



7.1 引言

对现实世界中的控制系统进行研究可以发现,几乎所有的系统都具有非线性特性.举例来说,在许多情况下,系统中的信号具有上限,从而出现饱和现象.另外,在电气装置中存在铁磁材料,在机械系统中存在齿轮间隙、摩擦力等等,这些都会使系统具有非线性特性.在工程问题研究中采用了许多线性系统模型,其实它们都是对实际系统的不同程度的近似.在这些线性模型中,或者忽略了回路中的非线性特性,或者用某种线性特性来近似表示实际的非线性特性.之所以采用线性模型来研究实际系统,是因为对线性系统存在一整套较为完善的理论与方法,比较容易得出分析结果并进行设计校正.而且对相当多的实际系统,这种近似的结果基本符合工程实际要求,是可以接受的.

不过,有些非线性系统中的非线性特性无法忽略,也不能采用某种线性特性来近似.在这类非线性系统中,某些系统在满足精度要求的前提下可以被大致分离出独立的非线性部件,譬如一个具有饱和特性的执行机构.对这类系统,能够采用不同类型的方式来分别描述系统中的线性部分特性和非线性部分特性.而有些系统则无法从中分离出独立的非线性部件,只能采用非线性微分方程来描述系统的动态特性,譬如对化学过程、热力过程、流体过程、生物学过程的数学描述.

而且,对某些非线性系统,即使允许采用线性模型来近似,所得结果的准确程度也与非线性系统的工作状态有关.对某些非线性系统可能存在这样的情形:这种近似在大部分工作状态附近都是合理的,但在个别状态附近却不能给出恰当结论或者会给出完全错误的结论.

另外,在解决工程问题时人们也发现,将非线性部件适当引入控制系统,有时会取得很好的、单纯采用线性系统所无法达到的效果.譬如说,为了获得低成本和快速响应的效果,可以使用继电器在适当时刻切换控制量的大小和方向.鉴于系统中存在不可忽略的非线性特性以及在

控制系统中有时人为引入非线性特性这两方面的原因,研究非线性系统的分析和设计方法是十分必要的。

对非线性系统的研究比对线性系统的研究要复杂得多。非线性系统需要逐个或逐类加以讨论,目前还没有一种方法能被用来分析所有非线性系统。非线性系统的分析涉及多方面的基础知识,甚至涉及相当艰深的数学理论。本章不全面讲述非线性控制系统的分析和设计方法,只是打算介绍两种比较简单、与本书其他内容联系较紧密的方法:描述函数方法和相平面方法。描述函数的概念是线性系统传递函数概念的某种推广。参照线性系统的稳定性分析方法,就可以用描述函数来近似分析一类非线性系统。相平面方法可以被认为是状态空间方法的最简单形式,它可以被用来准确研究一类非线性系统,而且也不需要很深的数学基础知识。

在非线性系统研究中,计算机仿真显得尤为重要。因为在许多非线性系统分析方法中,结果是近似的;有些方法虽然能够给出比较精确的结果,但计算十分困难;还有些情况根本无法进行计算。所以,采用计算机仿真来验证分析结果、验证计算结果、甚至获得无法通过计算求得的结果就十分必要。但不作分析而只进行仿真也是不可取的。因为同一个非线性系统可能包括多种性质完全不同的运动特性,不作分析而进行仿真就可能遗漏其中某些重要的运动特性。故而,对非线性系统的研究方法应当是:先采用分析方法获得关于运动性质的基本结论并采用尽可能简单而准确的方法进行适当的计算,然后再通过有目的的仿真对分析结论和计算数据进行验证和改进。

本章7.1节介绍非线性系统的基本特点。在7.2节说明了描述函数的概念后,在7.3节介绍非线性系统的描述函数分析方法。在7.4节叙述相平面的基本概念,然后在7.5节讨论非线性系统的相平面分析方法,特别是由分区线性系统构成的非线性系统的相平面分析方法。

7.1.1 线性系统和非线性系统

在本书关于线性系统的章节中,都是根据传递函数并采用几种典型的分析方法来研究线性系统的特性。之所以能够这样做,一个主要的原因是线性系统满足**叠加原理**。对一个线性系统,如果在输入信号 $r_1(t)$ 和 $r_2(t)$ 的作用下,系统的输出分别为 $c_1(t) = f[r_1(t)]$ 和 $c_2(t) = f[r_2(t)]$,那么在输入信号 $ar_1(t) + br_2(t)$ 的作用下,系统的输出必为

$$c(t) = ac_1(t) + bc_2(t) = f[ar_1(t) + br_2(t)]. \quad (7.1.1)$$

它说明线性系统的输入输出之间的关系与输入信号的形式和大小无关,只与系统本身的参数有关。由于线性系统满足叠加原理,所以不必逐一讨论一个线性系统在各种输入信号下的输出响应,而是采用某些典型信号来激励系统,从而求取能

够代表系统性能的传递函数,然后采用多种完善的分析计算方法来加以研究.譬如说,根据线性系统的传递函数本身就可以讨论该线性系统的稳定性;给定了输入信号就可以借助传递函数来计算线性系统的输出响应特性等等.

然而,非线性系统不具有这样的性质.一个非线性系统的输出响应受很多因素的影响,不同的输入信号形式、不同的输入信号幅值、不同的初始条件都可能对非线性系统输出响应产生很大的影响,甚至导致性质完全相反的运动形式.到目前为止,还不存在能描述非线性系统输入输出关系的统一表达式,也不存在对所有非线性系统都适用的分析方法,而且对非线性系统还不能求得闭合形式的解(closed form of solution).

一个非线性系统或非线性部件,其输入输出关系可以采用如下微分方程来描述

$$\frac{d^n y}{dt^n} = f\left(t, y, \dot{y}, \ddot{y}, \dots, \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}}, x\right). \quad (7.1.2)$$

如果 f 是连续函数,则该非线性特性是**连续非线性特性**,否则是**不连续非线性特性**.譬如非线性弹簧

$$y = k_1 x + k_2 x^3, \quad (k_1 > 0) \quad (7.1.3)$$

就是一种连续非线性特性,而继电器特性则是一种不连续非线性特性.

在某些系统中,部件本身就具有非线性特性,譬如放大器可能具有饱和特性或死区特性.系统本身具有的这类非线性特性被称为**固有非线性特性**.固有非线性特性增加了对系统进行分析设计的困难,而且许多固有非线性特性对系统的运行是有害的,需要设法克服它们对系统的影响.但在控制系统的设计中,也可能在线性系统中引入某种非线性来改进系统的性能.这种人工引入的非线性特性被称为**人为非线性特性**.

图 7.1.1 就是引入人为非线性特性来改进系统性能的示例.对一个稳定的线性二阶系统,阶跃响应是衰减振荡信号,输出量存在一定的超调,而且要等待足够长的时间才能接近稳态值.但如果适当选择 a, b 与 t_1 的值,如图 7.1.1(a) 那样使阶跃输入信号幅值先为 a ,然后在时刻 t_1 突然变成 $a+b$,那么就可以获得图 7.1.1(b) 所示的输出响应.这个输出响应迅速、没有超调,它经过一个很短的时段就能达到稳态值,所以是一种十分理想的输出响应.在这个示例中,尽管被控对象本身具有

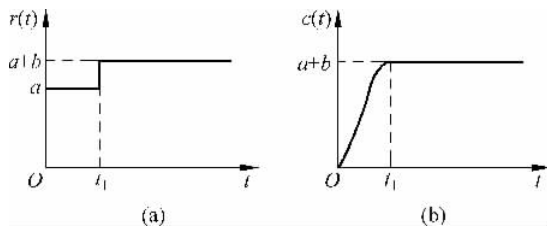


图 7.1.1 切换输入信号与相应的输出信号

线性特性,但引入信号切换部件后,整个系统变成了一个非线性系统。

7.1.2 非线性系统的某些特征现象

除了非线性系统不满足叠加原理这一重要性质之外,非线性系统的运动也呈现出许多与线性系统不同的现象.了解这些非线性系统的特征现象对学习非线性系统的分析方法、理解各种分析结果很有帮助。

1. 具有多个平衡点

在线性系统研究中总是讨论一个系统是稳定还是不稳定.稳定系统的运动在不同初始条件下都会达到稳态值,而不稳定系统的运动在任何初始条件下都不会逐渐到达稳态值.当然个别初始条件除外,因为不稳定系统在某个初始条件下,其状态从理论上讲可能保持不变.稳定系统的稳态值所代表的系统状态或者不稳定系统理论上能保持不变的状态被称为平衡状态,也称为平衡点.绝大多数线性系统只有一个平衡点,但在一个非线性系统中却可能出现不同的现象.一个非线性系统可能具有多个平衡点,而且同一个非线性系统的多个平衡点的稳定性可能完全不同.所以在非线性系统中,一般不笼统地讨论系统的稳定性,而是讨论具体平衡点的稳定性,即讨论在极为靠近某个平衡点的一个小范围内出发的运动的趋势。

例 7.1.1 已知非线性系统微分方程为 $\dot{x} = -x(1-x)$, $x(0) = x_0$. (1) 在 $x=0$ 附近对该微分方程进行线性化处理,并求出该线性化方程的解; (2) 求解原非线性微分方程并与该线性方程的解加以比较。

解 (1) 线性化方程的解. 将该非线性微分方程在原点线性化,可以得到线性方程 $\dot{x} = -x$, 它的解为 $x(t) = x_0 e^{-t}$, 这代表一个稳定的运动. 当时间趋于无穷时, $x(\infty) = 0$, 所以线性化后的系统具有惟一的平衡点。

(2) 非线性微分方程的解. 当 $x \neq 0$ 且 $x \neq 1$ 时, 原方程可以被改写为

$$\frac{dx}{x(1-x)} = -dt.$$

对上述方程的两端积分可以获得 $x/(1-x) = Ce^{-t}$, 即 $x(t) = Ce^{-t}/(1+Ce^{-t})$. 如果 $x(0) = x_0 \neq 1$, 则 $C = x_0/(1-x_0)$, 于是得到微分方程的解

$$x(t) = \frac{x_0 e^{-t}}{1 - x_0 + x_0 e^{-t}}.$$

根据该表达式可以得出如下结论:

- (i) 在 $x_0 = 0$ 时, $x(t) \equiv 0$;
- (ii) 在 $x_0 = 1$ 时, $x(t) \equiv 1$;
- (iii) 在 $0 < x_0 < 1$ 的情况下, 分母 $1 - x_0 + x_0 e^{-t} = 1 - x_0(1 - e^{-t})$ 恒大于 0, 所以由分子项 $x_0 e^{-t}$ 可知, 当 $t \rightarrow \infty$ 时, $x(t) \rightarrow 0$;

(iv) 在 $x_0 < 0$ 的情况下, 分母也恒大于 0, 所以当 $t \rightarrow \infty$ 时, $x(t) \rightarrow 0$;

(v) 在 $x_0 > 1$ 的情况下, 分母项在 1 与 $1 - x_0 < 0$ 之间变化, 可以算得, 当 $t = \ln[x_0 / (x_0 - 1)]$ 时, 分母等于 0, 所以此时 $x(t) \rightarrow \infty$.

图 7.1.2 是该系统在不同初始条件下的时间响应示意图. 可以看出, 该系统有两个平衡点, 其中 $x=0$ 是一个稳定平衡点, 从 $x=0$ 附近出发的运动最终将会处于静止状态; 而 $x=1$ 是一个不稳定平衡点, 从 $x(0) > 1$ 出发的运动最终趋向于无穷大. 另外也可以看出, 在原点线性化的系统不能完全代表原有的非线性系统, 因为它只反映了 $x=0$ 这个稳定平衡点, 而没有反映 $x=1$ 这个不稳定平衡点. \square

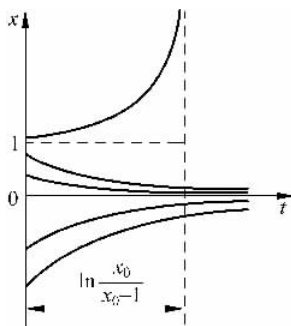


图 7.1.2 例 7.1.1 的时间响应

2. 自持振荡

一个线性系统如果能够产生稳定的振荡, 那么其振幅是与初始条件有关的. 另外, 在有外界输入信号的情况下, 它的频率和振幅都与外界信号的频率和幅值有关. 但是某些非线性系统则不同, 它们能够产生稳定的振荡, 但是该振荡可能具有固定的频率和振幅, 而与初始条件及外界信号无关. 这种振幅和频率只取决于系统本身的参数而与初始条件或输入信号无关的振荡被称为自持振荡. 下面以范德普尔(Van der Pol)振荡器为例来说明这一现象. 范德普尔振荡器是一个具有非线性电阻的 RLC 电路, 其电阻值和端电压成非线性关系. 范德普尔振荡器的运动状态可以用范德普尔方程

$$m \ddot{x} - f(1 - x^2) \dot{x} + kx = 0, \quad (f > 0) \quad (7.1.4)$$

来描述.

通过对方程的定性分析可以初步判断该振荡器的信号变化方式. 当 x 很大时, \dot{x} 的系数 $-f(1 - x^2) > 0$, 即阻尼系数为正. 这表明系统在运动过程中消耗能量, 所以运动有衰减的趋势. 当 x 很小时, \dot{x} 的系数 $-f(1 - x^2) < 0$, 即阻尼系数为负. 这意味着阻尼器向系统添加能量, 所以运动有发散的趨勢. 由于系统的状态既不能无界增大, 也不能收敛到 0, 故而应当呈现某种振荡状态.

例 7.1.2 设范德普尔方程中的参数为 $m=1, f=3, k=1$, 试采用 MATLAB 语言对系统进行仿真来获得输出时间响应.

解 令 $x_1 = x, x_2 = \dot{x}$, 则原方程可以被改写为 $\dot{x}_1 = x_2, \dot{x}_2 = 3(1 - x_1^2)x_2 - x_1$. 编制如下两个 MATLAB 文件:

“vanderpol.m”: (模型文件)

```
function [sys,x0] = vanderpol(t,x)
sys = [x(2); -x(1) + 3 * (1 - x(1) * x(1)) * x(2)];
```

“vanderpolsimu. m”: (仿真文件)

```
[t,x]=ode45('vanderpol',[0,40],[-0.5;0]);
plot(t,x(:,1),'r'); hold on; grid;
[t,x]=ode45('vanderpol',[0,40],[2.5;0]);
plot(t,x(:,1),'- - b');
hold off;
```

运行“vanderpolsimu. m”就可以获得图 7.1.3 所示的时间响应。

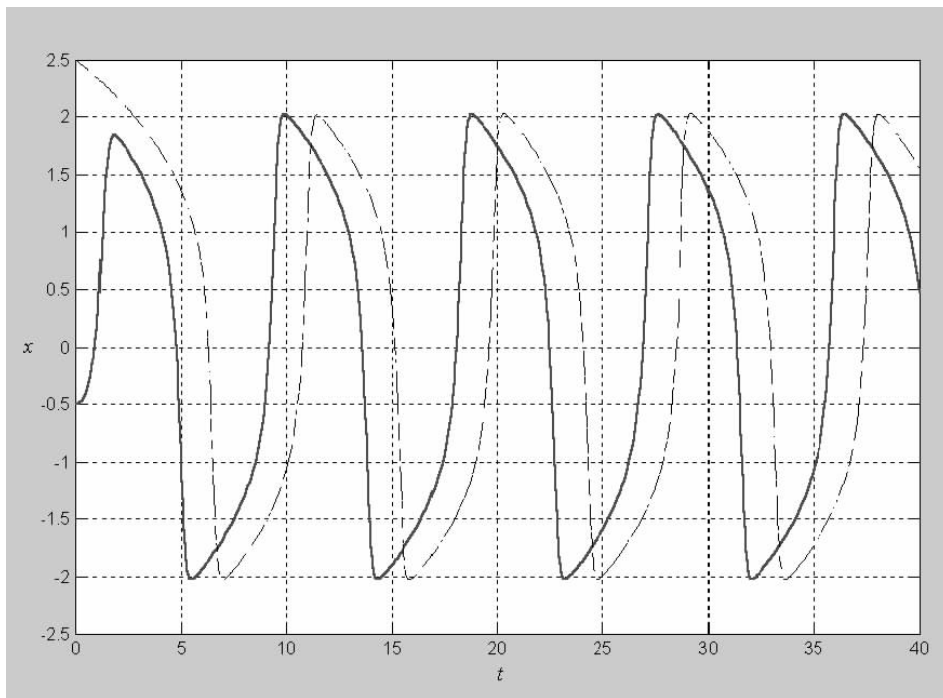


图 7.1.3 范德普尔振荡器的输出信号

该图表示了初始条件分别为 $x(0) = -0.5$, $\dot{x}(0) = 0$ (实线) 与 $x(0) = 2.5$, $\dot{x}(0) = 0$ (虚线) 的两种运动情况。从该图可以看出, 尽管初始条件不同, 但系统输出总是幅值约为 2、周期约为 8.9 秒的振荡。不过, 该振荡波形不是正弦波形。如果改变初始条件来做更多的仿真还可以发现, 当初始条件为零时, 振荡器将保持静止, 这说明 $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 0$ 是系统的平衡状态。不过, 只要初始条件不为零, 或者说振荡器一旦被激励, 一定会输出与该图类似的振荡信号。另外, 改变系统的参数进行仿真也可以发现, 振荡的幅值、周期与系统参数 m, f, k 的取值有关。 □

3. 频率对幅值的依赖关系

线性系统的振荡具有固定的频率, 在调节振荡幅值或者振荡幅值随时间的推

移而增大或减小时, 振荡频率不会改变. 但某些非线性系统的振荡频率却会随振幅的变化而变化. 当一个质量-阻尼器-弹簧系统中的弹簧为非线性弹簧时, 就会出现这种情况. 式 (7.1.3) 所示的特性就是一个非线性弹簧的特性, 它的输入输出特性为 $y = k_1 x + k_2 x^3$, $k_1 > 0$. 当 $k_2 > 0$ 时, 该非线性弹簧被称为硬弹簧, 它可以被用来近似表示肌肉的力与伸缩之间的关系; 当 $k_2 < 0$ 时被称为软弹簧.

例 7.1.3 一个质量-阻尼器-弹簧系统的弹簧是非线性弹簧时, 其运动微分方程可以用有阻尼杜芬方程

$$m \ddot{x} + f \dot{x} = -k_1 x - k_2 x^3, \quad (k_1 > 0)$$

来表示. 设 $m = 2$, $f = 0.1$, $k_1 = 1$, 试在该非线性弹簧为硬弹簧 ($k_2' = 400$) 和软弹簧 ($k_2'' = -99$) 的情况下分别采用 MATLAB 语言来演示振荡频率与振荡幅值的关系.

解 令 $x_1 = x$, $x_2 = \dot{x}$, 将原方程改写为 $\dot{x}_1 = x_2$, $\dot{x}_2 = (-f x_2 - k_1 x_1 - k_2 x_1^3)/m$. 仿照例 7.1.2 的方法在 $k_2' = 400$ 与 $k_2'' = -99$ 的情况下编制两个模型文件和一个仿真文件, 可以获得图 7.1.4 所示的时间响应. 其中实线为 $k_2' = 400$ 时的响应, 虚线为 $k_2'' = -99$ 时的响应. 两条曲线都是衰减振荡, 但从两条响应曲线可以看出, 当 $k_2 > 0$ 时 (参看实线), 振荡频率随振幅减小而下降; 当 $k_2 < 0$ 时 (参看虚线), 振荡频率随振幅减小而增加. □

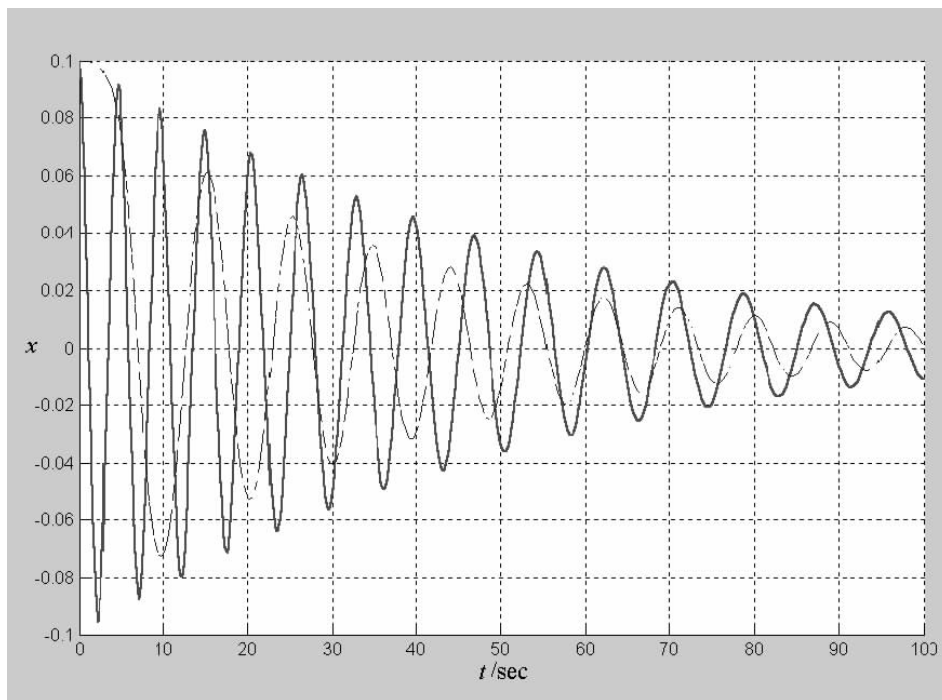


图 7.1.4 频率随振幅的依赖关系

(实线: $k_2 = 400$; 虚线: $k_2 = -99$)

4. 跳跃谐振现象

仍以例 7.1.3 所示的质量-阻尼器-弹簧系统为例,但这次施加一个外力 $p=P\cos\omega t$. 根据线性系统理论可知,如果该系统是线性系统,那么质量的位移也应当是频率为 ω 的振荡,但其幅值随频率而变. 当频率从 0 逐渐升高时振幅逐渐变大,并在某个频率下振幅达到最大值,然后振幅随频率升高而下降. 这个频率被称为谐振频率,当频率由高逐渐降低时,振幅仍在这个频率达到最大值.

当该弹簧为式(7.1.3)所示的非线性弹簧时,也会出现谐振现象,但振幅随频率的变化方式却与线性系统很不相同. 图 7.1.5 示意性地描述了输出振荡幅值 X 与输入频率 ω 之间的关系. 图 7.1.5(a) 表示 $k_2 > 0$ 的情形. 在输入频率升高的过程中, X 沿曲线 AB 逐渐增大. 但在频率从 ω_1 继续升高时, X 突降至 C , 然后再沿 CD 逐渐减小; 频率降低时, X 沿曲线 DC' 逐渐增大. 但在频率从 ω_2 继续降低时, X 先突升至 B' , 然后再沿 $B'A$ 逐渐减小. 当 $k_2 < 0$ 时,也有类似的情况,频率升高时, X 沿曲线 $ABCD$ 变化,在 ω_1 处由 B 突升至 C ; 当频率降低时, X 沿曲线 $DC'B'A$ 变化,在 ω_2 处由 C' 突降至 B' . 这种谐振幅值随频率的变化而突然跃变的现象被称为跳跃谐振.

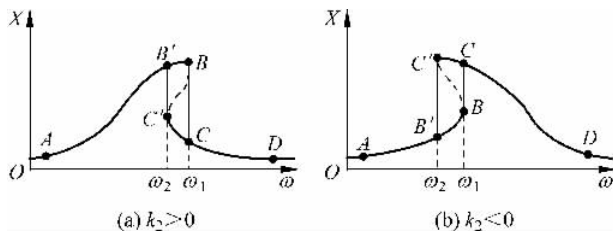


图 7.1.5 跳跃谐振现象

5. 分枝现象

在线性系统中,系统参数的改变可能导致系统稳定性的变化. 在非线性系统中,系统参数的变化同样可能导致平衡点稳定性的变化,但不仅如此,在非线性系统中,系统参数的改变甚至可以导致平衡点数量的变化. 系统参数改变导致非线性系统平衡点数量变化和平衡点性质变化的现象被称为分枝(bifurcation)现象. 产生这种变化的参数值被称为临界值或分枝值.

例 7.1.4 设某系统可以用无阻尼杜芬方程 $\ddot{x}+ax+x^3=0$ 来表示. 试讨论参数 a 从正实数变化为负实数时,系统平衡点数目和性质的变化.

解 平衡点是系统能保持静止状态的点,此时显然有 $\dot{x}=0$ 与 $\ddot{x}=0$. 在平衡状态下,无阻尼杜芬方程变为 $ax+x^3=0$,即 $x=0$ 与 $x^2+a=0$,它们就代表该系统的平衡点. 当 $a>0$ 时,系统只有一个平衡点 $x_e=0$; 当 $a<0$ 时,系统有三个平衡点 $x_e=0, \pm\sqrt{|a|}$. 为获得关于平衡点性质的结论,可以求解微分方程的时间

解,也可以通过仿真.由于已经通过分析获得了平衡点的值,所以读者可以参照例 7.1.2 的过程写出 MATLAB 程序进行仿真.这里只给出如下结论:

(1) 当 $a > 0$ 时,系统中会出现以 $x_e = 0$ 为中心的、稳定振荡,振幅由初始条件确定,可以很大,也可以非常小.

(2) 当 $a < 0$ 时,系统中会出现以平衡点 $x_e = \pm\sqrt{|a|}$ 为中心的、振幅较小的稳定振荡,还会出现平衡点 $x_e = 0$ 为中心的、振幅较大的稳定振荡.究竟出现何种振荡以及振荡的幅值大小则由初始条件确定.

所以能够得出结论:该非线性系统存在分歧现象,当参数 a 从正实数变化为负实数时,系统从具有一个平衡点变为具有三个平衡点,而且平衡点性质也发生变化, $a=0$ 是临界值. \square

上例表示了一种分歧现象.不过,分歧现象也有其他表现形式,譬如随着某个参数的变化,系统由具有一个稳定平衡点变为具有频率和振幅固定的振荡.

6. 混沌现象

在线性系统中,系统初始条件的微小改变可以导致系统输出的微小变化.所以能够这样说:对一个线性系统,可以预测系统输出在初始条件变化时的变化.在非线性系统中却可能出现完全不同的现象.有些非线性系统的输出对初始条件极为敏感.就是说,即使具有确定性的、十分精确的模型,也不能预言系统初始条件变化时的输出变化.这种现象被称为混沌(chaos)现象.

例 7.1.5 设某系统可以用微分方程 $\ddot{x} + 0.1 \dot{x} + x^3 = 6 \sin t$ 来表示.试采用仿真来获得初始条件为(1) $x(0) = 2$ 与 $\dot{x}(0) = 3$; (2) $x(0) = 2.01$ 与 $\dot{x}(0) = 3.01$ 时的时间响应.

解 仿真曲线如图 7.1.6 所示.其中粗实线表示 $x(0) = 2$ 与 $\dot{x}(0) = 3$ 时的响应,细虚线表示 $x(0) = 2.01$ 与 $\dot{x}(0) = 3.01$ 时的响应.尽管两个初始条件相差极小,但随着时间的推移,两个输出之间却出现了极大的差别. \square

非线性系统还有其他一些特征现象,譬如分谐波振荡现象和异步抑制等等.分谐波振荡是指在非线性系统输入频率为系统固有频率整数倍的情况下,系统的输出振幅特别大,但这时输出频率不等于输入频率,而是输入频率的某个分数.异步抑制现象是指,当一个非线性系统中出现频率为 ω_0 的自持振荡时,为了抑制该自持振荡,可以施加一个频率为 ω_1 的周期性外作用,从而使系统处于频率为 ω_1 的强制振荡状态.尽管这里不能罗列非线性系统的各种特性,但上述特征现象也足以说明非线性系统具有比线性系统复杂得多的性质.

工业上常见的非线性特性具有多种形式,譬如饱和非线性、死区非线性、有死区的继电器特性、有滞环的继电器特性、间隙非线性、摩擦非线性等等.非线性部件可以出现在控制回路的任何部分,这与系统的实际结构和部件的性质有关.在利用非线性部件作为控制器或利用非线性部件来改进系统性能的情况下,可以将

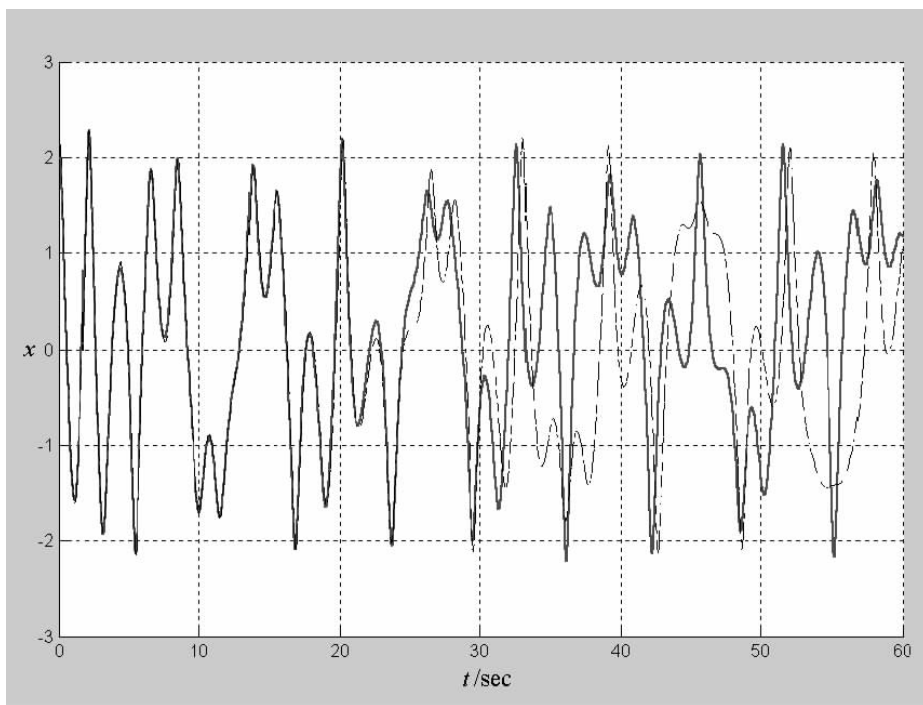


图 7.1.6 例 7.1.5 的时间响应

非线性部件放置在误差信号检测点之后. 这时, 误差信号就是它们的输入信号, 它们的输出则被用作控制信号. 不过, 非线性部件也可以被巧妙地安排在闭环控制系统的反馈回路, 以便获得特殊的控制效果. 在本章以下的几节中, 将会介绍非线性系统分析中较为简单的描述函数方法和相平面方法, 并采用这些方法来分析某些非线性系统的性能. 本章基本不涉及非线性系统的设计方法, 在偶尔提及设计的时候, 也只是作一些简单的解释.

7.2 非线性特性的描述函数

在能够将非线性部件与线性部件加以分离的非线性系统中, 非线性部件可以位于控制回路中的不同位置. 非线性部件可以将开环系统分成两个传递函数, 如图 7.2.1(a) 所示; 或者可以位于误差检测点后的控制器的位置, 如图 7.2.1(b) 所示. 不过, 如果不是为了研究给定输入信号下回路中每一点信号的大小, 而只是为了研究闭环系统的某些特性, 譬如稳定性、有无振荡等等, 那么, 一般都可以采用图 7.2.1(b) 所示的结构. 图 7.2.1(b) 中的传递函数 $G(s)$ 是回路中串联传递函数的乘积. 图 7.2.1(b) 的结构比图 7.2.1(a) 简单, 所以下面主要采用图 7.2.1(b) 所示的结构来讨论描述函数分析方法.