第 1 章　信号检测与估计概论

1.1　引言

信号检测与估计的概念、理论和方法是随机信号统计处理的理论基础。本章在扼要介绍统计信号处理发展概况的基础上，重点论述待处理信号的随机性及其统计处理方法的含义；统计信号处理的理论基础：信号的统计检测理论、估计理论和滤波理论的基本概念；本书的内容编排和几点建议。

1.2　信号处理发展概况

自 20 世纪 50 年代以来，信号处理的理论和应用有了很大的发展，主要表现在信号的检测理论、估计理论与滤波理论，多维(阵列)信号处理，自适应信号处理与自适应滤波理论等方面，并广泛应用于电子信息系统、自动化工程、模式识别、生物医学工程、航空航天工程、地球物理研究等技术领域。特别是近年来，随着现代通信系统、信息理论、微电子技术和计算机科学与技术等的飞速发展，统计信号处理的经典理论也在向现代信号处理理论演化，并取得了相当大的进展。表 1.1 是关于统计信号处理发展概况的简表，供读者参考。

表 1.1　统计信号处理发展概况简表

比较项 \ 信号处理类别	统计信号处理基础	现代信号处理
时域背景特性	平稳随机过程、高斯分布	平稳、非平稳随机过程，高斯、非高斯分布
频域背景特性	均匀功率谱、高斯功率谱	均匀、非均匀功率谱，高斯、非高斯功率谱
信号特性	简单信号、编码信号	编码信号，扩频信号，线性、非线性调频信号
系统特性	线性时不变最小相位系统	线性时不变、时变系统，非线性时变、非最小相位系统
数学工具	随机过程、傅里叶变换	随机过程、傅里叶变换、高阶累积量、时频分析、小波变换
实现技术	采用现代模拟器件为主的模拟处理技术，采用 DSP 为核心器件的数字处理技术	

表 1.1 从统计信号处理的时域背景特性、频域背景特性、所采用的信号特性、产生和接收信号的系统特性、信号处理所用的数学工具和当前的实现技术六个方面来说明其发

展概况。这里应该说明，统计信号处理基础所研究的内容，是现代信号处理必备的理论基础知识，但二者的区分并没有严格的界限，而是在许多内容上互有交叉。例如，统计信号处理的基础理论——信号检测与估计理论中，有些内容也讨论了非平稳随机过程、有色噪声背景中信号的处理和非线性信号处理等问题；现代信号处理也需要研究一些基础方面的内容。所以，表 1.1 只是为了便于说明统计信号处理的发展概况，以及统计信号处理的基础与现代信号处理之间的主要差别而硬性加以区分的，而且所涉及的几个方面也不一定是全面的，具体内容则仅仅是有关领域中的一些主要内容。因此，表 1.1 仅为读者提供了有关统计信号处理发展概况的基本信息。

信号处理理论研究的日益进步和完善，以及信号处理技术应用领域的不断深入和扩展，使信号处理，特别是随机信号处理受到了人们十分广泛的重视。随机信号属于随机过程，所以应采用数学上的统计方法进行处理。因此，建立随机信号统计处理方法的基本概念，掌握扎实的统计信号处理的理论基础，具有用统计的方法研究分析随机信号处理问题的能力和解决工程技术问题的能力，是从事信号处理的科技工作者应有的素质。

1.3 信号的随机性及其统计处理方法

众所周知，在信息系统中，信息通常是以某种信号形式表示的；代表一种信息的信号在发射系统中产生后，一般要通过发射设备处理，再经信道进行传输；在接收系统中，对接收到的信号进行必要的处理，最终提供便于应用的接收信息。

图 1.1 是一个典型的无线通信系统的简化框图。我们知道，通信的目的是为了传递信息，信源就是信息源。我们把待传输的文字、资料、数据等统称为信息。为了能实现远距离传输，须将信息进行变换、编码等信号处理，并调制成合适的无线电信号，借助于发射天线辐射到空间中，再以电磁波的方式传播到接收天线；接收系统将接收到的无线电信号经过放大、解调，然后对接收信号进行处理，提取出所需要的信息送给终端设备，从而完成了信息传输的任务。

图 1.1 无线通信系统原理框图

在雷达等系统中，被观测目标的坐标、速度、航向、类型等是其所包含的信息。当目标被雷达发射的电磁波照射时，在目标的反射回波中就含有这些人们感兴趣的信息。对雷达接收目标的反射回波信号进行适当的处理，就能够提取出所需的目标信息。在自动控制系统中，通常包括两个信道，分别称为前向信道和反馈信道。从前向信道获得所需的原始信息，经过处理后得到控制信号，并由反馈信道传输这些控制信号，然后对系统的部件

或参数进行调整，从而构成闭环的自动控制系统。

从以上对几种信息系统的简要讨论中可以看出，一般来说，信息系统的主要工作是信号的产生、发射、传输、接收和处理，以实现信息传输的目的，这样的系统通常称为电子信息系统。对于电子信息系统，最主要的要求是高速率和高准确性。前者要求系统传输信息的效率尽可能高，即单位时间内传输尽可能多的信息，这主要决定于信号的波形设计和频率选择；后者则要求系统在传输信息的过程中，尽可能地少出差错，减小信号波形的失真度，这就是系统的抗干扰能力问题。在电子信息系统中，影响准确性的原因是多方面的，归纳为如下三个主要因素：信号本身的不理想性，信号在传输过程中发生畸变（失真），信号受到各种各样不可避免的外界干扰和内部干扰等。

1. 信号的随机性

根据电子信息系统的要求，我们所设计的信号与系统实际所形成的信号之间会有一定的误差，如信号频谱的纯度、相位噪声的大小、脉冲信号的宽度、顶部平坦度、前后沿时间及它们的稳定性、线性调频信号的线性度等方面的误差。相对于理想信号，这种误差可以看作是对信号的一种干扰分量。信号在信道传输过程中，会产生随机衰落，电磁波在经过大气层或电离层时，由于吸收系数或反射系数的随机性，必然会对信号的幅度、频率和相位等产生随机的影响，使信号发生畸变（失真）。大气层、电离层、宇宙空间等各种自然界的电磁过程，加上各种电气设备、无线电台、电视台、通信系统产生的电磁波，地面物体等固定杂波、气象等运动杂波和人为干扰等诸多因素，它们的频谱可能比较复杂，有的还可能较宽，这样，其中部分分量就有可能进入系统，形成对信号的外界干扰；电子信息系统本身的电源、各种电子元器件产生的热噪声、系统特性误差、正交双通道信号处理中正交变换时的幅度不一致性和相位不正交性、多通道之间的不平衡性、A/D 变换器的量化噪声、运算中的有限字长效应等，形成对信号的内部干扰。

电子信息系统中信号所受到的各种干扰均具有随机特性，以后我们一般将其统称为噪声，并用 $n(t)$ 表示，它是一随机过程。噪声 $n(t)$ 大致上可以分为两类：一类属于加性噪声，它们与信号混迭，对信号产生“污染”；另一类属于乘性噪声，它们对信号进行调制。因为在实际系统中，加性噪声是最常遇到的，也是一种最基本的干扰模型，所以我们在本书中将考虑加性噪声的情况。

在电子信息系统中，根据本书的内容要求，信号一般可分为两类：确知信号和随机参量信号。所谓确知信号，是指可以用一个确定的时间函数来表示的信号，我们用 $s(t)(0\leqslant t\leqslant T)$ 表示；而随机参量信号虽然一般地也可以表示为时间的函数，但信号中含有一个或一个以上的参量是随机的，我们用 $s(t;\boldsymbol{\theta})(0\leqslant t\leqslant T)$ 表示，其中 $\boldsymbol{\theta}=(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_M)^{\mathrm{T}}$，表示信号中含有 M 个随机参量。

这样，在考虑加性噪声 $n(t)$ 的情况下，我们要处理的信号 $x(t)(0\leqslant t\leqslant T)$ 可以表示为

$$x(t)=s(t)+n(t),\quad 0\leqslant t\leqslant T \tag{1.3.1}$$

或

$$x(t)=s(t;\boldsymbol{\theta})+n(t),\quad 0\leqslant t\leqslant T \tag{1.3.2}$$

由于噪声 $n(t)$ 是具有随机特性的随机过程，所以即使信号是确知信号 $s(t)(0\leqslant t\leqslant$

T)，待处理的信号 $x(t)$ $(0\leqslant t\leqslant T)$也是具有随机特性的随机信号，何况实际上信号往往还是含有随机参量的随机参量信号 $s(t;\ \boldsymbol{\theta})$ $(0\leqslant t\leqslant T)$。这就是说，我们要处理的信号 $x(t)$ $(0\leqslant t\leqslant T)$是随机信号，并且，在实际中通常是信噪比较低的信号。有时我们也把 $x(t)$ $(0\leqslant t\leqslant T)$称为接收信号或观测信号。

2. 信号的统计处理方法

因为待处理的信号 $x(t)$ $(0\leqslant t\leqslant T)$是随机信号，具有统计特性，所以对信号所进行的各种处理，应从信号和噪声的统计特性出发，于是统计学便成为信号处理学科的有力数学工具。将统计学的理论和方法应用于随机信号的处理，主要体现在如下三个方面。

（1）对信号的随机特性进行统计描述，即用概率密度函数(probability density function，PDF)、各阶矩、相关函数、协方差函数、功率谱密度(power spectrum density，PSD)等来描述随机信号的统计特性。

（2）基于随机信号统计特性所进行的各种处理和选择的相应准则均是在统计意义上进行的，并且是最佳的，如信号状态的统计判决、信号参数的最佳估计、均方误差最小准则下信号的线性滤波等。

（3）处理结果的评价，即性能用相应的统计平均量来度量，如判决概率、平均代价、平均错误概率、均值、方差、均方误差等。

所以，我们把对随机信号的处理称为统计信号处理。在后面的章节中，我们基本上是按照统计信号处理上述的三个方面展开讨论的。

1.4 信号检测与估计理论概述

前面我们已经说明，统计信号处理的理论研究日渐深入，应用领域不断扩大。在用统计方法进行信号处理时，其基本原理和方法是相通的，所共同需要的主要理论基础是信号的统计检测理论、统计估计理论和滤波理论。

所谓信号的统计检测理论，是研究在噪声干扰背景中，所关心的信号是属于哪种状态的最佳判决问题；统计估计理论，是研究在噪声干扰背景中，通过对信号的观测，如何构造待估计参数的最佳估计量问题；而信号的滤波理论则是为了改善信号质量，研究在噪声干扰中所感兴趣信号波形的最佳恢复问题，或离散状态下表征信号在各离散时刻状态的最佳动态估计问题。让我们通过下面的两个例子来具体说明这些问题。

在雷达系统中，雷达所发射的信号以电磁波的形式在空间传播，当碰到反射体时会有部分能量返回雷达而被接收，如图 1.2 所示。图中，$x(t)$表示雷达接收信号，t_d 对应反射体与雷达之间的距离 R，即 $R=\frac{1}{2}ct_d$，c 是光速。当反射波是由人们感兴趣的物体返回时，所接收的信号就是目标信号，而来自其他物体的回波或人为干扰等是外界干扰，同时还存在各种内部干扰。雷达系统面临的任务之一就是从可能非常恶劣的干扰环境中提取出人们感兴趣的目标信号，这就要求雷达系统根据目标信号和干扰信号的统计特性，采用统计信号处理的方法，按照某种设定的最佳准则，检测出目标信号，估计目标的有关参量

(斜距 R、方位 β、高度 H 和速度 v 等)，建立目标的运动航迹，预测未来的目标运动状态等。这就是雷达信号的检测、参量估计和状态滤波。

图 1.2　雷达系统工作示意图

我们再来看一个通信系统的例子。如图 1.3 所示的二元数字通信系统，信源每隔 T(s)产生一个二进制码 0 或 1。为了使数字信息能够在信道中远距离传输，应将二进制数字码进行调制，例如，在调频(FM)体制下，用两种不同频率(ω_0 和 ω_1)的正弦信号分别对数码 0 和 1 进行调制，结果如下：

数码 0：$s_0(t)=\sin \omega_0 t,\quad 0\leqslant t\leqslant T$

数码 1：$s_1(t)=\sin \omega_1 t,\quad 0\leqslant t\leqslant T$

图 1.3　二进制数字通信系统原理框图

这种信号可以是连续相位移频键控(CPFM)信号，如图 1.4 所示。

图 1.4　连续相位移频键控(CPFM)信号

信号 $s_0(t)$或 $s_1(t)$通过天线发射出去。如果信号在信道中传输没有失真而仅受到衰减，则在接收天线处就收到了幅度衰减了的信号，经放大后接收到的有用信号仍可分别用 $s_0(t)$或 $s_1(t)$表示。若在$[0,T]$时间内接收信号为 $x(t)$，考虑加性噪声 $n(t)$，则 $x(t)$可

表示为：

- 如果当 $0\leqslant t\leqslant T$ 时，$s_0(t)$被发射和接收（这里没计传输延迟时间），则

$$x(t)=s_0(t)+n(t),\quad 0\leqslant t\leqslant T$$

- 如果当 $0\leqslant t\leqslant T$ 时，$s_1(t)$被发射和接收（这里没计传输延迟时间），则

$$x(t)=s_1(t)+n(t),\quad 0\leqslant t\leqslant T$$

事实上，在接收到 $x(t)$后，并不知道在$[0,T]$内发送的是 $s_0(t)$还是 $s_1(t)$，所以我们要判断在$[0,T]$内究竟发送的是 $s_0(t)$信号还是 $s_1(t)$信号？要完成这种判断，需要根据在 $s_0(t)$下和 $s_1(t)$下接收信号 $x(t)$在统计特性上的差异，并选择合理的最佳检测准则，才能得到在某种意义上的最佳判断结果。这就是信号的统计检测理论要研究和解决的问题。对 $M(M>2)$元通信系统，同样存在需要最佳的判断，即在$[0,T]$内究竟发送的是 M 个可能信号中的哪一个的问题。这就是 M 元（多元）信号的检测。

在对信号的状态作出判断后，通常还需要获得信号有关参数的信息，如信号振幅、相位和频率等。这就要求在对信号观测的基础上构造最佳估计量。这就是信号的统计估计理论问题。

如果还要求把受到噪声污染的信号波形恢复出来，这就是信号的波形估计。信号的波形估计一般是在线性最小均方误差准则下的一种最佳估计。波形估计可以是当前的，也可以是未来的或过去的，这就是所谓的滤波、预测和平滑。在离散时刻的波形估计又称为信号的状态估计。信号的波形估计或状态估计是信号的滤波理论研究的内容。

前面我们已经对信号的统计检测、估计和滤波作了概略的描述，实际上它们相互之间是密切相关的。如果我们认为信号参量有 M 个可能的取值，则信号参量估计可以看作是 M 元信号的检测问题；信号参量的估计又可看作是信号波形估计的特例；如果信号的参量是随时间变化的，则在信号参量估计概念和方法的基础上，结合信号的运动规律和噪声的动态统计特性，可以实现信号的波形估计或信号的动态状态估计。

1.5 内容编排和建议

我们已经指出，随机信号处理应采用统计信号处理的概念、理论和方法，其理论基础是信号的统计检测、参量的统计估计和信号波形的滤波，主要内容包括最佳处理的概念和理论，最佳处理的实现和性能分析与评估，它们对随机信号处理的理论研究和实际应用具有十分重要的意义。为了便于学习、理解和掌握这些基础理论，本书除第 1 章概论外，由四部分组成，并提出了供读者参考的四点建议。

1. 内容编排

第一部分（第 2 章）重点讨论了随机过程的统计描述和时域、频域的主要统计特性，属于对随机过程内容的扼要复习；简要讨论了随机参量信号的概念和统计特性描述。这部分内容的讨论为后面各章节打下了数学基础。

第二部分（第 3 章、第 4 章）重点论述了信号的统计检测理论和技术，包括信号模型、最佳检测准则、检测系统的结构、检测性能的分析和最佳波形设计等内容。

第三部分(第 5 章、第 6 章)主要讨论了信号的最佳估计理论和算法,包括最佳估计准则,估计量的构造和主要性质,信号波形估计的概念、准则,维纳(Wiener)滤波和卡尔曼(Kalman)滤波算法等内容。

第四部分(第 7 章)将信号的检测理论与估计理论相结合,论述了在干扰背景中信号的恒虚警率(constant false alarm rate,CFAR)处理(又称恒虚警率检测)技术的理论和方法;还简要讨论了信号的非参量型检测和稳健性检测的理论和方法。

2. 四点建议

(1) 建立随机信号应采用统计信号处理方法的概念;对于统计信号处理的含义,即信号的统计描述、统计意义上的最佳处理、性能的统计评估等概念要清楚,思路要清晰。

(2) 掌握扎实的统计信号处理的理论基础,包括信号的统计检测理论、估计理论和滤波理论的基本概念、分析研究问题的基本方法和基本运算。

(3) 研究随机信号的统计处理理论,数学分析是必不可少的内容,建议能从物理的意义上而不仅限于数学公式上加以理解,以提高分析、解决问题的能力。

(4) 选做一定量的习题,以巩固、加深和扩展对所讨论问题的基本概念、基本方法和基本运算的掌握及熟练程度。

以上四条基本建议,供读者阅读本书或相关著作、文献资料时参考。

第 2 章 信号检测与估计理论的基础知识

2.1 引言

在第 1 章中我们已经指出，待处理的信号

$$x(t)=s(t)+n(t),\quad 0\leqslant t\leqslant T$$

或

$$x(t)=s(t;\boldsymbol{\theta})+n(t),\quad 0\leqslant t\leqslant T$$

是一个随机信号。随机信号的基本特点是：虽然随机信号是以不可预见的方式实时产生的，但它的统计特性通常却显得很有规律。这就提供了用其统计特性而不是一些确定性的方程来描述随机信号的依据。当我们处理这些随机信号时，主要的目标是建立它们的信号模型，对它们进行统计描述，研究其统计平均量之间的关系，以及这些统计特性在理论研究和实际应用中的作用。

既然随机信号的统计特性是有规律的，那么这些特性就能够用数学的方法加以描述。这样我们就把随机过程作为随机信号的数学模型，于是随机信号可以用概率论与数理统计和随机过程等数学工具进行统计描述，然后用统计学的方法来处理随机信号。这样做，至少在原理上我们可以研究和发展理论上的最佳信号处理方法，并将其用于评价这些处理方法的性能，进而研究最佳随机信号处理方法的实际应用。

本章将重点讨论作为信号检测与估计理论基础知识的随机变量、随机矢量、随机过程和随机参量信号的主要统计特性，这些内容对于后面章节的讨论是非常有用的。其中的大部分内容可以看作是对这些基本知识的复习，讨论是重点扼要的，然而也有部分内容（如复高斯随机过程、随机参量信号等）需要加以补充或作较深入的论述。

2.2 随机变量、随机矢量及其统计描述

下面扼要介绍随机变量、随机矢量的概念及其统计描述的基本理论和结果。

2.2.1 随机变量的基本概念

随机变量的概念来源于概率论的定义。在概率论中，一个随机试验所有可能出现的结果的全体称为随机试验的样本空间，记为 Ω。试验的某一个结果称为样本点，记为 ζ_k，即 $\Omega=\{\zeta_k\}$。样本空间中的某个子集称为随机事件，简称事件（事件是集合）。设 Ω 是样本空间，$\mathscr{F}$是由 Ω 的一些子集构成的集合，如果它满足以下条件：

（1）$\Omega\in\mathscr{F}$；

（2）若 $A\in\mathscr{F}$，则 A 的补 $\overline{A}\in\mathscr{F}$；

（3）若 $A_n\in\mathscr{F}$，$n=1,2,\cdots$，则 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}A_n\in\mathscr{F}$。

则称 $\mathscr{F}$ 为事件域，又称 σ-域。事件域中的元素就是随机事件。如果这些事件的随机性能够由定义在 $\mathscr{F}$ 上的具有非负性、归一性和可列加性的实值集函数 $P(A)$ 来确定，则称 P 是定义在二元组$(\Omega,\mathscr{F})$上的概率，而称 $P(A)$ 为事件 A 的概率。

至此，我们引进了概率论中的三个基本概念：样本空间 Ω、事件域 $\mathscr{F}$ 和概率 P。它们是描述一个随机试验的三个基本组成部分，我们称这三元序组$(\Omega,\mathscr{F},P)$为概率空间。有了关于概率空间的基本概念，下面我们给出随机变量的定义。

设$(\Omega,\mathscr{F},P)$是一概率空间，$x(\zeta)$，$\zeta\in\Omega$ 是定义在 Ω 上的单值实函数，如果对任一实数 x，集合$\{x(\zeta)\leqslant x\}\in\mathscr{F}$，则称 $x(\zeta)$为$(\Omega,\mathscr{F},P)$上的一个随机变量。随机变量 $x(\zeta)$的定义域为样本空间 Ω，它的值域是实数或直线 R。所以，随机变量 $x(\zeta)$实际上是一个映射，这个映射为每个来自概率空间的结果 ζ 赋予一个实数 x。这种映射必须满足下面两个条件：

（1）对任一 x，集合$\{x(\zeta)\leqslant x\}$是这个概率空间中的一个事件，并有确定的概率 $P\{x(\zeta)\leqslant x\}$；

（2）事件$\{x(\zeta)=\infty\}$和事件$\{x(\zeta)=-\infty\}$的概率等于 0，即

$$P\{x(\zeta)=\infty\}=0,\quad P\{x(\zeta)=-\infty\}=0$$

第二个条件表明，虽然对一些结果我们允许 x 取$+\infty$或$-\infty$，但要求这些结果所构成的集合的概率等于 0。

2.2.2 随机变量的概率密度函数

在事件域 $\mathscr{F}$ 中，组成事件$\{x(\zeta)\leqslant x\}$的元素随 x 的不同取值而变化，因此，事件$\{x(\zeta)\leqslant x\}$的概率 $P\{x(\zeta)\leqslant x\}$取决于 x 的值，用 $F(x)$表示，即

$$F(x)=P\{x(\zeta)\leqslant x\},\quad -\infty<x<\infty \tag{2.2.1}$$

称为随机变量 $x(\zeta)$的一维累积分布函数(cumulative distribution function，CDF)，简称分布函数。随机变量 $x(\zeta)$的分布函数 $F(x)$具有以下主要性质。

（1）$F(x)$是单调不减的函数，即若 $x_1<x_2$，则有

$$F(x_1)\leqslant F(x_2),\quad x_1<x_2 \tag{2.2.2}$$

（2）$F(x)$是右连续的函数，即

$$F(x+0)=F(x) \tag{2.2.3}$$

（3）$F(x)$满足如下关系式：

$$F(-\infty)=\lim_{x\to-\infty}F(x)\overset{\text{def}}{=}0,\quad F(\infty)=\lim_{x\to\infty}F(x)\overset{\text{def}}{=}1 \tag{2.2.4}$$

式中，符号“$\overset{\text{def}}{=}$”代表“定义为”、“表示为”、“记为”等含义(下同)。

设连续随机变量 $x(\zeta)$的一维累积分布函数为 $F(x)$，如果 $F(x)$对 x 的一阶导数存在，则有

$$p(x)\overset{\text{def}}{=}\frac{\mathrm{d}F(x)}{\mathrm{d}x} \tag{2.2.5}$$

式中，$p(x)$称为随机变量 $x(\zeta)$的一维概率密度函数，简称概率密度函数(probability density function，PDF)。随机变量 $x(\zeta)$的概率密度函数 $p(x)$具有以下主要性质。

(1) 根据随机变量 $x(\zeta)$的 $p(x)$与 $F(x)$的关系，有

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} p(u)\mathrm{d}u \tag{2.2.6}$$

(2) 对所有 x，$p(x)$是非负函数，即

$$p(x)\geqslant 0, \quad -\infty<x<+\infty \tag{2.2.7}$$

(3) $p(x)$对 x 的全域积分结果等于 1，一般表示为

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x)\mathrm{d}x = 1 \tag{2.2.8}$$

(4) 随机变量 $x(\zeta)$落在区间$[x_1, x_2]$内的概率为

$$P\{x_1 \leqslant x(\zeta) \leqslant x_2\}=\int_{x_1}^{x_2} p(x)\mathrm{d}x \tag{2.2.9}$$

请读者注意：对于随机变量 $x(\zeta)$的概率密度函数 $p(x)$的表示式，一定要标明 x 的取值区间，但若 x 的取值区间为$-\infty<x<+\infty$时例外，一般不标。例如，$x(\zeta)$是服从高斯分布(Gaussian distribution)，即正态分布(normal distribution)的随机变量时，就属于这种情况。

随机变量 $x(\zeta)$的概率密度函数 $p(x)$是对随机变量统计特性的完整的数学描述。如果区间(x_1, x_2)之差 $\Delta x=x_2-x_1$ 足够小且不变，那么，$p(x)$反映了随机变量 $x(\zeta)$在不同位置但相同大小区间 Δx 内的概率太小，显然，在 $p(x)$峰值附近区间 Δx 内的概率最大。

2.2.3 随机变量的统计平均量

为了完整地描述一个随机变量的统计特性，我们必须知道它的概率密度函数。这在实际中有时是困难的，因此，往往需要得到描述随机变量概率特性的主要表征值，这就是随机变量的数字特征或称矩，它们是随机变量的统计平均量。虽然随机变量的统计平均量的理论计算需要用到概率密度函数，但实际上通常是通过对有限观测数据的估计获得的。下面我们讨论一个随机变量的主要统计平均量。

1. 随机变量的均值

若连续随机变量 $x(\zeta)$的概率密度函数为 $p(x)$，则其统计平均值为

$$\mathrm{E}[x(\zeta)]\stackrel{\mathrm{def}}{=}\mu_x=\int_{-\infty}^{\infty} xp(x)\mathrm{d}x \tag{2.2.10}$$

它是随机变量 $x(\zeta)$取值的统计平均值，简称均值，又称数学期望。

随机变量 $x(\zeta)$的均值的一个重要特性是它的线性特性，即若 a、b 为常数，则

$$\mathrm{E}[ax(\zeta)+b]=a\mu_x+b \tag{2.2.11}$$

如果随机变量 $x(\zeta)$的函数为随机变量 $y(\zeta)=g(x(\zeta))$，则 $y(\zeta)$的均值可由下式得到：

$$\mathrm{E}[y(\zeta)]=\mathrm{E}[g(x(\zeta))]=\int_{-\infty}^{\infty} g(x)p(x)\mathrm{d}x \tag{2.2.12}$$