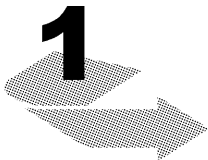


第 1 部分

基础知识



概 述

自 20 世纪 40 年代末维纳(N. Wiener)创立控制理论以来,短短的几十年控制理论已经渗透到各个领域,并伴随着其他科学技术的发展,极大地改变了整个世界。控制理论自身也在创造人类文明中不断向前发展。

机电工业是我国最重要的支柱产业之一,而传统的机电产品正在向机电一体化方向发展。我国科技界普遍认为,机电一体化是用系统工程学的观点和方法,研究在机电系统中如何将机械、微机、信息处理和自动控制技术集成综合应用,以求达到最佳的融合。

机电一体化产品或系统的显著特点是系统控制自动化。机电控制型产品技术含量高,附加值大,在市场上具有很强的竞争优势,形成机电一体化产品的主流。当前国际上机电结合型产品,诸如典型的工业机器人、数控机床、自动导引车等都广泛地应用了控制理论;在高性能的产品中,包括航空航天产品甚至人们日常使用的照相机都已经越来越多地用到了最优控制、自适应控制和智能控制等现代控制理论。

表 1-1 概括了控制理论的历史发展进程。半个世纪以来,控制理论从主要依靠手工计算的经典控制理论发展到依赖电脑的现代控制理论,发展了最优控制、自适应控制、智能控制。智能控制中,学习控制技术从简单的参数学习向更为复杂的结构学习、环境学习和复杂对象学习的方向发展,并发展了神经元网络、模糊逻辑、进化算法、专家系统、混沌控制、鲁棒控制与 H_∞ 控制等技术。同时,还发展了计算机辅助控制系统设计(computer aided control system design, CACSD)工具,使控制理论在工程上的应用更加方便。

各种控制理论都有其发展的历史背景及相互联系,同时也都有其局限和不足。例如,经典控制理论对线性定常系统有完善的控制理论和良好的控制效果,但对多输入-多输出、时变系统、非线性系统难以胜任;最优控制理论建立在受控对象严格而准确的数学模型基础上,否则控制效果会大打折扣,而准确的数学模型在工程上是很难实际得到的;模糊控制需要提高稳态精度,寻找一般性稳态分析和系统化设计方法;神经网络控制需要加速算法的收敛速度,提高神经网络的适应能力。各种控制理论分支还需要互相借鉴、不断发展。

表 1-1 控制理论的发展

年 代	控 制 理 论	数 学 基 础	特 点
1946—1955	反馈理论 伺服控制理论	Laplace 变换 传递函数 过渡过程理论 稳定性理论	经典控制理论(手工计算的局限); 着眼于系统的外部联系; 重点为单输入-单输出的线性定常系统 (连续系统和离散系统);
1955—1960	采样控制理论 非线性控制理论	z 变换 相平面理论 噪声和滤波理论	以传递函数为基础; 除时域分析外,以频率法、根轨迹法为 主要分析方法; 设计时常用试探法
1960—1965	状态空间理论 能控性和能观性理论 最优控制理论	矢量微分方程理论 矩阵理论 集合论 变分理论 极值搜索方法	现代控制理论(伴随计算机的发展); 多输入-多输出的时变系统(连续系统 和离散系统);
1965 年以后	自适应控制理论 自学习控制理论 随机控制理论 智能控制理论 神经网络控制理论 模糊控制理论 混沌学 遗传算法 H_∞ 空间理论 机器人控制理论 仿生学理论	随机过程理论 数理规划理论 运筹学 系统工程理论 图像识别理论 复值函数理论	以状态空间理论为基础; 以时域分析为主; 着眼于系统的状态及其内部联系(哲学 上的突破); 交叉学科的特点; 带有生物的特征; 设计时采用严格的数学规律

控制理论的发展需要增加控制理论体系的开放性,汲取其他学科的先进成果。为了满足人们更高的控制要求,控制理论需要对当代多种前沿学科、多种先进技术和科学方法高度综合集成。例如,已有初步研究的混沌控制、可拓控制以及免疫优化算法等。

控制理论的发展需要开拓新视角、广义模型化、多目标优化(例如仿人智能控制器),以取得理想的控制效果。另外,利用数学模型和知识模型集成的广义模型进行定量与定性相结合的系统分析,已引起不少学者的注意。对一个动态系统设计控制器时,通常有多个相互矛盾的目标需要考虑,如何分析和协调这些目标,探索多目标优化的数字化解决方案

式以达到最优设计,成为近年来的重要课题之一。

混合式控制理论也成为控制理论发展的一个热点。以一种控制理论为主,结合其他控制理论优点构成复合式控制往往可以取得最佳的控制效果。比如,模糊控制与 PID 控制相结合的模糊 PID 控制,与自适应控制相结合的模糊自适应控制,与神经网络相结合的模糊神经网络控制,以及鲁棒模糊控制、鲁棒神经网络控制、专家自适应 PID 控制等。这些复合式控制都显示出旺盛的生命力,代表了一种发展趋势。除了上述复合控制外,多模态控制、多模型自适应控制也是一种集多种控制优点于一身的混合控制。多模态控制指多个控制器存在于同一控制系统中,在适当时候切换工作状态的控制器;多模型自适应控制利用多模型来逼近系统的动态性能,以期能对复杂系统达到更好的控制精度、跟踪速度和稳定性。

控制理论在发展过程中一方面走向高度分化,不断产生新的理论分支;另一方面走向高度综合,产生了多模态控制、多模型自适应控制等理论。从单项技术、复合式技术到技术群,从基本的反馈到自适应、自学习、自组织结构,控制理论取得了很大的发展。

控制问题可归纳为以下 4 类:

(1) 确定性控制问题。在确定性控制问题中,系统和扰动的模型、参数及初始条件均是确定的、已知的。其最优控制是综合一个控制过程或序列,使某一指定的性能指标函数达到最小。

(2) 随机控制问题。在随机控制问题中,系统模型参数及初始条件是确定的、已知的,而扰动变量及其初始状态是统计特性已知的随机序列。其最优控制是综合一个控制过程或序列,使某一指定的性能指标函数达到最小。

(3) 自适应控制问题。在自适应控制问题中,系统模型参数及初始条件是不完全确定的,扰动变量及其初始状态统计特性也是未知的。其最优控制是综合一个控制过程或序列,使某一指定的性能指标函数达到最小。

(4) 智能控制问题。前 3 类控制问题对象的结构是已知的,而在智能控制问题中,系统结构和参数均未知,很难建立有效的数学模型,现阶段借鉴人工智能特点,采用专家系统、模糊控制、人工神经网络控制等方法解决。

本教材在学习了经典控制理论的基础上,采用现代控制理论方法,介绍了各类控制问题的主要内容。

2

控制系统的状态空间法

本章首先通过一些简单的机电系统数学模型的列写,选定并得到系统状态变量及状态空间表达的基本形式。然后,分别介绍如何通过描述系统的微分方程、传递函数、方块图,以及直接从系统机理出发建立系统状态空间的表达式。同时介绍控制系统中经常用到的状态矢量的线性变换。

2.1 状态变量及状态空间表达

首先看描述以下机电系统数学模型的例子。

例 2-1 在图 2-1 所示系统中, R 为电阻, L 为电感, C 为电容, $i_L(t)$ 为流过电感的电流, $u_C(t)$ 为电容两端的电压, $u_i(t)$ 和 $u_o(t)$ 分别为输入和输出电压。

解 根据基尔霍夫定律,该系统可表示为如下微分方程组:

$$\begin{cases} u_i(t) = Ri_L(t) + L \frac{di_L(t)}{dt} + u_C(t) \\ i_L(t) = C \frac{du_C(t)}{dt} \end{cases}$$

$$u_o(t) = u_C(t)$$

即

$$\begin{cases} \frac{di_L(t)}{dt} = -\frac{R}{L}i_L(t) - \frac{1}{L}u_C(t) + \frac{1}{L}u_i(t) \\ \frac{du_C(t)}{dt} = \frac{1}{C}i_L(t) \end{cases}$$

$$u_o(t) = u_C(t)$$

也可表示为

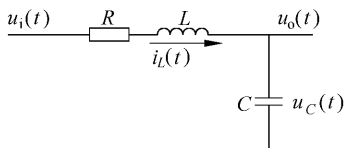


图 2-1 电路网络(一)

$$\begin{bmatrix} \dot{i} \\ \dot{u}_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_L \\ u_C \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} u_i$$

$$u_o = [0 \quad 1] \begin{bmatrix} i_L \\ u_C \end{bmatrix}$$

例 2-2 在图 2-2 所示系统中, m 为质量, D 为黏性阻尼系数, k 为弹性刚度, $f_i(t)$ 为输入力, $x_o(t)$ 为输出位移。

解 根据牛顿第二定律, 该系统可表示为如下微分方程组:

$$\begin{cases} v_o(t) = \frac{dx_o(t)}{dt} \\ f_i(t) - Dv_o(t) - kx_o(t) = m \frac{dv_o(t)}{dt} \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} \frac{dx_o(t)}{dt} = v_o(t) \\ \frac{dv_o(t)}{dt} = -\frac{k}{m}x_o(t) - \frac{D}{m}v_o(t) + \frac{1}{m}f_i(t) \end{cases}$$

也可表示为

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_o(t) \\ \dot{v}_o(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{D}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_o(t) \\ v_o(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} f_i(t)$$

$$x_o(t) = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} x_o(t) \\ v_o(t) \end{bmatrix}$$

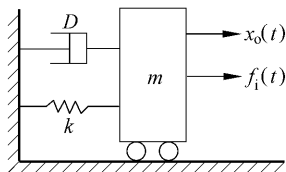


图 2-2 质量-弹簧-阻尼系统(一)

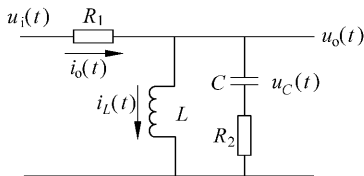


图 2-3 电路网络(二)

例 2-3 在图 2-3 所示系统中, R_1 和 R_2 为电阻, L 为电感, C 为电容, $i_L(t)$ 为流过电感的电流, $u_C(t)$ 为电容两端的电压, $u_i(t)$ 为输入电压, $i_o(t)$ 为输出电流, $u_o(t)$ 为输出电压。

解 根据基尔霍夫定律, 该系统可表示为

$$\begin{cases} u_i(t) = R_1 i_o(t) + L \frac{di_L(t)}{dt} \\ u_i(t) = R_1 i_o(t) + u_C(t) + [i_o(t) - i_L(t)]R_2 \\ i_o(t) - i_L(t) = C \frac{du_C(t)}{dt} \\ u_o(t) = u_C(t) + [i_o(t) - i_L(t)]R_2 \end{cases}$$

则

$$\begin{cases} \frac{di_L(t)}{dt} = -\frac{R_1 R_2}{L(R_1 + R_2)} i_L(t) + \frac{R_1}{L(R_1 + R_2)} u_C(t) + \frac{R_2}{L(R_1 + R_2)} u_i(t) \\ \frac{du_C(t)}{dt} = -\frac{R_1}{C(R_1 + R_2)} i_L(t) - \frac{1}{C(R_1 + R_2)} u_C(t) + \frac{1}{C(R_1 + R_2)} u_i(t) \end{cases}$$

$$i_o(t) = \frac{R_2}{R_1 + R_2} i_L(t) - \frac{1}{R_1 + R_2} u_C(t) + \frac{1}{R_1 + R_2} u_i(t)$$

$$u_o(t) = -\frac{R_1 R_2 C}{C(R_1 + R_2)} i_L(t) - \frac{R_1 C}{C(R_1 + R_2)} u_C(t) + \frac{R_2 C}{C(R_1 + R_2)} u_i(t)$$

也可表示为

$$\begin{bmatrix} \dot{i}_L \\ \dot{u}_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R_1 R_2}{L(R_1 + R_2)} & \frac{R_1}{L(R_1 + R_2)} \\ -\frac{R_1}{C(R_1 + R_2)} & -\frac{1}{C(R_1 + R_2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_L \\ u_C \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{R_2}{L(R_1 + R_2)} \\ \frac{1}{C(R_1 + R_2)} \end{bmatrix} u_i$$

$$\begin{bmatrix} i_o \\ u_o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{R_2}{R_1 + R_2} & -\frac{1}{R_1 + R_2} \\ -\frac{R_1 R_2 C}{C(R_1 + R_2)} & -\frac{R_1 C}{C(R_1 + R_2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_L \\ u_C \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1 + R_2} \\ \frac{R_2 C}{C(R_1 + R_2)} \end{bmatrix} u_i$$

例 2-4 在图 2-4 所示系统中, m_1, m_2 为质量, D_1, D_2 为黏性阻尼系数, k_1, k_2, k_3 为弹性刚度, a, b, c 为长度, $f_i(t)$ 为输入外力, $x_o(t)$ 为输出位移。

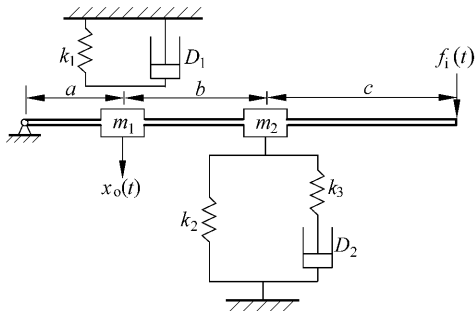


图 2-4 质量-弹簧-阻尼系统(二)

解 设 $x_1 = x_0$, $x_2 = \dot{x}_1$, k_3 和 D_2 之间的位移为 x_3 , 根据力和力矩平衡关系, 得

$$\begin{cases} D_2 \dot{x}_3 = k_3 \left(\frac{a+b}{a} x_1 - x_3 \right) \\ f_i (a+b+c) = (m_1 \dot{x}_2 + D_1 x_2 + k_1 x_1) a \\ \quad + \left[m_2 \frac{a+b}{a} \dot{x}_2 + k_2 \frac{a+b}{a} x_1 + k_3 \left(\frac{a+b}{a} x_1 - x_3 \right) \right] (a+b) \end{cases}$$

整理后, 得

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\frac{a^2 k_1 + (a+b)^2 (k_2 + k_3)}{a^2 m_1 + (a+b)^2 m_2} x_1 - \frac{a^2 D_1}{a^2 m_1 + (a+b)^2 m_2} x_2 \\ \quad + \frac{a(a+b)k_3}{a^2 m_1 + (a+b)^2 m_2} x_3 + \frac{a(a+b+c)}{a^2 m_1 + (a+b)^2 m_2} f_i \\ x_3 = \frac{k_3}{D_2} \frac{a+b}{a} x_1 - \frac{k_3}{D_2} x_3 \end{cases}$$

$$x_0 = x_1$$

即

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{a^2 k_1 + (a+b)^2 (k_2 + k_3)}{a^2 m_1 + (a+b)^2 m_2} & -\frac{a^2 D_1}{a^2 m_1 + (a+b)^2 m_2} & \frac{a(a+b)k_3}{a^2 m_1 + (a+b)^2 m_2} \\ \frac{k_3(a+b)}{D_2 a} & 0 & -\frac{k_3}{D_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{a(a+b+c)}{a^2 m_1 + (a+b)^2 m_2} \\ 0 \end{bmatrix} f_i$$

$$x_0 = [1 \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

综上, 状态空间方程可表示成
状态方程:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu} \quad (2.1)$$

输出方程:

$$\mathbf{y} = \mathbf{Cx} + \mathbf{Du} \quad (2.2)$$

式中,

$$\mathbf{x} = [x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_n]^T \quad n \text{ 维状态矢量}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad n \times n \text{ 维系统状态系数矩阵}$$

$$u = [u_1 \quad u_2 \quad \cdots \quad u_r]^T \quad r \text{ 维控制矢量}$$

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1r} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nr} \end{bmatrix} \quad n \times r \text{ 维系统控制系数矩阵}$$

$$y = [y_1 \quad y_2 \quad \cdots \quad y_m]^T \quad m \text{ 维输出矢量}$$

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mn} \end{bmatrix} \quad m \times n \text{ 维输出状态系数矩阵}$$

$$D = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1r} \\ d_{21} & d_{22} & \cdots & d_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ d_{m1} & d_{m2} & \cdots & d_{mr} \end{bmatrix} \quad m \times r \text{ 维输出控制系数矩阵}$$

这里,所谓状态方程是由系统状态变量构成的一阶微分方程组;状态可定义为信息的集合;状态变量是足以完全表征系统运动行为的最小个数的一组变量,状态变量相互独立,但系统对于状态变量的选择不唯一。系统信号传递方块图如图 2-5 所示。

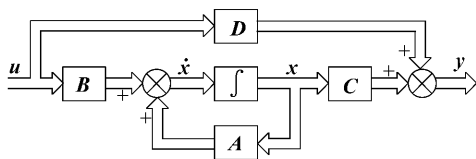


图 2-5 系统信号传递方块图

与连续系统类似,也可写出一阶差分方程组的离散系统状态方程和输出方程。

例 2-5 某城市每年从市区流向郊区的人口与当年市区人口之比为 α , 每年从郊区流向市区的人口与当年郊区人口之比为 β , 人口的年自然增长率为 γ 。记第 k 年的市区人口为 $x_1(k)$, 郊区人口为 $x_2(k)$; 户籍管理统计市区人口记为 $y_1(k)$, 郊区人口记为 $y_2(k)$, 则有

$$x_1(k+1) - x_1(k) = \gamma x_1(k) - \alpha x_1(k) + \beta x_2(k)$$

$$x_2(k+1) - x_2(k) = \gamma x_2(k) + \alpha x_1(k) - \beta x_2(k)$$

$$y_1(k) = x_1(k)$$

$$y_2(k) = x_2(k)$$

整理,得

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \alpha + \gamma & \beta \\ \alpha & 1 - \beta + \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y_1(k) \\ y_2(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}$$

线性定常离散系统的状态空间表达式为

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{G}\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}\mathbf{u}(k) \\ \mathbf{y}(k) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(k) + \mathbf{D}\mathbf{u}(k) \end{aligned} \quad (2.3)$$

式中, $\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{y}$ 分别表示 n 维状态列向量、 r 维输入列向量和 m 维输出列向量; $\mathbf{G}$ 是 $n \times n$ 维矩阵, 称为系统状态矩阵; $\mathbf{H}$ 是 $n \times r$ 维矩阵, 称为输入矩阵或驱动矩阵; $\mathbf{C}$ 是 $m \times n$ 维矩阵, 称为输出状态矩阵; $\mathbf{D}$ 是 $m \times r$ 维矩阵, 称为直传矩阵或传输矩阵。式(2.3)所代表的离散系统可用图 2-6 表示。

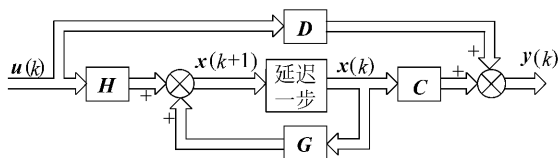


图 2-6 线性定常离散系统的状态空间模型

2.2 状态空间表达式的建立

2.2.1 由高阶微分方程建立状态方程

系统的数学模型可以相互转换。下面依次介绍不同数学模型形式转换成状态空间表达式的方法。

1. 输入项中不包含输入函数的导数

高阶微分方程可由下式表达:

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1\dot{y} + a_0y = bu \quad (2.4)$$

选择状态变量

$$x_1 = y$$

$$x_2 = \dot{y}$$

$$\begin{aligned}
 x_3 &= \ddot{y} \\
 &\vdots \\
 x_{n-1} &= y^{(n-2)} \\
 x_n &= y^{(n-1)}
 \end{aligned}$$

则有

$$\left. \begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= x_2 \\
 \dot{x}_2 &= x_3 \\
 &\vdots \\
 \dot{x}_{n-1} &= x_n \\
 \dot{x}_n &= -a_0 x_1 - a_1 x_2 - \cdots - a_{n-1} x_n + bu
 \end{aligned} \right\} \quad (2.5)$$

即

$$\left. \begin{aligned}
 \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b \end{bmatrix} u \\
 y &= [1 \quad 0 \quad \cdots \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix}
 \end{aligned} \right\} \quad (2.6)$$

例 2-6 已知 $\dddot{y} + 6\ddot{y} + 11\dot{y} + 5y = 4u$, 试建立系统状态方程。

解 依式(2.6)可直接写出

$$\left\{ \begin{aligned}
 \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -5 & -11 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} u \\
 y &= [1 \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \right.$$

2. 输入项中包含输入函数的导数

高阶微分方程可由下式表达：

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1\dot{y} + a_0y = b_n u^{(n)} + b_{n-1}u^{(n-1)} + \cdots + b_1\dot{u} + b_0u \quad (2.7)$$

选择状态变量

$$x_1 = y - \beta_0 u$$

$$x_2 = \dot{y} - \beta_0 \dot{u} - \beta_1 u$$

$$x_3 = \ddot{y} - \beta_0 \ddot{u} - \beta_1 \dot{u} - \beta_2 u$$

$$\vdots$$

$$x_n = y^{(n-1)} - \beta_0 u^{(n-1)} - \beta_1 u^{(n-2)} - \cdots - \beta_{n-2} \dot{u} - \beta_{n-1} u$$

式中，

$$\begin{cases} \beta_0 = b_n \\ \beta_1 = b_{n-1} - a_{n-1}\beta_0 \\ \beta_2 = b_{n-2} - a_{n-1}\beta_1 - a_{n-2}\beta_0 \\ \vdots \\ \beta_n = b_0 - a_{n-1}\beta_{n-1} - a_{n-2}\beta_{n-2} - \cdots - a_0\beta_0 \end{cases}$$

则有

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_{n-1} \\ \beta_n \end{bmatrix} u \\ y &= [1 \quad 0 \quad 0 \quad \cdots \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \beta_0 u \end{aligned} \quad (2.8)$$

例 2-7 已知 $\ddot{y} + 18\dot{y} + 192y = 160\dot{u} + 640u$ ，试建立系统状态方程。

解 对照以上步骤，可得

$$a_2 = 18, \quad a_1 = 192, \quad a_0 = 640$$

$$b_3 = 0, \quad b_2 = 0, \quad b_1 = 160, \quad b_0 = 640$$

$$\beta_0 = 0, \quad \beta_1 = 0, \quad \beta_2 = 160, \quad \beta_3 = b_0 - a_2\beta_2 = -2240$$

则

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -640 & -192 & -18 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 160 \\ -2240 \end{bmatrix} u \\ y = [1 \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \end{cases}$$

2.2.2 由传递函数建立状态方程

1. 间接法

传递函数可由下式表达

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0} \quad (2.9)$$

对式(2.9)进行拉氏反变换,得到输入项中包含输入函数的导数的高阶微分方程形式,即

$$y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 \dot{y} + a_0 y = b_n u^{(n)} + b_{n-1} u^{(n-1)} + \cdots + b_1 \dot{u} + b_0 u \quad (2.10)$$

然后按照上节方法进行。

2. 直接法

传递函数可由下式表达:

$$\begin{aligned} \frac{Y(s)}{U(s)} &= \frac{b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0} \\ &= \frac{b'_{n-1} s^{n-1} + \cdots + b'_1 s + b'_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0} + b_n \end{aligned} \quad (2.11)$$

选 $X_1(s) = \frac{1}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0} U(s)$, $X_2(s) = sX_1(s)$, $\cdots$, $X_n(s) = sX_{n-1}(s)$, 则有

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & & 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \\ \mathbf{C} &= [b'_0 \quad b'_1 \quad \cdots \quad b'_{n-1}], \quad \mathbf{D} = b_n \end{aligned} \quad (2.12)$$

3. 部分分式法

传递函数首先展开成部分分式形式,可由下式表达:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{k_1}{s-\lambda_1} + \frac{k_2}{s-\lambda_2} + \cdots + \frac{k_n}{s-\lambda_n} \quad (2.13)$$

选择

$$X_1(s) = \frac{k_1}{s-\lambda_1} U(s)$$

$$X_2(s) = \frac{k_2}{s-\lambda_2} U(s)$$

$$\vdots$$

$$X_n(s) = \frac{k_n}{s-\lambda_n} U(s)$$

进行拉氏反变换,得

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1 &= \lambda_1 x_1 + k_1 u \\ \dot{x}_2 &= \lambda_2 x_2 + k_2 u \\ \dot{x}_3 &= \lambda_3 x_3 + k_3 u \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= \lambda_n x_n + k_n u \end{aligned} \right\} \quad (2.14)$$

则有

$$\left. \begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_{n-1} \\ k_n \end{bmatrix} u \\ y &= [1 \quad 1 \quad \cdots \quad 1] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (2.15)$$

例 2-8 某系统传递函数为

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{6}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6}$$

试采用部分分式法求出系统状态方程表达式。

$$\begin{aligned}
 \text{解} \quad \frac{Y(s)}{U(s)} &= \frac{6}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6} \\
 &= \frac{6}{(s+1)(s+2)(s+3)} \\
 &= \frac{3}{s-(-1)} + \frac{-6}{s-(-2)} + \frac{3}{s-(-3)}
 \end{aligned}$$

则

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ -6 \\ 3 \end{bmatrix} u \\ y = [1 \quad 1 \quad 1] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \end{cases}$$

MATLAB 控制系统工具箱中提供了由传递函数转换成状态空间方程的函数,其调用格式为

$$[A, B, C, D] = \text{tf2ss}(\text{num}, \text{den})$$

式中, A, B, C, D 分别为状态空间表达的各个系数矩阵; num, den 分别为传递函数分子和分母多项式系数向量。

例 2-9 对于具有下列传递函数的系统,试将其转换为状态空间方程表达。

$$\frac{X_o(s)}{U(s)} = \frac{s^2 + 2s + 3}{s^3 + 3s^2 + 3s + 1}$$

解 分子分母表示为

$$\text{num} = [0, 1, 2, 3]$$

$$\text{den} = [1, 3, 3, 1]$$

采用命令

$$[A, B, C, D] = \text{tf2ss}(\text{num}, \text{den})$$

运算显示结果为:

A =

$$\begin{bmatrix} -3 & -3 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

B =

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$C =$

1 2 3

$D =$

0

即

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -3 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y = [1 \quad 2 \quad 3] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \end{cases}$$

2.2.3 由方块图建立状态方程

以下面图 2-7 为例说明该方法。

例 2-10 试将图 2-7 所示系统化成状态方程表达。

解 将每个方块单元都化为 $\frac{k_i}{s-\lambda_i}$ 的形式, 分别将每个含 $\frac{k_i}{s-\lambda_i}$ 的方块后的变量都设为状态, 则图 2-7 所示的系统方块图变为图 2-8 的形式。

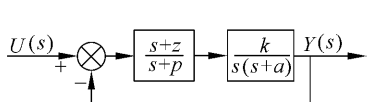


图 2-7 系统方块图(一)

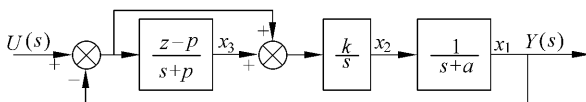


图 2-8 系统方块图(二)

根据图 2-8, 有

$$\begin{cases} X_1(s) = \frac{1}{s+a} X_2(s) \\ X_2(s) = \frac{k}{s} X_3(s) + \frac{k}{s} [U(s) - X_1(s)] \\ X_3(s) = \frac{z-p}{s+p} [U(s) - X_1(s)] \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} sX_1(s) = -aX_1(s) + X_2(s) \\ sX_2(s) = -kX_1(s) + kX_3(s) + kU(s) \\ sX_3(s) = (p-z)X_1(s) - pX_3(s) + (z-p)U(s) \end{cases}$$

进行拉氏反变换,得

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a & 1 & 0 \\ -k & 0 & k \\ p-z & 0 & -p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ k \\ z-p \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \end{cases}$$

例 2-11 图 2-9 所示为汽车在凹凸不平路上行驶时承载系统高低方向的简化力学模型,路面的高低变化为激励源,由此造成汽车的运动和轮胎受力。试求: $x_1(t)$ 作为输入、汽车质量的垂直位移和汽车轮胎的垂直受力作为输出的状态空间方程及输出方程。

解 设汽车质量的垂直位移为 $x_o(t)$,汽车轮胎的垂直受力为 $f_s(t)$ 。依题意,系统可表达为如图 2-10 所示的方块图。图 2-10 又可等效为图 2-11 所示的方块图。由图 2-11,有

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{k_1}{M_1}x_1 - \frac{D}{M_1}x_2 + \frac{k_1}{M_1}x_3 + \frac{D}{M_1}x_4$$

$$\dot{x}_3 = x_4$$

$$\dot{x}_4 = \frac{k_1}{M_2}x_1 + \frac{D}{M_2}x_2 - \frac{k_1+k_2}{M_2}x_3 - \frac{D}{M_2}x_4 + \frac{k_2}{M_2}x_i$$

$$x_o = x_1$$

$$f_s = -k_2x_3 + k_2x_i$$

设 $u = x_i, y_1 = x_o, y_2 = f_s$, 则

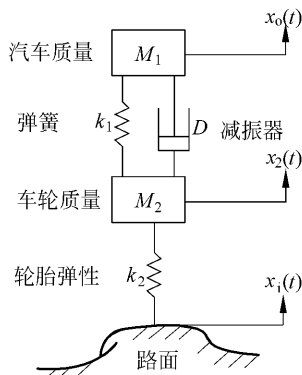


图 2-9 汽车行驶时承载系统简化力学模型

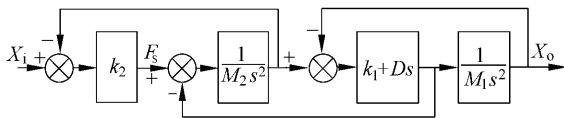


图 2-10 系统方块图(三)

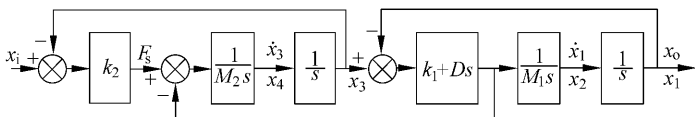


图 2-11 等效系统方块图

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{k_1}{M_1} & -\frac{D}{M_1} & \frac{k_1}{M_1} & \frac{D}{M_1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k_1}{M_2} & \frac{D}{M_2} & -\frac{k_1+k_2}{M_2} & -\frac{D}{M_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{k_2}{M_2} \end{bmatrix} u$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -k_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ k_2 \end{bmatrix} u$$

可见,首先将高阶方块图化为 $\frac{k_i}{s-\lambda_i}$ 的形式,将每个含 $\frac{k_i}{s-\lambda_i}$ 的方块后的变量设为状态,按照方块表示的关系列方程,自然形成一阶微分方程组。

2.2.4 由系统机理出发建立状态方程

下面举例说明。

例 2-12 在图 2-12 中, M_1 和 M_2 为质量, D_1 和 D_2 为黏性阻尼系数, k_1 和 k_2 为弹性刚度, $f_i(t)$ 为输入外力, $y_1(t)$ 和 $y_2(t)$ 为输出位移。

解 依题意,有

$$f_i - k_2(y_2 - y_1) - D_2(\dot{y}_2 - \dot{y}_1) = M_2 \ddot{y}_2$$

$$k_2(y_2 - y_1) + D_2(\dot{y}_2 - \dot{y}_1) - k_1 y_1 - D_1 \dot{y}_1 = M_1 \ddot{y}_1$$

设 $x_1 = y_1, x_2 = y_2, x_3 = \dot{y}_1, x_4 = \dot{y}_2, u = f_i$, 则

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{k_1+k_2}{M_1} & \frac{k_2}{M_1} & -\frac{D_1+D_2}{M_1} & \frac{D_2}{M_1} \\ \frac{k_2}{M_2} & -\frac{k_2}{M_2} & \frac{D_2}{M_2} & -\frac{D_2}{M_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{M_2} \end{bmatrix} u$$

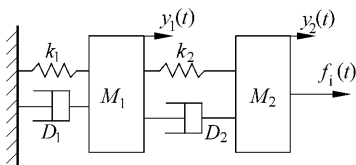


图 2-12 质量-弹簧-阻尼系统(三)

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

例 2-13 在图 2-13 中, J 为转动惯量, D 为转动黏性阻尼系数, k 为扭转弹性刚度, $T_i(t)$ 为输入力矩, $\theta_o(t)$ 为输出转角。

解 依题意, 有

$$T_i - k\theta_o - D\dot{\theta}_o = J\ddot{\theta}_o$$

设 $x_1 = \theta_o$, $x_2 = \dot{\theta}_o$, $y = \theta_o$, 则

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{J} & -\frac{D}{J} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{J} \end{bmatrix} T_i$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

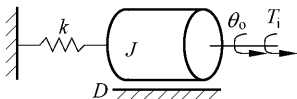


图 2-13 转动惯量-阻尼-扭簧系统

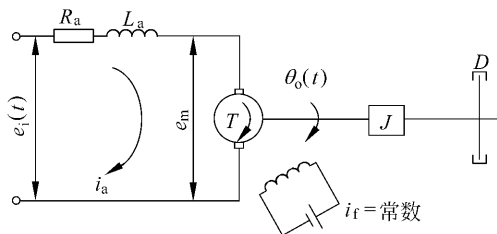


图 2-14 电枢控制式直流电动机

例 2-14 图 2-14 所示为电枢控制式直流电动机, D 为转动黏性阻尼系数, R_a 为电枢电阻, L_a 为电枢电感, $e_i(t)$ 为电枢控制式直流电动机输入电压, $\theta_o(t)$ 为电动机输出转角。

解 依题意, 有

$$e_i(t) = R_a i_a(t) + L_a \dot{i}_a(t) + K_e \dot{\theta}_o$$

$$K_T i_a(t) = J\ddot{\theta}_o + D\dot{\theta}_o$$

其中, K_e 是电动机反电势系数; K_T 是电动机力矩系数。设 $x_1 = i_a(t)$, $x_2 = \dot{\theta}_o(t)$, $x_3 = \theta_o(t)$, $u_i = e_i(t)$, 则

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R_a}{L_a} & -\frac{K_e}{L_a} & 0 \\ \frac{K_T}{J} & -\frac{D}{J} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L_a} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u_i \\ y = [0 \quad 0 \quad 1] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \end{cases}$$

通常,对于电路网络,设电容上的电压和电感上的电流为状态变量可以直接得到一阶微分方程,较容易得到状态空间方程;类似地,对于机械质量-弹簧-阻尼系统,设位移和速度为状态变量可以直接得到一阶微分方程,较容易得到状态空间方程。

当已知二阶系统的无阻尼自振角频率和阻尼比时,MATLAB 控制系统工具箱中提供了如下调用格式来生成状态空间方程:

$$[A,B,C,D] = \text{ord2}(\text{wn},z)$$

式中,wn,z 分别表示无阻尼自振角频率和阻尼比。

例 2-15 对于具有传递函数

$$\frac{X_o(s)}{U(s)} = \frac{10\,000}{s^2 + 2 \times 0.5 \times 100s + 100^2}$$

的系统,采用命令

$$[A,B,C,D] = \text{ord2}(100,0.5)$$

运行显示结果为:

A =

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -10\,000 & -100 \end{bmatrix}$$

B =

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

C =

$$[1 \quad 0]$$

D =

$$0$$

即