第 1 章　引　　论

1.1　学 科 简 介

数学规划 (Mathematical Programming) 是应用数学学科的一个重要分支, 并非指某种特定的面向数学问题的计算机编程技术. 该术语出现于 20 世纪 40 年代末, 是由美国哈佛大学的 Robert Dorfman 最先使用的, 其初始含义具有相当的包容性, 从数学的角度表达了人们处理实际问题时所遵循的一种理念. 这种理念可以概括为如下三个基本方面 (参见图 1.1)：

(1) 将实际问题形式化, 即利用数学的语言和其他学科的知识, 把实际问题抽象成一个数学问题. 这个过程一般称为数学建模, 所获得的数学问题相应地称为数学模型.

(2) 求解实际问题形式化后得到的数学问题 (模型). 通常需要设计一种合适的求解问题的算法, 并且分析其性能.

(3) 将数学问题的求解结果与实际问题的演化状况进行比较分析, 验证数学模型的合理性与正确性.

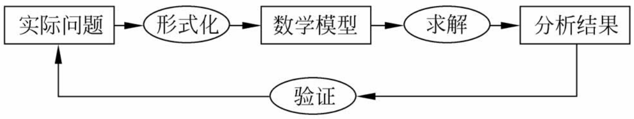

图 1.1　数学规划的基本理念

由于受到当时社会和科学发展状况的限制, 真正地推广和实现上述理念并不容易, 所以数学规划的含义在学科发展过程中有所限制. 现在, 数学规划处理的数学模型通常是寻找一些 (决策) 变量在某种范围内的取值, 使得一个或多个既定的目标达到最优状态 (极大或者极小, 或者处于某种妥协状态). 因此, 人们常常把数学规划通俗地称为最优化 (optimization).

数学规划 (最优化) 问题的来源十分广泛, 涉及科学、工程、经济、工业和军事等领域. 下面列出的问题就是人们经常遇到的最优化问题：

(1) 在金融投资中, 如何设计比较好的证券组合或者投资项目组合, 以便在可接受的风险限度内获得尽可能大的投资回报?

(2) 在产业结构调整、人员的优化组合或者多品种商品的生产计划与调度过程中, 如何有效地分配有限的资源, 以便在特定的空间和时间范围内谋求最大的经济效益?

(3) 在工程设计中, 如何选择恰当的参数, 使得工程设计方案既满足实际要求, 又能够降低工程的造价?

(4) 如何寻找飞行器或者机械手的最优轨迹? 比如：在世界新军事革命的浪潮中, 导弹防御系统的开发和部署将成为国家之间综合国力竞争的一部分, 而这种系统的有效性首先表现在能否在敌方导弹到达己方某一重要区域之前, 对目标的轨迹进行准确地跟踪和预测, 并且引导拦截器将其摧毁?

(5) 如何设计汽车或者飞机的最佳外形, 既保证其运动的稳定性, 又要减少其运动的阻力, 甚至还需要满足隐身性要求?

(6) 如何控制一个化学过程或者机械装置, 既优化其性能, 又保证其满足稳健性 (鲁棒性) 要求?

从历史的角度来看, 最优化也是一个古老的话题. “田忌赛马” 这个典故就讲述了一个发生在我国战国时期, 在跑马比赛中如何采取策略取胜的故事 (它涉及一个对策论 (最优化) 问题). 古代和中世纪的中国学者在天文历法研究中曾涉及天体运动的不均匀性和相关的极值问题, 如郭守敬在《授时历》(1280) 中求 “月离迟疾”(月亮运行的最快点和最慢点)、求月亮白赤道与太阳黄赤道交点距离的极值 (郭守敬称之为 “极数”) 等问题 [47].

在西方, Fermat 在 1637 年发表了 “求极大和极小的方法”, 其中包含有 Fermat 定理的结论. Newton 和 Leibniz 发明的微积分为求解一大类单变量极值问题提供了通用的工具. 有趣的是, Leibniz 在 1684 年发表的第一篇微分学论文被定名为“一种求极大与极小值和求切线的新方法” . 后来, Euler, Poincare 和 Hilbert 将 Fermat 定理推广到处理多个变量, 甚至无穷个变量等情形的问题, 以及求特定的条件极值问题. 现在, 人们已经知道, 许多基本的运动定律能够用 Fermat 定理来描述. 特别地, Fermat 定理的变形之一：“最小作用原理” 使整个牛顿力学的基本方程可以看成 Fermat 定理的推论, 即刻画了作用量的导数为零 [56]. 另外, Euler, Lagrange 等关于变分法的工作也与最优化有很紧密的关系. Lagrange 乘子法迄今仍是数学规划中处理约束极值问题的重要方法之一. Fourier 在 1826 年的工作曾涉及后来发展起来的线性规划理论的核心 —— 线性不等式组的研究. 1847 年 Cauchy 研究了函数值沿什么方向下降最快这个问题, 提出了求解无约束优化问题的最速下降法.

值得指出的是, 在自然界中, 也存在着许多优化现象. 例如：物理系统常常向最小能量的状态演化; 江河中的流水是沿着势能最速下降的方向流动的; 在封闭的化学系统中, 分子之间相互作用直到它们的电子的总体势能最小; 光线从一点到另一点传播所经过的路径使得它所需要的传播时间最短, 由此可以推断, 在两种均匀介质的交界面处, 光线的传

播必须满足折射定律.

前面提到的只是从古至今人们接触过的一些优化现象, 并没有形成一门科学. 作为一个学科分支, 数学规划出现于第二次世界大战前后. 1939 年前苏联的 Kantorovich 出版了著作《生产组织与计划中的数学方法》, 建立了线性规划模型, 用来解决下料问题和运输问题, 这标志着线性规划的诞生 (但是 Kantorovich 的工作在前苏联是被人忽视的). 在英美等国家, 数学规划的基础分支 —— 线性规划, 则是为了满足第二次世界大战中特定的军事需求而逐渐发展起来的. 在 1947 年, Dantzig 正式提出了线性规划的数学模型, 并且提出了求解线性规划的单纯形算法. 他当时是联邦空军审计部的一名数学顾问, 开发了一个数学工具, 用来制订军队的训练、部署、后勤保障的方案. 有趣的是, Dantzig 用了近一年的时间才使自己以及他的同事彻底地明白单纯形算法的实际威力所在. 由于空军的计划问题可以用一个不等式组来描述, Dantzig 就将他的论文题目取为 "线性结构的规划 (programming in a linear structure)". 线性规划这一名称则是由美国的 Koopmans 和 Dantzig 于 1948 年夏天参观兰德公司期间提出的. 在 1949 年, 关于数学规划的第一次会议在美国的芝加哥大学举行, 会议的组织者 Koopmans 后来主编了一本书:《生产与分配的活动分析 (Activity Analysis of Production and Allocation)》, 这对数学规划的进一步发展产生过重大的影响.

第二次世界大战后, 线性规划方法迅速地向其他的领域渗透, 它能够解决的典型问题有: 生产组织问题、运输问题、下料问题、营养配餐问题以及国民经济计划问题等. 在此基础上, 数学规划的许多其他分支也逐渐地发展起来. 现在, 以数学规划为理论核心的 *运筹学* (operation research) 对管理科学、工业工程和系统工程等学科的发展起到十分重要的推动作用. 其实, 在 1947 年以前, Koopmans 就指出, 线性规划为古典经济学理论的研究提供了极好的数学框架, 并进行了与经济学有关的研究. 1975 年瑞典皇家科学院将 Nobel 经济学奖颁给了 L.V. Kantorovich 和 T.C. Koopmans, 原因是他们创造了线性规划方法, 并成功地将其应用于经济学领域, 为经济学的发展作出了卓越贡献. 大约 20 年之后, Nobel 经济奖 (1994 年) 又授予了三位对策论专家, 这推动着对策论的研究进入了新的高潮.

与线性规划相对应的 "*非线性规划*" 一词是由 Kuhn 和 Tucker 在 1950 年最先提出的 [26]. 非线性规划的研究也因为 Kuhn-Tucker 条件的出现和计算机技术的进步逐渐地活跃起来. 到 20 世纪 60 年代, 人们在线性规划的第一次研究热潮过后转向了对非线性规划的研究, 提出了一系列有效算法. 虽然人们对特殊的非线性规划问题的探讨早已开始, 例如: Sylvester 在 1857 年提出了寻找平面上包含 N 个点的最小圆的问题 [33], 但是, 只有在计算机出现导致计算技术的革命性进步之后, 人们才可能通过求解非线性方程组的途径推动非线性规划的研究.

在数学规划的发展过程中, Edmonds 在 1965 年提出的 *优良算法* (good algorithm) 这一概念曾产生过重要的影响 [6,42]. 单纯形算法在实际应用中是比较有效的, 那么它是否是

优良算法呢? 在 1972 年, Klee 和 Minty 证明, 单纯形算法不是求解线性规划问题的优良算法 [25]. 于是, 另一个问题又出现了, 线性规划是否存在着优良算法呢？1979 年, Khachian 给出了一个肯定的回答, 他说明了如何改进 Shor, Yudin 和 Nemirovskii 为凸规划开发的椭球算法, 就能够获得求解线性规划的优良算法 (即多项式时间算法)[10,24,41]. 1984 年, 美国 AT&T 贝尔实验室的 Karmarkar 提出了新的求解线性规划的多项式时间内点算法 (投影尺度算法)[22]. 从那时起的十多年间, 线性规划内点算法的研究与推广成为最优化领域中最令人振奋的研究热点之一. 毫不夸张地说, 在 20 世纪 40 年代发展起来的线性规划, 极大地拓宽了最优化的研究和应用领域, 并在过去 60 多年中促进了现代优化理论、算法和应用方面的巨大进步.

现在, 数学规划学科的内容十分丰富, 包括许多研究分支, 如：线性规划、非线性规划、多目标规划、动态规划、参数规划、组合优化和整数规划、随机规划、模糊规划、非光滑优化、多层规划、全局优化、变分不等式与互补问题等. 本书将在介绍一些凸分析知识之后, 着重讨论线性规划、非线性规划、多目标规划、组合优化和整数规划以及全局优化的基本理论和方法.

1.2 实例与模型

首先, 我们介绍几个数学规划的实例, 然后, 给出数学规划的一般模型以及关于最优解的基本概念.

例 1.1 食谱 (配食) 问题

假设市场上有 n 种不同的食物, 第 j 种食物每个单位的销售价为 c_j $(j=1,2,\cdots,n)$. 研究表明, 人体在正常生命活动过程中需要 m 种基本的营养成分. 为了保证人体的健康, 一个人每天至少需要摄入第 i 种营养成分 b_i $(i=1,2,\cdots,m)$ 个单位. 此外, 人们还知道, 第 j 种食物的每个单位包含第 i 种营养成分 $a_{ij}(i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n)$ 个单位.

假设一个人摄入的营养成分会被人体完全吸收, 每天不同食物的配给量构成一种配食方案 (食谱). 食谱 (配食) 问题就是要求在满足人体基本营养需求的前提下, 寻找最经济的配食方案 (食谱).

建立食谱的数学模型

引入决策变量 x_j：食谱中第 j 种食物的单位数量.

食谱中所有食物的成本之和：$c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n$.

人体的营养需求：由于在 x_j 个单位第 j 种食物中第 i 种营养成分的含有量为 $a_{ij}x_j$, 所以人体摄入第 i 种营养成分的量应该满足

$$a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\cdots+a_{in}x_n \geqslant b_i.$$

变量的隐含要求：食物量是非负的, 即 $x_j \geqslant 0$.

于是, 得到如下模型：

$$\min \quad \sum_{j=1}^{n} c_j x_j, \tag{1.1}$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geqslant b_i,\ i=1,2,\cdots,m, \tag{1.2}$$

$$x_j \geqslant 0,\ j=1,2,\cdots,n, \tag{1.3}$$

其中 “min” 和 “s.t.” 分别是英文词 “minimize” 和词组 “subject to” 的缩写.

例 1.2 选址与运输问题

假设某大型建筑公司有 m 个项目在不同的地点同时开工建设, 不妨记工地的位置分别为 $P_i=(a_i,b_i), i=1,2,\cdots,m$. 另外, 第 i 个工地对某种建筑材料的日用量是已知的 (比如, 水泥的日用量 (单位：t) 为 D_i). 该公司准备分别在 $T_1=(x_1,y_1)$ 和 $T_2=(x_2,y_2)$ 这两个地点建造临时料场, 并且保证临时料场对材料的日储量 (单位：t) 分别为 M_1 和 M_2. 如何为该公司确定临时料场的位置, 并且制订每天的材料供应计划, 使建筑材料的总体运输负担最小?

假设在不同地点建造料场的成本为常数, 料场与工地之间的距离为欧几里得距离 (欧氏距离), 运输负担用吨 · 千米来衡量, 并且建筑材料在运输过程中的损失量为零, 那么临时料场的位置和建筑材料的供应计划可以通过求解如下数学模型得到.

建立选址与运输问题的数学模型

引入决策变量：位置变量 (x_k,y_k), 从临时料场向各工地运送的材料数量 $z_{ki}(k=1,2;\ i=1,2,\cdots,m)$;

总体运输负担：

$$\sum_{k=1}^{2}\sum_{i=1}^{m} z_{ki}\, d\left(T_k,P_i\right),$$

其中 $d\left(T_k,P_i\right)$ 表示点 T_k 和 P_i 之间的欧氏距离.

第 i 个工地的材料需求：

$$\sum_{k=1}^{2} z_{ki} = D_i.$$

第 k 个临时料场的材料转运量：

$$\sum_{i=1}^{m} z_{ki} \leqslant M_k;$$

变量的隐含要求：建筑材料的转运量是非负的, 即 $z_{ki} \geqslant 0$.

于是, 得到如下模型：

$$\min \quad \sum_{k=1}^{2}\sum_{i=1}^{m} z_{ki}\sqrt{(x_k-a_i)^2+(y_k-b_i)^2}, \tag{1.4}$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{i=1}^{m} z_{ki} \leqslant M_k,\ k=1,2, \tag{1.5}$$

$$\sum_{k=1}^{2} z_{ki} = D_i,\ i=1,2,\cdots,m, \tag{1.6}$$

$$z_{ki} \geqslant 0,\ (x_k,y_k)\in\mathbb{R}^2,\ k=1,2,\ i=1,2,\cdots,m. \tag{1.7}$$

例 1.3 原料切割问题

某金属切割公司为了满足客户的需求, 需要将宽度为 W、长度为 L 的标准主辊割成宽度稍窄但长度不变的子辊. 通常, 客户的订单是指明不同宽度子辊的需求数量. 在满足一组客户订单的前提下, 如何确定必须切割的主辊最少数量?

假设客户需要 m 种不同宽度的子辊：$w_1, w_2, \cdots, w_m$, 其中 $w_i \leqslant W(i=1,2,\cdots,m)$. 对于一个宽度为 W 的主辊, 通常可以有多种方式将它切割成若干个子辊, 例如：宽度为 3, 5, 7 的子辊可以由宽度为 10 的主辊切割而成. 此时, 切割一个主辊能够产生 3 个宽度为 3 的子辊, 或者产生 1 个宽度为 3 和 1 个宽度为 7 的子辊, 或者产生 2 个宽度为 5 的子辊, 等等. 如果切割后得到的子辊总宽度不大于主辊的宽度, 那么该种切割方式称为一个*可行切割方案*. 所有可行切割方案的数目可能很大, 不妨记为 n. 若宽度为 w_i 的子辊的最少需求数量为 b_i, 则下面的数学模型可以在满足一组客户订单的前提下, 引导人们确定必须切割的主辊最少数量.

建立原料切割的数学模型

引入决策变量：x_j 表示按照第 j 种可行切割方案执行切割的主辊数量.

所需要切割的主辊总数：

$$x_1+x_2+\cdots+x_n.$$

第 j 种可行切割方案的要求：令 a_{ij} 表示按照第 j 种可行切割方案切割一个主辊所得到宽度为 w_i 的子辊数目, 那么, 我们有 $\sum\limits_{i=1}^{m} a_{ij}w_i \leqslant W$.

变量的隐含要求：$x_j \geqslant 0(j=1,2,\cdots,n)$, 并且为整数.

于是, 得到如下模型：

$$\min \quad \sum_{j=1}^{n} x_j, \tag{1.8}$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geqslant b_i, \ i = 1, 2, \cdots, m, \tag{1.9}$$

$$x_j \geqslant 0, \ x_j \in \mathbb{Z}, \ j = 1, 2, \cdots, n, \tag{1.10}$$

其中 $\mathbb{Z}$ 表示所有整数的集合.

例 1.4 生产计划问题

假设某制造企业要向客户提供一种机器, 根据合同规定, 第一季度末需要交货 c_1 台, 第二季度末需要交货 c_2 台, 第三季度末需要交货 c_3 台. 现在, 该企业的最大生产能力是每季度生产 b 台, 若用 x 表示该企业在某个季度生产的机器台数, 则相应的生产费用 (单位：元) 可以用函数 $f(x) = a_1x + a_2x^\alpha$ 来描述, 其中 $\alpha > 0$ 为参数. 当企业在某个季度的生产量超过交货量时, 需要将超过部分的机器存储起来, 等到下一个季度才交货. 这样, 企业就需要为每台机器在每个季度多支付 p 元的存储费. 假设在第一个季度开始时, 企业无机器存货, 并且合同规定不允许缺货, 那么如何制订生产计划, 确定该企业在每个季度应该生产多少台机器, 才能既履行交货合同, 又使企业的总体费用最少?

假设制造企业生产的机器全部符合质量要求, 原材料和劳动力的供应是充分的, 并且合同规定的机器交货数量没有超过企业的最大生产能力, 那么下面的数学模型可以确定一个生产计划, 使得企业的总体费用最少.

建立生产计划的数学模型

引入决策变量：用 $x_i (i = 1, 2, 3)$ 表示制造企业在第 i 个季度生产的机器数量.

合同规定的总数量：

$$x_1 + x_2 + x_3 = c_1 + c_2 + c_3.$$

每个季度生产机器的数量要求：在每个季度生产的机器数量 x_j, 不大于该企业的最大生产能力 b, 同时不少于该季度末的交货量 c_j 与该季度初的库存量 I_j 之差, 其中第 j 个季度初的机器库存量 I_j 可以表示成

$$I_j = \sum_{i<j} (x_i - c_i), \ j = 1, 2, 3,$$

特别地, $I_1 = 0$.

变量隐含要求：$x_j \geqslant 0 (j = 1, 2, 3)$, 并且取整数.

企业的总体费用：所有季度的生产费用与存储费用之和, 即

$$F(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{3} f(x_i) + \sum_{i=2}^{3} pI_i.$$

于是, 得到如下模型：

$$
\begin{aligned}
\min \quad & F(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{3}((a_1+(3-i)p)x_i + a_2 x_i^{\alpha}) - p(2c_1+c_2), & (1.11)\\
\text{s.t.} \quad & \sum_{j=1}^{3} x_j = \sum_{j=1}^{3} c_j, & (1.12)\\
& x_1 \geqslant c_1, & (1.13)\\
& x_1 + x_2 \geqslant c_1 + c_2, & (1.14)\\
& 0 \leqslant x_j \leqslant b,\ x_j \in \mathbb{Z},\ j = 1,2,3, & (1.15)
\end{aligned}
$$

其中 $\mathbb{Z}$ 表示所有整数的集合.

在数学规划的实际应用中, 形成一个最优化问题的数学模型是十分重要的. 首先, 需要辨识目标, 确定优化的标准, 即待研究系统的性能定量描述, 如：成本、数量、利润、时间、能量等; 其次, 用合适的决策变量(未知元) 描述系统的特征量, 并且将目标表示成决策变量的函数 (这个函数称为 目标函数, objective function); 此外, 需要确定变量所受的范围限制, 这个范围通常可以由若干个函数的等式或者不等式来定义 (这些函数称为 约束函数, constraint functions). 最优化 问题就是指在决策变量所受限制的范围内, 对相关的目标函数进行极小化或者极大化, 它可以表述成如下形式：

$$
\begin{aligned}
\min_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n} \quad & f(\boldsymbol{x}), & (1.16)\\
\text{s.t.} \quad & g_i(\boldsymbol{x}) \geqslant 0,\ i \in \mathcal{I}, & (1.17)\\
& h_j(\boldsymbol{x}) = 0,\ j \in \mathcal{E}, & (1.18)
\end{aligned}
$$

其中 $f(\boldsymbol{x})$ 是目标函数, $g_i(\boldsymbol{x})$ 和 $h_j(\boldsymbol{x})$ 是约束函数, $\mathcal{I}$ 和 $\mathcal{E}$ 分别是不等式约束和等式约束的指标集. 式 (1.17)~ (1.18) 通称为 约束条件, 满足这些条件的点称为 可行点(feasible point), 所有可行点的集合称为可行域(feasible region), 记为 S. 当 $S = \mathbb{R}^n$ 时, 最优化问题 (1.16)~(1.18) 称为无约束优化问题, 否则称为约束优化问题.

若 f, g_i 和 h_j 都是线性函数, 则最优化问题 (1.16)~(1.18) 称为线性规划 (linear programming, LP), 否则称为非线性规划 (nonlinear programming, NLP). 在上面的实例中, 例 1.1 是一个线性规划问题, 例 1.2 是一个非线性规划问题. 例 1.3 和例 1.4 都要求变量取整数, 我们称之为整数规划(integer programming) 问题. 对于某些最优化问题, 也可以允许一部分变量取整数, 另一部分变量取实数, 此时, 相应的问题称为 混合整数规划(mixed integer programming, MIP) 问题. 一般地, 若最优化问题涉及从一个连通的无限集合 (可行域) 中寻找最优解, 则该问题称为 连续优化(continuous optimization) 问题; 相应地, 若

它是从一个有限的集合或者离散的集合中寻找最优解, 则称之为*组合优化* (combinatorial optimization), 或者*离散优化*(discrete optimization) 问题. 有时, 我们也会遇到存在多个目标的情形, 即目标函数 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 可以取为一个向量值函数, 那么, 相应的最优化问题称为*多目标规划*(multi-objective programming), 或者*多目标优化*问题.

定义 1.1 设 $\boldsymbol{x}^* \in S$, 若 $\forall \boldsymbol{x} \in S$, $f(\boldsymbol{x}) \geqslant f(\boldsymbol{x}^*)$ 成立, 则 $\boldsymbol{x}^*$ 称为最优化问题 (1.16)~(1.18) 的一个 *全局极小点*(或者 *全局最优解*); 若 $\forall \boldsymbol{x} \in S \backslash \{\boldsymbol{x}^*\}$, 都有 $f(\boldsymbol{x}) > f(\boldsymbol{x}^*)$, 则 $\boldsymbol{x}^*$ 称为最优化问题 (1.16)~(1.18) 的一个严格全局极小点 (或者严格全局最优解).

若存在 $\varepsilon > 0$, 使得 $\forall \boldsymbol{x} \in S \cap \mathcal{N}_\varepsilon(\boldsymbol{x}^*)$, $f(\boldsymbol{x}) \geqslant f(\boldsymbol{x}^*)$ 成立, 其中 $\mathcal{N}_\varepsilon(\boldsymbol{x}^*) = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n | \, ||\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^*|| < \varepsilon\}$, $||\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^*||$ 表示点 $\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{x}^*$ 的距离, 则 $\boldsymbol{x}^*$ 称为最优化问题 (1.16)~(1.18) 的一个 *局部极小点*(或者 *局部最优解*); 若存在 $\varepsilon > 0$, 使得 $\forall \boldsymbol{x} \in S \cap \mathcal{N}_\varepsilon(\boldsymbol{x}^*)$, $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{x}^*$, 都有 $f(\boldsymbol{x}) > f(\boldsymbol{x}^*)$, 则 $\boldsymbol{x}^*$ 称为最优化问题 (1.16)~(1.18) 的一个 *严格局部极小点*(或者 *严格局部最优解*).

值得指出的是, 全局最优解与局部最优解是相对而言的, 定义 1.1 中的集合 S 也许包含在某个更大的集合中, 于是, 相对于 S 的全局最优解不过是相对于较大集合的局部最优解. 大多数的优化算法通常只是寻找局部最优解, 但在某些应用中, 人们需要知道或者希望求出最优化问题的全局最优解. 一般地说, 辨别最优化问题的一个全局最优解, 甚至确定它的范围是比较困难的. 对于一些特殊的情形, 比如凸规划 (convex programming), 人们知道, 局部最优解一定是全局最优解. 从计算复杂性的角度来看, 对于一般的最优化问题而言, 验证一个可行点的局部最优性, 甚至验证一个局部最优解是否是严格局部最优解这类问题都是十分困难的 [19].

如果最优化问题 (1.16)~(1.18) 中出现的参数是完全确定的, 我们就把这类问题称为*确定型优化* (deterministic optimization)*问题*, 否则称为*非确定型优化*(uncertain optimization)*问题*. 后者包括了*随机规划*(stochastic programming)、*模糊规划*(fuzzy programming) 等特殊情形. 在前面介绍的食谱问题中, 一种食物的某种营养成分的含量通常不是确定的实数, 也就是说, 参数 a_{ij} 在本质上是一个可以随机变化的量, 这样, 若要更真实地描述食谱问题, 就需要借助于非确定型优化的数学模型.

1.3 预备知识

1.3.1 线性空间

欧几里得空间 $\mathbb{R}^n$ 中的向量也称为点, 任一个向量可以表示成坐标轴上单位向量的线性组合, 组合系数恰好是相应点的坐标. *线性空间*(也称为*向量空间*, vector space) 是以 $\mathbb{R}^n$ 为背景抽象出来的一种代数结构. 下面的定义概括了这种代数结构的基本特征.

定义 1.2 给定一个非空集合 G 以及在 G 上的一种代数运算 $+ : G \times G \to G$(称为加法), 如果下面条件成立:

(1) $\forall a, b, c \in G$, 有 $a + (b + c) = (a + b) + c$(结合律);

(2) 存在 $0 \in G$, 使得 $\forall a \in G$, 有 $a + 0 = 0 + a = a$;

(3) $\forall a \in G$, 存在 $-a \in G$, 使得 $a + (-a) = (-a) + a = 0$.

那么 $\langle G, + \rangle$ 称为一个 *群*(group). 此外, 若 $\forall a, b \in G$, 有 $a + b = b + a$(交换律), 则 $\langle G, + \rangle$ 称为一个 *阿贝尔群*(Abelian group), 或者 *交换群*(commutative group).

定义 1.3 给定一个非空集合 V 和一个域 F, 并定义两种运算*加法* $+ : V \times V \to V$ 以及*数乘* $\bullet : F \times V \to V$. 如果 $\langle V, + \rangle$ 构成一个阿贝尔群, 并且两种运算满足下面四条性质: $\forall \alpha, \beta \in V$, $\forall \lambda, \mu \in F$ 以及单位元 $1 \in F$, 有

$$
\begin{aligned}
&1 \bullet \alpha = \alpha, \\
&\lambda \bullet (\mu \bullet \alpha) = (\lambda\mu) \bullet \alpha, \\
&(\lambda + \mu) \bullet \alpha = \lambda \bullet \alpha + \mu \bullet \alpha, \\
&\lambda \bullet (\alpha + \beta) = \lambda \bullet \alpha + \lambda \bullet \beta,
\end{aligned}
$$

则称 V 在域 F 上关于加法 $(+)$ 和数乘 $(\bullet)$ 运算构成一个*线性空间*(linear space), 简称 V 为 F 上的线性空间, 记为 $V(F)$.

为了方便起见, 对于 $\lambda \in F, \alpha \in V(F)$, 我们将数乘运算 $\lambda \bullet \alpha$ 简记为 $\lambda\alpha$. 此外, 如果非空集合 $S \subseteq V$ 关于加法和数乘运算在 F 上也构成一个线性空间, 则 S 称为 F 上的*线性子空间*(linear subspace). 可以证明: $S \subseteq V$ 为 F 上的线性子空间, 当且仅当 S 关于 $V(F)$ 上的两种运算是封闭的 [45].

例 1.5 $\mathbb{R}^n$ 是实数域 $\mathbb{R}$ 上的一个线性空间.

例 1.6 令 $\mathbb{R}[x]_n$ 表示系数属于实数域 $\mathbb{R}$、次数小于 n 的全体多项式组成的集合, 则 $\mathbb{R}[x]_n$ 关于多项式的加法以及数与多项式的乘法 (数乘) 构成一个线性空间.

例 1.7 令 $\mathbb{R}^{m \times n}$ 表示元素属于实数域 $\mathbb{R}$ 的所有 $m \times n$ 矩阵组成的集合, 则 $\mathbb{R}^{m \times n}$ 关于矩阵的加法以及实数与矩阵的乘法 (数乘) 构成一个线性空间.

定义 1.4 设 S_1, S_2 是线性空间 $V(F)$ 的两个子集, 则

$$
\begin{aligned}
&S_1 \cap S_2 \overset{\text{def}}{=\!=} \{\boldsymbol{x} | \boldsymbol{x} \in S_i, i = 1, 2\}, \\
&S_1 + S_2 \overset{\text{def}}{=\!=} \{\boldsymbol{x} | \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^1 + \boldsymbol{x}^2, \boldsymbol{x}^i \in S_i, i = 1, 2\}
\end{aligned}
$$

分别称为 S_1 和 S_2 的*交*与*和*.