第 1 章

随机事件及其概率

1.1　基本要求

1. 了解样本空间的概念,理解随机事件的概念,重点掌握事件的关系与运算.

2. 理解概率与条件概率的概念,掌握概率的基本性质,会运用与古典概型、几何概型计算有关的概率.

3. 掌握概率的加法公式、乘法公式、全概率公式及贝叶斯(Bayes)公式.

4. 理解事件独立性的概念,掌握利用事件独立性计算有关概率的各种方法;理解独立重复试验的概念,掌握运用二项概型计算有关的概率的各种方法.

1.2　内容简介

1.2.1　样本空间与随机事件

1. 随机现象

在一定条件下,具有多种可能的结果的现象称为随机现象.这类现象的一个共同点是,事先不能预言多种可能的结果中究竟出现哪一种.

2. 随机试验与随机事件

如果一个试验满足下面的三个条件:

(1) 在相同的条件下可以重复进行;

(2) 试验都有哪些可能的结果是明确的;

(3) 每次试验的具体结果在试验前是无法得知的.

那么就称它是一个随机试验,以后简称为试验,一般用字母 E 表示.

在随机试验中,每一个可能出现的不可分解的最简单的结果称为随机试验的基本事

件或样本点，用 ω 表示；而由全体基本事件构成的集合称为基本事件空间或样本空间，记为 Ω.

所谓随机事件是样本空间 Ω 的一个子集，随机事件简称为事件，用字母 A,B,C 等表示. 因此，某个事件 A 发生当且仅当这个子集中的一个样本点 ω 发生，记为 $\omega \in A$.

1.2.2 事件之间的关系与运算

1. 事件的包含关系与等价关系

设 A,B 为两个事件. 如果 A 中的每一个样本点都属于 B，那么称事件 B 包含事件 A，或称事件 A 包含于事件 B，记为 $A \subset B$ 或 $B \supset A$.

如果 $A \supset B$ 与 $B \supset A$ 同时成立，那么称事件 A 与事件 B 等价或相等，记为 $A=B$.

2. 事件的并与交

设 A,B 为两个事件. 将至少属于 A 或 B 中一个的所有样本点构成的集合称为事件 A 与 B 的并或和，记为 $A \cup B$ 或 $A+B$.

设 A,B 为两个事件. 将同时属于 A 及 B 的所有样本点构成的集合称为事件 A 与 B 的交或积，记为 $A \cap B$ 或 $A \cdot B$，有时也简记为 AB.

3. 事件的互不相容关系与事件的逆

设 A,B 为两个事件，如果 $A \cdot B=\varnothing$，那么称事件 A 与 B 是互不相容的(或互斥的).

事件的互不相容关系也可以推广到多于两个事件的情形. 即，如果 $A_i \cdot A_j=\varnothing\ (i \neq j;i,j=1,2,\cdots,n)$，这时称事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是互不相容的(或互斥的).

对于事件 A，把不包含在 A 中的所有样本点构成的集合称为事件 A 的逆(或 A 的对立事件)，记为 $\overline{A}$，并规定它是事件的基本运算之一.

在一次试验中，事件 A 与 $\overline{A}$ 不会同时发生(即 $A \cdot \overline{A}=\varnothing$，称它们具有互斥性)，而且 A 与 $\overline{A}$ 至少有一个发生(即 $A+\overline{A}=\Omega$，称它们具有完全性). 这就是说，事件 A 与 $\overline{A}$ 满足

$$\begin{cases} A\overline{A} = \varnothing, \\ A+\overline{A} = \Omega. \end{cases}$$

有了事件的三种基本运算，就可以定义事件的其他一些运算. 例如，称事件 $A\overline{B}$ 为事件 A 与 B 的差，记为 $A-B$. 可见，事件 $A-B$ 是由包含于 A 而不包含于 B 的所有样本点构成的集合.

事件的关系和运算如图 1.1 所示.

事件的运算主要满足下列规则：

(1) 交换律：$A \cup B=B \cup A$，$A \cap B=B \cap A$；

(2) 结合律：$(A \cup B) \cup C=A \cup (B \cup C)$，$(A \cap B) \cap C=A \cap (B \cap C)$；

(3) 分配律：$A \cap (B \cup C)=(A \cap B) \cup (A \cap C)$，$A \cup (B \cap C)=(A \cup B) \cap (A \cup C)$；

(4) **德摩根**(De Morgan)**律**：$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$，$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$.

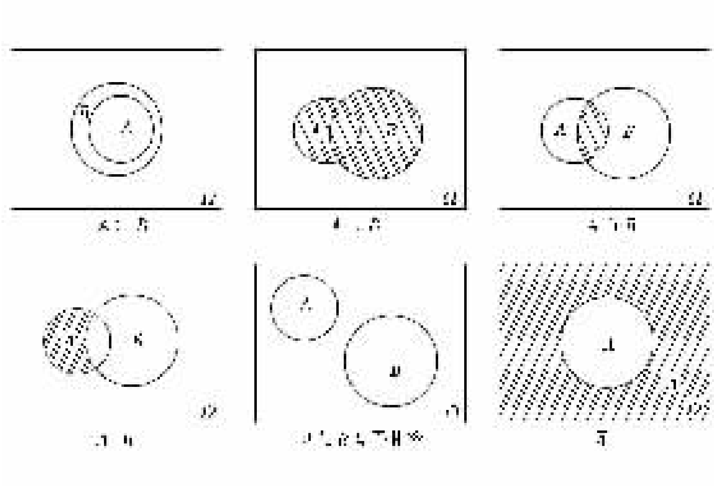

图　1.1

德摩根律可以推广到任意多个事件的场合.

1.2.3　概率的定义与性质

1. **概率的公理化定义**

定义　设 E 是一个随机试验，Ω 为它的样本空间，以 E 中所有的随机事件组成的集合为定义域，定义一个函数 $P(A)$（其中 A 为任一随机事件），且 $P(A)$ 满足以下三条公理，则称函数 $P(A)$ 为事件 A 的概率.

公理 1　$0\leqslant P(A)\leqslant 1$.

公理 2　$P(\Omega)=1$.

公理 3　若 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 两两互斥，则

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i).$$

2. **概率的统计定义**

定义　在一组不变的条件 S 下，独立地重复做 n 次试验. 设 μ 是 n 次试验中事件 A 发生的次数，当试验次数 n 很大时，如果 A 的频率 $f_n(A)$ 稳定地在某一数值 p 附近摆动；而且一般说来随着试验次数增多，这种摆动的幅度会越来越小，则称数值 p 为事件 A 在条件组 S 下发生的概率. 记作

$$P(A)=p.$$

1.2.4 古典概型

如果随机试验具有特性:

(1) 试验的结果是有限个;

(2) 每个结果出现的可能性是相同的.

则称此随机试验为古典概型随机试验.

定义 设古典概型随机试验的基本事件空间由 n 个基本事件组成,即 $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n\}$. 如果事件 A 是由上述 n 个事件中的 m 个组成,则称事件 A 发生的概率为

$$P(A)=\frac{m}{n}. \tag{1.1}$$

所谓古典概型就是利用关系式(1.1)来讨论事件发生的概率的数学模型.

1.2.5 几何概型

如果随机试验具有特性:

(1) 试验的结果是无限且不可列的;

(2) 每个结果出现的可能性是均匀的.

则称此随机试验为几何型随机试验. 在几何型随机试验中,通过几何度量(长度、面积、体积等)来计算事件出现的可能性.

定义 设 E 为几何型的随机试验,其基本事件空间中的所有基本事件可以用一个有界区域来描述,而其中一部分区域可以表示事件 A 所包含的基本事件,则称事件 A 发生的概率为

$$P(A)=\frac{L(A)}{L(\Omega)}, \tag{1.2}$$

其中 $L(\Omega)$ 与 $L(A)$ 分别为 Ω 与 A 的几何度量.

所谓几何概型就是利用关系式(1.2)来讨论事件发生的概率的数学模型.

注意,上述事件 A 的概率 $P(A)$ 只与 $L(A)$ 有关,而与 $L(A)$ 对应区域的位置及形状无关.

1.2.6 概率基本性质的应用

由概率公理化定义中的三条公理可以推导出概率的一些基本性质.

性质 1(有限可加性) 设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 两两互斥,则

$$P\Big(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\Big)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i).$$

性质 2(加法公式) 设 A,B 为任意两个随机事件,则

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB).$$

上面的加法公式可以推广到有限多个事件的情况,例如对于三个事件 A_1,A_2,A_3,有

$$P(A_1+A_2+A_3)=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)-P(A_1A_2)-P(A_2A_3)-P(A_3A_1)+P(A_1A_2A_3).$$

性质 3　设 A 为任意随机事件,则

$$P(\overline{A})=1-P(A).$$

性质 4　设 A,B 为两个任意的随机事件,若 $A\subset B$,则

$$P(B-A)=P(B)-P(A).$$

由于 $P(B-A)\geqslant 0$,根据性质 4 可以推得,当 $A\subset B$ 时,

$$P(A)\leqslant P(B).$$

1.2.7　条件概率与概率的乘法公式

1. **条件概率**

前面所讨论的事件 B 的概率 $P_S(B)$,都是指在一组不变条件 S 下事件 B 发生的概率,为了叙述简练,一般不再提及条件组 S,而把 $P_S(B)$简记为 $P(B)$. 在实际问题中,除了考虑概率 $P(B)$外,有时还需要考虑"在事件 A 已发生"这一附加条件下,事件 B 发生的概率. 与前者相区别,称后者为条件概率,记作 $P(B|A)$,读作在事件 A 发生的条件下事件 B 的概率.

在一般情况下,如果 A,B 是条件 S 下的两个随机事件,且$P(A)\neq 0$,则在事件 A 发生的前提下事件 B 发生的概率(即条件概率)为

$$P(B\mid A)=\frac{P(AB)}{P(A)}.$$

2. **概率的乘法公式**

定理　两个事件 A 与 B 的积的概率等于事件 A 的概率乘以在事件 A 发生的前提下事件 B 发生的概率,即

$$P(AB)=P(A)P(B\mid A)\ (P(A)>0).$$

同理有

$$P(AB)=P(B)P(A\mid B)\ (P(B)>0).$$

上述的计算公式可以推广到有限多个事件的情形,例如对于三个事件 A_1,A_2,A_3(若 $P(A_1)>0$,$P(A_1A_2)>0$)有

$$P(A_1A_2A_3)=P(A_1)P(A_2\mid A_1)P(A_3\mid A_1A_2).$$

1.2.8　全概率公式与贝叶斯公式

1. **全概率公式**

定理　如果事件组 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 满足

(1) $\sum_{i=1}^{n} A_i = \Omega$ 且 $P(A_i) > 0\ (i=1,2,\cdots,n)$;

(2) $A_iA_j = \varnothing\ (i \neq j; i,j=1,2,\cdots,n)$,

则对任一事件 B,有

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B \mid A_i),$$

称之为全概率公式(简称全概公式).

2. 贝叶斯公式

定理 设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是某一随机试验的一个完备事件组,对任意事件 $B(P(B)>0)$,在事件 B 已发生的条件下事件 A_i 发生的概率为

$$P(A_i \mid B) = \frac{P(A_i)P(B \mid A_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(A_j)P(B \mid A_j)}, \quad i=1,2,\cdots,n,$$

称之为贝叶斯公式或逆概公式.

1.2.9 事件的独立性

定义 设 A,B 是某一随机试验的任意两个随机事件. 称 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 是相互独立的,如果

$$P(AB) = P(A)P(B),$$

这就是在 A 与 B 独立的情况下,事件 A 与 B 乘积的概率公式. 可见事件 A 与 B 相互独立是建立在概率基础上事件之间的一种关系. 所谓事件 A 与 B 相互独立,就是指其中一个事件发生与否不影响另一个事件发生的可能性.

由两个随机事件相互独立的定义,可以得到:若事件 A 与 B 相互独立,则 $\overline{A}$ 与 B,A 与 $\overline{B}$,$\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 也相互独立.

对于 n 个事件的独立性,有下面定义.

定义 设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为 n 个事件. 如果对于所有可能的组合 $1 \leqslant i < j < k < \cdots \leqslant n$,下列各式同时成立:

$$\begin{cases} P(A_iA_j) = P(A_i)P(A_j), \\ P(A_iA_jA_k) = P(A_i)P(A_j)P(A_k), \\ \qquad\qquad \vdots \\ P(A_1A_2\cdots A_n) = P(A_1)P(A_2)\cdots P(A_n), \end{cases}$$

那么称 $\boldsymbol{A_1,A_2,\cdots,A_n}$ 是相互独立的.

1.2.10 二项概型

在实际问题中,常常要做多次试验条件完全相同(即可以看成是一个试验的多次重

复)并且都是相互独立(即每次试验中的随机事件的概率不依赖于其他各次试验的结果)的试验.称这种类型的试验为独立重复试验.

定理　在单次试验中事件 A 发生的概率为 $p(0<p<1)$,则在 n 次独立重复试验中

$$P\{A\text{ 发生 }k\text{ 次}\}=C_n^k p^k(1-p)^{n-k},\quad k=0,1,2,\cdots,n. \tag{1.3}$$

所谓伯努利(Bernoulli)概型就是利用关系式(1.3)来讨论事件概率的数学模型.伯努利概型又称为独立试验序列概型(或二项概型).

1.3　典型例题分析

例1　设 A,B 是任意两个随机事件,则 $P\{(\bar{A}+B)(A+B)(\bar{A}+\bar{B})(A+\bar{B})\}=$________.

答案　0.

分析

$$(\bar{A}+B)(A+B)=\bar{A}A+\bar{A}B+BA+BB=B,$$
$$(\bar{A}+\bar{B})(A+\bar{B})=\bar{A}A+\bar{A}\bar{B}+\bar{B}A+\bar{B}\bar{B}=\bar{B},$$

于是

$$P(B\bar{B})=P(\varnothing)=0.$$

例2　设随机事件 A,B 及其和事件 $A\cup B$ 的概率分别是 0.4,0.3 和 0.6,若 $\bar{B}$ 表示 B 的对立事件,那么积事件 $A\bar{B}$ 的概率 $P(A\bar{B})=$________.

答案　0.3.

分析　因为

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB),$$

又

$$P(A\bar{B})+P(AB)=P(A),$$

因此

$$P(A\bar{B})=P(A+B)-P(B)=0.6-0.3=0.3.$$

例3　设 A,B 为随机事件,$P(A)=0.7$,$P(A-B)=0.3$,则 $P(\overline{AB})=$________.

答案　0.6.

分析　由题设 $P(A)=0.7$,$P(A\bar{B})=0.3$,利用公式

$$A\bar{B}+AB=A,$$

知

$$P(AB)=P(A)-P(A\bar{B})=0.7-0.3=0.4,$$

故

$$P(\overline{AB}) = 1 - P(AB) = 1 - 0.4 = 0.6.$$

例 4 设三次独立试验中,事件 A 出现的概率相等. 若已知 A 至少出现一次的概率等于19/27,则事件 A 在一次试验中出现的概率为________.

答案 $\frac{1}{3}$.

分析 设事件 A 在一次试验中出现的概率为 $p(0<p<1)$,则有 $1-(1-p)^3=\frac{19}{27}$,从而解得 $p=\frac{1}{3}$.

例 5 设 A,B 是两个随机事件,已知 $P(A|B)=0.3$,$P(B|A)=0.4$,$P(\overline{A}|\overline{B})=0.7$,则 $P(A+B)=$________.

答案 0.58.

分析 从条件概率的性质可知

$$P(A \mid \overline{B}) + P(\overline{A} \mid \overline{B}) = 1 \Rightarrow P(A \mid \overline{B}) = 1 - P(\overline{A} \mid \overline{B}) = 0.3,$$

因此,$P(A|B)=P(A|\overline{B})$,即 A 与 B 相互独立,于是

$$P(A) = P(A \mid B) = 0.3,$$
$$P(B) = P(B \mid A) = 0.4,$$
$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(A)P(B) = 0.58.$$

评注 此题不是一个直接的概率计算问题. 它首先要根据各已知的条件概率数值关系来确定事件 A 与 B 是独立事件,能否判断出事件 A 与 B 的独立性是解决这个题目的关键.

例 6 设 A,B 是两个随机事件,$0<P(B)<1$,且 $AB=\overline{A}\overline{B}$,则 $P(A|\overline{B})+P(\overline{A}|B)=$________.

答案 2.

分析 从条件 $AB=\overline{A}\overline{B}$ 可知

$$(AB)(\overline{A}\,\overline{B}) = A\overline{A}B\overline{B} = \varnothing,$$
$$(AB)(\overline{A}\,\overline{B}) = AB = \overline{A}\,\overline{B},$$

于是有

$$\overline{A}\overline{B}=\overline{A+B}=\varnothing, \quad A+B=\Omega.$$

但已知 $AB=\varnothing$,因此 A 与 B 为对立事件,即 $A=\overline{B}$,$\overline{A}=B$,即

$$P(A|\overline{B})=P(\overline{A}|B)=1.$$

评注 由于题中对于事件 A,B 的概率值均未知,因此要计算两个条件概率之和,只能从条件 $AB=\overline{A}\overline{B}$ 出发,设法分析出事件 A 与 B 间的关系来解决两个条件概率的计算问题. 本题关键是要从两个互不相容事件 AB 与 $\overline{A}\overline{B}$ 的相等,分析出它们都是不可能事

件,即 $AB=\overline{A}\overline{B}=\varnothing$,进而得出 A 与 B 为对立事件.

例 7 袋中有 50 个乒乓球,其中 20 个是黄球,30 个是白球,今有两人依次随机地从袋中各取一球,取后不放回,则第二个人取得黄球的概率是________.

答案 $\frac{2}{5}$.

分析 根据抽签原理,第一个人,第二个人,……取得黄球的概率相等,均为$\frac{2}{5}$,因此应填$\frac{2}{5}$.

或者利用全概公式计算,设

$$A=\{\text{第一个人取出的为黄球}\},$$
$$B=\{\text{第一个人取出的为白球}\},$$
$$C=\{\text{第二个人取出的为黄球}\},$$

则 $P(A)=\frac{2}{5}$,$P(B)=\frac{3}{5}$,$P(C|A)=\frac{19}{49}$,$P(C|B)=\frac{20}{49}$,由全概公式知

$$P(C)=P(A)P(C\mid A)+P(B)P(C\mid B)=\frac{2}{5}\times\frac{19}{49}+\frac{3}{5}\times\frac{20}{49}=\frac{2}{5}.$$

例 8 若在区间$(0,1)$内任取两个数,则事件"两数之和小于$\frac{6}{5}$"的概率为________.

答案 $\frac{17}{25}$.

分析 这是一个几何概型问题,以 x,y 表示在$(0,1)$中随机地取得的两个数,则(x,y)点的全体是如图 1.2 所示的正方形,而事件$\left\{\text{两数之和小于}\frac{6}{5}\right\}$发生的充分必要条件为 $x+y<\frac{6}{5}$,即落在图 1.2 中阴影部分的点(x,y)的全体.

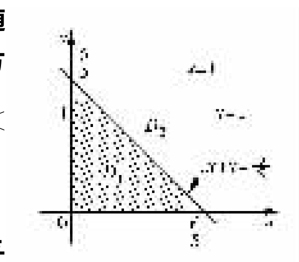

图 1.2

根据几何概率的定义,所求概率即为图中阴影部分面积与边长为 1 的正方形面积之比,即

$$P\left(x+y<\frac{6}{5}\right)=1-\frac{1}{2}\times\left(\frac{4}{5}\right)^2=\frac{17}{25}.$$

例 9 设工厂 A 和工厂 B 的产品的次品率分别为 1%和 2%,现从由工厂 A 和工厂 B 的产品分别占 60%和 40%的一批产品中随机抽取一件,发现是次品,则该次品属工厂 A 生产的概率是________.

答案 $\frac{3}{7}$.

分析 本题考查逆概公式. 设事件 $A=\{$抽取的产品为工厂 A 生产的$\}$, $B=\{$抽取的产品为工厂 B 生产的$\}$, $C=\{$抽取的是次品$\}$, 则 $P(A)=0.6$, $P(B)=0.4$, $P(C|A)=0.01$, $P(C|B)=0.02$, 由逆概公式(贝叶斯公式)知

$$P(A\mid C)=\frac{P(AC)}{P(C)}=\frac{P(A)P(C\mid A)}{P(A)P(C\mid A)+P(B)P(C\mid B)}$$
$$=\frac{0.6\times 0.01}{0.6\times 0.01+0.4\times 0.02}=\frac{3}{7}.$$

例 10 已知随机事件 A 与 B 相互独立, $P(A)=a$, $P(B)=b$, 如果事件 C 发生必然导致事件 A 与 B 同时发生, 则事件 A,B,C 都不发生的概率为________.

答案 $(1-a)(1-b)$.

分析 已知 $P(AB)=P(A)P(B)$, $C\subset AB$, 故 $\overline{C}\supset\overline{AB}=\overline{A}\cup\overline{B}\supset\overline{A}\,\overline{B}$, 所以

$$P(\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C})=P(\overline{A}\,\overline{B})=P(\overline{A})P(\overline{B})=(1-a)(1-b).$$

例 11 以 A 表示事件{甲种产品畅销, 乙种产品滞销}, 则其对立事件 $\overline{A}$ 为(   ).

(A) {甲种产品滞销, 乙种产品畅销}

(B) {甲、乙两种产品均畅销}

(C) {甲种产品滞销}

(D) {甲种产品滞销或乙种产品畅销}

答案 (D).

分析 设 $B=\{$甲种产品畅销$\}$, $C=\{$乙种产品滞销$\}$, 则由题设 $A=BC$, 于是, 对立事件 $\overline{A}$ 为

$$\overline{A}=\overline{BC}=\overline{B}\cup\overline{C}=\{\text{甲种产品滞销或乙种产品畅销}\}.$$

例 12 设 A 和 B 是任意两个概率不为零的不相容事件, 则下列结论中肯定正确的是(   ).

(A) $\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 不相容　　(B) $\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 相容

(C) $P(AB)=P(A)P(B)$　　(D) $P(A-B)=P(A)$

答案 (D).

分析 据题设 A 和 B 是任意两个不相容事件, $AB=\varnothing$, 从而 $P(AB)=0$.

利用公式 $A\overline{B}+AB=A$, 知

$$P(A-B)=P(A\overline{B})=P(A)-P(AB)=P(A),$$

所以(D)为正确答案.

另外, 由于 $P(A)\neq 0$, $P(B)\neq 0$, (C)项不可能成立, 值得注意的是(A)、(B)两项, 有人认为(A)项与(B)项是互逆的, 总有一个是正确的. 实际上, 若 $AB=\varnothing$, $A\cup B\neq\Omega$ 时, (A)项不成立; $AB=\varnothing$, 且 $A\cup B=\Omega$ 时, (B)项不成立.

例 13 假设事件 A 和 B 满足 $P(B|A)=1$, 则(   ).