第 8 章　多元函数微分学及其应用

在此以前，我们研究的函数都是一元函数. 但是，在实际问题中经常遇到几个自变量的情形. 因此，需要研究多元函数及多元函数的微积分.

本章讨论多元函数的微分学. 在这里，我们重点讨论二元函数，因为对二元函数研究的方法和结论都适用于三元函数以及 n 元函数，而且实际中出现的多元函数绝大多数是二元、三元的情形.

8.1　多元函数的基本概念

8.1.1　区域

多元函数的定义域主要是二维、三维空间中的区域. 下面介绍有关区域的一些概念.

1. 邻域

Oxy 平面上的点可用其坐标组成的二元数组 (x,y) 表示，这种全体点的集合称为 $\mathbb{R}^2$ 空间，即

$$\mathbb{R}^2 = \{(x,y) \mid x,y \in \mathbb{R}\}.$$

$Oxyz$ 空间直角坐标系全体点的集合称为 $\mathbb{R}^3$ 空间，即

$$\mathbb{R}^3 = \{(x,y,z) \mid x,y,z \in \mathbb{R}\}.$$

以后我们用 $\mathbb{R}^2$ 表示 Oxy 平面直角坐标系，用 $\mathbb{R}^3$ 表示 $Oxyz$ 空间直角坐标系.

设 $P_1(x_1,y_1)$，$P_2(x_2,y_2) \in \mathbb{R}^2$，则 P_1 与 P_2 的距离为

$$|P_1P_2| = \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}.$$

设点 $P_0(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$ 平面，平面上所有与 P_0 的距离小于正数 δ 的点集，称为点 P_0 的 δ 邻域（简称点 P_0 的邻域），记作 $U(P_0,\delta)$（简记作 $U(P_0)$），即

$$U(P_0,\delta) = \left\{P \,\middle|\, |PP_0| < \delta, P \in \mathbb{R}^2\right\}$$

或

$$U(P_0,\delta) = \{(x,y) \mid \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} < \delta\}.$$

点集 $U(P_0,\delta)\backslash\{P_0\}$ 称为点 P_0 的空心邻域，记作 $\mathring{U}(P_0,\delta)$，即

$$\mathring{U}(P_0,\delta) = \left\{P \,\middle|\, 0 < |PP_0| < \delta, P \in \mathbb{R}^2\right\}.$$

2. 区域

设集合 $E\subset\mathbb{R}^2$，$P\in E$，若存在点 P 的邻域 $U(P)\subset E$，则称 P 为集合 E 的**内点**(图 8.1).若点集 E 的点都是 E 的内点，则称 E 是**开集**.例如点 P_0 的邻域 $U(P_0)$ 与空心邻域 $\mathring{U}(P_0)$ 都是开集.

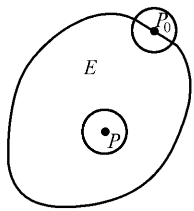

图 8.1

设集合 $E\subset\mathbb{R}^2$，若对 E 中任意二点，都可用一条完全在 E 中的折线连接，则称 E 是连通的.连通的开集称为**开区域**，简称**区域**.显然邻域与空心邻域也都是区域.

设集合 $E\subset\mathbb{R}^2$，若点 P_0 的任何邻域 $U(P_0)$ 中既有属于 E 的点，也有不属于 E 的点，则称 P_0 为 E 的**边界点**(图 8.1).E 的边界点的全体称为 E 的**边界**，记作 ∂E.例如邻域 $U(P_0,\delta)$ 的边界为以 P_0 为圆心，以 δ 为半径的圆：$\{P \mid |P_0P|=\delta\}$.

开区域 D 与其边界 ∂D 的并称为**闭区域**，记作 $\overline{D}$.

3. 聚点

设集合 $E\subset\mathbb{R}^2$，$P\in\mathbb{R}^2$，若点 P 的任何邻域 $U(P)$ 中都有 E 的无穷多个点，则称 P 是集合 E 的**聚点**，显然区域 D 的内点与边界点都是 D 的聚点.E 的聚点可以属于 E，也可以不属于 E.

4. *n* 维空间

与二维空间、三维空间类似，我们有 n 维空间的概念.n 元数组 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的全体称为 ***n* 维空间**，记作 $\mathbb{R}^n$.即

$$\mathbb{R}^n \overset{\text{def}}{=\!=} \{(x_1,x_2,\cdots,x_n) \mid x_i\in\mathbb{R},i=1,2,\cdots,n\}.$$

点 $P(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的第 i 个数 x_i 称为点 P 的第 i 个坐标 $(i=1,2,\cdots,n)$.

n 维空间 $\mathbb{R}^n$ 中的两点 $P(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 与 $Q(y_1,y_2,\cdots,y_n)$ 之间的距离规定为

$$|P-Q| \overset{\text{def}}{=\!=} \sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+\cdots+(x_n-y_n)^2}.$$

有了 $\mathbb{R}^n$ 中距离的概念后，前面 $\mathbb{R}^2$ 空间中的邻域、内点、边界点、区域、闭区域以及聚点等一系列概念都可推广到 $\mathbb{R}^n$ 空间中去.例如 $\mathbb{R}^n$ 中点 P_0 的 δ 邻域为

$$U(P_0,\delta)=\left\{P \,\middle|\, |P-P_0|<\delta,P\in\mathbb{R}^n\right\}.$$

8.1.2 多元函数的概念

例 1 一定量的理想气体，其压强 p、容积 V、温度 T 之间有关系式

$$p=R\frac{T}{V}\quad (T>T_0,V>0,R \text{ 为常数}).$$

这个方程表示三个变量 p,V,T 之间的依赖关系.当 T,V 的值分别给定时，p 就有一个确

定的值与之对应.所以变量 p 是两个变量的函数.

例 2 三角形的面积 S 与三角形的两边 b,c 以及这两边的夹角 A 之间的关系式(图 8.2)为

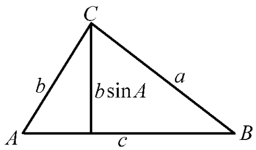

图 8.2

$$S=\frac{1}{2}bc\sin A\quad(b>0,c>0,0<A<\pi).$$

当 b,c,A 的值确定后,S 的值也随之确定.这里,变量 S 是三个变量的函数.

以上二例的具体含义各不相同,但都反映二维点集或三维点集到数有一种对应关系,我们舍去它的具体含义,把它们抽象出来就形成多元函数的概念.

定义 设 D 是 n 维空间$\mathbb{R}^n$中的非空子集,若对 D 中任意点 P,可对应到唯一的实数 u,则这些对应所构成的对应法则 f 叫做函数.记作

$$f:D\to\mathbb{R}$$

或

$$u=f(P)\quad P\in D.$$

其中集合 D 称为函数 f 的定义域,它也记作 D_f.定义域 D_f 中点 P 所对应的数 u 记作 $f(P)$,称为点 P 的函数值.函数值的全体称为函数 f 的值域,记作 R_f 或 $f(D_f)$.因定义域 D 是 n 维点集,n 维点依赖于 n 个坐标变量,所以此函数称为 n 元函数.

特别地,若 $D\subset\mathbb{R}^2$,点 P 的坐标记作(x,y),这时函数 f 称为二元函数.它常记作

$$z=f(x,y)\quad(x,y)\in D.$$

若 $D\subset\mathbb{R}^3$,这时函数 f 称为三元函数,它常记作

$$u=f(x,y,z),\quad(x,y,z)\in D.$$

设二元函数 $z=f(x,y)$,$(x,y)\in D$.在空间直角坐标系中,对 D 中每一点 $P(x,y)$,依照函数关系 f,对应到$\mathbb{R}^3$空间中一点 $M(x,y,f(x,y))$.空间直角坐标系中这些点 M 的全体称为**二元函数 f 的图形**.一般说来,它是一张曲面(图 8.3).

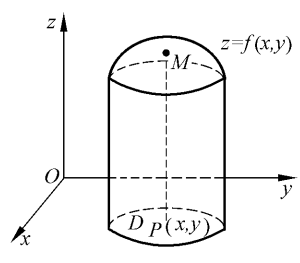

图 8.3

例 3 求函数 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$的定义域,并作函数的图形.

解 定义域为 Oxy 平面上带圆周的闭圆域$\{(x,y)|x^2+y^2\leqslant 1\}$.函数的图形是上半球面(图 8.4).

例 4 求函数 $z=x^2+y^2$ 的定义域,并作函数的图形.

解 定义域是$\mathbb{R}^2$平面.函数的图形是旋转抛物面(图 8.5).

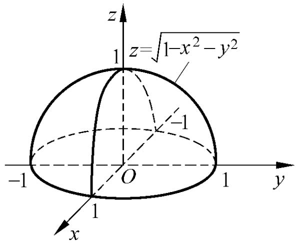

图　8.4

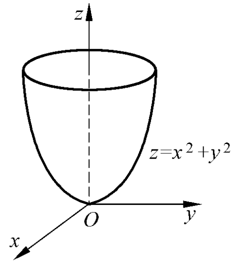

图　8.5

8.1.3　多元函数的极限

一元函数的极限可完全类似地推广到多元函数中去.

设 f 为多元函数,当点 P 在 $\mathbb{R}^n$ 空间中无限趋近 P_0(但 $P\neq P_0$)时,如果相应的函数值 $f(P)$ 能无限接近常数 A,则称 n 元函数 f 在点 P_0 的极限为 A. 其中 P 趋近 P_0 的程度用点 P 与 P_0 的距离 $|P-P_0|$ 的大小来表示. n 元函数的极限用 ε-δ 的语言可叙述如下.

定义　设 n 元函数 $u=f(P)$ 的定义域为 D,P_0 为 D 的聚点,若 $\forall\varepsilon>0$,$\exists\delta>0$,当 $0<|P-P_0|<\delta$ 且 $P\in D$ 时,都有不等式

$$|f(P)-A|<\varepsilon,$$

则称函数 f 在 P_0 点的极限为 A. 记作

$$\lim_{P\to P_0}f(P)=A \quad 或 \quad f(P)\to A(P\to P_0).$$

特别地,对二元函数 $z=f(x,y)$,$(x,y)\in D$,f 在点 (x_0,y_0) 的极限记作

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}f(x,y)=A.$$

例 5　讨论函数 $f(x,y)=\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}$ 在 $(0,0)$ 的极限问题.

解　对任意的实数 k,显然有

$$\lim_{\substack{y=kx\\ x\to 0}}f(x,y)=\lim_{x\to 0}\frac{kx^3}{x^4+k^2x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{kx}{x^2+k^2}=0,$$

且 $\lim\limits_{\substack{x=0\\ y\to 0}}f(x,y)=0$,但

$$\lim_{\substack{y=x^2\\ x\to 0}}f(x,y)=\lim_{x\to 0}\frac{x^4}{x^4+x^4}=\frac{1}{2}.$$

这就是说,当点 (x,y) 沿任意射线趋于 $(0,0)$ 时,极限都是 0;但沿抛物线 $y=x^2$ 趋于 $(0,0)$ 时,极限不是 0. 因此无法说函数 f 在点 $(0,0)$ 处有极限.

从此例看出，二元函数 $f(x,y)$ 在某点 (x_0,y_0) 有极限比一元函数的情况复杂得多，它要求点 (x,y) 沿任意路径趋于 (x_0,y_0) 时，都有同一极限. 我们说二元函数的极限是全面极限. 显然 n 元函数的极限也是全面极限.

关于多元函数的极限，也有与一元函数类似的求极限的运算法则.

例 6 求 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 3}}\dfrac{e^{xy}-1}{x}$.

解 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 3}}\dfrac{e^{xy}-1}{x}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 3}}\dfrac{e^{xy}-1}{xy}\cdot y=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 3}}\dfrac{e^{xy}-1}{xy}\cdot\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 3}}y=1\times 3=3.$

8.1.4 多元函数的连续性

定义 设 n 元函数 $f(P)$ 的定义域为 D，$P_0\in D$ 且是 D 的聚点. 若

$$\lim_{P\to P_0}f(P)=f(P_0),$$

则称 n 元函数 f 在点 P_0 处**连续**.

设 D 为区域或闭区域，若函数 f 在 D 的各点处都连续，则称函数 f **在 D 上连续**，或称 f 是 D 上的连续函数.

设函数 f 的定义域为 D，P_0 为 D 的聚点，若 f 在 P_0 点不连续，则称 P_0 为函数 f 的**间断点**.

与一元函数类似，多元连续函数也有四则运算定理与复合运算定理. 它是指，若 f 是有限个多元连续函数经四则运算与复合运算得到的函数，则 f 在有定义的区域或闭区域上连续.

定义 分别以 x 或 y 作为自变量的基本初等函数与常数经有限次四则运算及复合运算得到的函数叫做以 x,y 为自变量的**二元初等函数**.

例如，$\dfrac{x^2+xy+y^2}{x-\sin(xy+1)}$，$e^x\ln(1+xy)$ 都是二元初等函数.

类似地有三元初等函数与 n 元初等函数的概念.

因为以 x 或 y 为自变量的一元基本初等函数，看成以 x,y 为自变量的二元函数也是连续的，它们经四则运算与复合运算得到的二元初等函数仍能保持连续性. 因此可得到下面的结论.

定理 1 以 x,y 为自变量的二元初等函数以及一切多元初等函数在有定义的区域或闭区域上连续.

由多元初等函数 f 的连续性可知，若点 P_0 在函数的定义区域或闭区域上，函数在点 P_0 的极限值就是函数在该点的函数值，即

$$\lim_{P\to P_0}f(P)=f(P_0).$$

例 7 求函数极限 $I=\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to 1}}\dfrac{\ln x+y^2\sin xy}{e^x\sin(x^2+y^2)}$.

解 此函数显然是二元初等函数，其定义域为除原点的区域 D 上，而 $(2,1)\in D$，所以

$$I=\frac{\ln x+y^2\sin xy}{e^x\sin(x^2+y^2)}\bigg|_{\substack{x=2\\ y=1}}=\frac{\ln 2+\sin 2}{e^2\sin 5}.$$

例 8 求极限 $I=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{\sqrt{xy+1}-1}{xy}$.

解 $I=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{xy+1-1}{xy(\sqrt{xy+1}+1)}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{1}{\sqrt{xy+1}+1}=\dfrac{1}{2}$.

8.1.5 有界闭区域上连续函数的性质

在有界闭区域上的连续函数也有在闭区间上连续函数的类似性质.

设集合 $E\subset\mathbb{R}^n$，O 为 $\mathbb{R}^n$ 中的原点（即坐标都为 0），若数集合 $\{|P-O|\,|\,P\in E\}$ 有界，则称 E 为有界集. 若闭区域 D 是有界集，则称 D 是有界闭区域.

定理 2（有界性与最值定理） 若函数 $f(P)$ 在有界闭区域 D 上连续，则 $f(P)$ 在 D 上有界，且能在 D 上取到最大值与最小值. 即存在 $P_1,P_2\in D$，使得

$$f(P_1)\leqslant f(P)\leqslant f(P_2),\quad \forall P\in D.$$

定理 3（介值定理） 若函数 f 在区域或闭区域 D 上连续，$\forall P_1,P_2\in D$，设 $f(P_1)<f(P_2)$，则对 $f(P_1)$ 与 $f(P_2)$ 中的任意实数 l，在 D 中存在 P_0，使得

$$f(P_0)=l.$$

习题 8.1

1. 根据下列对应关系，写出函数式：

(1) 对平面上每一点 (x,y) 对应到该点的坐标之和；

(2) 对平面上每一点 (x,y) 对应到该点到 y 轴的距离；

(3) 对 n 维空间 $\mathbb{R}^n$ 中每一点 $P(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 对应到该点到原点 $O(0,0,\cdots,0)$ 的距离.

2. 下列集合 D 是区域还是闭区域？并画出 D 的图形：

(1) $D=\{(x,y)\,|\,x>0,y>0,x^2+y^2<\mathbb{R}^2\}$；

(2) $D=\{(x,y)\,|\,a^2\leqslant x^2+y^2\leqslant b^2,b>a>0\}$；

(3) $D=\{(x,y)\,|\,x^2<y<\sqrt{x}\}$；

(4) $D=\{(x,y)\,|\,x^2+x<y<x+1\}$.

3. 已知函数 $f(x,y)=x^2+y^2-xy\tan\left(\dfrac{x}{y}\right)$，试求 $f(tx,ty)$.

4. 求下列各函数的定义域，并画出其定义域的图形：

(1) $z=\ln(y^2-2x+1)$；

(2) $z=\dfrac{\sqrt{4x-y^2}}{\ln(1-x^2-y^2)}$；

(3) $z=\sqrt{x-\sqrt{y}}$；

(4) $u=\sqrt{R^2-x^2-y^2-z^2}+\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2-r^2}}\ (R>r>0)$.

5. 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(x+y)\sin\dfrac{1}{x}\cos\dfrac{1}{y}$；

(2) $\lim\limits_{\substack{x\to \infty\\ y\to \infty}}\dfrac{1+x^2+y^2}{x^2+y^2}$；

(3) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$；

(4) $\lim\limits_{\substack{x\to +\infty\\ y\to +\infty}}\left(\dfrac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2}$；

(5) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{2-\sqrt{xy+4}}{xy}$；

(6) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2\mathrm{e}^{x^2y^2}}$；

(7) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 0}}\dfrac{\ln(x+\mathrm{e}^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$；

(8) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 1\\ z\to 2}}\mathrm{e}^{xy}\sin\left(\dfrac{\pi}{4}yz\right)$.

6. 证明下列极限不存在：

(1) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x+y}{x-y}$；

(2) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^2+y^2}{x^2+y^2+(x-y)^2}$.

7. 函数 $z=\dfrac{y^2+3x}{y^2-2x}$在何处是间断的？

8.2 偏 导 数

前面我们研究了多元函数的极限与连续性. 在许多实际问题中，需要研究多元函数对某一自变量的变化率. 因此，我们必须把一元函数的求导问题推广到多元函数的情形.

8.2.1 偏导数的概念与计算

定义 设函数 $z=f(x,y)$在点(x_0,y_0)的某一邻域上有定义，将 y 固定为 y_0，给 x_0 以改变量 Δx，于是函数就有改变量

$$f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0),$$

如果极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$$

存在,则此极限值称为函数 $z=f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 点对 x 的**偏导数**(或**偏微商**),记作

$$f_x(x_0,y_0),\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x} \quad 或 \quad z_x\big|_{(x_0,y_0)},\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}.$$

完全类似地可以给出函数 $z=f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 点对 y 的偏导数的概念,它记作

$$f_y(x_0,y_0),\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y} \quad 或 \quad z_y\big|_{(x_0,y_0)},\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)}.$$

即 $f_y(x_0,y_0)\xlongequal{\text{def}}\lim\limits_{\Delta y\to 0}\dfrac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y}$.

上式也可写作

$$f_y(x_0,y_0)\xlongequal{\text{def}}\lim_{y\to y_0}\frac{f(x_0,y)-f(x_0,y_0)}{y-y_0}.$$

如果函数 $z=f(x,y)$ 在区域 D 内每一点 (x,y) 处都有对 x 的偏导数 $f_x(x,y)$,则这个偏导数也是 x,y 的二元函数,它简记作 $\dfrac{\partial f}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial x},f_x,z_x$.

类似地,此函数对 y 的偏导数简记作 $\dfrac{\partial f}{\partial y},\dfrac{\partial z}{\partial y},f_y,z_y$.

偏导数的概念还可以推广到一般的 n 元函数中去.例如三元函数 $f(x,y,z)$ 在点 (x,y,z) 对 x 的偏导数为

$$f_x(x,y,z)\xlongequal{\text{def}}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x,y,z)-f(x,y,z)}{\Delta x}.$$

由定义容易了解,函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处对 x 的偏导数就是一元函数 $f(x,y_0)$ 在点 x_0 处的导数.因此,求函数 $f(x,y)$ 对 x 的偏导数时,只要把 y 看作常数,求 $f(x,y)$ 对 x 的导数.同样,求 $f(x,y)$ 对 y 的偏导数时,只要把 x 看作常数,求 $f(x,y)$ 对 y 的导数.正是由于这样,关于一元函数微分法的运算法则可以全部搬到多元函数上来.

例 1　求函数 $z=x^2y+y^2$ 在点 $(2,3)$ 处的偏导数.

解　$\dfrac{\partial z}{\partial x}=2xy,\dfrac{\partial z}{\partial y}=x^2+2y$,所以

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(2,3)}=12,\quad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(2,3)}=10.$$

例 2　求函数 $z=x^y+\ln x\sin(xy)\ (x>0)$ 的偏导数.

解　$z_x=yx^{y-1}+\dfrac{1}{x}\sin(xy)+y\cos(xy)\ln x$,

$z_y=x^y\ln x+x\cos(xy)\ln x$.

例 3　一定量的理想气体,其压强 p、容积 V 和温度 T 之间满足方程 $pV=RT$($T>T_0,V>0,R$ 是常数).求 $\dfrac{\partial p}{\partial V},\dfrac{\partial V}{\partial T},\dfrac{\partial T}{\partial p}$,并验证热力学公式

$$\frac{\partial p}{\partial V}\cdot\frac{\partial V}{\partial T}\cdot\frac{\partial T}{\partial p}=-1.$$

解 对于 $p=\frac{RT}{V}$,得$\frac{\partial p}{\partial V}=-\frac{RT}{V^2}$. 对于 $V=\frac{RT}{p}$,得$\frac{\partial V}{\partial T}=\frac{R}{p}$. 对于 $T=\frac{pV}{R}$,得$\frac{\partial T}{\partial p}=\frac{V}{R}$. 因此

$$\frac{\partial p}{\partial V}\cdot\frac{\partial V}{\partial T}\cdot\frac{\partial T}{\partial p}=-\frac{RT}{V^2}\cdot\frac{R}{p}\cdot\frac{V}{R}=-\frac{RT}{pV}=-1.$$

在这个运算过程中,若左端偏导数符号的分子、分母相消,就会得到“1=-1”的荒谬结果. 这是因为偏导数$\frac{\partial p}{\partial V}$并不是$\partial p$ 与∂V 之商. 单独的∂p 是没有意义的.

例 4 验证函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

在(0,0)点的偏导数都为 0,但在点(0,0)不连续.

证 由于$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{0-0}{\Delta x}=0$,即 $f_x(0,0)=0$,同理 $f_y(0,0)=0$. 但

$$\lim_{\substack{y=x\\(x,y)\to(0,0)}}f(x,y)=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2+x^2}=\frac{1}{2}\neq f(0,0).$$

所以 f 在(0,0)点不连续.

例 5 求三元函数 $u=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$的偏导数 u_x,u_y,u_z.

解 求 u_x 时,只要在函数式中把 y 和 z 都看作常数,对 x 求导数就可以了. 因此

$$u_x=-\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)^{-3/2}(2x)=\frac{-x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}.$$

类似地有

$$u_y=\frac{-y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}},\quad u_z=\frac{-z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}.$$

8.2.2 高阶偏导数

设函数 $z=f(x,y)$在区域 D 内有偏导数 $f_x(x,y)$,$f_y(x,y)$,它们仍是 x,y 的函数. 如果函数 $f_x(x,y)$,$f_y(x,y)$在 D 内任意点 $P(x,y)$处仍有偏导数,它们的偏导数就叫做函数 $z=f(x,y)$在点 $P(x,y)$处的**二阶偏导数**,这样的偏导数共有四个,分别记作

$$f_{x^2}(x,y),\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\quad 或\quad z_{x^2},\frac{\partial^2 z}{\partial x^2};\quad f_{xy}(x,y),\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\quad 或\quad z_{xy},\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y};$$

$$f_{yx}(x,y),\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\quad 或\quad z_{yx},\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x};\quad f_{y^2}(x,y),\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\quad 或\quad z_{y^2},\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

注意，$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$是指$\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)$.

类似地可以定义 $n(n\geqslant 3)$阶偏导数.

若函数 $f(x,y)$在区域 D 上所有的 n 阶偏导数都连续，则记作 $f\in C^n(D)$.

函数对不同变量的高阶偏导数称为混合偏导数. 例如 z_{xy}，z_{yx}，u_{xyz} 等都是混合偏导数.

例 6　求 $z=x^4y^3+x^4+y^4$ 的二阶混合偏导数.

解　$z_x=4x^3y^3+4x^3$，　$z_y=3x^4y^2+4y^3$，　$z_{xy}=12x^3y^2$，　$z_{yx}=12x^3y^2$.

从上例可看出，函数的两个混合偏导数是相等的，即 $z_{xy}=z_{yx}$. 这不是偶然的. 事实上，我们有下述定理.

定理 4　如果函数 $z=f(x,y)$的两个二阶混合偏导数$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$与$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$在区域 D 内连续，那么在该区域内它们相等.

换句话说，二阶混合偏导数在连续的条件下与求导的次序无关. 定理 4 的证明作为下一章二重积分中的习题.

关于三元函数的混合偏导数，如果它们只是对自变量求导的次序不同，那么也有类似的定理.

例 7　验证函数 $u=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$满足偏微分方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0. \tag{8.1}$$

解　由于$\dfrac{\partial u}{\partial x}=-x(x^2+y^2+z^2)^{-3/2}$，从而

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}&=-(x^2+y^2+z^2)^{-3/2}+3x^2(x^2+y^2+z^2)^{-5/2}\\&=-r^{-3}+3x^2r^{-5},\end{aligned}$$

其中 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$. 由函数对自变量的对称性得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-r^{-3}+3y^2r^{-5},\quad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=-r^{-3}+3z^2r^{-5}.$$

所以

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=-3r^{-3}+3(x^2+y^2+z^2)r^{-5}=0.$$

方程(8.1)叫做拉普拉斯方程. 等式左边可写成

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)u.$$

$\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$可看作对函数 u 的一种运算符号，它用“Δ”表示，叫做拉普拉斯算子. 这样，方程(8.1)可简记作

$$\Delta u = 0.$$

例 8 设 $f(x,y)=\begin{cases} e^{-1/(x^2+y^2)}, & x^2+y^2\neq 0, \\ 0, & x^2+y^2=0. \end{cases}$ 求 $f_{x^2}(0,0)$.

解 当 $x^2+y^2\neq 0$ 时，$f_x(x,y)=e^{-1/(x^2+y^2)}\frac{2x}{(x^2+y^2)^2}$.

$$f_x(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}e^{-1/x^2}\xlongequal{令\frac{1}{x}=t}\lim_{t\to\infty}\frac{t}{e^{t^2}}=0.$$

于是

$$\begin{aligned} f_{x^2}(0,0) &=\lim_{x\to 0}\frac{f_x(x,0)-f_x(0,0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{2}{x^3}e^{-1/x^2}}{x} \\ &=\lim_{x\to 0}\frac{2}{x^4}e^{-1/x^2}\xlongequal{令\frac{1}{x^2}=t}\lim_{t\to+\infty}\frac{2t^2}{e^t}=0. \end{aligned}$$

习题 8.2

1. 求下列函数的一阶偏导数：

(1) $z=x^4+y^4-4x^2y^2$； (2) $z=xy+(x/y)$；

(3) $z=x\sin(x+y)$； (4) $z=\arctan(x/y)$；

(5) $u=(x/y)^z$； (6) $u=z^{xy}$；

(7) $u=\tan\frac{x^2}{y}$.

2. 求下列指定点的偏导数：

(1) $z=x+(y-1)\arcsin\sqrt{x/y}$，求 $z_x(x,1)$；

(2) $z=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$，求 $z_x(1,0)$，$z_y(0,1)$.

3. $z=\arctan\frac{x+y}{1+xy}$，求 $z_x(0,0)$，$z_y(1,1)$.

4. 证明函数

$$f(x,y)=\begin{cases} \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0), \\ 0, & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

在(0,0)点连续,但 $f_x(0,0)$不存在.

5. 设 $x=r\cos\theta,y=r\sin\theta$,求雅可比行列式 $\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r}, & \dfrac{\partial y}{\partial r} \\ \dfrac{\partial x}{\partial \theta}, & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix}$ 的值.

6. 设 $u=\arctan(2x-t)$,证明 $u_{x^2}+2u_{xt}=0$.

7. 设 $u=u(x,y),v=v(x,y)$在区域 D 上有二阶连续偏导数,且一阶偏导数满足方程

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}.$$

证明:$\Delta u=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,\Delta v=0$.

8. 设 $u=x\ln(x+y)$,求 u_{x^2y}.

8.3 全微分及其应用

8.3.1 全微分的概念

设二元函数 $z=f(x,y)$中,变量 x 有改变量 Δx,变量 y 有改变量 Δy,则

$$\Delta z=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y) \tag{8.2}$$

称为函数 f 在点(x,y)处的**全增量**.在实际问题中常要估计全增量的大小,在分析全增量的主要部分的量中将引出全微分的概念.

定义　设函数 $z=f(x,y)$在点(x,y)的邻域上有定义.若 f 在点(x,y)的全增量(8.2)式可表示为

$$\Delta z=A\Delta x+B\Delta y+o(\rho)\quad(\rho\to 0).$$

其中 A,B 不依赖于 $\Delta x,\Delta y$,而仅与 x,y 有关,其中 $\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$.则称函数 f 在点(x,y)处可微,而 $A\Delta x+B\Delta y$ 称为函数 f 在点(x,y)的**全微分**.记作 $\mathrm{d}f(x,y)$,或简记作 $\mathrm{d}f,\mathrm{d}z$.即

$$\mathrm{d}f=\mathrm{d}z=A\Delta x+B\Delta y.$$

如果函数在区域 D 内各点处都可微,则称这函数**在 D 内是可微的**.

从全微分定义易知,当函数 f 在点 $P(x,y)$可微时,则函数 f 在(x,y)点连续.事实上我们有

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\Delta z=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}[A\Delta x+B\Delta y+o(\rho)]=0.$$

8.3.2 可微的必要条件与充分条件

定理 5 若函数 f 在点(x,y)可微,则函数 f 在点(x,y)的两个偏导数存在,且

$$f_x(x,y)=A,\quad f_y(x,y)=B.$$

即

$$\mathrm{d}f(x,y)=f_x(x,y)\Delta x+f_y(x,y)\Delta y. \tag{8.3}$$

证 设 $\Delta y=0$,这时 $\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}=|\Delta x|$,则(8.3)式变为

$$f(x+\Delta x,y)-f(x,y)=A\Delta x+o(|\Delta x|)\quad(\Delta x\to 0).$$

上式两边除以 Δx,并令 $\Delta x\to 0$,有

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(A+\frac{o(\Delta x)}{\Delta x}\right)=A.$$

即 $f_x(x,y)=A$. 同理 $f_y(x,y)=B$. 从而(8.3)式得证.

以上讨论说明,函数的偏导数存在是全微分存在的必要条件. 但是,并不是充分条件. 例如,由 8.2.1 节例 4 知,函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

在点(0,0)的两个偏导数都为 0,但它在点(0,0)不连续,当然更不可微.

但是,如果函数的偏导数连续,就可推出函数的全微分存在. 这就是下面的定理.

定理 6 如果函数 $z=f(x,y)$在点(x_0,y_0)的两个偏导数连续,则函数 $f(x,y)$在点(x_0,y_0)可微.

证 函数 $z=f(x,y)$在点(x_0,y_0)的全增量可用减一项加一项的方法改写为

$$\begin{aligned}\Delta z&=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)\\&=[f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0+\Delta y)]\\&\quad+[f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)].\end{aligned} \tag{8.4}$$

由条件知,函数在点(x_0,y_0)的某邻域内两个偏导数都存在. 固定 $y_0+\Delta y$,一元函数 $f(x,y_0+\Delta y)$在以 $x_0,x_0+\Delta x$ 为端点的区间上应用拉格朗日公式得

$$\begin{aligned}&f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0+\Delta y)\\&=f_x(x_0+\theta_1\Delta x,y_0+\Delta y)\Delta x,\quad \theta_1\in(0,1).\end{aligned} \tag{8.5}$$

同理可得

$$f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)=f_y(x_0,y_0+\theta_2\Delta y)\Delta y,\quad \theta_2\in(0,1). \tag{8.6}$$

将(8.5)式和(8.6)式代入(8.4)式得

$$\Delta z=f_x(x_0+\theta_1\Delta x,y_0+\Delta y)\Delta x+f_y(x_0,y_0+\theta_2\Delta y)\Delta y.$$

令

$$\alpha = f_x(x_0+\theta_1\Delta x, y_0+\Delta y) - f_x(x_0, y_0), \tag{8.7}$$

$$\beta = f_y(x_0, y_0+\theta_2\Delta y) - f_y(x_0, y_0). \tag{8.8}$$

由偏导数在点(x_0, y_0)的连续性可得，当 $\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\to 0$ 时 $\alpha\to 0, \beta\to 0$.

利用(8.7)式和(8.8)式与(8.5)式和(8.6)式，于是有

$$\Delta z = f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y,$$

而

$$\left|\frac{\alpha\Delta x+\beta\Delta y}{\rho}\right| \leqslant |\alpha| + |\beta| \to 0 \quad (\rho\to 0).$$

所以 $\alpha\Delta x+\beta\Delta y = o(\rho)$ $(\rho\to 0)$. 因此

$$\Delta z = f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y + o(\rho) \quad (\rho\to 0),$$

即函数 f 在(x_0, y_0)点可微.

我们把自变量 x 与 y 的全微分分别规定为自变量的改变量 Δx 与 Δy，即 $\mathrm{d}x=\Delta x$，$\mathrm{d}y=\Delta y$. 这时函数 z 的全微分可写成

$$\mathrm{d}z = f_x\mathrm{d}x + f_y\mathrm{d}y.$$

例 1 求函数 $z=\sin(x^2+y^2)$的全微分.

解 $z_x=2x\cos(x^2+y^2)$，$z_y=2y\cos(x^2+y^2)$，所以

$$\mathrm{d}z = 2x\cos(x^2+y^2)\mathrm{d}x + 2y\cos(x^2+y^2)\mathrm{d}y.$$

例 2 求函数 $z=x^y$ 在点(1,1)处的全微分.

解 $z_x=yx^{y-1}$，$z_y=x^y\ln x$，所以

$$\mathrm{d}z\big|_{(1,1)} = (yx^{y-1}\mathrm{d}x + x^y\ln x\mathrm{d}y)\big|_{\substack{x=1\\y=1}} = \mathrm{d}x.$$

类似地也有三元函数 $u=f(x,y,z)$的可微概念和可微的必要条件与充分条件.

例 3 求 $u=x^2y^2z^2$ 的全微分.

解 $u_x=2xy^2z^2$，$u_y=2yx^2z^2$，$u_z=2zx^2y^2$. 所以

$$\mathrm{d}u = 2xyz(yz\mathrm{d}x + xz\mathrm{d}y + xy\mathrm{d}z).$$

8.3.3* 全微分在近似计算中的应用

由全微分的特性我们知道，如果二元函数 $z=f(x,y)$可微，当自变量 x,y 的增量 $\Delta x,\Delta y$ 的绝对值都很小时，就有近似等式

$$\Delta z \approx \mathrm{d}z = f_x(x,y)\Delta x + f_y(x,y)\Delta y, \tag{8.9}$$

它也可写成

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y) \approx f(x,y) + f_x(x,y)\Delta x + f_y(x,y)\Delta y. \tag{8.10}$$

与一元函数微分的应用相类似，我们可以利用(8.9)式或(8.10)式对二元函数作近似计算和误差估计. 举例如下.

例 4 有一圆柱体，受压后发生形变，它的半径由 20 cm 增大到 20.05 cm，高度由

100 cm减小到 99 cm. 求此圆柱体体积变化的近似值.

解 设圆柱体的半径、高和体积依次为 r,h,V，则有 $V=\pi r^2 h$. 记 r,h,V 的改变量分别为 $\Delta r,\Delta h,\Delta V$，则有

$$\Delta V \approx \mathrm{d}V = V_r\Delta r + V_h\Delta h = 2\pi rh\Delta r + \pi r^2\Delta h.$$

把 $r=20,h=100,\Delta r=0.05,\Delta h=-1$ 代入，得

$$\Delta V \approx 2\pi\times 20\times 100\times 0.05+\pi\times 20^2\times(-1) = -200\pi\ \mathrm{cm}^3.$$

即此圆柱体在受压后体积约减少了 $200\pi\ \mathrm{cm}^3$.

例 5 求 $\ln(\sqrt[3]{1.03}+\sqrt[4]{0.98}-1)$的近似值.

解 考察函数 $f(x,y)=\ln(\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{y}-1)$，容易求得 $f(x,y)$的全微分为

$$\mathrm{d}f(x,y) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{y}-1}\left(\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}\Delta x+\frac{1}{4}y^{-\frac{3}{4}}\Delta y\right).$$

对于函数 $f(x,y)$，取 $x_0=1,y_0=1,\Delta x=0.03,\Delta y=-0.02$，于是有

$$\begin{aligned}\ln(\sqrt[3]{1.03}+\sqrt[4]{0.98}-1) &= f(1.03,0.98)\approx f(1,1)+\mathrm{d}f(1,1)\\ &=\ln 1+\frac{1}{3}\times 0.03-\frac{1}{4}\times 0.02 = 0.005.\end{aligned}$$

若自变量 x,y 可以直接度量或计算，而依赖于 x,y 的量 u 由公式 $u=f(x,y)$来确定，且当度量 x 与 y 时，产生的误差分别是 Δx 与 Δy. 那么当用实际度量的量 x 和 y 算出函数 $f(x,y)$作为 $f(x+\Delta x,y+\Delta y)$的近似值时，所引起量 u 的绝对误差与相对误差分别是 $|\Delta u|$ 与 $\left|\frac{\Delta u}{u}\right|$. 但当 $|\Delta x|,|\Delta y|$都很小时，由于 $\Delta u\approx \mathrm{d}u$，如果已知 $|\Delta x|\leqslant\delta x,|\Delta y|\leqslant\delta y$（即量 x,y 的最大绝对误差分别为 $\delta x,\delta y$），则有

$$|\Delta u|\approx|f_x(x,y)\Delta x+f_y(x,y)\Delta y|\leqslant|f_x(x,y)|\delta x+|f_y(x,y)|\delta y,$$

$$\left|\frac{\Delta u}{u}\right|\approx\left|\frac{f_x(x,y)\Delta x+f_y(x,y)\Delta y}{f(x,y)}\right|\leqslant\frac{|f_x(x,y)|\delta x+|f_y(x,y)|\delta y}{|f(x,y)|}.$$

所以，可以分别用上面两式的右端作为近似值 $f(x,y)$的最大绝对误差 δu 和最大相对误差 $\delta u/|u|$. 即

$$\delta u = |f_x(x,y)|\delta x+|f_y(x,y)|\delta y,$$

$$\frac{\delta u}{|u|} = \frac{|f_x(x,y)|\delta x+|f_y(x,y)|\delta y}{|f(x,y)|}.$$

例 6 利用单摆摆动测定重力加速度 g 的公式是 $g=\frac{4\pi^2 l}{T^2}$. 现测得单摆摆长 l 与振动周期 T 分别为 $l=(100\pm 0.1)\mathrm{cm},T=(2\pm 0.004)\mathrm{s}$，问由于测定 l 与 T 的误差而引起 g 的最大绝对误差和最大相对误差各为多少？

解 由于$\frac{\partial g}{\partial l}=\frac{4\pi^2}{T^2},\frac{\partial g}{\partial T}=-\frac{8\pi^2 l}{T^3}$. 由上述 δu 与 $\frac{\delta u}{|u|}$的表达式可得 g 的最大绝对误差与

最大相对误差分别为

$$\delta g=\left|\frac{\partial g}{\partial l}\right|\delta l+\left|\frac{\partial g}{\partial T}\right|\delta T=4\pi^2\left(\frac{1}{T^2}\delta l+\frac{2l}{T^3}\delta T\right),$$

与

$$\frac{\delta g}{|g|}=\frac{\delta l}{l}+2\,\frac{\delta T}{T}.$$

把 $l=100, T=2, \delta l=0.1, \delta T=0.004$ 代入上式,得

$$\delta g=4\pi^2\left(\frac{0.1}{2^2}+\frac{2\times 100}{2^3}\times 0.004\right)=0.5\pi^2\approx 4.93\ \mathrm{cm/s^2},$$

$$\frac{\delta g}{|g|}=\frac{0.5\pi^2}{(4\pi^2\times 100)/2^2}=0.5\%.$$

二元函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处的连续性、可微性及偏导数的存在性、连续性间的关系如下:

$$\boxed{\begin{array}{l}f_x, f_y\text{ 在点}\\(x_0,y_0)\text{ 处连续}\end{array}}\Rightarrow\boxed{\begin{array}{l}f\text{ 在点}(x_0,y_0)\\\text{处可微}\end{array}}\begin{array}{l}\nearrow\ \boxed{\begin{array}{l}f\text{ 在点}(x_0,y_0)\\\text{处连续}\end{array}}\\\searrow\ \boxed{\begin{array}{l}f_x(x_0,y_0)\text{ 与}\\f_y(x_0,y_0)\text{ 存在}\end{array}}\end{array}$$

习题 8.3

1. 求下列函数的一阶全微分:

(1) $z=x^m y^n$;　　(2) $r=\sqrt{x^2+y^2}$;

(3) $u=\dfrac{z}{x^2+y^2}$;　　(4) $u=\sqrt{R^2-x^2-y^2-z^2}$.

2. 求下列给定点的全微分:

(1) $z=x^4+y^4-4x^2y^2$, $(1,1)$;　　(2) $u=\ln(x+y^2+z^3)$, $(0,1,2)$.

3. 求函数 $u=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ 在给定点与给定 $\Delta x, \Delta y$ 的全微分.

(1) 点 $(0,1)$, $\Delta x=0.1$, $\Delta y=0.2$;　　(2) 点 $(1,0)$, $\Delta x=0.2$, $\Delta y=0.1$.

4. 证明函数 $f(x,y)=\sqrt{|xy|}$ 在 $(0,0)$ 点连续, $f_x(0,0)$, $f_y(0,0)$ 存在,但在 $(0,0)$ 点不可微.

5*. 设 $f_x(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 存在, $f_y(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 点连续,求证 f 在 (x_0,y_0) 点可微.

6*. 用全微分求下列各数的近似值:

(1) $\sqrt{1.02^3+1.97^3}$;　　(2) $0.97^{1.05}$.

7*. 设测定圆柱的底半径 $R=2.5\text{ m}\pm0.1\text{ m}$，高 $H=4.0\text{ m}\pm0.2\text{ m}$，问所算出的圆柱体体积有怎样的绝对误差和相对误差？

8*. 有一半径 $R=5\text{ cm}$，高 $h=20\text{ cm}$ 的金属圆柱体 100 个，现要在圆柱体表面镀一层厚度为 0.05 cm 的镍，估计需要多少镍（镍的质量密度为 8.8 g/cm^3）？

9*. 设点 A 距树的水平距离为 x(m)，A 点测得树的仰角为 θ(°)，记 δx，$\delta\theta$ 分别为 x，θ 的最大绝对误差.

(1) 求树高 h 的最大绝对误差 δh 依赖 δx，$\delta\theta$ 的近似公式.

(2) 设 $x=28\text{ m}$，$\delta x=0.005\text{ m}$，$\theta=30°$，$\delta\theta=1°$，试求树高 h 及其最大绝对误差 δh.

8.4 多元复合函数的微分法

本节将把一元函数微分学中的复合函数求导法则推广到多元复合函数中来.

8.4.1 复合函数偏导数的求法

定理 7 如果函数 $u=u(x)$ 与 $v=v(x)$ 在点 x 可导，且函数 $z=f(u,v)$ 在相应点 $(u,v)=(u(x),v(x))$ 可微，则复合函数 $z=f[u(x),v(x)]$ 在点 x 可导，且其导数为

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}. \tag{8.11}$$

证 给 x 以增量 Δx，这时 $u=u(x)$，$v=v(x)$ 的相应增量设为 Δu，Δv，从而函数 $z=f(u,v)$ 也有相应的增量

$$\Delta z=f(u+\Delta u,v+\Delta v)-f(u,v).$$

由于 $f(u,v)$ 可微，于是有

$$\Delta z=\frac{\partial z}{\partial u}\Delta u+\frac{\partial z}{\partial v}\Delta v+o(\rho)\quad(\rho\to0),$$

其中 $\rho=\sqrt{(\Delta u)^2+(\Delta v)^2}$，用 Δx 除上式各项得

$$\frac{\Delta z}{\Delta x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\Delta u}{\Delta x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\Delta v}{\Delta x}+\frac{o(\rho)}{\Delta x}\quad(\rho\to0). \tag{8.12}$$

由条件知 $u(x)$，$v(x)$ 在 x 点连续，故当 $\Delta x\to0$ 时 $\Delta u\to0$，$\Delta v\to0$，从而 $\rho\to0$. 于是有

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta x\to0}\left|\frac{o(\rho)}{\Delta x}\right|&=\lim_{\Delta x\to0}\left|\frac{o(\rho)}{\rho}\right|\cdot\left|\frac{\rho}{\Delta x}\right|\\&=\lim_{\rho\to0}\left|\frac{o(\rho)}{\rho}\right|\lim_{\Delta x\to0}\sqrt{\left(\frac{\Delta u}{\Delta x}\right)^2+\left(\frac{\Delta v}{\Delta x}\right)^2}=0.\end{aligned}$$

而当 $\Delta x\to0$ 时，$\frac{\Delta z}{\Delta x}\to\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$，$\frac{\Delta u}{\Delta x}\to\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$，$\frac{\Delta v}{\Delta x}\to\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$. 所以对(8.12)式令 $\Delta x\to0$ 即得(8.11)式.

用同样的方法，可把定理 7 推广到中间变量多于两个，且中间变量又是多元函数的情

形. 例如，若函数 $u=u(x,y)$，$v=v(x,y)$，$w=w(x,y)$ 都在点 (x,y) 对 x 或 y 有偏导数，且函数 $z=f(u,v,w)$ 在相应点可微，则复合函数 $z=f[u(x,y),v(x,y),w(x,y)]$ 在点 (x,y) 对 x 或 y 的偏导数为

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial x}, \tag{8.13}$$

或

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial y}. \tag{8.14}$$

公式(8.11)及公式(8.13)，(8.14)都称为多元复合函数求导的锁链法则.

例 1　设 $z=\mathrm{e}^u\sin v$，$u=x^2+y^2$，$v=xy$，求 z_x，z_y.

解　由锁链法则

$$\begin{aligned}z_x&=z_uu_x+z_vv_x=(\mathrm{e}^u\sin v)2x+(\mathrm{e}^u\cos v)y\\&=\mathrm{e}^{x^2+y^2}[2x\sin(xy)+y\cos(xy)],\\z_y&=z_uu_y+z_vv_y=(\mathrm{e}^u\sin v)2y+(\mathrm{e}^u\cos v)x\\&=\mathrm{e}^{x^2+y^2}[2y\sin(xy)+x\cos(xy)].\end{aligned}$$

在应用锁链公式时应注意：函数中有几个中间变量，则公式中就有几项乘积.

例 2　设 $x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$，如果函数 $z=f(x,y)$ 有连续的偏导数，证明

$$\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial z}{\partial\theta}\right)^2=\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2.$$

证　把函数 z 看成以 x，y 为中间变量，r，θ 为自变量的复合函数，于是有

$$\frac{\partial z}{\partial r}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}=\frac{\partial z}{\partial x}\cos\theta+\frac{\partial z}{\partial y}\sin\theta,$$

$$\frac{\partial z}{\partial\theta}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial\theta}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial\theta}=\frac{\partial z}{\partial x}r(-\sin\theta)+\frac{\partial z}{\partial y}r\cos\theta.$$

所以

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial z}{\partial\theta}\right)^2&=\left(\frac{\partial z}{\partial x}\cos\theta+\frac{\partial z}{\partial y}\sin\theta\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(-r\sin\theta\frac{\partial z}{\partial x}+r\cos\theta\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\\&=\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2.\end{aligned}$$

例 3　设 $z=f(x+y,xy)$，求 z_x 与 z_{xy}. ①

解　令 $u=x+y$，$v=xy$，则 $z=f(u,v)$. 为表达简便起见，引入记号

$$f'_1=\frac{\partial f(u,v)}{\partial u},\quad f''_{12}=\frac{\partial^2 f(u,v)}{\partial u\partial v}.$$

---

①　这里没有给出 f 所满足的条件，但我们认为它满足求复合函数偏导数应有的条件. 在以下的例题与习题中都这样认为.

这里下标 1 表示对第一个中间变量 u 求偏导数，下标 2 表示对第二个中间变量 v 求偏导数. 同理有 $f'_2, f''_{11}, f''_{21}, f''_{22}$ 等记号.

由锁链法则，有

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f'_1 \cdot 1 + f'_2 y, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(f'_1) + y \frac{\partial}{\partial y}(f'_2) + f'_2.$$

注意，f'_1 与 f'_2 仍是中间变量 u, v 的函数. 求 $\frac{\partial}{\partial y}(f'_1)$ 与 $\frac{\partial}{\partial y}(f'_2)$ 时仍要用求导的锁链法则. 即

$$\frac{\partial}{\partial y}(f'_1) = f''_{11}\frac{\partial u}{\partial y} + f''_{12}\frac{\partial v}{\partial y} = f''_{11} + x f''_{12},$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(f'_2) = f''_{21} + x f''_{22}.$$

于是

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= f''_{11} + x f''_{12} + y f''_{21} + xy f''_{22} + f'_2 \\ &= f''_{11} + (x + y) f''_{12} + xy f''_{22} + f'_2. \end{aligned}$$

例 4 设 $z = f(u, x, y)$，其中 $u = u(x, y)$，求 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$.

解 $z_x = f'_1 u_x + f'_2, z_y = f'_1 u_y + f'_3$.

8.4.2 全微分形式的不变性

如果函数 $u = u(x, y), v = v(x, y), z = f(u, v)$ 分别有连续的偏导数，则复合函数 $z = f[u(x, y), v(x, y)]$ 的全微分为

$$\mathrm{d}z = \frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y.$$

而

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y},$$

将它们代回得

$$\begin{aligned} \mathrm{d}z &= \left(\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\right)\mathrm{d}x + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}\right)\mathrm{d}y \\ &= \frac{\partial z}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}y\right) + \frac{\partial z}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial v}{\partial y}\mathrm{d}y\right) \\ &= \frac{\partial z}{\partial u}\mathrm{d}u + \frac{\partial z}{\partial v}\mathrm{d}v. \end{aligned}$$

即

$$\mathrm{d}z = \frac{\partial z}{\partial u}\mathrm{d}u + \frac{\partial z}{\partial v}\mathrm{d}v.$$

上式说明,不论 u,v 是自变量还是中间变量,全微分都有相同的形式,这叫做**全微分形式的不变性**.

设 u,v 是多元函数,利用全微分形式的不变性可得全微分的四则运算公式:

$$\mathrm{d}(u\pm v)=\mathrm{d}u\pm\mathrm{d}v,$$

$$\mathrm{d}(cu)=c\mathrm{d}u\quad(c\text{ 为常数}),$$

$$\mathrm{d}(uv)=v\mathrm{d}u+u\mathrm{d}v,$$

$$\mathrm{d}\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{v\mathrm{d}u-u\mathrm{d}v}{v^2}\quad(v\neq 0).$$

下面证全微分的乘法公式,其余当作习题.

由全微分形式的不变性,得

$$\mathrm{d}(uv)=\frac{\partial(uv)}{\partial u}\mathrm{d}u+\frac{\partial(uv)}{\partial v}\mathrm{d}v=v\mathrm{d}u+u\mathrm{d}v.$$

以前,我们都是通过偏导数来求全微分.现在,利用全微分形式的不变性,还可以通过全微分来计算偏导数.

例 5 求函数 $u=\dfrac{x}{x^2+y^2}$ 的两个偏导数.

解 由全微分的除法公式得到

$$\mathrm{d}u=\frac{(x^2+y^2)\mathrm{d}x-x\mathrm{d}(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2}=\frac{(y^2-x^2)\mathrm{d}x-2xy\mathrm{d}y}{(x^2+y^2)^2},$$

所以

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}.$$

8.4.3 变量替换

含有未知函数偏导数的方程称为偏微分方程.求这类方程的解时,如果作适当的自变量变换,往往可使方程简化,从而便于求解;或者使方程由直角坐标系变到其他坐标系中的形式,从而便于讨论.

例 6 在自变量变换:$u=x,v=x^2-y^2$ 下,求方程 $y\dfrac{\partial z}{\partial x}+x\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$ 的解.

解 我们把 z 看成以 u,v 为中间变量,以 x,y 为自变量的复合函数,于是

$$z_x=z_uu_x+z_vv_x=z_u+2xz_v,$$

$$z_y=z_uu_y+z_vv_y=-2yz_v,$$

代入原方程得

$$y(z_u+2xz_v)+x(-2yz_v)=0,$$

化简得 $z_u=0$.此方程的解为