第1部分　预备知识

本部分主要是复习微积分与线性代数中的有关内容，包括向量与矩阵的基本概念与运算、二次型及其正定性，一元及多元函数的导数、极值与泰勒公式、黑塞矩阵等. 这些知识都是学习本书相关内容时要用到的数学工具. 由于篇幅有限，本书只能作一个简要的复习，不能作系统的讲述. 对有关定理也只给出内容或说明，不予证明. 如读者需要了解相关知识，可查阅有关书籍. 对于读者较熟悉的内容，如一元函数的导数运算、线性代数中行列式运算、解线性方程组运算等在本部分中也不再赘述.

为了帮助读者理解有关概念，文中配有部分例题及习题.

第 1 章

预 备 知 识

1.1 向量

1.1.1 向量定义及线性运算

定义 1.1.1 n 个数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 构成的一个有次序的数组称为一个 n 维向量，记作 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$，$a_i(i=1,2,\cdots,n)$称为向量的第 i 个分量. 如$\boldsymbol{\alpha}_1=(2,3)$是一个二维向量，$\boldsymbol{\alpha}_2=(2,0,-4)$是一个三维向量，等等.

向量可记成行的形式，也可记成列的形式，分别称为行向量与列向量，如$\boldsymbol{\alpha}=(-1,0,4)$为三维行向量，而$\boldsymbol{\alpha}=\begin{bmatrix}-1\\0\\4\end{bmatrix}$则为三维列向量.

为了书写方便，列向量也可用行向量的转置形式来表示：

$$\boldsymbol{\alpha}=\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{bmatrix}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^{\mathrm{T}}.$$

两个向量$\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{\beta}$相等当且仅当它们的对应分量相等，即$\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\beta}\Leftrightarrow a_i=b_i(i=1,2,\cdots,n)$.

定义 1.1.2 向量$\boldsymbol{\gamma}=(a_1+b_1,a_2+b_2,\cdots,a_n+b_n)$称为向量$\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$与向量$\boldsymbol{\beta}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$之和，记作$\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}$.

定义 1.1.3 向量 $k\boldsymbol{\alpha}=(ka_1,ka_2,\cdots,ka_n)$称为数 k 乘向量$\boldsymbol{\alpha}$.

向量$\boldsymbol{\alpha}$的负向量$-\boldsymbol{\alpha}=(-a_1,-a_2,\cdots,-a_n)=(-1)\boldsymbol{\alpha}$.

因此向量的减法可化为加法：$\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}+(-1)\boldsymbol{\beta}$.

例 1.1.1 设$\boldsymbol{\alpha}=(3,0,-4)$,$\boldsymbol{\beta}=(2,-1,6)$,则

$$2\boldsymbol{\alpha}-\frac{1}{3}\boldsymbol{\beta}=(6,0,-8)+\left(-\frac{2}{3},\frac{1}{3},-2\right)=\left(\frac{16}{3},\frac{1}{3},-10\right).$$

显然只有同维向量才能进行加减运算.

定义 1.1.4 设有 s 个 n 维向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$及 s 个实数 $k_1,k_2,\cdots,k_s$. 称$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s$为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$的一个线性组合. 又若 n 维向量 $\boldsymbol{\beta}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s$,则称$\boldsymbol{\beta}$可由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$线性表出.

例 1.1.2 设$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,4)$,$\boldsymbol{\alpha}_2=(2,1,5)$,$\boldsymbol{\alpha}_3=(-1,1,-1)$,$\boldsymbol{\beta}=(1,-4,-2)$,则

$$\boldsymbol{\beta}=-2\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3.$$

所以$\boldsymbol{\beta}$是 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 的一个线性组合,或说 $\boldsymbol{\beta}$ 可由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表出.

一个向量$\boldsymbol{\beta}$并非都可由某一组向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$线性表出. 若不存在一组实数 $k_1,k_2,\cdots,k_s$ 使 $\boldsymbol{\beta}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s$成立,则称 $\boldsymbol{\beta}$不能由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$线性表出.

例如 $$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{\alpha}_3=\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{\beta}=\begin{bmatrix}2\\3\\4\end{bmatrix},$$

则$\boldsymbol{\beta}$不能由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表出. 不然若$\boldsymbol{\beta}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3$,则有

$$k_1\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}+k_3\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\3\\4\end{bmatrix},$$

即

$$\begin{cases}1\cdot k_1+0\cdot k_2+1\cdot k_3=2,\\0\cdot k_1+1\cdot k_2+1\cdot k_3=3,\\0\cdot k_1+0\cdot k_2+0\cdot k_3=4.\end{cases}$$

其第 3 个方程是一个矛盾方程,无解. 因此 $\boldsymbol{\beta}$不能由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表出.

1.1.2 向量的线性相关性

定义 1.1.5 若存在一组不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_s$ 使 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s=\mathbf{0}$ 成立,则称向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$线性相关. 否则称向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$线性无关,也即只有当 $k_1=k_2=\cdots=k_s=0$ 时,才能使 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s=\mathbf{0}$ 成立. 或者说,只要 $k_1,k_2,\cdots,k_s$ 不全为零,那么线性组合 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s$必不为零,则称向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$线性无关.

例 1.1.3 已知向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关,问向量组$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1$是线性相关还是线性无关,并证明你的结论.

证 考察

$$k_1(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)+k_2(\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)+k_3(\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1)=\mathbf{0},$$

上式可等价表示为

$$(k_1+k_3)\boldsymbol{\alpha}_1+(k_1+k_2)\boldsymbol{\alpha}_2+(k_2+k_3)\boldsymbol{\alpha}_3=\mathbf{0}.$$

因为$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关,由定义 1.1.5 知,它们的系数必全为零,即

$$\begin{cases} k_1 \quad\quad + k_3 = 0, \\ k_1 + k_2 \quad\quad = 0, \\ \quad\quad k_2 + k_3 = 0. \end{cases}$$

对于此齐次线性方程组,只有唯一解 $k_1=k_2=k_3=0$. 由定义 1.1.5 知$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1$线性无关.

定理 1.1.1 s 个 n 维向量$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$线性相关(线性无关)的充分必要条件是下列齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}k_1+a_{12}k_2+\cdots+a_{1s}k_s=0, \\ a_{21}k_1+a_{22}k_2+\cdots+a_{2s}k_s=0, \\ \qquad\qquad\vdots \\ a_{n1}k_1+a_{n2}k_2+\cdots+a_{ns}k_s=0, \end{cases}$$

有非零解(只有零解). 式中,$\boldsymbol{\alpha}_i=(a_{1i},a_{2i},\cdots,a_{ni})^{\mathrm{T}}\quad(i=1,2,\cdots,s)$.

推论 1.1.2 任意 $n+1$ 个 n 维向量必线性相关.

例 1.1.4 判断$\boldsymbol{\alpha}_1=(3,4,2),\boldsymbol{\alpha}_2=(2,1,-7),\boldsymbol{\alpha}_3=(1,2,4)$的线性相关性.

解 考查是否有不全为零的数组 k_1,k_2,k_3 使 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3=\mathbf{0}$ 成立,等价于讨论齐次线性方程组

$$\begin{cases} 3k_1+2k_2+k_3=0, \\ 4k_1+k_2+2k_3=0, \\ 2k_1-7k_2+4k_3=0, \end{cases}$$

是否有非零解. 因为系数行列式

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \\ 2 & -7 & 4 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -2 & -3 & 0 \\ -10 & -15 & 0 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -2 & -3 \\ -10 & -15 \end{vmatrix}=0,$$

故齐次线性方程组必有非零解,所以$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关.

线性相关与线性表出之间有一定的联系,可由下面定理得出.

定理 1.1.3 s 个 n 维向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s(s\geqslant 2)$线性相关的充分必要条件是:其中至少有一个向量$\boldsymbol{\alpha}_i$ $(i\in I[1,s])$[①]可由其余向量线性表出,即有

---

① $i\in I[a,b]$表示:i 属于从 a 到 b 的整数集合.

$$\boldsymbol{\alpha}_i = k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_{i-1}\boldsymbol{\alpha}_{i-1} + k_{i+1}\boldsymbol{\alpha}_{i+1} + \cdots + k_s\boldsymbol{\alpha}_s.$$

否则向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$就是线性无关的(即没有一个向量可由其余向量线性表出).

例 1.1.5 包含零向量的向量组必线性相关.

证 设向量组为$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$,不失一般性,设$\boldsymbol{\alpha}_1=\mathbf{0}$,则$\boldsymbol{\alpha}_1=0\,\boldsymbol{\alpha}_2+0\,\boldsymbol{\alpha}_3+\cdots+0\,\boldsymbol{\alpha}_s$. 由定理 1.1.3 可知,向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$线性相关.

例 1.1.6 若向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性相关,则增加任意有限个向量后新向量组仍线性相关.

证 设$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性相关,则由定理 1.1.3 知至少存在一个向量$\boldsymbol{\alpha}_i$ $(i\in I[1,r])$可由其余向量线性表出,即有

$$\boldsymbol{\alpha}_i = k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \cdots + k_{i-1}\boldsymbol{\alpha}_{i-1} + k_{i+1}\boldsymbol{\alpha}_{i+1} + \cdots + k_r\boldsymbol{\alpha}_r\ .$$

当向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 增加有限个向量$\boldsymbol{\alpha}_{r+1},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$后,上式可改写为

$$\boldsymbol{\alpha}_i = k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \cdots + k_{i-1}\boldsymbol{\alpha}_{i-1} + k_{i+1}\boldsymbol{\alpha}_{i+1} + \cdots + k_r\boldsymbol{\alpha}_r + 0\,\boldsymbol{\alpha}_{r+1} + \cdots + 0\,\boldsymbol{\alpha}_s\ (i\in I[1,r]).$$

此式说明了在新向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r,\boldsymbol{\alpha}_{r+1},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$中,至少有一个向量$\boldsymbol{\alpha}_i$ $(i\in I[1,r])$可由其余向量线性表出. 故由定理 1.1.3 知,$\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r,\boldsymbol{\alpha}_{r+1},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$也线性相关.

下面的定理是线性代数中的一个重要结论.

定理 1.1.4 若向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$线性无关,而向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\beta}$线性相关,则$\boldsymbol{\beta}$必可由向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$线性表出,且其表出系数是唯一的.

定理 1.1.4 加上推论 1.1.2,是建立坐标系的主要理论依据.

1.1.3 向量组的秩

一个向量组中包含多少个线性无关的向量,是由这个向量组本身决定的. 而这个数又是表征该向量组本身的重要属性.

定义 1.1.6 在向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$中,若存在 r 个向量$\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_r}$ 构成的部分组向量线性无关$(r\in I[1,s])$,且任一个向量$\boldsymbol{\alpha}_j$ $(j\in I[1,s])$都可由这 r 个线性无关的向量线性表出,则称$\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_r}$ 是向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$的一个极大线性无关组,简称为极大无关组. 极大无关组中包含向量的个数 r 称为向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$的秩,记作 $\mathrm{r}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s)=r$.

例如向量组$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,0),\boldsymbol{\alpha}_2=(0,1,0),\boldsymbol{\alpha}_3=(1,1,0),\boldsymbol{\alpha}_4=(0,0,1),\boldsymbol{\alpha}_5=(1,1,1),\boldsymbol{\alpha}_6=(1,2,1)$是线性相关的. 其中,$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$;$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3$;$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$;$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_5$;$\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_6$等部分组向量都线性无关. 但$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$;$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3$ 不是极大无关组,而$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$;$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_5$ 及$\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_6$ 均是极大无关组. 因为比如原向量组中任一个向量都可由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性表出. 显然一个向量组的极大无关组可能不止一个,但是它们所包含向量的个数是相同的,本例向量组的秩为3,记作 $\mathrm{r}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_5,\boldsymbol{\alpha}_6)=3$.

一般来讲，若已知向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$，要求该向量组的一个极大无关组可按以下方法来寻找：先察看$\boldsymbol{\alpha}_1$是线性相关还是线性无关(单个向量的相关性见习题 1.9)；若相关则舍弃，再察看$\boldsymbol{\alpha}_2$；若无关则保留$\boldsymbol{\alpha}_1$，将$\boldsymbol{\alpha}_2$加入，再察看向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$；若$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$线性相关，则保留$\boldsymbol{\alpha}_1$，舍弃$\boldsymbol{\alpha}_2$；若$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$线性无关，则保留$\boldsymbol{\alpha}_2$，再加入$\boldsymbol{\alpha}_3$，察看向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$；……如此继续下去，直到将$\boldsymbol{\alpha}_s$都察看完，则最后保留下的一组线性无关的向量组就是原向量组的一个极大无关组，其包含向量的个数即是原向量组的秩.

显然这种用定义求向量组的秩及一个极大无关组的方法较麻烦. 在 1.2.5 节矩阵的秩中，将介绍一种简便的方法来求向量组的秩及其一个极大无关组.

最后介绍一个概念：将全体 n 维向量的集合称为 n 维向量空间，记作$\mathbf{R}^n$，即

$$\mathbf{R}^n=\{\boldsymbol{\alpha}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}\mid x_i\in\mathbf{R}^1(i=1,2,\cdots,n)\}.$$

如$\mathbf{R}^2$就是以 x_1Ox_2 为坐标系的一个平面，$\mathbf{R}^3$即是通常的几何空间.

1.2 矩阵

1.2.1 矩阵的概念与运算

定义 1.2.1 $m\times n$ 个数排成 m 行 n 列的一张数表，称为一个 $m\times n$ 型矩阵. 用 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\cdots$ 来记矩阵，即

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

也可简记为 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$或 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$. 式中数 a_{ij} 称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行第 j 列元素.

定义 1.2.2 两个矩阵相等是指它们的对应元素分别相等，即设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$，$\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{m\times n}$，若 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$，则 $a_{ij}=b_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$.

定义 1.2.3 两个同型矩阵 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$与 $\boldsymbol{B}_{m\times n}$之和仍是一个 $m\times n$ 型矩阵，其和矩阵 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 的一般元素为 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 对应元素之和，即

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=(a_{ij}+b_{ij})_{m\times n}.$$

定义 1.2.4 数 k 乘矩阵 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$仍是一个 $m\times n$ 型矩阵，它的一般元素为 ka_{ij}，即

$$k\boldsymbol{A}=(ka_{ij})_{m\times n}.$$

例 1.2.1 已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} -2 & 4 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$. 求 $3\boldsymbol{A}-\frac{1}{2}\boldsymbol{B}$.

解

$$3\boldsymbol{A}-\frac{1}{2}\boldsymbol{B}=3\begin{bmatrix}3&1&0\\-1&2&1\end{bmatrix}+\left(-\frac{1}{2}\right)\begin{bmatrix}-2&4&3\\2&-1&0\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}9&3&0\\-3&6&3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&-2&-\frac{3}{2}\\-1&\frac{1}{2}&0\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}10&1&-\frac{3}{2}\\-4&\frac{13}{2}&3\end{bmatrix}.$$

定义 1.2.5 矩阵 $\boldsymbol{A}_{m\times k}=(a_{ij})_{m\times k}$ 与矩阵 $\boldsymbol{B}_{k\times n}=(b_{ij})_{k\times n}$ 的乘积是一个 $m\times n$ 型矩阵，记作 $(\boldsymbol{AB})_{m\times n}$. 如 $\boldsymbol{AB}$ 的一般元素用 c_{ij} 来记，则

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{ik}b_{kj}=\sum_{t=1}^{k}a_{it}b_{tj}\quad(i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n),$$

即乘积矩阵第 i 行第 j 列元素为左矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行与右矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的第 j 列对应元素乘积之和.

例 1.2.2 已知 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&2\\3&-1\\0&1\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}2&-1&1&1\\-1&-2&2&4\end{bmatrix}$. 求 $\boldsymbol{AB}$.

解

$$\boldsymbol{AB}=\begin{bmatrix}1\times2+2\times(-1)&1\times(-1)+2\times(-2)&1\times1+2\times2&1\times1+2\times4\\3\times2+(-1)\times(-1)&3\times(-1)+(-1)\times(-2)&3\times1+(-1)\times2&3\times1+(-1)\times4\\0\times2+1\times(-1)&0\times(-1)+1\times(-2)&0\times1+1\times2&0\times1+1\times4\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}0&-5&5&9\\7&-1&1&-1\\-1&-2&2&4\end{bmatrix}.$$

例 1.2.3 已知 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&1\\-1&-1\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&-1\\-1&1\end{bmatrix}$,求 $\boldsymbol{AB},\boldsymbol{BA}$.

解

$$\boldsymbol{AB}=\begin{bmatrix}1\times1+1\times(-1)&1\times(-1)+1\times1\\(-1)\times1+(-1)\times(-1)&(-1)\times(-1)+(-1)\times1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}=\boldsymbol{0}.$$

(一般将所有元素都是零的矩阵称为零矩阵,简记为 $\boldsymbol{0}$).

$$\boldsymbol{BA}=\begin{bmatrix}1&-1\\-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\-1&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\times1+(-1)\times(-1)&1\times1+(-1)\times(-1)\\(-1)\times1+1\times(-1)&(-1)\times1+1\times(-1)\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}2&2\\-2&-2\end{bmatrix}.$$

对于矩阵的乘法,读者特别要注意以下几点:

(1) 只有当左矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列数与右矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的行数相等时,才能作乘法 $\boldsymbol{AB}$.

(2) 矩阵的乘法一般不满足交换律,如例 1.2.3 中,$\boldsymbol{AB}$ 与 $\boldsymbol{BA}$ 不相等.在有些情形下,甚至 $\boldsymbol{BA}$ 没有意义,如例 1.2.2.

(3) 若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{0}$,则不能推出式 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{0}$,或 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{0}$(指零矩阵).如例 1.2.3 中,$\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{0}$,$\boldsymbol{B}\neq\boldsymbol{0}$,但 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{0}$.由此也不能使用以下规则:若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{AC}$,且 $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{0}$,则 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}$.

当 $m=n$ 时,称矩阵为 n 阶方阵,记作 $\boldsymbol{A}_n=(a_{ij})_{n\times n}$.

定义 1.2.6 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}_n=(a_{ij})_{n\times n}$ 中 n^2 个元素按原有的次序构成的一个 n 阶行列式,称为 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}_n$ 的行列式,记作 $|\boldsymbol{A}_n|$ 或 $|\boldsymbol{A}|$.

例 1.2.4 已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}3&1&2\\-1&1&2\\2&2&4\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&2&4\\0&-1&1\\0&0&-2\end{bmatrix}$,求 $|\boldsymbol{A}|$, $|\boldsymbol{B}|$.

解

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}3&1&2\\-1&1&2\\2&2&4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&4&8\\-1&1&2\\0&4&8\end{vmatrix}=0,$$

$$|\boldsymbol{B}|=\begin{vmatrix}1&2&4\\0&-1&1\\0&0&-2\end{vmatrix}=1\times(-1)\times(-2)=2.$$

在本小节最后,我们介绍一个方阵行列式的乘法公式.

定理 1.2.1 方阵乘积的行列式等于各个方阵的行列式的乘积,即

$$|\boldsymbol{A}_n\boldsymbol{B}_n|=|\boldsymbol{A}_n|\cdot|\boldsymbol{B}_n|.$$

1.2.2 矩阵的求逆运算

定义 1.2.7 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵,如果存在一个 n 阶方阵 $\boldsymbol{B}$,使 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{I}_n$ 成立,则称 $\boldsymbol{B}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵,记作 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^{-1}$,此时又称 $\boldsymbol{A}$ 是可逆的矩阵.

在这个定义中,$\boldsymbol{I}_n$ 是主对角元素为 1,其余元素为零的 n 阶单位矩阵.读者要注意的是,只对方阵才考虑它的逆矩阵问题,不是方阵在本书中暂且不考虑逆矩阵问题.其次并不是所有方阵都有逆矩阵,只有满足一定条件时,方阵才有逆矩阵.

下面的两个定理指明了一个方阵满足什么条件时才有逆矩阵,如何求它的逆矩阵,以及一个方阵可逆时有几个逆矩阵.

定理 1.2.2 若 $\boldsymbol{A}$ 是可逆方阵,则 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵是唯一的.

定理 1.2.3 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆的充分必要条件是 $|\boldsymbol{A}|\neq0$,且当 $\boldsymbol{A}$ 可逆时,有

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\begin{bmatrix}A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1}\\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn}\end{bmatrix}=\frac{1}{|A|}A^*,$$

式中 A_{ij} 是 $|A|$ 的元素 a_{ij} 的代数余子式，A^* 称为 n 阶方阵 A 的伴随矩阵.

例 1.2.5 求 $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}$ 的伴随矩阵及逆矩阵.

解 因为 $|A|$ 的各元素的代数余子式 $A_{11}=4, A_{12}=-3, A_{21}=-2, A_{22}=1$，故 A 的伴随矩阵

$$A^*=\begin{bmatrix}A_{11} & A_{21}\\ A_{12} & A_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & -2\\ -3 & 1\end{bmatrix}.$$

又因 $|A|=-2\neq 0$，故 A 可逆.

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*=\frac{1}{-2}\begin{bmatrix}4 & -2\\ -3 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2 & 1\\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}.$$

例 1.2.6 求 $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$ 的逆矩阵.

解 因 $|A|=1\neq 0$，所以 A 可逆. 又

$$A_{11}=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{vmatrix}=1,\quad A_{12}=-\begin{vmatrix}0 & 2\\ 0 & 1\end{vmatrix}=0,\quad A_{13}=\begin{vmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{vmatrix}=0,$$

$$A_{21}=-\begin{vmatrix}2 & 3\\ 0 & 1\end{vmatrix}=-2,\quad A_{22}=\begin{vmatrix}1 & 3\\ 0 & 1\end{vmatrix}=1,\quad A_{23}=-\begin{vmatrix}1 & 2\\ 0 & 0\end{vmatrix}=0,$$

$$A_{31}=\begin{vmatrix}2 & 3\\ 1 & 2\end{vmatrix}=1,\quad A_{32}=-\begin{vmatrix}1 & 3\\ 0 & 2\end{vmatrix}=-2,\quad A_{33}=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{vmatrix}=1,$$

故

$$A^*=\begin{bmatrix}A_{11} & A_{21} & A_{31}\\ A_{12} & A_{22} & A_{32}\\ A_{13} & A_{23} & A_{33}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -2 & 1\\ 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix},$$

因此

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*=\begin{bmatrix}1 & -2 & 1\\ 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}.$$

对一个方阵求其逆矩阵的过程称为求逆运算. 求逆运算有以下一些基本性质：

(1) 若 $\boldsymbol{A}$ 可逆,则 $(\boldsymbol{A}^{-1})^{-1}=\boldsymbol{A}$.

(2) 若 $k\neq 0$,$\boldsymbol{A}$ 可逆,则 $(k\boldsymbol{A})^{-1}=\frac{1}{k}\boldsymbol{A}^{-1}$.

(3) 若 $\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\cdots,\boldsymbol{A}_s$ 都是 n 阶可逆方阵,则 $\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2\cdots\boldsymbol{A}_s$ 也可逆,且

$$(\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2\cdots\boldsymbol{A}_s)^{-1}=\boldsymbol{A}_s^{-1}\cdots\boldsymbol{A}_2^{-1}\boldsymbol{A}_1^{-1}.$$

(4) $(\boldsymbol{A}^{-1})^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{-1}$,这里 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的转置矩阵.

要注意的是可逆矩阵的和不一定是可逆矩阵,即 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 可逆,不一定有 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 可逆,即使 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 可逆,一般 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1}\neq\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1}$.

用求伴随矩阵来求可逆矩阵的逆矩阵这种方法,对阶数 n 较小时较实用,对 n 较大时,计算较麻烦.我们将在下一小节介绍用初等变换的方法求逆矩阵.

1.2.3 矩阵的初等变换

定义 1.2.8 以下三种变换统称为矩阵的初等行变换:

(1) 交换两行的位置,称为矩阵的行交换变换.

(2) 用一个非零常数乘矩阵的某一行,称为矩阵的行倍乘变换.

(3) 将一行的 k 倍加到另一行上,称为矩阵的行倍加变换.

例 1.2.7 分别对 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-1&1&2\\2&2&4\\3&1&2\end{bmatrix}$ 作三种初等行变换:

$$\boldsymbol{A}\to\boldsymbol{B}_1=\begin{bmatrix}2&2&4\\-1&1&2\\3&1&2\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{A}\to\boldsymbol{B}_2=\begin{bmatrix}-1&1&2\\2&2&4\\6&2&4\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{A}\to\boldsymbol{B}_3=\begin{bmatrix}-1&1&2\\0&4&8\\3&1&2\end{bmatrix}.$$

其中,交换 $\boldsymbol{A}$ 的第 1,2 行得到 $\boldsymbol{B}_1$;将 2 乘 $\boldsymbol{A}$ 的第 3 行得到 $\boldsymbol{B}_2$;将 $\boldsymbol{A}$ 的第 1 行的 2 倍加到第 2 行上得到 $\boldsymbol{B}_3$.

要注意的是,初等变换前后的矩阵是不相等的,因此不能写等号.只能用"$\to$"来表示初等变换前后矩阵之间的联系.

同样可定义矩阵的三种初等列变换:列交换变换;列倍乘变换;列倍加变换.

初等行变换与初等列变换统称为矩阵的初等变换.下面介绍用初等行变换的方法来求可逆矩阵的逆矩阵.

定理 1.2.4 已知 n 阶可逆矩阵 $\boldsymbol{A}$,作 $n\times 2n$ 型矩阵 $(\boldsymbol{A}\,\vdots\,\boldsymbol{I}_n)$,若对矩阵 $(\boldsymbol{A}\,\vdots\,\boldsymbol{I}_n)_{n\times 2n}$ 作一系列初等行变换,当 $\boldsymbol{A}$ 变为 $\boldsymbol{I}_n$ 时,则 $\boldsymbol{I}_n$ 就变为 $\boldsymbol{A}^{-1}$,即

$$(\boldsymbol{A}\,\vdots\,\boldsymbol{I}_n)\to\cdots\to(\boldsymbol{I}_n\,\vdots\,\boldsymbol{A}^{-1}).$$

例 1.2.8 求 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}3 & 5\\1 & 2\end{bmatrix}$的逆矩阵.

解

$$(\boldsymbol{A}\,\vdots\,\boldsymbol{I})=\left[\begin{array}{cc:cc}3 & 5 & 1 & 0\\1 & 2 & 0 & 1\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{cc:cc}1 & 2 & 0 & 1\\3 & 5 & 1 & 0\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{cc:cc}1 & 2 & 0 & 1\\0 & -1 & 1 & -3\end{array}\right]$$

$$\to\left[\begin{array}{cc:cc}1 & 0 & 2 & -5\\0 & -1 & 1 & -3\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{cc:cc}1 & 0 & 2 & -5\\0 & 1 & -1 & 3\end{array}\right].$$

故

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{bmatrix}2 & -5\\-1 & 3\end{bmatrix}.$$

例 1.2.9 求 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 3\\1 & 1 & 0\\1 & 1 & 1\end{bmatrix}$的逆矩阵.

解

$$[\boldsymbol{A}\,\vdots\,\boldsymbol{I}]=\left[\begin{array}{ccc:ccc}1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0\\1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0\\1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc:ccc}1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0\\1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1\end{array}\right]$$

$$\to\left[\begin{array}{ccc:ccc}1 & 0 & 0 & 1 & 3 & -3\\1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc:ccc}1 & 0 & 0 & 1 & 3 & -3\\0 & 1 & 0 & -1 & -2 & 3\\0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1\end{array}\right].$$

所以

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 3 & -3\\-1 & -2 & 3\\0 & -1 & 1\end{bmatrix}.$$

思考题：如何判别所求的 $\boldsymbol{A}^{-1}$是否正确？

1.2.4 矩阵的分块

在有些问题中，为了简化计算，或是为了突出矩阵构造上的特点，或是为了在计算机运算中节省存储空间，需要把大矩阵适当分成一些小矩阵，对原矩阵的讨论就转化为对这些小矩阵的讨论. 这种方法称为对矩阵的分块，它是矩阵运算中一个重要的技巧. 所分成的小块矩阵就称为原矩阵的子矩阵.

1. 分块矩阵的概念

将原矩阵分块，可以采用水平线或垂直线，或两者同时都用，但不能使用折线分块.

例 1.2.10

$$A=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\-1&0&1&0\\0&-1&0&1\end{bmatrix}=\left[\begin{array}{cc:cc}1&0&0&0\\0&1&0&0\\ \hdashline -1&0&1&0\\0&-1&0&1\end{array}\right]=\begin{bmatrix}\boldsymbol{I}_2&\boldsymbol{0}\\-\boldsymbol{I}_2&\boldsymbol{I}_2\end{bmatrix}.$$

这里矩阵 $\boldsymbol{A}$ 原是 4×4 矩阵，分块后就成了 2×2 的分块矩阵. 同一个矩阵由于分块的方法不同，可以成为不同的分块矩阵. 如

$$\boldsymbol{A}=\left[\begin{array}{c:c:c:c}1&0&0&0\\0&1&0&0\\-1&0&1&0\\0&-1&0&1\end{array}\right]=(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_3,\boldsymbol{p}_4)_{1\times4},$$

这是以每一列作为一块的 1×4 分块矩阵，其中每一个 $\boldsymbol{p}_i$ 是一个 4×1 的子矩阵. 又如

$$\boldsymbol{A}=\left[\begin{array}{cccc}1&0&0&0\\ \hdashline 0&1&0&0\\ \hdashline -1&0&1&0\\ \hdashline 0&-1&0&1\end{array}\right]=\begin{bmatrix}\boldsymbol{a}_1\\\boldsymbol{a}_2\\\boldsymbol{a}_3\\\boldsymbol{a}_4\end{bmatrix}_{4\times1},$$

这是以每一行作为一块的 4×1 分块矩阵，其中每一个 $\boldsymbol{a}_i$ 是一个 1×4 的子矩阵.

一般地

$$\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_{11}&\boldsymbol{A}_{12}&\cdots&\boldsymbol{A}_{1t}\\\boldsymbol{A}_{21}&\boldsymbol{A}_{22}&\cdots&\boldsymbol{A}_{2t}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\\boldsymbol{A}_{s1}&\boldsymbol{A}_{s2}&\cdots&\boldsymbol{A}_{st}\end{bmatrix}_{s\times t}\xlongequal{\text{def}}(\boldsymbol{A}_{\alpha\beta})_{s\times t}.$$

这里将 $\boldsymbol{A}$ 分成以 $\boldsymbol{A}_{\alpha\beta}$ 为一般元素的 $s\times t$ 型分块矩阵. 由于只能用水平线及垂直线来分块，因此在同一行中，各个子矩阵都包含相同的行数；在同一列中，各个子矩阵都包含相同的列数. 若记 $\boldsymbol{A}_{\alpha\beta}$ 所包含的行数为 $m_\alpha(\alpha=1,2,\cdots,s)$，所包含的列数为 $n_\beta(\beta=1,2,\cdots,t)$，显然 $\sum\limits_{\alpha=1}^{s}m_\alpha=m,\sum\limits_{\beta=1}^{t}n_\beta=n.$

2. 分块矩阵的运算

若 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}=(\boldsymbol{A}_{\alpha\beta})_{s\times t}$，这里 $\boldsymbol{A}$ 既可看成以 a_{ij} 为元素的矩阵，又可看成以 $\boldsymbol{A}_{\alpha\beta}$ 为子矩阵的分块矩阵. 两个分块矩阵在进行运算时，总的原则是：只要大、小矩阵之间的运算都

符合矩阵运算的必要条件，则可将子矩阵当做元素一样来对待. 这里矩阵运算的必要条件指的是：两个矩阵相加时必须是同型矩阵；两个矩阵作乘法时，必须左矩阵的列数等于右矩阵的行数.

例 1.2.11 已知

$$\boldsymbol{A}=\left[\begin{array}{cc:cc}1&0&1&-1\\0&1&2&1\\ \hdashline 0&-1&1&0\end{array}\right]=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_1&\boldsymbol{A}_2\\\boldsymbol{A}_3&\boldsymbol{A}_4\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\left[\begin{array}{cc:cc}0&1&-1&0\\1&0&0&-1\\ \hdashline 2&1&-1&1\end{array}\right]=\begin{bmatrix}\boldsymbol{B}_1&\boldsymbol{B}_2\\\boldsymbol{B}_3&\boldsymbol{B}_4\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_1&\boldsymbol{A}_2\\\boldsymbol{A}_3&\boldsymbol{A}_4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\boldsymbol{B}_1&\boldsymbol{B}_2\\\boldsymbol{B}_3&\boldsymbol{B}_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_1+\boldsymbol{B}_1&\boldsymbol{A}_2+\boldsymbol{B}_2\\\boldsymbol{A}_3+\boldsymbol{B}_3&\boldsymbol{A}_4+\boldsymbol{B}_4\end{bmatrix}.$$

这里 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的分块矩阵都是 2×2 型. 把 $\boldsymbol{A}_i$ 及 $\boldsymbol{B}_i$ 当做元素一样作加法，因此 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 分块矩阵的一般项为 $\boldsymbol{A}_i+\boldsymbol{B}_i$，但实际上 $\boldsymbol{A}_i+\boldsymbol{B}_i$ 仍是矩阵相加，因此 $\boldsymbol{A}_i$ 与 $\boldsymbol{B}_i$ 也必须是同型子矩阵，这实际上要求 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 在分块时分的方法完全一致，才能保证所有的 $\boldsymbol{A}_i$ 与 $\boldsymbol{B}_i$ 是同型矩阵.

本例中 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 分法相同，因此可以作分块矩阵的加法：

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_1+\boldsymbol{B}_1&\boldsymbol{A}_2+\boldsymbol{B}_2\\\boldsymbol{A}_3+\boldsymbol{B}_3&\boldsymbol{A}_4+\boldsymbol{B}_4\end{bmatrix}=\left[\begin{array}{cc:cc}1&1&0&-1\\1&1&2&0\\ \hdashline 2&0&0&1\end{array}\right].$$

例 1.2.12 已知

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0&1&-1\\0&1&2&1\\0&-1&1&0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}0&1&-1\\1&0&0\\2&1&-1\\0&-1&1\end{bmatrix},$$

现对 $\boldsymbol{A}$ 及 $\boldsymbol{B}$ 作如下的分块：

$$\boldsymbol{A}=\left[\begin{array}{cc:cc}1&0&1&-1\\0&1&2&1\\ \hdashline 0&-1&1&0\end{array}\right]=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_{11}&\boldsymbol{A}_{12}\\\underbrace{\boldsymbol{A}_{21}}_{n_1}&\underbrace{\boldsymbol{A}_{22}}_{n_2}\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\left[\begin{array}{c:cc}0&1&-1\\1&0&0\\ \hdashline 2&1&-1\\0&-1&1\end{array}\right]\begin{array}{l}\}n_1\\ \\ \}n_2\\ \end{array}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{B}_{11}&\boldsymbol{B}_{12}\\\boldsymbol{B}_{21}&\boldsymbol{B}_{22}\end{bmatrix}.$$

因为 $\boldsymbol{A}$ 的分块矩阵是 2×2 型，$\boldsymbol{B}$ 的分块矩阵是 2×2 型. 因此可作分块矩阵的乘法 $\boldsymbol{AB}$. 把 $\boldsymbol{A}_{ij}$ 与 $\boldsymbol{B}_{ij}$ 当做元素一样来作乘法，乘积矩阵的第 i 行第 j 列元素等于左矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行与右矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的第 j 列对应相乘. 对于本例有

$$\boldsymbol{AB}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_{11}&\boldsymbol{A}_{12}\\\boldsymbol{A}_{21}&\boldsymbol{A}_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{B}_{11}&\boldsymbol{B}_{12}\\\boldsymbol{B}_{21}&\boldsymbol{B}_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_{11}\boldsymbol{B}_{11}+\boldsymbol{A}_{12}\boldsymbol{B}_{21}&\boldsymbol{A}_{11}\boldsymbol{B}_{12}+\boldsymbol{A}_{12}\boldsymbol{B}_{22}\\\boldsymbol{A}_{21}\boldsymbol{B}_{11}+\boldsymbol{A}_{22}\boldsymbol{B}_{21}&\boldsymbol{A}_{21}\boldsymbol{B}_{12}+\boldsymbol{A}_{22}\boldsymbol{B}_{22}\end{bmatrix}.$$

但是事实上 $\boldsymbol{A}_{11}\boldsymbol{B}_{11}$ 及 $\boldsymbol{A}_{12}\boldsymbol{B}_{21}$ 都是子矩阵相乘，因此要求 $\boldsymbol{A}_{11}$ 实际包含的列数（n_1）与 $\boldsymbol{B}_{11}$ 实际包含的行数（n_1）相同；$\boldsymbol{A}_{12}$ 实际包含的列数（n_2）与 $\boldsymbol{B}_{21}$ 实际包含的行数（n_2）相同. 因

此在对 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 作分块时，必须满足这个条件.

对于本例，$\boldsymbol{A}_{11}$ 实际包含两列，与 $\boldsymbol{B}_{11}$ 实际包含的行数（两行）相同；$\boldsymbol{A}_{12}$ 实际包含两列，$\boldsymbol{B}_{21}$ 实际包含两行. 满足要求，故

$$\boldsymbol{A}_{11}\boldsymbol{B}_{11}+\boldsymbol{A}_{12}\boldsymbol{B}_{21}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&-1\\2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\5\end{bmatrix}.$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}_{11}\boldsymbol{B}_{12}+\boldsymbol{A}_{12}\boldsymbol{B}_{22}&=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-1\\0&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&-1\\2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-1\\-1&1\end{bmatrix}\\&=\begin{bmatrix}1&-1\\0&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2&-2\\1&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&-3\\1&-1\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

$$\boldsymbol{A}_{21}\boldsymbol{B}_{11}+\boldsymbol{A}_{22}\boldsymbol{B}_{21}=[0,-1]\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}+[1,0]\begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix}=(-1)+(2)=(1).$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}_{21}\boldsymbol{B}_{12}+\boldsymbol{A}_{22}\boldsymbol{B}_{22}&=[0,-1]\begin{bmatrix}1&-1\\0&0\end{bmatrix}+[1,0]\begin{bmatrix}1&-1\\-1&1\end{bmatrix}\\&=[0,0]+[1,-1]=[1,-1].\end{aligned}$$

所以

$$\boldsymbol{AB}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_{11}&\boldsymbol{A}_{12}\\\boldsymbol{A}_{21}&\boldsymbol{A}_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{B}_{11}&\boldsymbol{B}_{12}\\\boldsymbol{B}_{21}&\boldsymbol{B}_{22}\end{bmatrix}=\left[\begin{array}{c:cc}2&3&-3\\5&1&-1\\\hdashline 1&1&-1\end{array}\right].$$

例 1.2.13 已知 $\boldsymbol{A}_{m\times k}$，$\boldsymbol{B}_{k\times n}$. 现将 $\boldsymbol{A}$ 看成 1×1 型的分块矩阵，将 $\boldsymbol{B}$ 按列分块，即 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\cdots,\boldsymbol{b}_n)$. 问这样的分块方式能否作乘法运算 $\boldsymbol{AB}$？

解

$$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{A}_{1\times1}(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\cdots,\boldsymbol{b}_n)_{1\times n},$$

这里左矩阵的列数 1 等于右矩阵的行数 1. 因此若作乘法，乘积矩阵应是 $1\times n$ 型：

$$\boldsymbol{AB}=(\boldsymbol{Ab}_1,\boldsymbol{Ab}_2,\cdots,\boldsymbol{Ab}_n)_{1\times n}.$$

又因为 $\boldsymbol{A}$ 实际包含 k 列，每一个 $\boldsymbol{b}_i$ 是 $k\times1$ 型子矩阵，因此每一个 $\boldsymbol{Ab}_i(i=1,2,\cdots,n)$ 是有意义的. 因此这种分块方式可以作乘法运算. 实际上在线性规划中经常要用到这种分块方式的乘法运算.

思考题：对上述矩阵 $\boldsymbol{A}_{m\times k}$ 及 $\boldsymbol{B}_{k\times n}$，如果将 $\boldsymbol{B}$ 看成 1×1 型的分块矩阵，问 $\boldsymbol{A}$ 应如何分块才能作分块乘法运算 $\boldsymbol{AB}$？

对于数乘分块矩阵及分块矩阵的转置运算，我们给出以下公式：

$$k\boldsymbol{A}=k\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_{11}&\boldsymbol{A}_{12}\\\boldsymbol{A}_{21}&\boldsymbol{A}_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}k\boldsymbol{A}_{11}&k\boldsymbol{A}_{12}\\k\boldsymbol{A}_{21}&k\boldsymbol{A}_{22}\end{bmatrix};$$

若

$$\boldsymbol{A}_{m\times n}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12} & \cdots & \boldsymbol{A}_{1t}\\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22} & \cdots & \boldsymbol{A}_{2t}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \boldsymbol{A}_{s1} & \boldsymbol{A}_{s2} & \cdots & \boldsymbol{A}_{st}\end{bmatrix}_{s\times t},$$

则

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12} & \cdots & \boldsymbol{A}_{1t}\\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22} & \cdots & \boldsymbol{A}_{2t}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \boldsymbol{A}_{s1} & \boldsymbol{A}_{s2} & \cdots & \boldsymbol{A}_{st}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_{11}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{A}_{21}^{\mathrm{T}} & \cdots & \boldsymbol{A}_{s1}^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{A}_{12}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{A}_{22}^{\mathrm{T}} & \cdots & \boldsymbol{A}_{s2}^{\mathrm{T}}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \boldsymbol{A}_{1t}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{A}_{2t}^{\mathrm{T}} & \cdots & \boldsymbol{A}_{st}^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}_{t\times s}.$$

式中 $\boldsymbol{A}_{ij}^{\mathrm{T}}$ 表示对子矩阵 $\boldsymbol{A}_{ij}$ 本身作一次转置运算.

1.2.5 矩阵的秩

定义 1.2.9 在矩阵 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$ 中,任取 k 个行、k 个列($k\leqslant m,k\leqslant n$),在这 k 行 k 列交叉处有 k^2 个元素,这 k^2 个元素按原有次序构成的一个 k 阶行列式,称为矩阵 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$ 的一个 k 阶子行列式,简称为 k 阶子式.

例 1.2.14 设 $\boldsymbol{A}_{3\times 4}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 1 & 0\\ 2 & -1 & 1 & 3\\ 3 & 1 & 2 & 3\end{bmatrix}$.

取 $k=2$,则 $\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & -1\end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & 1\end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix}1 & 0\\ 1 & 3\end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & 1\end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix}2 & 0\\ 1 & 3\end{vmatrix}$,…,都是 $\boldsymbol{A}$ 的 2 阶子式.

取 $k=3$,则 $\begin{vmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & -1 & 1\\ 3 & 1 & 2\end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix}1 & 2 & 0\\ 2 & -1 & 3\\ 3 & 1 & 3\end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix}1 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 3\\ 3 & 2 & 3\end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix}2 & 1 & 0\\ -1 & 1 & 3\\ 1 & 2 & 3\end{vmatrix}$ 都是 $\boldsymbol{A}$ 的 3 阶子式.

定义 1.2.10 若矩阵 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$ 中,有一个 r 阶子式不为零,而所有高于 r 阶的子式全为零,则称矩阵 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$ 的秩为 r,记作 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=r$.

如上例 $\boldsymbol{A}_{3\times 4}$ 中,有一个 2 阶子式不为零:$\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & -1\end{vmatrix}=-5\neq 0$,而所有 3 阶子式全为零(读者可自行验证这个结论),因此该矩阵的秩为 2,即 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=2$.

例 1.2.15 已知阶梯形矩阵 $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 2 & 4\end{bmatrix}$,很容易看出该矩阵有一个 3 阶子

式不为零：$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$，而矩阵 $\boldsymbol{B}$ 没有更高阶数的子式，因此矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的秩为 3，即 $\mathrm{r}(\boldsymbol{B})=3$.

定理 1.2.5 初等行(列)变换不改变矩阵的秩.

矩阵的秩是线性代数中非常重要的概念，在线性规划中也常要用到. 但对一般的矩阵用定义来计算秩非常不方便. 而对于阶梯形矩阵(见例 1.2.15)求秩比较方便，由定理 1.2.5 可知，如将一般矩阵 $\boldsymbol{A}$ 通过一系列的初等行(列)变换后化为阶梯形矩阵 $\boldsymbol{B}$，则 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=\mathrm{r}(\boldsymbol{B})$，$\boldsymbol{A}$ 的秩便可容易地得到.

例 1.2.16 已知 $\boldsymbol{A}_{3\times 4}=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$. 求 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})$.

解 将 $\boldsymbol{A}$ 通过一系列的初等行变换化为阶梯形矩阵：

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\times(-2)\ \times(-3)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & -1 & 3 \\ 0 & -5 & -1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\times(-1)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \stackrel{\text{def}}{=\!=} \boldsymbol{B}.$$

显见，阶梯形矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的秩为 2. 故 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=\mathrm{r}(\boldsymbol{B})=2$.

在 1.1.3 节中介绍了向量组的秩，这里又引入了矩阵的秩. 以下给出两者间的关系.

一个 $m\times n$ 型矩阵 $\boldsymbol{A}$，它的第 i 行为$(a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in})$，是一个有次序的数组. 因此可将它看成一个 n 维向量，记作$\boldsymbol{\alpha}_i=(a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in})$，$i=1,2,\cdots,m$. 因此矩阵 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$可看成由 m 个向量构成的一个向量组：$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1 \\ \boldsymbol{\alpha}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{\alpha}_m \end{bmatrix}$，称为 $\boldsymbol{A}$ 的行向量组，其中每一个向量$\boldsymbol{\alpha}_i$ $(i=1,2,\cdots,m)$都是一个 n 维向量.

同理，矩阵的每一列也可看成一个向量：

$$\begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix},\quad \text{记作 } \boldsymbol{p}_j=\begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix} \quad (j=1,2,\cdots,n),$$

矩阵 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$就可看成由 n 个向量构成的一个向量组：$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\cdots,\boldsymbol{p}_n)$，称为 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组，其中每一个向量 $\boldsymbol{p}_j$ 都是一个 m 维向量. 故有

$$A=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1\\ \boldsymbol{\alpha}_2\\ \vdots\\ \boldsymbol{\alpha}_m\end{bmatrix}=(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\cdots,\boldsymbol{p}_n).$$

在 1.1.3 节中,已介绍过向量组的秩的概念,矩阵行(列)向量组的秩称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行(列)秩,即 $\boldsymbol{A}$ 的行秩 $=\mathrm{r}\begin{bmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1\\ \boldsymbol{\alpha}_2\\ \vdots\\ \boldsymbol{\alpha}_m\end{bmatrix}=\mathrm{r}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m)$,$\boldsymbol{A}$ 的列秩 $=\mathrm{r}(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\cdots,\boldsymbol{p}_n)$.

矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})$ 与 $\boldsymbol{A}$ 的行秩、列秩之间有下述关系:

定理 1.2.6 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩 $=\boldsymbol{A}$ 的行秩 $=\boldsymbol{A}$ 的列秩.

根据上述定理,故可将任一个向量组,以列(或行)向量组的形式组成一个矩阵.求出该矩阵的秩,即可得到原向量组的秩.

例 1.2.17 已知 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,3)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\alpha}_2=(2,-1,1)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\alpha}_3=(1,1,2)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\alpha}_4=(0,3,3)^{\mathrm{T}}$,求向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 的秩.

解 将 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 以列向量组的形式组成矩阵 $\boldsymbol{A}$:

$$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)=\begin{bmatrix}1&2&1&0\\2&-1&1&3\\3&1&2&3\end{bmatrix}.$$

然后对 $\boldsymbol{A}$ 作一系列初等行变换得到阶梯形矩阵 $\boldsymbol{B}$.由例 1.2.16 知,$\mathrm{r}(\boldsymbol{B})=\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=2$.因此 $\mathrm{r}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)=2$.记 $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&2&1&0\\0&-5&-1&3\\0&0&0&0\end{bmatrix}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4)$.由于 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 两列中包含一个 2 阶子式不为零 $\left(\text{即}\begin{vmatrix}1&2\\0&-5\end{vmatrix}\neq0\right)$,因此 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 是线性无关的向量组.且任意 3 个列向量都线性相关.而 $\boldsymbol{B}$ 是由 $\boldsymbol{A}$ 只经过初等行变换得到的,因此 $\boldsymbol{B}$ 的列向量组 $(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4)$ 与 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组 $(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)$ 有相同的线性相关性.即 $\boldsymbol{B}$ 中任意 3 个向量都线性相关,而 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 是 $\boldsymbol{B}$ 的列向量组的一个极大无关组,相应地 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组 $(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)$ 中任意 3 个向量也线性相关;且 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 也是 $(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)$ 的一个极大无关组.同理,$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_3$;$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_4$;$\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$;…都是 $\boldsymbol{B}$ 的列向量组的极大无关组,则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3$;$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_4$;$\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$;…也都是 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组的极大无关组.要注意的是,这里只对 $\boldsymbol{A}$ 进行一系列初等行变换,不进行列变换而得到的阶梯形矩阵 $\boldsymbol{B}$,才能保证 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的列向量组有相同的线性相关性.

1.3 二次型及其正定性

1.3.1 二次型及其矩阵表达式

定义 1.3.1 关于变量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的一个二次齐次多项式 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j$，称为变量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的一个二次型.

如 $f(x_1,x_2)=3x_1^2+2x_1x_2+6x_2^2$ 是关于 x_1,x_2 的一个二次型；$f(x_1,x_2,x_3)=-2x_1^2+x_1x_2+4x_1x_3+5x_2x_3-x_3^2$ 是关于 x_1,x_2,x_3 的一个二次型. 而 $f(x_1,x_2)=4x_1^2+5x_1x_2+2x_1-\frac{1}{2}x_2^2$ 不是 x_1,x_2 的二次型，因为其中有一项$(2x_1)$不是 x_1,x_2 的二次单项式.

为了利用向量与矩阵作工具来研究二次型，首先引入二次型的矩阵表达式.

假定二次型表达式 $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j$ 中 $a_{ij}=a_{ji}(i,j=1,2,\cdots,n)$. 因此有

$$
\begin{aligned}
f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=&\ a_{11}x_1^2+2a_{12}x_1x_2+2a_{13}x_1x_3+\cdots+2a_{1n}x_1x_n\\
&+a_{22}x_2^2+2a_{23}x_2x_3+\cdots+2a_{2n}x_2x_n\\
&+\cdots+a_{nn}x_n^2\\
=&\ a_{11}x_1^2+a_{12}x_1x_2+a_{13}x_1x_3+\cdots+a_{1n}x_1x_n\\
&+a_{21}x_2x_1+a_{22}x_2^2+a_{23}x_2x_3+\cdots+a_{2n}x_2x_n\\
&+\cdots+a_{n1}x_nx_1+a_{n2}x_nx_2+a_{n3}x_nx_3+\cdots+a_{nn}x_n^2\\
=&\ x_1(a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3+\cdots+a_{1n}x_n)+x_2(a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3\\
&+\cdots+a_{2n}x_n)+\cdots+x_n(a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+a_{n3}x_3+\cdots+a_{nn}x_n)\\
=&\ (x_1,x_2,\cdots,x_n)\begin{bmatrix} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3+\cdots+a_{1n}x_n\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3+\cdots+a_{2n}x_n\\ \vdots\\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+a_{n3}x_3+\cdots+a_{nn}x_n\end{bmatrix}\\
=&\ (x_1,x_2,\cdots,x_n)\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}\\
=&\ \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}.
\end{aligned}
\tag{1.3.1}
$$

式中 $\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}$；$\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$，其中 $a_{ij}=a_{ji}(i,j=1,2,\cdots,n)$，即 $\boldsymbol{A}$ 是一个 n 阶对称矩阵：$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$.

式(1.3.1)称为二次型的矩阵表达式. 称 $\boldsymbol{A}$ 为二次型 $f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 的对应矩阵.

例 1.3.1 将下列两个二次型化成矩阵表达式：

$$f_1(x_1,x_2,x_3)=4x_1^2+x_1x_2+2x_2^2-x_3^2-3x_1x_3;$$
$$f_2(x_1,x_2,x_3)=x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3.$$

解

$$\begin{aligned}f_1(x_1,x_2,x_3)&=4x_1^2+2\times\frac{1}{2}x_1x_2+2x_2^2-x_3^2-2\times\frac{3}{2}x_1x_3\\&=(x_1,x_2,x_3)\begin{bmatrix}4&\frac{1}{2}&-\frac{3}{2}\\\frac{1}{2}&2&0\\-\frac{3}{2}&0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f_2(x_1,x_2,x_3)&=x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=2\times\frac{1}{2}x_1x_2+2\times\frac{1}{2}x_1x_3+2\times\frac{1}{2}x_2x_3\\&=(x_1,x_2,x_3)\begin{bmatrix}0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

例 1.3.2 已知两个二次型的对应矩阵分别为 $\boldsymbol{A}_1=\begin{bmatrix}1&2&-1\\2&0&-2\\-1&-2&3\end{bmatrix}$；$\boldsymbol{A}_2=\begin{bmatrix}3&0&0\\0&-1&0\\0&0&2\end{bmatrix}$，试写出二次型.

解

$$f_1(x_1,x_2,x_3)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,x_3)\begin{bmatrix}1&2&-1\\2&0&-2\\-1&-2&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$$

$$= x_1^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 - 4x_2x_3 + 3x_3^2,$$

$$f_2(x_1,x_2,x_3) = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{x} = (x_1,x_2,x_3)\begin{bmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}$$

$$= 3x_1^2 - x_2^2 + 2x_3^2.$$

1.3.2 二次型的正定性

定义 1.3.2 对实二次型 $f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$，若 $\forall\, \boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$，都有 $f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}>0$ 成立，称 $f(\boldsymbol{x})$ 为正定二次型；称其对应矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为正定矩阵.

如：$f_1(x_1,x_2,x_3)=\frac{1}{3}x_1^2+\frac{1}{4}x_2^2+\frac{1}{5}x_3^2$，$f_2(x_1,x_2,x_3)=\frac{1}{2}x_1^2+100x_2^2-\frac{1}{100}x_3^2$，$f_3(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+(x_2+x_3)^2$，$f_4(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2$，其中 $f_1(x_1,x_2,x_3)$ 是正定二次型，而 $f_2(x_1,x_2,x_3)$，$f_3(x_1,x_2,x_3)$，$f_4(x_1,x_2,x_3)$ 都不是正定二次型. 比如取 $\boldsymbol{x}_0=(0,1,-1)^{\mathrm{T}}\neq\boldsymbol{0}$，则 $f_3(\boldsymbol{x}_0)=0^2+(1-1)^2=0$，不满足正定二次型定义(其余几个请读者自行验证).

用定义来判断二次型是否正定，对一般二次型(含有交叉项 x_ix_j，$i\neq j$)是比较困难的. 显然二次型是否正定应该是由矩阵 $\boldsymbol{A}$ 决定的.

定理 1.3.1 n 阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 正定的充分必要条件是 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个顺序主子式全部大于零. 即

$$a_{11}>0,\ \begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}>0,\ \begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}>0,\cdots,\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}>0;$$

或表示为

$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ii}\end{vmatrix}>0\quad (i=1,2,\cdots,n).$$

例 1.3.3 试判断二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-2x_1x_2+2x_1x_3+4x_2x_3+4x_2^2+5x_3^2$ 是否正定.

解

$$f(x_1,x_2,x_3)=(x_1,x_2,x_3)\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ -1 & 4 & 2\\ 1 & 2 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix},$$