# 第 1 章　一阶微分方程

## 1.1　微分方程与数学模型

我们可以用数学语言来描述客观世界的规律. 代数学完全可以解决静止问题，但大多数有趣的自然现象是变化的，并且仅能由涉及变量的方程来描述.

因为函数 $f$ 的导数 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=f'(t)$ 是一种比率，其中变量 $x=f(t)$ 相对于自变量 $t$ 以这个比率发生变化，所以我们经常使用包含导数的方程来描述变化的客观世界. 包含未知函数和该函数一个或多个导数的方程叫做微分方程.

**例 1.1.1**　微分方程 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=x^2+t^2$ 含有未知函数 $x(t)$ 和它的一阶导数 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=x'(t)$.

微分方程 $\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}+3\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+7y=0$ 含有自变量 $x$ 的未知函数 $y$ 和它的两个导数 $y'$ 和 $y''$. ■

研究微分方程有三个主要目的：(1)建立描述特殊物理现象的微分方程；(2)找到该方程精确的或近似的合适解；(3)解释找到的解.

在数学里，寻找未知数使其满足方程 $x^3+7x^2-11x+41=0$. 同样在解微分方程时，要找到未知函数 $y=y(x)$，使其满足 $y'(x)=2xy(x)$，即微分方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2xy$ 在实数范围内成立. 一般地，如果可能我们希望找到微分方程的所有解.

**例 1.1.2**　如果 $C$ 是一个常数，并且

$$y(x)=C\mathrm{e}^{x^2}, \tag{1.1.1}$$

那么，$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=C(2x\mathrm{e}^{x^2})=(2x)(C\mathrm{e}^{x^2})=2xy$，这样形如式(1.1.1)的每个函数都满足微分方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2xy. \tag{1.1.2}$$

特别地，式(1.1.1)给出了微分方程的无穷多个不同解. 通过分离变量的方法(见 1.4 节)可以说明微分方程(1.1.2)的每个解都具有式(1.1.1)的形式. ■

### 微分方程和数学模型

下面三个例子说明了把自然科学的定律和原理转化为微分方程的过程. 在每个例子中的自变量都是时间 $t$，但以后也有很多自变量不是时间变量 $t$ 的例子.

**例 1.1.3**　牛顿冷却定律可表述为：一个物体温度 $T(t)$ 的时间变化率（相对于时间的变化率）与物体的温度 $T$ 和它周围介质的温度 $A$ 的差成比例（图 1.1.1），即

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}=-k(T-A),\tag{1.1.3}$$

其中 $k$ 为正常数. 显然，如果 $T>A$，那么 $\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}<0$，因此温度 $T$ 是时间 $t$ 的一个减函数，从而物体会慢慢变凉；如果 $T<A$，那么 $\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}>0$，因此温度 $T$ 是时间 $t$ 的一个增函数. 这样，物理定律被转化为一个微分方程. 如果给定 $A$ 和 $k$ 的值，将得到 $T(t)$ 的具体表达式，从而根据这个表达式能预测物体的将来温度. ■

**例 1.1.4**　托里拆利定律可表述为：在排水容器中，水的体积 $V$ 的时间变化率与容器中水的深度 $y$ 的平方根成比例（图 1.1.2），即

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=-k\sqrt{y},\tag{1.1.4}$$

其中 $k$ 为常数.

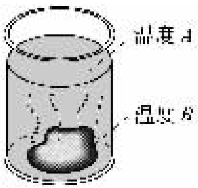

图 1.1.1　牛顿冷却定律，方程（1.1.3）描述水中热岩石的冷却过程

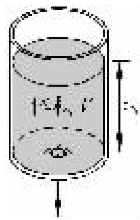

图 1.1.2　托里拆利排水定律，方程（1.1.4）描述水箱中的排水过程

如果容器是一个直圆柱且横截面积为 $A$，那么 $V=Ay$，所以 $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=A\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$. 在这种情况下，方程（1.1.4）可变成为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-h\sqrt{y},\tag{1.1.5}$$

其中 $h=k/A$ 为一个常数. ■

**例 1.1.5**　在出生率和死亡率都不变的情况下，人口 $P(t)$ 的时间变化率与人口的总数成比例. 即

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t}=kP,\tag{1.1.6}$$

其中 $k$ 为一个比例常数. ■

下面进一步讨论例 1.1.5. 首先，注意到每一个形如

$$P(t) = Ce^{kt} \tag{1.1.7}$$

的函数都是微分方程$\frac{dP}{dt}=kP$的解. 可以验证,对于所有的实数$t$,都有$P'(t)=Cke^{kt}=k(Ce^{kt})=kP(t)$.

这样,如果给定常数$k$的值,那么选定任意常数$C$,得到微分方程$\frac{dP}{dt}=kP$的一个解$P(t)=Ce^{kt}$. 所以微分方程$\frac{dP}{dt}=kP$有无穷多个形如$P(t)=Ce^{kt}$的不同解. 一般地,根据一些附加条件从所有解中选择一个特殊的解,使其满足要求.

**例 1.1.6**　假设$P(t)=Ce^{kt}$代表在时刻$t$时菌群的数量,在时刻$t=0$(单位: h)时是1000个,在1h时为2000个,由这个附加条件得到下面方程

$$1000 = P(0) = Ce^0, \quad 2000 = P(1) = Ce^k.$$

因此$C=1000$, $e^k=2$,进一步得$k=\ln 2\approx 0.693147$,所以微分方程(1.1.6)变为

$$\frac{dP}{dt} = (\ln 2)P \approx 0.693147P.$$

用$k=\ln 2$, $C=1000$代入方程(1.1.7)得到满足给定条件的特解$P(t)=1000e^{(\ln 2)t}=1000(e^{\ln 2})^t=1000\times 2^t$. 可以用这个特解来预测菌群的数量. 例如,在1.5h以后,菌群的数量为$P(1.5)=1000\times 2^{\frac{3}{2}}\approx 2828$. ■

因为我们经常得到的微分方程都把$t=0$当作是"开始时刻",所以例1.1.6中的条件$P(0)=1000$叫做初值条件. 图1.1.3给出了当$k=\ln 2$时$P(t)=Ce^{kt}$的几个不同图形. 事实上,$\frac{dP}{dt}=kP$的所有解的图形充满整个二维平面,并且没有两条曲线相交. 另外,$P$轴上任意一点的选择就等于初值条件$P(0)$的确定. 因为恰有一条解曲线通过这个点,所以在这种情况下,初值条件$P(0)=P_0$确定了惟一个适合给定条件的解.

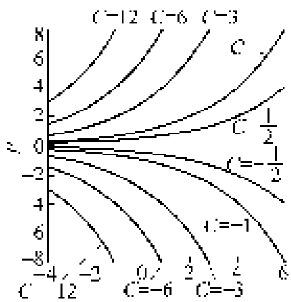

图 1.1.3　当$k=\ln 2$时,$P(t)=Ce^{kt}$的图形

## 数学模型

在例1.1.5和例1.1.6中,关于人口增长的讨论给出了数学建模的整个过程(图1.1.4),具体如下:

(1) 用数学语言给客观世界一个系统的阐述,也就是数学模型的构造;

(2) 对得到的数学问题进行求解或分析;

(3) 在真实的客观世界中对数学结果给予解释.

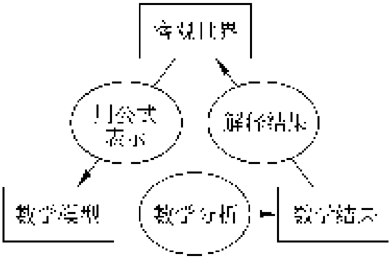


图 1.1.4 数学建模的过程

在人口的例子中,客观世界问题是确定将来某一时间的人口数量. 数学模型包括一系列用来描述已知情况的变量($P$ 和 $t$),还包括已知的或假设能求出的一个或多个涉及这些变量的方程$\left(\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t}=kP, P(0)=p_0\right)$. 数学分析就是解这些方程. 最后我们将这些数学结果应用到解决原始客观世界问题当中去.

然而,微分方程的一个解不可能满足所有的已知信息. 在这种情况下,我们一定怀疑微分方程不可能很充分地描述客观世界. 例如,方程(1.1.6)的解具有形式 $P(t)=Ce^{kt}$,其中 $C$ 是一个正常数. 但是,不存在常数 $k$ 和 $C$,使得 $P(t)$ 准确地描述过去几个世纪世界人口的实际增长. 因此,我们必须考虑下面一些因素:人口的出生率、食品供应的短缺和其他等因素,然后得到更复杂的微分方程. 但这并不意味着例 1.1.5 的模型就是失败的. 这就要求我们在研究人口增长的时候必须考虑到其他的因素. 实际上,方程(1.1.6)在一定条件下是相当准确的. 例如,在不限制食品和空间的条件下细菌数量的增长.

在人口的例子中,忽略了出生率和死亡率的变化所带来的影响. 这就使数学分析变得非常简单,但结果可能不符合实际. 一个好的数学模型应该适合两个对立的要求. 一方面,它必须在相对准确的情况下足够详细地描述客观世界;另一方面,它也必须使得数学分析变得足够简单. 如果这个数学模型如此详细以至于它完全描述客观世界,那么数学分析就可能太困难以至于根本就不能进行. 如果数学模型太简单,那么结果可能就太不准确,以至于没有什么实际意义. 这样在客观世界和数学模型之间不可避免的存在一个平衡点.

在本书中我们始终研究数学模型. 下面的例子都是简单的,而且给出了研究微分方程及其解的标准方法.

## 例子及术语

**例 1.1.7** 如果 $C$ 是一个常数,且 $y(x)=\frac{1}{C-x}$,那么$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{(C-x)^2}=y^2$. 因此如果 $x\neq C$,那么在任何不包含 $x=C$ 点的实数区间上,

$$y(x)=\frac{1}{C-x} \tag{1.1.8}$$

是微分方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=y^2 \tag{1.1.9}$$

的一个解. 实际上,式(1.1.8)给出微分方程$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=y^2$ 含有一个参数的一族解. 当 $C=1$ 时,我

们得到一个特解 $y(x)=\dfrac{1}{1-x}$,它满足初始条件 $y(0)=1$. 如图 1.1.5 所示,这个解在区间$(-\infty,1)$上是连续的. 但它有一条垂直渐近线 $x=1$. ■

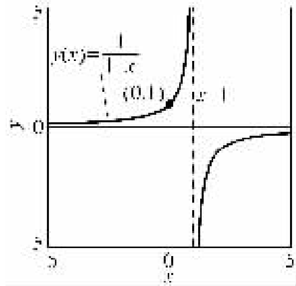

图 1.1.5 微分方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=y^2$ 的解

**例 1.1.8** 证明函数 $y(x)=2x^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{1}{2}}\ln x$ 满足微分方程

$$4x^2y''+y=0\quad(x>0).\tag{1.1.10}$$

**解** 首先计算出它的导数

$$y'(x)=-\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\ln x,\quad y''(x)=\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}\ln x-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}.$$

然后代入方程(1.1.10),得到

$$4x^2y''+y=4x^2\left(\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}\ln x-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}\right)+2x^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{1}{2}}\ln x=0,$$

所以,对所有 $x>0$,它都满足微分方程. ■

事实上,我们得到的微分方程不一定都能保证它有解. 例如

$$(y')^2+y^2=-1.\tag{1.1.11}$$

显然,这个微分方程是没有(实值)解,因为两个非负数的和不可能是负数. 但是,把这个题目变形为

$$(y')^2+y^2=0,\tag{1.1.12}$$

它就有惟一的一个(实值)解 $y(x)\equiv 0$. 在前面的例子中,任何至少有一个解的微分方程确实有无穷多个解.

微分方程的**阶**是指出现在方程中最高阶导数的阶. 例 1.1.8 的微分方程是二阶的. 例 1.1.2~例 1.1.7 的微分方程都是一阶的,而 $y^{(4)}+x^2y^{(3)}+x^5y=\sin x$ 是 4 阶微分方程. 具有自变量 $x$ 和未知函数或因变量 $y=y(x)$的 ***n* 阶**微分方程的最一般形式为

$$F(x,y,y',y'',\cdots,y^{(n)})=0,\tag{1.1.13}$$

其中 $F$ 是含有 $n+2$ 个变量的实值函数.

到目前为止,我们对解的理解还不太准确. 精确地讲,称函数 $u=u(x)$是微分方程(1.1.13)在区间 $I$ 上的解,它必须满足导数 $u',u'',\cdots,u^{(n)}$ 在区间 $I$ 内存在,并且对 $\forall x\in I$,

$$F(x,u,u',u'',\cdots,u^{(n)})=0$$

都成立. 简言之,$u=u(x)$在区间 $I$ 上满足微分方程(1.1.13).

**注** 根据初等微积分知在开区间上的可微函数在其上一定是连续的. 这就说明为什么只有连续函数才能在一个区间上作为微分方程的(可微)解.

**例 1.1.7(续)** 图 1.1.5 给出了图形 $y(x)=\dfrac{1}{1-x}$的两个“连接”分支. 左分支是定义

在区间$(-\infty,1)$上微分方程$y'=y^2$(连续)解的图形. 右分支是定义在不同区间$(1,+\infty)$上微分方程$y'=y^2$不同解的图形. 因此,一个式子$y(x)=\dfrac{1}{1-x}$实际上定义了同一个微分方程$y'=y^2$的两个不同解(在不同的定义区域上). ■

**例 1.1.9** 如果$A$和$B$都是常数并且

$$y(x) = A\cos 3x + B\sin 3x, \tag{1.1.14}$$

那么对它连续求导得到

$$y'(x) = -3A\sin 3x + 3B\cos 3x,$$
$$y''(x) = -9A\cos 3x - 9B\sin 3x = -9y(x).$$

因此,可以看出式(1.1.14)是二阶微分方程

$$y'' + 9y = 0 \tag{1.1.15}$$

在整个实数轴上的一族含有两个参数的解. 图1.1.6给出了一些解的图形. ■

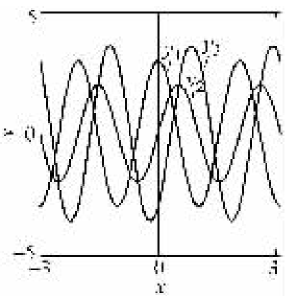


图1.1.6 微分方程$y''+9y=0$的三个解
$y_1(x)=3\cos 3x$, $y_2(x)=2\sin 3x$,
$y_3(x)=-3\cos 3x+2\sin 3x$

微分方程(1.1.11)和(1.1.12)是特殊情况. 一般地,一个$n$阶微分方程有一族含有$n$个任意常数或参数的解.

在微分方程(1.1.11)和(1.1.12)中,$y'$作为隐函数形式的出现会发生混乱. 因此,通常假定所研究的微分方程的最高阶导数都能解出来,也就是方程能表示成所谓的标准型

$$y^{(n)} = G(x, y, y', y'', \cdots, y^{(n-1)}), \tag{1.1.16}$$

其中$G$是一个含有$n+1$个变量的实值函数. 另外,除非特别声明,总是寻找实值解.

到目前为止,所涉及的微分方程都是**常微分方程**,也就是未知函数(因变量)仅仅是一个自变量的函数. 如果因变量是两个或两个以上变量的函数,那么就涉及偏导数. 如果是这样的话,这个微分方程叫做**偏微分方程**. 例如,均匀细长棒在点$x$和时间$t$的温度函数$u=u(x,t)$满足(在适当简单的条件下)偏微分方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

其中$k$是常数(棒的热扩散率). 从第1章到第8章,涉及的都是常微分方程,并且把它们简单地称为微分方程.

在这一章,集中讨论形如

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x, y) \tag{1.1.17}$$

的一阶微分方程. 我们将列举出这种方程广泛的应用实例. 在实际应用中,经常遇到的典

型数学模型将是**初值问题**,即具有**初始条件** $y(x_0)=y_0$ 的形如式(1.1.17)的微分方程.求解初值问题

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y),\quad y(x_0)=y_0,\tag{1.1.18}$$

就是在含有 $x_0$ 的某个区间上找到可微函数 $y=y(x)$,使其满足方程(1.1.18)的两个条件.

**例 1.1.10** 已知例 1.1.7 中的微分方程 $\frac{dy}{dx}=y^2$ 解为 $y(x)=\frac{1}{C-x}$,求解初值问题

$$\frac{dy}{dx}=y^2,\quad y(1)=2.$$

**解** 只需找到 $C$ 的值,使解 $y(x)=\frac{1}{C-x}$ 满足初始条件 $y(1)=2$.将 $x=1,y=2$ 代入已知解,得 $2=y(1)=\frac{1}{C-1}$,解得 $2C-2=1$,于是 $C=3/2$.对于 $C$ 的这个值,得到所希望的解 $y(x)=\frac{1}{\frac{3}{2}-x}=\frac{2}{3-2x}$.

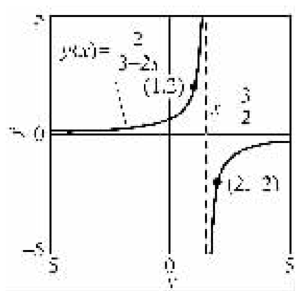

图 1.1.7 微分方程 $\frac{dy}{dx}=y^2$ 的解

图 1.1.7 给出了图形 $y(x)=\frac{2}{3-2x}$ 的两个分支. 左分支是已知初值问题 $y'=y^2,y(1)=2$ 在 $\left(-\infty,\frac{3}{2}\right)$ 上解的图形.右分支通过点(2,−2),因此是不同初值问题 $y'=y^2,y(2)=-2$ 在 $\left(\frac{3}{2},+\infty\right)$ 上解的图形. ■

我们最关心的问题是:如果给定一个微分方程并且已知它有一个满足初始条件的解,如何准确地找到或计算出这个解?一旦找到,我们能用它做什么?我们将介绍比较简单的方法,如分离变量法(1.4 节),求解线性微分方程(1.5 节),基本代换方法(1.6 节),这些方法足够使我们解决具有广泛应用的一阶微分方程.

## 习题 1.1

在习题 1~12 中,用代入法验证每个函数都是所对应微分方程的解:

**1.** $y'=3x^2$; $y=x^3+7$.

**2.** $y'+2y=0$; $y=3e^{-2x}$.

**3.** $y''+4y=0$; $y_1=\cos 2x, y_2=\sin 2x$.

**4.** $y''=9y$; $y_1=e^{3x}, y_2=e^{-3x}$.

**5.** $y'=y+2e^{-x}$; $y=e^x-e^{-x}$.

**6.** $y''+4y'+4y=0$; $y_1=e^{-2x}, y_2=xe^{-2x}$.

**7.** $y''-2y'+2y=0$; $y_1=e^x\cos x, y_2=e^x\sin x$.

**8.** $y''+y=3\cos 2x$; $y_1=\cos x-\cos 2x$, $y_2=\sin x-\cos 2x$.

**9.** $y'+2xy^2=0$; $y=\frac{1}{1+x^2}$.

**10.** $x^2y''+xy'-y=\ln x$；$y_1=x-\ln x, y_2=\dfrac{1}{x}-\ln x$.

**11.** $x^2y''+5xy'+4y=0$；$y_1=\dfrac{1}{x^2}, y_2=\dfrac{\ln x}{x^2}$.

**12.** $x^2y''-xy'+2y=0$；$y_1=x\cos(\ln x)$,
$y_2=x\sin(\ln x)$.

在习题 13～16 中，把 $y=e^{rx}$ 代入微分方程确定常数 $r$，使得 $y=e^{rx}$ 为给定微分方程的解：

**13.** $3y'=2y$.

**14.** $4y''=y$.

**15.** $y''+y'-2y=0$.

**16.** $3y''+3y'-4y=0$.

在习题 17～26 中，首先验证 $y=y(x)$ 满足给定的微分方程. 然后确定常数 $C$ 使得 $y=y(x)$ 满足给定的初始条件：

**17.** $y''+y=0$；$y(x)=Ce^{-x}, y(0)=2$.

**18.** $y'=2y$；$y(x)=Ce^{2x}, y(0)=3$.

**19.** $y'=y+1$；$y(x)=Ce^{x}-1, y(0)=5$.

**20.** $y'=x-y$；$y(x)=Ce^{-x}+x-1, y(0)=10$.

**21.** $y'+3x^2y=0$；$y(x)=Ce^{-x^3}, y(0)=7$.

**22.** $e^yy'=1$；$y(x)=\ln(x+C), y(0)=0$.

**23.** $x\dfrac{dy}{dx}+3y=2x^5$；$y(x)=\dfrac{1}{4}x^5+Cx^{-3}$,
$y(2)=1$.

**24.** $xy'-3y=x^3$；$y(x)=x^3(C+\ln x)$,
$y(1)=17$.

**25.** $y'=3x^2(y^2+1)$；$y(x)=\tan(x^3+C)$,
$y(0)=1$.

**26.** $y'+y\tan x=\cos x$；$y(x)=(x+C)\cos x, y(\pi)=0$.

在习题 27～31 中，已知函数 $y=g(x)$ 代表曲线的一些几何性质，写出微分方程 $\dfrac{dy}{dx}=f(x,y)$，并使得函数 $g$ 为它的解（或它的解之一）：

**27.** 曲线 $g$ 上点 $(x,y)$ 的斜率为 $x$ 与 $y$ 的和.

**28.** 曲线 $g$ 上点 $(x,y)$ 的切线与 $x$ 轴的交点为 $(x/2, 0)$.

**29.** 曲线 $g$ 上点 $(x,y)$ 的法线通过点 $(0,1)$.

**30.** 曲线 $g$ 与曲线 $y=x^2+k$（$k$ 是常数）在它们相交处垂直相切.

**31.** 曲线 $g$ 上点 $(x,y)$ 的切线通过点 $(-y,x)$.

在习题 32～36 中，根据每题给出的数学模型，用 1.1 节的方程(1.1.3)～(1.1.6)的形式写出微分方程：

**32.** 人口 $P$ 的时间变化率与 $P$ 的平方根成比例.

**33.** 汽船速度 $v$ 的时间变化率与 $v$ 的平方成比例.

**34.** 汽车的加速度 $\dfrac{dv}{dt}$ 与汽车速度和 250km/h 的差成比例.

**35.** 在一个有固定人口的城市中，已经听到谣传的人总数 $N$ 的时间变化率与还没有听到谣传的人总数成比例.

**36.** 在一个有固定人口数量 $P$ 的城市中，被传染上一种传染疾病的总人数 $N$ 的时间变化率与已经传染和没有传染疾病的总人数的乘积成比例.

在习题 37～42 中，通过观察给出至少一个微分方程的解，也就是，用你学过的微分知识作一个聪明的猜测，然后验证你的猜测：

**37.** $y''=0$.

**38.** $y'=y$.

**39.** $xy'+y=3x^2$.

**40.** $(y')^2+y^2=1$.

**41.** $y'+y=e^x$.

**42.** $y''+y=0$.

**43.** (1) 若 $k$ 是一个常数，证明微分方程 $\dfrac{dx}{dt}=kx^2$ 的通解（含有一个参数）为 $x(t)=\dfrac{1}{C-kt}$，其中 $C$ 是任意常数；
(2) 通过观察，确定初值问题 $x'=kx^2, x(0)=0$ 的一个解.

**44.** (1) 接 43 题，若 $k$ 是正数，画出 $x'=kx^2$ 解的关于 $x(0)$ 几个典型正值的图形；
(2) 若 $k$ 是负数，则这些解有什么不同？

**45.** 假设兔子的数量 $P$ 满足微分方程 $\dfrac{dP}{dt}=kP^2$，而且 $P(0)=2$. 当 $P=10$ 时，兔子的数量以每月 $\dfrac{dP}{dt}=1$ 速率增加. 问兔子的数量达到 100 只需要多长时间？1000 只呢？于是发生了什么现象？

**46.** 假设汽船在水中的速度 $v$ 满足微分方程 $\dfrac{dv}{dt}=$

$kv^2$. 初始速度为 $v(0)=10\text{m/s}$. 当 $v=5\text{m/s}$ 时，$v$ 以速率 $1\text{m/s}^2$ 减少. 问船的速度减少到 $1\text{m/s}$ 需要多长时间？减少到 $0.1\text{m/s}$ 需要多长时间？什么时候船停止？

**47.** 在例 1.1.7 中，我们知道 $y(x)=\dfrac{1}{C-x}$ 为微分方程 $\dfrac{dy}{dx}=y^2$ 的含有一个参数的一族解.

(1) 确定 $C$ 的值，使得 $y(10)=10$.

(2) 是否存在 $C$ 的值，使得 $y(0)=0$？你能通过观察找到微分方程 $\dfrac{dy}{dx}=y^2$ 的一个解，使得 $y(0)=0$？

(3) 图 1.1.8 给出了解族 $y(x)=\dfrac{1}{C-x}$ 的基本图形. 这些解曲线能充满整个 $xy$ 平面吗？在平面给定任意一点 $(a,b)$ 你能肯定微分方程 $\dfrac{dy}{dx}=y^2$ 恰好有一个满足条件 $y(a)=b$ 的解 $y(x)$ 吗？

**48.** (1) 说明 $y(x)=Cx^4$ 是微分方程 $xy'=4y$ 含有一个参数的一族解(图 1.1.9)；

(2) 说明 $y(x)=\begin{cases}-x^4, & x<0,\\ x^4, & x\geqslant 0\end{cases}$ 是微分方程 $xy'=4y$ 一个解，但它不是 $y(x)=Cx^4$ 的形式；

(3) 给定任意实数 $a$ 和 $b$，对照习题 47 中的问题(3)，解释微分方程 $xy'=4y$ 为什么存在无穷多个满足条件 $y(a)=b$ 的解.

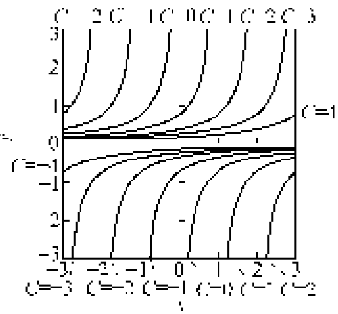

图 1.1.8 方程 $\dfrac{dy}{dx}=y^2$ 的解

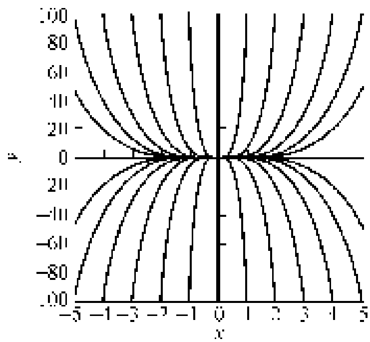

图 1.1.9 关于 $C$ 的不同值 $y(x)=Cx^4$

# 1.2 通解和特解的积分形式

如果函数 $f$ 与因变量 $y$ 无关，那么一阶微分方程 $\dfrac{dy}{dx}=f(x,y)$ 具有特殊形式

$$\frac{dy}{dx}=f(x), \tag{1.2.1}$$

在这种特殊情况下只需对方程(1.2.1)两边积分得到

$$y=y(x)=\int f(x)\,dx+C. \tag{1.2.2}$$

这是方程(1.2.1)的**通解**，即它包含有一个任意常数 $C$，并且对任意常数 $C$，它都是方程(1.2.1)的解. 如果 $G(x)$ 是 $f$ 的一个原函数，即 $G'(x)\equiv f(x)$，那么

$$y(x)=G(x)+C. \tag{1.2.3}$$

从图 1.2.1 和图 1.2.2 中可以看到，$y_1(x)=G(x)+C_1$ 和 $y_2(x)=G(x)+C_2$ 在同一区间 $I$ 上的图形是“平行的”. 常数 $C$ 是两条曲线 $y(x)=G(x)$ 和 $y(x)=G(x)+C$ 的垂直距离.

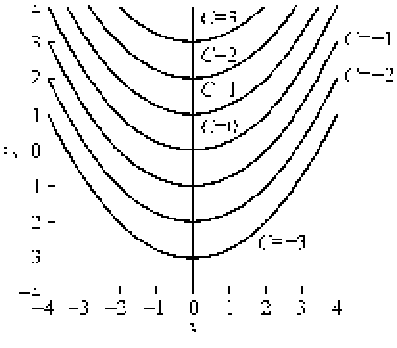

图 1.2.1　对不同 $C$ 值 $y=\frac{1}{4}x^2+C$ 的图形

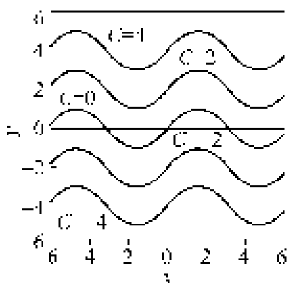

图 1.2.2　对不同 $C$ 值 $y=\sin x+C$ 的图形

为了满足初始条件 $y(x_0)=y_0$，只需将 $x=x_0$，$y=y_0$ 代入式(1.2.3)就可得到 $y_0=G(x_0)+C$，因此 $C=y_0-G(x_0)$. 通过这样选择 $C$，就可得到满足方程式(1.2.1)的初值问题

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x),\quad y(x_0)=y_0$$

的**特解**.

这是求解一阶微分方程的典型例子. 一般地，首先得到的是一个含有任意常数 $C$ 的通解. 然后通过代入初始条件来确定常数 $C$，从而得到满足初始条件 $y(x_0)=y_0$ 的一个特解.

**注**　像前面所提到的术语一样，一阶微分方程的通解是一个包含一个参数的一族解. 问题是任意给定的一个通解能否包含微分方程的每一个特解. 如果是这样，那么就把它叫做微分方程的通解. 例如，因为同一个函数 $f(x)$ 的两个任意两个原函数仅相差一个常数，因此方程(1.2.1)的每一个解都具有式(1.2.2)的形式. 所以式(1.2.2)就代表了方程(1.2.1)的通解.

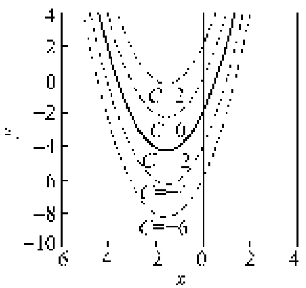

图 1.2.3　例 1.2.1 中微分方程的解曲线

**例 1.2.1**　求解初值问题

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2x+3,\quad y(1)=2.$$

**解**　对微分方程两边积分，立刻求得满足微分方程的通解

$$y=y(x)=\int(2x+3)\mathrm{d}x=x^2+3x+C.$$

图 1.2.3 给出了对不同常数 $C$，函数 $y=x^2+3x+C$ 的图形. 寻找的特解就是通过(1, 2)点的一条曲线，因此