# 第 3 章　微分中值定理与导数的应用

第 2 章我们讨论了导数与微分的概念、计算及简单应用. 要进一步讨论它们的应用，就要引进微分学的基本定理——微分中值定理，因为它是研究函数性质的有力工具.

## 3.1　微分中值定理

### 3.1.1　费马定理——极值的必要条件

**定义**　设函数 $f(x)$ 在点 $x_0$ 的邻域 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 上有定义，如果对 $\forall x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$，都有不等式

$$f(x)\leqslant f(x_0)\quad(\text{或 } f(x)\geqslant f(x_0)),$$

则称 $f(x_0)$ 为函数 $f(x)$ 的**极大值**(或**极小值**). 这时称点 $x_0$ 为 $f(x)$ 的**极大值点**(或**极小值点**)(见图 3.1).

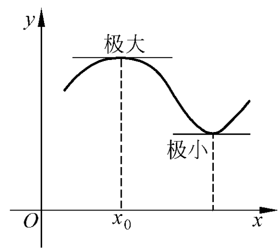


图　3.1

函数的极大值、极小值统称**极值**. 极大值点、极小值点统称**极值点**.

**定义**　若 $f'(x_0)=0$，则称 $x_0$ 为 $f(x)$ 的**驻点**.

**定理 1**(费马定理)　设 $f(x)$ 在 $x_0$ 点可导，则 $x_0$ 是 $f(x)$ 的极值点的必要条件是 $x_0$ 为 $f(x)$ 的驻点.

**证**　不妨设 $x_0$ 为 $f(x)$ 的极大值点，即存在 $x_0$ 的邻域 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$，使得当 $x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 时，有

$$f(x)\leqslant f(x_0).$$

给 $x_0$ 一个改变量 $\Delta x$，使得 $x_0+\Delta x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$，由条件知

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\leqslant 0.$$

因此，当 $\Delta x>0$ 时，有 $\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\leqslant 0$，从而

$$f'(x_0)=f'_+(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\leqslant 0.$$

当 $\Delta x<0$ 时，有 $\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\geqslant 0$，从而

$$f'(x_0)=f'_-(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\geqslant 0.$$

综上得 $f'(x_0)=0$. 即 $x_0$ 为 $f(x)$ 的驻点.

**定理 2**(达布定理)　设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导. 若 $f'_+(a)\cdot f'_-(b)<0$, 则存在 $c\in(a,b)$, 使得 $f'(c)=0$.

**证**　不妨设 $f'_+(a)<0, f'_-(b)>0$, 即

$$f'_+(a)=\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}<0, \tag{3.1}$$

$$f'_-(b)=\lim_{x\to b^-}\frac{f(x)-f(b)}{x-b}>0. \tag{3.2}$$

对(3.1)式, 由保序性定理, 存在 $\delta>0$, 当 $x\in(a,a+\delta)$ 时, 有 $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}<0$. 由于 $x-a>0$, 从而 $f(x)-f(a)<0$. 取 $x_1\in(a,a+\delta)\subset(a,b)$, 有

$$f(x_1)<f(a). \tag{3.3}$$

由(3.2)式用同样的方法, 存在 $x_2\in(a,b)$, 使得

$$f(x_2)<f(b). \tag{3.4}$$

由条件知 $f(x)\in C[a,b]$, 从而 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有最小值. 由(3.3)式和(3.4)式知, 此最小值只能在 $(a,b)$ 的某内点 $c$ 上达到. 显然 $c$ 也是 $f(x)$ 的极小值点. 由费马定理知 $f'(c)=0$.

### 3.1.2　微分中值定理

**罗尔定理**　若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续, 在开区间 $(a,b)$ 上可导, 且 $f(a)=f(b)$, 则存在 $\xi\in(a,b)$, 使得 $f'(\xi)=0$.

从图 3.2 可看到, 在 $f(x)$ 的函数曲线的最高点或最低点处(若不是端点)有水平切线. 这个几何事实启发了我们的证明思路.

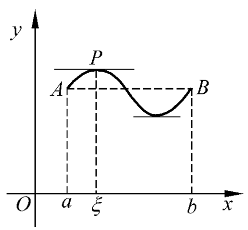


图　3.2

**证**　由于 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续, 因此 $f(x)$ 在该区间上取到最大值 $M$ 与最小值 $m$. 下面分两种情况讨论.

(1) $M=m$　这时 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上等于常数 $M$, 所以在 $(a,b)$ 上 $f'(x)=0$. 于是在 $(a,b)$ 内任取一点 $\xi$, 就有 $f'(\xi)=0$.

(2) $M>m$　因 $f(a)=f(b)$, 则两数 $M, m$ 中至少有一个不等于端点的函数值. 不妨设 $M\neq f(a)$, 从而 $M$ 只能在 $(a,b)$ 内取到, 设 $\xi\in(a,b)$, 使得 $f(\xi)=M$. 又 $f(\xi)$ 是最大值, 因而也是 $f(x)$ 的极大值, 即 $\xi$ 是 $f(x)$ 的极大值点. 由费马定理知 $f'(\xi)=0$.

罗尔定理要求条件 $f(a)=f(b)$, 由于这个特殊条件, 使它的应用受到限制. 如果把此条件去掉, 它就变成微分学中十分重要的拉格朗日中值定理.

**拉格朗日中值定理**　设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续, 在开区间 $(a,b)$ 上可微, 则存在 $\xi\in(a,b)$, 使得

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi),$$

即

$$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a).$$

如图 3.3 所示，$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$表示割线 $AB$ 的斜率，$f'(\xi)$表示曲线上某点 $P$ 处切线的斜率. 所以拉格朗日中值公式的几何意义是：在曲线弧$\overset{\frown}{AB}$上(端点 $A$、$B$ 除外)至少有一点 $P$，使得在 $P$ 点的切线与割线 $AB$ 平行.

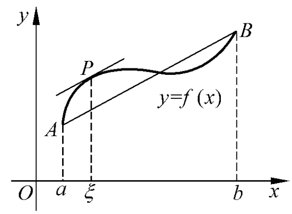

图 3.3

显然罗尔定理是拉格朗日定理当 $f(a)=f(b)$时的特殊情形.

**证** 从 $f(x)$出发作一个辅助函数，使它满足罗尔定理的条件. 从图 3.3 看出，函数 $y=f(x)$与割线 $AB$ 代表的函数：$y=f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$在 $a$，$b$ 两点的函数值相等. 因此它们的差函数可作为辅助函数. 故令

$$G(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a).$$

显然，函数 $G(x)$满足罗尔定理的条件. 由罗尔定理，存在 $\xi\in(a,b)$，使得

$$G'(\xi)=f'(\xi)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=0.$$

即 $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$.

为应用方便，有时把拉格朗日中值定理写成另一形式. 令 $a=x_0$，$b=x_0+\Delta x$，于是 $\Delta x=b-a$，公式变为

$$f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=f'(\xi)\Delta x, \tag{3.5}$$

其中 $\xi$ 在 $x_0$ 与 $x_0+\Delta x$ 之间.

固定 $x_0$ 与 $\Delta x$，显然 $h(\theta)=x_0+\theta\Delta x$ 是 $\theta$ 在$[0,1]$上的连续函数，$h(0)=x_0$，$h(1)=x_0+\Delta x$，由连续函数的介值定理知，$h(\theta)$取到 $x_0$ 与 $x_0+\Delta x$ 之间的任何值，而 $\xi$ 在 $x_0$ 与 $x_0+\Delta x$ 之间，所以存在 $\theta\in(0,1)$，使得 $\xi=x_0+\theta\Delta x$. 这样(3.5)式可写成

$$f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=f'(x_0+\theta\Delta x)\Delta x.$$

**推论** 若函数 $f(x)$在区间 $I$ 上连续，在 $I$ 的内点 $x$ 处都可微，且 $f'(x)=0$，则 $f(x)$在 $I$ 上等于常数.

**证** $\forall x_1,x_2\in I,x_1\neq x_2$，在 $x_1$ 与 $x_2$ 之间应用拉格朗日中值公式得

$$f(x_2)-f(x_1)=f'(\xi)(x_2-x_1)\quad(\xi\text{ 在 }x_1\text{ 与 }x_2\text{ 之间}).$$

因 $f'(\xi)=0$，从而 $f(x_2)=f(x_1)$. 即函数 $f(x)$在 $I$ 上的函数值都相等. 因此 $f(x)$在 $I$ 上

是常数.

拉格朗日中值定理可以用来证明不等式.

**例1**　当 $b>a>0, n>1$ 时，证明不等式

$$na^{n-1}(b-a)<b^n-a^n<nb^{n-1}(b-a).$$

**证**　设 $f(x)=x^n$，$f(x)$在$[a,b]$上满足拉格朗日中值定理的条件，因此

$$b^n-a^n=f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)=n\xi^{n-1}(b-a),$$

其中 $b>\xi>a>0$. 又 $n-1>0$，所以

$$a^{n-1}<\xi^{n-1}<b^{n-1},$$

从而有

$$na^{n-1}(b-a)<n\xi^{n-1}(b-a)<nb^{n-1}(b-a),$$

即所证的不等式成立.

用拉格朗日中值定理证明不等式时，要构造与不等式有关的函数 $f(x)$，把不等式的一边写成函数的改变量，然后应用拉格朗日中值公式，再估计导数 $f'(\xi)$的上下界，可得所要证明的不等式.

**例2**　若 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=k$ 且 $k>0$(或 $k<0$)，则

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty\quad(\text{或}\lim_{x\to+\infty}f(x)=-\infty).$$

**证**　设 $k>0$，显然 $k>\frac{1}{2}k$，由保序性定理的推论知，$\exists\, b>0$，当 $x>b$ 时，有 $f'(x)>\frac{1}{2}k$. 由拉格朗日中值定理知

$$f(x)=f(b)+f'(\xi)(x-b),\text{其中 } b<\xi<x.$$

于是

$$f(x)>f(b)+\frac{1}{2}k(x-b)=f(b)+\frac{1}{2}kx-\frac{1}{2}kb.$$

由 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(b)+\frac{1}{2}kx-\frac{1}{2}kb\right]=+\infty$，得 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

设 $k<0$，显然 $k<\frac{1}{2}k$. 同理，$\exists\, b>0$，当 $x>b$ 时，有 $f'(x)<\frac{1}{2}k$. 由拉格朗日中值定理知

$$f(x)=f(b)+f'(\xi)(x-b)<f(b)+\frac{1}{2}k(x-b).$$

由于 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(b)+\frac{1}{2}k(x-b)\right]=-\infty$，所以 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$.

**柯西中值定理**　若函数 $f(x), g(x)$满足：(1)在闭区间$[a,b]$上连续，(2)在开区间$(a,b)$上可微，且 $\forall\, x\in(a,b)$，有 $g'(x)\neq 0$. 则 $\exists\,\xi\in(a,b)$，使得

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.\tag{3.6}$$

下面介绍一种证明方法——逆推法.

**证** 要证(3.6)式,只需证

$$f'(\xi)[g(b)-g(a)]-g'(\xi)[f(b)-f(a)]=0 \tag{3.7}$$

即应证

$$\left\{f(x)[g(b)-g(a)]-g(x)[f(b)-f(a)]\right\}'\Big|_{x=\xi}=0.$$

由上式,作辅助函数

$$u(x)=f(x)[g(b)-g(a)]-g(x)[f(b)-f(a)].$$

显然函数 $u(x)$在$[a,b]$上连续,在$(a,b)$上可微,且 $u(b)=u(a)=f(a)g(b)-f(b)g(a)$. 由罗尔定理知,$\exists\,\xi\in(a,b)$,使得 $u'(\xi)=0$. 即(3.7)式成立. 由(3.7)式可反推得(3.6)式.

在柯西中值定理中,令 $g(x)=x$,从而 $g(b)-g(a)=b-a$,$g'(x)=1$,这时公式(3.6)就变成了拉格朗日中值公式. 所以拉格朗日中值公式是柯西中值公式的特殊情形.

罗尔定理、拉格朗日中值定理、柯西中值定理统称微分中值定理. 其中罗尔定理是基础,由它推出另外两个中值定理. 拉格朗日中值定理是核心,它的应用非常广. 柯西中值定理的主要作用在于证明后面几个定理.

## 习题 3.1

1. 试就下列力学事实理解微分中值定理的含义:

(1) 垂直上抛物体到它落回原处,中间必有一个时刻速度为零;

(2) 从地面斜抛一物体,经过一段时间后,物体又落到地面上,该过程中必有一点的运动方向是水平的.

2. 设函数 $f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$,不用求导方法说明 $f'(x)=0$ 的实根个数,并指出这些根所在的区间.

3. 若函数 $f(x)$在$(a,b)$内具有二阶导数,且 $f(x_1)=f(x_2)=f(x_3)$,其中 $a<x_1<x_2<x_3<b$,证明在$(x_1,x_3)$内至少有一点 $\xi$,使得 $f''(\xi)=0$.

4. 证明:恒等式 $\arcsin x+\arccos x=\dfrac{\pi}{2}$,$x\in[-1,1]$.

5. 证明下列不等式:

(1) $0<a<b$,则$\dfrac{b-a}{b}<\ln\dfrac{b}{a}<\dfrac{b-a}{a}$;　　(2) $|\sin x-\sin y|\leqslant|x-y|$;

(3) $|\arctan x-\arctan y|\leqslant|x-y|$;　　(4) $|\arcsin x-\arcsin y|\geqslant|x-y|$;

(5) 当 $x>0$ 时,$\dfrac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x$.

6. 求证 $4ax^3+3bx^2+2cx-a-b-c=0$ 在$(0,1)$内至少有一个根(提示:“若 $G'(x)=f(x)$,则称 $G$ 是 $f(x)$的一个原函数”,考察方程左端函数的原函数).

7. 设$\frac{a_0}{n+1}+\frac{a_1}{n}+\cdots+a_n=0$,求证方程 $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n=0$ 在$(0,1)$中至少有一个根.

8. 求证 $e^x=ax^2+bx+c$ 的根不超过三个.

9. 设 $f(x)$在$[a,b]$上可微,$b>a\geqslant 0$,试证$\exists c\in(a,b)$,使得

$$2c[f(b)-f(a)]=(b^2-a^2)f'(c).$$

10. 证明方程 $x^5+x-1=0$ 只有一个正根.

11. 若 $f(x)$在$(a,+\infty)$上可微,且 $f(a+0)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$,则$\exists\xi\in(a,+\infty)$,使得$f'(\xi)=0$.

12. 设函数 $f(x)$,$g(x)$在$(a,b)$上可微,$\forall x\in(a,b)$,$g(x)\neq 0$.且在$(a,b)$上

$$\begin{vmatrix} f(x) & g(x) \\ f'(x) & g'(x) \end{vmatrix}=0.$$

求证存在常数 $c$,使得 $f(x)=cg(x)$,$x\in(a,b)$.

13. 设函数 $f(x)$在$(-r,r)$上有 $n$ 阶导数,且$\lim\limits_{x\to 0}f^{(n)}(x)=l$,证明 $f^{(n)}(x)$在 0 点连续.

14. 若 $f(x)$在$[a,b]$上可导,且 $f'_+(a)\neq f'_-(b)$,$K$ 属于以 $f'_+(a)$,$f'_-(b)$为端点的开区间内,则$\exists c\in(a,b)$,使得 $f'(c)=K$.

15. 若 $f(x)$在区间 $I$ 上可导,且 $f'(x)\neq 0$,则 $f'(x)$在 $I$ 上同号.

## 3.2 洛必达法则

当 $x\to a$(或 $x\to+\infty$)时,若 $f(x)$与 $g(x)$都趋于零或都趋于无穷,这时比值$\frac{f(x)}{g(x)}$的极限分别称为$\frac{0}{0}$型不定式或$\frac{\infty}{\infty}$型不定式.所谓不定式是指:这时极限 $\lim\frac{f(x)}{g(x)}$可能存在,可能不存在.例如极限$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$与$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{|x|}$都是$\frac{0}{0}$型不定式,但前者存在,后者不存在.在极限存在的情况下,它们的极限不能直接用通常函数相除的极限运算法则来求,我们要寻找求这类极限的其他方法.本节利用微分中值定理导出确定不定式的值的方法.这个方法叫做洛必达法则.

**定理 3** 设函数 $f(x)$,$g(x)$在点 $a$ 的去心邻域 $\mathring{U}(a,\delta)$上有定义,若:

(1) $\lim\limits_{x\to a}f(x)=0$,$\lim\limits_{x\to a}g(x)=0$;

(2) $f(x)$,$g(x)$在去心邻域 $\mathring{U}(a,\delta)$上可导,且 $g'(x)\neq 0$;

(3) $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=K$($K$ 可为无穷).

则
$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=K.$$

定理 3 是说：当 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在时，极限 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 也存在，且等于 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$；当 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ 为无穷时，$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 也为无穷.

**证** 为应用柯西中值定理，定义 $f(a)=g(a)=0$. 这时 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在邻域 $U(a,\delta)$ 上连续，在去心邻域 $\mathring{U}(a,\delta)$ 上可导，且 $g'(x)\neq 0$. 设 $\forall x\in\mathring{U}(a,\delta)$，那么在以 $x$ 与 $a$ 为端点闭区间上满足柯西中值定理条件，因此有
$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}\quad(\xi\text{ 在 }x\text{ 与 }a\text{ 之间}).$$
令 $x\to a$，显然 $\xi\to a$，取极限得
$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{\xi\to a}\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=K.$$

定理是对函数的双侧极限来说的，但从其证明来看，若只考虑函数的右极限或左极限，则定理仍然成立.

**例 1** 求极限 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}{1-2\cos x}$.

**解** 这是 $\dfrac{0}{0}$ 型不定式. 定理 3 的条件显然满足，由洛必达法则得
$$\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}{1-2\cos x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}{2\sin x}=\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

**例 2** 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x^2}$.

**解** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{1+x}}{2x}=\infty$.

如果用一次洛必达法则后，极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ 仍是 $\dfrac{0}{0}$ 型不定式，且这时 $f'(x)$ 与 $g'(x)$ 能满足定理 3 中对 $f(x)$ 与 $g(x)$ 所要求的条件，则可再一次甚至多次应用洛必达法则，直到最后定出所求极限的值.

**例 3** 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}$.

**解** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{3x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{6x}=\dfrac{1}{6}$.

我们指出，对于 $x\to+\infty$(或 $x\to\infty$，$x\to-\infty$)时的 $\frac{0}{0}$ 型不定式，也有相应的洛必达法则 $\left(x\to+\infty\text{时}\frac{0}{0}\text{型不定式的洛必达法则的证明见附录}\right)$.

**例 4** 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{\pi}{2}-\arctan x}{\frac{1}{x}}$.

**解** $$\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{\pi}{2}-\arctan x}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{1+x^2}=1.$$

对 $x\to a$(或 $x\to\infty$ 等)的 $\frac{\infty}{\infty}$ 型不定式，也有相应的洛必达法则. 例如对于 $x\to a$ 时的 $\frac{\infty}{\infty}$ 型不定式，我们有下面的定理.

**定理 4** 设函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在点 $a$ 的去心邻域 $\mathring{U}(a,\delta)$ 上有定义. 若：

(1) $\lim\limits_{x\to a}g(x)=\infty$；

(2) $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $\mathring{U}(a,\delta)$ 上可导，且 $g'(x)\neq 0$；

(3) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=K$ ($K$ 为常数).

则 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=K$ (证明见附录).

**注** 在定理 4 的证明中一般没有用条件 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\infty$. 因此在条件(1)中，只需 $\lim\limits_{x\to a}g(x)=\infty$. 这样，以后应用起来较方便. 有时，在不知有条件 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\infty$ 时，也能应用此洛必达法则.

**定理 4′** 设函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在点 $a$ 的去心邻域 $\mathring{U}(a,\delta)$ 上有定义. 若：

(1) $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\infty$，$\lim\limits_{x\to a}g(x)=\infty$；

(2) $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $\mathring{U}(a,\delta)$ 上可导，且 $g'(x)\neq 0$；

(3) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=\infty$.

则 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\infty$(证明见附录).

如果将定理 4 与定理 4′中自变量的变化过程改为 $x\to+\infty$，或 $x\to-\infty$，或 $x\to\infty$，在相应的条件下，也有相应的结论.

**例 5** 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln^n x}{x^\mu}$，其中 $n$ 为正整数，$\mu>0$.

**解** 注意到 $\dfrac{\ln^n x}{x^\mu}=\left(\dfrac{\ln x}{x^{\mu/n}}\right)^n=\left(\dfrac{\ln x}{x^\lambda}\right)^n$，$\lambda=\dfrac{\mu}{n}>0$. 由定理 4 得

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^\lambda}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\lambda x^{\lambda-1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\lambda x^\lambda}=0.$$

所以所求极限为 0. 从而有 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^\mu}{\ln^n x}=+\infty$.

**例 6** 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^\mu}{a^x}(\mu>0,a>1)$.

**解** 取正整数 $n>\mu$，当 $x>1$ 时有不等式

$$\frac{x^n}{a^x}>\frac{x^\mu}{a^x}>0.$$

$\dfrac{x^n}{a^x}$是 $x\to+\infty$ 时的$\dfrac{\infty}{\infty}$型不定式，应用 $n$ 次洛必达法则得

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^n}{a^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{nx^{n-1}}{a^x\ln a}=\cdots=\lim_{x\to+\infty}\frac{n!}{a^x\ln^n a}=0.$$

由上述不等式得所求极限为 0. 从而有 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{a^x}{x^\mu}=+\infty$.

上面两个例子表示，当 $x\to+\infty$ 时，$a^x(a>1)$是比 $x^\mu(\mu>0)$高阶的无穷大，而 $x^\mu(\mu>0)$又是比 $\ln^n x(n>0)$高阶的无穷大. 这两个结论是很有用的.

除$\dfrac{0}{0}$与$\dfrac{\infty}{\infty}$不定式外，还有 $0\cdot\infty$，$\infty-\infty$，$0^0$，$\infty^0$，$1^\infty$ 型不等式，它们通常可化为$\dfrac{0}{0}$或$\dfrac{\infty}{\infty}$型不定式进行计算. 下面分别举例说明.

**例 7** 求 $\lim\limits_{x\to0^+}x^\lambda\ln x(\lambda>0)$.

**解** 因为 $\lim\limits_{x\to0^+}x^\lambda=0$，$\lim\limits_{x\to0^+}\ln x=\infty$，所以这是 $0\cdot\infty$型不定式，可化为$\dfrac{\infty}{\infty}$型不定式计算.

$$\lim_{x\to0^+}x^\lambda\ln x=\lim_{x\to0^+}\frac{\ln x}{x^{-\lambda}}=\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\lambda x^{-\lambda-1}}=\lim_{x\to0^+}\frac{x^\lambda}{-\lambda}=0.$$

**例 8** 求$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\tan x-\dfrac{1}{\cos x}\right)$.

**解** 这是$\infty-\infty$型不定式，可用通分化为$\dfrac{0}{0}$型不定式计算.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\tan x-\frac{1}{\cos x}\right)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x-1}{\cos x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{-\sin x}=0.$$

**例 9** 证明 $\lim\limits_{x\to0^+}x^x=1$.

**证** 用取对数法计算.

令 $y=x^x$，则 $\ln y=x\ln x$. 因为 $\lim\limits_{x\to0^+}\ln y=\lim\limits_{x\to0^+}x\ln x=0$(例 7 的结论)，所以

$$\lim_{x\to0^+}y=\lim_{x\to0^+}e^{\ln y}=e^0=1.$$

若 $u(x)>0$ 且 $\lim u(x)=0$，则有 $\lim u(x)^{u(x)}=\lim\limits_{u\to0^+}u^u=1$. 此结论可作为公式应用.

**例 10** 求 $\lim\limits_{x\to0^+}\sin x^{\tan x}$.

**解** $\lim\limits_{x\to0^+}\sin x^{\tan x}=\lim\limits_{x\to0^+}[\sin x^{\sin x}]^{\frac{\tan x}{\sin x}}$.

因为 $\lim\limits_{x\to0^+}\sin x^{\sin x}=1$，$\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\tan x}{\sin x}=1$，所以，原式$=1^1=1$.

**例 11** 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}x^{\sin\frac{1}{x}}$.

**解** 这是$\infty^0$ 型不定式，用取对数法计算. 令 $y=x^{\sin\frac{1}{x}}$，则

$$\ln y=\sin\frac{1}{x}\ln x,$$

由于 $\sin\dfrac{1}{x}\sim\dfrac{1}{x}(x\to+\infty)$，所以

$$\lim_{x\to+\infty}\sin\frac{1}{x}\ln x=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}=0,$$

所以

$$\lim_{x\to+\infty}y=\lim_{x\to+\infty}e^{\ln y}=e^0=1.$$

**例 12** 求极限 $A=\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{1-\cos x}}$.

**解** 这是 $1^\infty$ 型不定式，下面用洛必达法则结合重要极限 e 计算. $A=\lim\limits_{x\to0}\left(1+\dfrac{\sin x-x}{x}\right)^{\frac{1}{1-\cos x}}$，由于$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x-x}{x}=0$，且

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x-x}{x}\frac{1}{1-\cos x}=\lim_{x\to0}\frac{\sin x-x}{\frac{1}{2}x^3}=\lim_{x\to0}\frac{\cos x-1}{\frac{3}{2}x^2}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{-\sin x}{3x}=-\frac{1}{3}.$$

所以 $A=e^{-\frac{1}{3}}$.