

第 1 章

随机事件及其概率

1.1 基本要求

1. 了解样本空间的概念,理解随机事件的概念,重点掌握事件的关系与运算.
2. 理解概率与条件概率的概念,掌握概率的基本性质,会运用与古典概型、几何概型计算有关的概率.
3. 掌握概率的加法公式、乘法公式、全概率公式及贝叶斯(Bayes)公式.
4. 理解事件独立性的概念,掌握利用事件独立性计算有关概率的各种方法;理解独立重复试验的概念,掌握运用二项概型计算有关的概率的各种方法.

1.2 内容简介

1.2.1 样本空间与随机事件

1. 随机现象

在一定条件下,具有多种可能的结果的现象称为随机现象.这类现象的一个共同点是,事先不能预言多种可能的结果中究竟出现哪一种.

2. 随机试验与随机事件

如果一个试验满足下面的三个条件:

- (1) 在相同的条件下可以重复进行;
- (2) 试验都有哪些可能的结果是明确的;
- (3) 每次试验的具体结果在试验前是无法得知的.

那么就称它是一个随机试验,以后简称为试验,一般用字母 E 表示.

在随机试验中,每一个可能出现的不可分解的最简单的结果称为随机试验的基本事

件或样本点,用 ω 表示;而由全体基本事件构成的集合称为基本事件空间或样本空间,记为 Ω .

所谓随机事件是样本空间 Ω 的一个子集,随机事件简称为事件,用字母 A, B, C 等表示.因此,某个事件 A 发生当且仅当这个子集中的一个样本点 ω 发生,记为 $\omega \in A$.

1.2.2 事件之间的关系与运算

1. 事件的包含关系与等价关系

设 A, B 为两个事件.如果 A 中的每一个样本点都属于 B ,那么称事件 B 包含事件 A ,或称事件 A 包含于事件 B ,记为 $A \subset B$ 或 $B \supset A$.

如果 $A \supset B$ 与 $B \supset A$ 同时成立,那么称事件 A 与事件 B 等价或相等,记为 $A = B$.

2. 事件的并与交

设 A, B 为两个事件.将至少属于 A 或 B 中一个的所有样本点构成的集合称为事件 A 与 B 的并或和,记为 $A \cup B$ 或 $A + B$.

设 A, B 为两个事件.将同时属于 A 及 B 的所有样本点构成的集合称为事件 A 与 B 的交或积,记为 $A \cap B$ 或 $A \cdot B$,有时也简记为 AB .

3. 事件的互不相容关系与事件的逆

设 A, B 为两个事件,如果 $A \cdot B = \emptyset$,那么称事件 A 与 B 是互不相容的(或互斥的).

事件的互不相容关系也可以推广到多于两个事件的情形.即,如果 $A_i \cdot A_j = \emptyset (i \neq j; i, j = 1, 2, \dots, n)$,这时称事件 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 是互不相容的(或互斥的).

对于事件 A ,把不包含在 A 中的所有样本点构成的集合称为事件 A 的逆(或 A 的对立事件),记为 $\bar{A}$,并规定它是事件的基本运算之一.

在一次试验中,事件 A 与 $\bar{A}$ 不会同时发生(即 $A \cdot \bar{A} = \emptyset$,称它们具有互斥性),而且 A 与 $\bar{A}$ 至少有一个发生(即 $A + \bar{A} = \Omega$,称它们具有完全性).这就是说,事件 A 与 $\bar{A}$ 满足

$$\begin{cases} A\bar{A} = \emptyset, \\ A + \bar{A} = \Omega. \end{cases}$$

有了事件的三种基本运算,就可以定义事件的其他一些运算.例如,称事件 $A\bar{B}$ 为事件 A 与 B 的差,记为 $A - B$.可见,事件 $A - B$ 是由包含于 A 而不包含于 B 的所有样本点构成的集合.

事件的关系和运算如图1.1所示.

事件的运算主要满足下列规则:

- (1) 交换律: $A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A$;
- (2) 结合律: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C), (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$;
- (3) 分配律: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C), A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$;

(4) 德摩根(De Morgan)律: $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$, $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

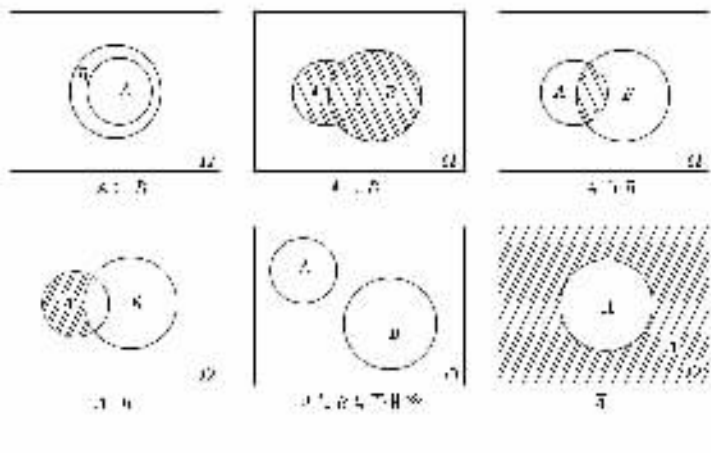


图 1.1

德摩根律可以推广到任意多个事件の場合.

1.2.3 概率的定义与性质

1. 概率的公理化定义

定义 设 E 是一个随机试验, Ω 为它的样本空间, 以 E 中所有的随机事件组成的集合为定义域, 定义一个函数 $P(A)$ (其中 A 为任一随机事件), 且 $P(A)$ 满足以下三条公理, 则称函数 $P(A)$ 为事件 A 的概率.

公理 1 $0 \leq P(A) \leq 1$.

公理 2 $P(\Omega) = 1$.

公理 3 若 $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ 两两互斥, 则

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i).$$

2. 概率的统计定义

定义 在一组不变的条件 S 下, 独立地重复做 n 次试验. 设 μ 是 n 次试验中事件 A 发生的次数, 当试验次数 n 很大时, 如果 A 的频率 $f_n(A)$ 稳定地在某一数值 p 附近摆动; 而且一般说来随着试验次数增多, 这种摆动的幅度会越来越小, 则称数值 p 为事件 A 在条件组 S 下发生的概率. 记作

$$P(A) = p.$$

1.2.4 古典概型

如果随机试验具有特性:

- (1) 试验的结果是有限个;
- (2) 每个结果出现的可能性是相同的.

则称此随机试验为古典概型随机试验.

定义 设古典概型随机试验的基本事件空间由 n 个基本事件组成, 即 $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$. 如果事件 A 是由上述 n 个事件中的 m 个组成, 则称事件 A 发生的概率为

$$P(A) = \frac{m}{n}. \quad (1.1)$$

所谓古典概型就是利用关系式(1.1)来讨论事件发生的概率的数学模型.

1.2.5 几何概型

如果随机试验具有特性:

- (1) 试验的结果是无限且不可列的;
- (2) 每个结果出现的可能性是均匀的.

则称此随机试验为几何型随机试验. 在几何型随机试验中, 通过几何度量(长度、面积、体积等)来计算事件出现的可能性.

定义 设 E 为几何型的随机试验, 其基本事件空间中的所有基本事件可以用一个有界区域来描述, 而其中一部分区域可以表示事件 A 所包含的基本事件, 则称事件 A 发生的概率为

$$P(A) = \frac{L(A)}{L(\Omega)}, \quad (1.2)$$

其中 $L(\Omega)$ 与 $L(A)$ 分别为 Ω 与 A 的几何度量.

所谓几何概型就是利用关系式(1.2)来讨论事件发生的概率的数学模型.

注意, 上述事件 A 的概率 $P(A)$ 只与 $L(A)$ 有关, 而与 $L(A)$ 对应区域的位置及形状无关.

1.2.6 概率基本性质的应用

由概率公理化定义中的三条公理可以推导出概率的一些基本性质.

性质 1 (有限可加性) 设 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 两两互斥, 则

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i).$$

性质 2 (加法公式) 设 A, B 为任意两个随机事件, 则

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

上面的加法公式可以推广到有限多个事件的情况,例如对于三个事件 A_1, A_2, A_3 , 有

$$P(A_1 + A_2 + A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1A_2) - P(A_2A_3) - P(A_3A_1) + P(A_1A_2A_3).$$

性质 3 设 A 为任意随机事件, 则

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A).$$

性质 4 设 A, B 为两个任意的随机事件, 若 $A \subset B$, 则

$$P(B-A) = P(B) - P(A).$$

由于 $P(B-A) \geq 0$, 根据性质 4 可以推得, 当 $A \subset B$ 时,

$$P(A) \leq P(B).$$

1.2.7 条件概率与概率的乘法公式

1. 条件概率

前面所讨论的事件 B 的概率 $P_S(B)$, 都是指在一组不变条件 S 下事件 B 发生的概率, 为了叙述简练, 一般不再提及条件组 S , 而把 $P_S(B)$ 简记为 $P(B)$. 在实际问题中, 除了考虑概率 $P(B)$ 外, 有时还需要考虑“在事件 A 已发生”这一附加条件下, 事件 B 发生的概率. 与前者相区别, 称后者为条件概率, 记作 $P(B|A)$, 读作在事件 A 发生的条件下事件 B 的概率.

在一般情况下, 如果 A, B 是条件 S 下的两个随机事件, 且 $P(A) \neq 0$, 则在事件 A 发生的前提下事件 B 发生的概率(即条件概率)为

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)}.$$

2. 概率的乘法公式

定理 两个事件 A 与 B 的积的概率等于事件 A 的概率乘以在事件 A 发生的前提下事件 B 发生的概率, 即

$$P(AB) = P(A)P(B|A) \quad (P(A) > 0).$$

同理有

$$P(AB) = P(B)P(A|B) \quad (P(B) > 0).$$

上述的计算公式可以推广到有限多个事件的情形, 例如对于三个事件 A_1, A_2, A_3 (若 $P(A_1) > 0, P(A_1A_2) > 0$) 有

$$P(A_1A_2A_3) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2).$$

1.2.8 全概率公式与贝叶斯公式

1. 全概率公式

定理 如果事件组 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 满足

$$(1) \sum_{i=1}^n A_i = \Omega \text{ 且 } P(A_i) > 0 \ (i = 1, 2, \dots, n);$$

$$(2) A_i A_j = \emptyset \ (i \neq j; i, j = 1, 2, \dots, n),$$

则对任一事件 B , 有

$$P(B) = \sum_{i=1}^n P(A_i) P(B | A_i),$$

称之为全概率公式(简称全概公式).

2. 贝叶斯公式

定理 设 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 是某一随机试验的一个完备事件组, 对任意事件 $B (P(B) > 0)$, 在事件 B 已发生的条件下事件 A_i 发生的概率为

$$P(A_i | B) = \frac{P(A_i) P(B | A_i)}{\sum_{j=1}^n P(A_j) P(B | A_j)}, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

称之为贝叶斯公式或逆概公式.

1.2.9 事件的独立性

定义 设 A, B 是某一随机试验的任意两个随机事件. 称 A 与 B 是相互独立的, 如果

$$P(AB) = P(A)P(B),$$

这就是在 A 与 B 独立的情况下, 事件 A 与 B 乘积的概率公式. 可见事件 A 与 B 相互独立是建立在概率基础上事件之间的一种关系. 所谓事件 A 与 B 相互独立, 就是指其中一个事件发生与否不影响另一个事件发生的可能性.

由两个随机事件相互独立的定义, 可以得到: 若事件 A 与 B 相互独立, 则 $\bar{A}$ 与 B, A 与 $\bar{B}, \bar{A}$ 与 $\bar{B}$ 也相互独立.

对于 n 个事件的独立性, 有下面定义.

定义 设 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 为 n 个事件. 如果对于所有可能的组合 $1 \leq i < j < k < \dots \leq n$, 下列各式同时成立:

$$\begin{cases} P(A_i A_j) = P(A_i) P(A_j), \\ P(A_i A_j A_k) = P(A_i) P(A_j) P(A_k), \\ \vdots \\ P(A_1 A_2 \cdots A_n) = P(A_1) P(A_2) \cdots P(A_n), \end{cases}$$

那么称 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 是相互独立的.

1.2.10 二项概型

在实际问题中, 常常要做多次试验条件完全相同(即可以看成是一个试验的多次重

复)并且都是相互独立(即每次试验中的随机事件的概率不依赖于其他各次试验的结果)的试验.称这种类型的试验为独立重复试验.

定理 在单次试验中事件 A 发生的概率为 $p(0 < p < 1)$,则在 n 次独立重复试验中

$$P\{A \text{ 发生 } k \text{ 次}\} = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n. \quad (1.3)$$

所谓伯努利(Bernoulli)概型就是利用关系式(1.3)来讨论事件概率的数学模型.伯努利概型又称为独立试验序列概型(或二项概型).

1.3 典型例题分析

例 1 设 A, B 是任意两个随机事件,则 $P\{(\bar{A}+B)(A+B)(\bar{A}+\bar{B})(A+\bar{B})\} =$

_____.

答案 0.

分析

$$(\bar{A}+B)(A+B) = \bar{A}A + \bar{A}B + BA + BB = B,$$

$$(\bar{A}+\bar{B})(A+\bar{B}) = \bar{A}A + \bar{A}\bar{B} + \bar{B}A + \bar{B}\bar{B} = \bar{B},$$

于是

$$P(B\bar{B}) = P(\emptyset) = 0.$$

例 2 设随机事件 A, B 及其和事件 $A \cup B$ 的概率分别是 0.4, 0.3 和 0.6,若 $\bar{B}$ 表示 B 的对立事件,那么积事件 $A\bar{B}$ 的概率 $P(A\bar{B}) =$ _____.

答案 0.3.

分析 因为

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB),$$

又

$$P(A\bar{B}) + P(AB) = P(A),$$

因此

$$P(A\bar{B}) = P(A+B) - P(B) = 0.6 - 0.3 = 0.3.$$

例 3 设 A, B 为随机事件, $P(A) = 0.7, P(A-B) = 0.3$, 则 $P(\bar{A}\bar{B}) =$ _____.

答案 0.6.

分析 由题设 $P(A) = 0.7, P(A\bar{B}) = 0.3$, 利用公式

$$A\bar{B} + AB = A,$$

知

$$P(AB) = P(A) - P(A\bar{B}) = 0.7 - 0.3 = 0.4,$$

故

$$P(\overline{AB}) = 1 - P(AB) = 1 - 0.4 = 0.6.$$

例4 设三次独立试验中,事件 A 出现的概率相等.若已知 A 至少出现一次的概率等于 $19/27$,则事件 A 在一次试验中出现的概率为_____.

答案 $\frac{1}{3}$.

分析 设事件 A 在一次试验中出现的概率为 p ($0 < p < 1$), 则有 $1 - (1 - p)^3 = \frac{19}{27}$, 从而解得 $p = \frac{1}{3}$.

例5 设 A, B 是两个随机事件, 已知 $P(A|B) = 0.3, P(B|A) = 0.4, P(\overline{A}|\overline{B}) = 0.7$, 则 $P(A+B) =$ _____.

答案 0.58.

分析 从条件概率的性质可知

$$P(A|\overline{B}) + P(\overline{A}|\overline{B}) = 1 \Rightarrow P(A|\overline{B}) = 1 - P(\overline{A}|\overline{B}) = 0.3,$$

因此, $P(A|B) = P(A|\overline{B})$, 即 A 与 B 相互独立, 于是

$$P(A) = P(A|B) = 0.3,$$

$$P(B) = P(B|A) = 0.4,$$

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(A)P(B) = 0.58.$$

评注 此题不是一个直接的概率计算问题. 它首先要根据各已知的条件概率数值关系来确定事件 A 与 B 是独立事件, 能否判断出事件 A 与 B 的独立性是解决这个题目的关键.

例6 设 A, B 是两个随机事件, $0 < P(B) < 1$, 且 $AB = \overline{A}\overline{B}$, 则 $P(A|\overline{B}) + P(\overline{A}|B) =$ _____.

答案 2.

分析 从条件 $AB = \overline{A}\overline{B}$ 可知

$$(AB)(\overline{A}\overline{B}) = A\overline{A}B\overline{B} = \emptyset,$$

$$(AB)(\overline{A}\overline{B}) = AB = \overline{A}\overline{B},$$

于是有

$$\overline{AB} = \overline{A+B} = \emptyset, \quad A+B = \Omega.$$

但已知 $AB = \emptyset$, 因此 A 与 B 为对立事件, 即 $A = \overline{B}, \overline{A} = B$, 即

$$P(A|\overline{B}) = P(\overline{A}|B) = 1.$$

评注 由于题中对于事件 A, B 的概率值均未知, 因此要计算两个条件概率之和, 只能从条件 $AB = \overline{A}\overline{B}$ 出发, 设法分析出事件 A 与 B 间的关系来解决两个条件概率的计算问题. 本题关键是要从两个互不相容事件 AB 与 $\overline{A}\overline{B}$ 的相等, 分析出它们都是不可能事

件,即 $AB = \overline{AB} = \emptyset$, 进而得出 A 与 B 为对立事件.

例 7 袋中有 50 个乒乓球, 其中 20 个是黄球, 30 个是白球, 今有两人依次随机地从袋中各取一球, 取后不放回, 则第二个人取得黄球的概率是_____.

答案 $\frac{2}{5}$.

分析 根据抽签原理, 第一个人, 第二个人, ……取得黄球的概率相等, 均为 $\frac{2}{5}$, 因此应填 $\frac{2}{5}$.

或者利用全概公式计算, 设

$A = \{\text{第一个人取出的为黄球}\},$

$B = \{\text{第一个人取出的为白球}\},$

$C = \{\text{第二个人取出的为黄球}\},$

则 $P(A) = \frac{2}{5}, P(B) = \frac{3}{5}, P(C|A) = \frac{19}{49}, P(C|B) = \frac{20}{49}$, 由全概公式知

$$P(C) = P(A)P(C|A) + P(B)P(C|B) = \frac{2}{5} \times \frac{19}{49} + \frac{3}{5} \times \frac{20}{49} = \frac{2}{5}.$$

例 8 若在区间 $(0, 1)$ 内任取两个数, 则事件“两数之和小于 $\frac{6}{5}$ ”的概率为_____.

答案 $\frac{17}{25}$.

分析 这是一个几何概型问题, 以 x, y 表示在 $(0, 1)$ 中随机地取得的两个数, 则 (x, y) 点的全体是如图 1.2 所示的正方形, 而事件 $\left\{\text{两数之和小于 } \frac{6}{5}\right\}$ 发生的充分必要条件为 $x + y < \frac{6}{5}$, 即落在图 1.2 中阴影部分的点 (x, y) 的全体.

根据几何概率的定义, 所求概率即为图中阴影部分面积与边长为 1 的正方形面积之比, 即

$$P\left(x + y < \frac{6}{5}\right) = 1 - \frac{1}{2} \times \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{17}{25}.$$

例 9 设工厂 A 和工厂 B 的产品的次品率分别为 1% 和 2%, 现从由工厂 A 和工厂 B 的产品分别占 60% 和 40% 的一批产品中随机抽取一件, 发现是次品, 则该次品属工厂 A 生产的概率是_____.

答案 $\frac{3}{7}$.

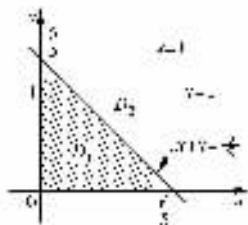


图 1.2

分析 本题考查逆概公式. 设事件 $A = \{\text{抽取的产品为工厂 } A \text{ 生产的}\}$, $B = \{\text{抽取的产品为工厂 } B \text{ 生产的}\}$, $C = \{\text{抽取的是次品}\}$, 则 $P(A) = 0.6$, $P(B) = 0.4$, $P(C|A) = 0.01$, $P(C|B) = 0.02$, 由逆概公式(贝叶斯公式)知

$$\begin{aligned} P(A|C) &= \frac{P(AC)}{P(C)} = \frac{P(A)P(C|A)}{P(A)P(C|A) + P(B)P(C|B)} \\ &= \frac{0.6 \times 0.01}{0.6 \times 0.01 + 0.4 \times 0.02} = \frac{3}{7}. \end{aligned}$$

例 10 已知随机事件 A 与 B 相互独立, $P(A) = a$, $P(B) = b$, 如果事件 C 发生必然导致事件 A 与 B 同时发生, 则事件 A, B, C 都不发生的概率为_____.

答案 $(1-a)(1-b)$.

分析 已知 $P(AB) = P(A)P(B)$, $C \subset AB$, 故 $\bar{C} \supset \overline{AB} = \bar{A} \cup \bar{B} \supset \bar{A}\bar{B}$, 所以

$$P(\bar{A}\bar{B}\bar{C}) = P(\bar{A}\bar{B}) = P(\bar{A})P(\bar{B}) = (1-a)(1-b).$$

例 11 以 A 表示事件{甲种产品畅销, 乙种产品滞销}, 则其对立事件 $\bar{A}$ 为().

- (A) {甲种产品滞销, 乙种产品畅销}
- (B) {甲、乙两种产品均畅销}
- (C) {甲种产品滞销}
- (D) {甲种产品滞销或乙种产品畅销}

答案 (D).

分析 设 $B = \{\text{甲种产品畅销}\}$, $C = \{\text{乙种产品滞销}\}$, 则由题设 $A = BC$, 于是, 对立事件 $\bar{A}$ 为

$$\bar{A} = \overline{BC} = \bar{B} \cup \bar{C} = \{\text{甲种产品滞销或乙种产品畅销}\}.$$

例 12 设 A 和 B 是任意两个概率不为零的不相容事件, 则下列结论中肯定正确的是().

- (A) $\bar{A}$ 与 $\bar{B}$ 不相容
- (B) $\bar{A}$ 与 $\bar{B}$ 相容
- (C) $P(AB) = P(A)P(B)$
- (D) $P(A - B) = P(A)$

答案 (D).

分析 据题设 A 和 B 是任意两个不相容事件, $AB = \emptyset$, 从而 $P(AB) = 0$. 利用公式 $A\bar{B} + AB = A$, 知

$$P(A - B) = P(A\bar{B}) = P(A) - P(AB) = P(A),$$

所以(D)为正确答案.

另外, 由于 $P(A) \neq 0$, $P(B) \neq 0$, (C)项不可能成立, 值得注意的是(A)、(B)两项, 有人认为(A)项与(B)项是互逆的, 总有一个是正确的. 实际上, 若 $AB = \emptyset$, $A \cup B \neq \Omega$ 时, (A)项不成立; $AB = \emptyset$, 且 $A \cup B = \Omega$ 时, (B)项不成立.

例 13 假设事件 A 和 B 满足 $P(B|A) = 1$, 则().