tag{1.2.3}$$

这些方程显式地出现在拉格朗日 [Lagrange, 1788, 第 2 卷, 212 页] 中, 并由庞加莱 [Poincaré, 1901b] 推广到任意李代数. 在第 13 章中, 我们将讨论这些一般的*欧拉 - 庞加莱方程*. 我们也可以把式 (1.2.3) 写成一个变分原理, 它与欧拉 - 拉格朗日方程的变分原理相类似, 但它是直接用 Ω 写出的. 也就是说, 式 (1.2.3) 等价于

$$\delta \int_a^b L\mathrm{d}t = 0, \tag{1.2.4}$$

其中, Ω 的变分被限制为如下形式

$$\delta\Omega = \dot{\Sigma} + \Omega \times \Sigma, \tag{1.2.5}$$

这里 Σ 是 $\mathbb{R}^3$ 中的一条曲线, 它在端点处为 0. 我们已证明变分原理 (1.1.1) 等价于欧拉 - 拉格朗日方程 (1.1.4), 用同样的方法可以证明式 (1.2.3) 与式 (1.2.4) 的等价性; 见练习 1.2-2. 事实上, 我们将在第 13 章中看到如何从更 "原始的" 变分原理 (1.1.1) 推导出这个变分原理.

哈密顿形式

如果不考虑变分原理而是关注泊松括号, 并且不要求它们具有正则形式 (1.1.17), 则对于刚体方程也存在一种简单而漂亮的哈密顿结构. 为说明这一点, 我们引进角动量

$$\Pi_i = I_i\Omega_i = \frac{\partial L}{\partial \Omega_i}, \quad i=1,2,3, \tag{1.2.6}$$

此时欧拉方程变为

$$\begin{cases} \dot{\Pi}_1 = \dfrac{I_2-I_3}{I_2I_3}\Pi_2\Pi_3, \\ \dot{\Pi}_2 = \dfrac{I_3-I_1}{I_3I_1}\Pi_3\Pi_1, \\ \dot{\Pi}_3 = \dfrac{I_1-I_2}{I_1I_2}\Pi_1\Pi_2, \end{cases} \tag{1.2.7}$$

即

$$\dot{\Pi} = \Pi \times \Omega. \tag{1.2.8}$$

在 Π 的函数上引进刚体泊松括号

$$\{F,G\}(\Pi) = -\Pi\cdot(\nabla F\times\nabla G) \tag{1.2.9}$$

和哈密顿函数

$$H = \frac{1}{2}\Big(\frac{\Pi_1^2}{I_1}+\frac{\Pi_2^2}{I_2}+\frac{\Pi_3^2}{I_3}\Big). \tag{1.2.10}$$

可以验证 (练习 1.2-3), 欧拉方程 (1.2.7) 等价于

$$\dot{F} = \{F,H\}.\text{③} \tag{1.2.11}$$

对任何形如式 (1.2.11) 的方程, 不管哈密顿函数是什么样子, 总角动量保持守恒; 事实上, 令

$$C(\Pi) = \frac{1}{2}(\Pi_1^2+\Pi_2^2+\Pi_3^2),$$

有 $\nabla C(\Pi) = \Pi$, 因而

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{1}{2}(\Pi_1^2+\Pi_2^2+\Pi_3^2) = \{C,H\}(\Pi) \tag{1.2.12}$$

③ 刚体力学的这个哈密顿公式在许多著作中是隐式的, 如 Arnold [1966a, 1969], 在 Sudarshan 和 Mukunda [1974] 中则以这种泊松括号的形式显式地给出了这个公式 (Pauli [1953], Martin [1959] 和 Nambu [1973] 曾给出一些预备的形式). 另一方面, 变分形式 (1.2.4) 隐式地出现在 Poincaré [1901b] 和 Hamel [1904] 中, 其关于流体的显式形式在 Newcomb [1962] 和 Bretherton [1970] 中给出, 而关于一般情形的显式形式在 Marsden 和 Scheurle [1993a, 1993b] 中给出.

$$= -\Pi \cdot (\nabla C \times \nabla H) \tag{1.2.13}$$

$$= -\Pi \cdot (\Pi \times \nabla H) = 0. \tag{1.2.14}$$

相同的计算表明, 对任何 F, 有 $\{C, F\} = 0$. 像这样与每个函数泊松可交换的函数称为*开西米尔函数*; 后面我们将会看到, 它们在*稳定性* 的研究中起着重要的作用④.

练习

1.2-1 通过直接计算证明, 刚体泊松括号满足雅可比恒等式. 也就是说, 如果 F 和 K 都是 (Π_1, Π_2, Π_3) 的函数, 并且定义

$$\{F, K\}(\Pi) = -\Pi \cdot (\nabla F \times \nabla K),$$

那么恒等式 $\{L, \{F, K\}\} + \{K, \{L, F\}\} + \{F, \{K, L\}\} = 0$ 成立.

1.2-2 直接验证, 对于如下形式的变分 $\delta\Omega = \dot{\Sigma} + \Omega \times \Sigma$, 其中 Σ 在端点处为 0, 刚体的欧拉方程等价于

$$\delta \int L \mathrm{d}t = 0.$$

1.2-3 直接验证, 刚体的欧拉方程等价于方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} F = \{F, H\},$$

其中 $\{\ ,\ \}$ 是刚体泊松括号, H 是刚体哈密顿函数.

1.2-4 (a) 证明, 旋转群 $SO(3)$ 可被等同于*庞加莱球面*, 即二维球面 S^2 的*单位圆丛*, 也就是 $\mathbb{R}^3$ 中二维球面的单位切向量集.

(b) 利用基础拓扑学中的结论：S^2 中任何 (连续的) 向量场必在某处为 0, 证明 $SO(3)$不能写成 $S^2 \times S^1$.

1.3 李 - 泊松括号、泊松流形、动量映射

刚体变分原理和刚体泊松括号是与任一李代数 $\mathfrak{g}$ 相关联的一般结构中的特例, 而一个李代数 $\mathfrak{g}$ 是一个向量空间, 并带有一个双线性、反对称的括号 $[\xi, \eta]$, 且该括号对所有 $\xi, \eta, \zeta \in \mathfrak{g}$ 满足下述雅可比恒等式：

$$[[\xi, \eta], \zeta] + [[\zeta, \xi], \eta] + [[\eta, \zeta], \xi] = 0. \tag{1.3.1}$$

④ H.B.G.Casimir 是 P.Ehrenfest 的学生, 他曾就刚体的量子力学撰写了一篇很有才华的论文, 这个问题至今仍未如人们所期望的那样被详尽地论述. 接着, Ehrenfest 于 1900 年前后在 Boltzmann 指导下写了一篇关于流体动力学的变分原理的论文, 这是从该观点出发, 并以物质的, 而不是 Clebsch 的表述方法研究流体的最早的文章之一. 很奇怪, Ehrenfest 用的是 Gauss-Hertz 最小曲率原理, 而不是更基本的哈密顿原理. 这是本书很多重要思想的源泉.

例如, 相应于旋转群的李代数是 $\mathfrak{g}=\mathbb{R}^3$, 它带有括号 $[\xi,\eta]=\xi\times\eta$, 即通常的向量叉积.

欧拉 - 庞加莱方程

通过对 $\mathfrak{g}$ 上的变分原理的构造, 将 $\delta\Omega=\dot{\Sigma}+\Omega\times\Sigma$ 替换为 $\delta\xi=\dot{\eta}+[\eta,\xi]$. 所得到的在 $\mathfrak{g}$ 上的一般方程称为*欧拉 - 庞加莱方程*, 我们在第 13 章中将详细研究它. 这些方程对有限维和无穷维李代数都成立. 为了在有限维情形中叙述它们, 我们利用下述记号. 选取 $\mathfrak{g}$ 的一个基 $e_1,\cdots,e_r$ (因而 $\dim\mathfrak{g}=r$), *结构常数* C_{ab}^d 由方程

$$[e_a,e_b]=\sum_{d=1}^{r}C_{ab}^d e_d,\quad a,b=1,\cdots,r \tag{1.3.2}$$

定义. 如果 ξ 是李代数的一个元素, 它关于这个基的分量用 ξ^a 表示, 则 $\xi=\sum\limits_{a=1}^{r}\xi^a e_a$. 如果 $e^1,\cdots,e^r$ 是对应的*对偶基*, 那么拉格朗日函数 L 的微分的分量是偏导数 $\dfrac{\partial L}{\partial\xi^a}$. 此时欧拉 - 庞加莱方程为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial\xi^d}=\sum_{a,b=1}^{r}C_{ad}^b\frac{\partial L}{\partial\xi^b}\xi^a, \tag{1.3.3}$$

其无坐标形式为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial\xi}=\mathrm{ad}_\xi^*\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial\xi},$$

其中 $\mathrm{ad}_\xi:\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}$ 是线性映射 $\eta\mapsto[\xi,\eta]$, 而 $\mathrm{ad}_\xi^*:\mathfrak{g}^*\to\mathfrak{g}^*$ 是其*对偶映射*. 例如, 对于 $L:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$, *欧拉 - 庞加莱方程*为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial\Omega}=\frac{\partial L}{\partial\Omega}\times\Omega,$$

它推广了刚体运动的欧拉方程. 正如前面所提到的, 拉格朗日给出了这些方程对于一类更为普遍的函数 L 的表达形式 [Lagrange, 1788, 第 2 卷, 方程 A, 第 212 页], 而庞加莱 [Poincaré, 1901b] 则将其推广到任意李代数.

推广的刚体变分原理表明, 对形如 $\delta\xi=\dot{\eta}+[\xi,\eta]$ 的所有变分, 欧拉 - 庞加莱方程等价于

$$\delta\int L\mathrm{d}t=0, \tag{1.3.4}$$

其中 η 为 $\mathfrak{g}$ 中的曲线, 且在端点处为 0.

李 - 泊松方程

我们还可以如下地推广刚体泊松括号：令 F, G 定义在对偶空间 $\mathfrak{g}^*$ 上. 用 μ 表示 $\mathfrak{g}^*$ 的元素, 令 F 在 μ 处的*泛函导数*是由

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}[F(\mu+\varepsilon\delta\mu)-F(\mu)]=\left\langle \delta\mu, \frac{\delta F}{\delta\mu}\right\rangle, \quad \forall\,\delta\mu\in\mathfrak{g}^* \tag{1.3.5}$$

定义的 $\mathfrak{g}$ 的惟一的元素 $\dfrac{\delta F}{\delta\mu}$, 其中 $\langle\ ,\ \rangle$ 表示 $\mathfrak{g}^*$ 与 $\mathfrak{g}$ 之间的配对. 在适当地选取 $\mathfrak{g}$ 和 $\mathfrak{g}^*$ 为某些场的空间时, 定义 (1.3.5) 式与在式 (1.1.15) 中给出的 $\dfrac{\delta F}{\delta\varphi}$ 的定义是相容的. 我们用

$$\{F,G\}_{\pm}(\mu)=\pm\left\langle\mu,\left[\frac{\delta F}{\delta\mu},\frac{\delta G}{\delta\mu}\right]\right\rangle \tag{1.3.6}$$

定义 $(\pm)$李 - *泊松括号*. 利用上面引进的坐标记号, $(\pm)$ 李 - 泊松括号变为

$$\{F,G\}_{\pm}(\mu)=\pm\sum_{a,b,d=1}^{r}C_{ab}^{d}\mu_d\frac{\partial F}{\partial\mu_a}\frac{\partial G}{\partial\mu_b}, \tag{1.3.7}$$

其中 $\mu=\mu_a e^a$.

泊松流形

李 - 泊松括号和上一节的正则括号有 4 个简单而至关重要的性质：

性质 1　$\{F,G\}$ 对于 F 和 G 是实双线性的.

性质 2(反对称性)　$\{F,G\}=-\{G,F\}$.

性质 3(雅可比恒等式)　$\{\{F,G\},H\}+\{\{H,F\},G\}+\{\{G,H\},F\}=0$.

性质 4(莱布尼茨恒等式)　$\{FG,H\}=F\{G,H\}+\{F,H\}G$.

一个流形 (即一个 n 维 “光滑曲面”)P, 与一个满足性质 1~4 的 $\mathcal{F}(P)$ (P 上的光滑函数空间) 上的括号运算一起, 被称为一个*泊松流形*. 特别地, $\mathfrak{g}^*$ 是一个泊松流形. 在第 10 章中, 我们将研究泊松流形的一般概念.

例如, 如果选取 $\mathfrak{g}=\mathbb{R}^3$, 其括号取为叉积 $[x,y]=x\times y$, 并把 $\mathfrak{g}^*$ 等同于 $\mathfrak{g}$, 应用 $\mathbb{R}^3$ 上的点积 (即 $\langle\Pi,x\rangle=\Pi\cdot x$ 是通常的点积), 那么 $(-)$ 李 - 泊松括号即成为刚体括号.

哈密顿向量场

在一个泊松流形 $(P,\{\cdot,\cdot\})$ 上, 相应于任一函数 H 都有一个向量场, 记作 X_H, 它有下述性质：对任何光滑函数 $F:P\to\mathbb{R}$, 有恒等式

$$\langle \mathrm{d}F, X_H\rangle=\mathrm{d}F\cdot X_H=\{F,H\},$$