

控制系统的时域分析法

内容提要

本章讲述线性定常系统的时域分析方法。首先介绍各种典型输入信号和控制系统时域性能指标的定义；在此基础上,介绍了一阶系统、二阶系统和高阶系统的时域数学模型及动态性能分析方法,线性定常系统稳定的充分必要条件、劳斯稳定判据及应用,对误差、稳态误差、系统的型别给出定义,并讨论了在给定输入和扰动输入作用下的稳态误差,以及改善稳态精度的方法。最后介绍应用 MATLAB 进行控制系统的时域分析。

系统的数学模型确定后,可采用几种不同的方法分析控制系统的动态性能和稳态性能。在经典控制理论中,常用时域分析法、根轨迹法或频率特性法来分析并综合线性定常系统的性能。不同的方法有不同的特点和适用范围,但比较而言,时域分析法是一种直接在时间域中对系统进行分析的方法,具有直观、准确的优点,并且可以提供系统时间响应的全部信息。

3.1 典型输入信号和时域性能指标

控制系统性能的评价指标分为动态性能指标和稳态性能指标两类。为了求解系统的时间响应,必须了解输入信号(即外作用)的解析表达式。然而,在一般情况下,控制系统的外加输入信号具有随机性而无法预先确定,因而在分析和设计控制系统时,需要有一个对控制系统的性能进行比较的基准。这个基准就是系统对预先规定的具有典型意义的试验信号,即典型输入信号的响应。总之,为评价控制系统的性能,需要选择若干典型输入信号。

3.1.1 典型输入信号

为了便于对系统进行分析和实验研究,同时也为了方便对各种控制系统的性能进行比较,就要有一个共同的基础,即需要规定一些具有代表性的特殊输入信号(或称试验信号、基本信号),然后比较各种系统对这些特殊输入信号(也称为典型输入信号)的响应。

选取的典型输入信号应满足如下条件:首先,输入的形式应反映系统在工作中所响应的实际输入;其次,输入信号在形式上应尽可能的简单,以便于对系统响应的分析;此外,应选取能使系统工作在最不利情况下的输入信号作为典型输入信号。通常选用的典型信号

有以下 5 种时间函数。

1. 阶跃函数

阶跃函数信号的数学描述定义为

$$r(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ A, & t \geq 0 \end{cases}$$

称 A 为阶跃函数的阶跃值,如图 3.1 所示。当 $A=1$ 时,称为单位阶跃函数,记为 $1(t)$ 。给定输入电压接通、指令的突然转换、负荷的突变等,均可视为阶跃输入。

阶跃函数可以表示为

$$r(t) = A \cdot 1(t)$$

阶跃函数的拉普拉斯变换为

$$L[A \cdot 1(t)] = \frac{A}{s}$$

2. 斜坡函数(或速度阶跃函数)

斜坡函数信号的数学描述定义为

$$r(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ Bt, & t \geq 0 \end{cases}$$

如图 3.2 所示。斜坡函数的微分为阶跃函数,表示斜坡函数的速度变化,故称 B 为斜坡函数的速度阶跃值。当 $B=1$ 时,称为单位斜坡函数。

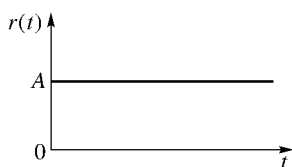


图 3.1 阶跃函数

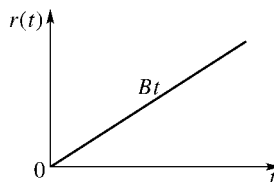


图 3.2 斜坡函数

斜坡函数可以表示为

$$r(t) = Bt \cdot 1(t)$$

斜坡函数的拉普拉斯变换为

$$L[Bt \cdot 1(t)] = \frac{B}{s^2}$$

3. 加速度函数(或抛物线函数)

加速度函数信号的数学描述定义为

$$r(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \frac{1}{2}Ct^2, & t \geq 0 \end{cases}$$

如图 3.3 所示。加速度函数的一次微分为斜坡函数,二次微分为阶跃函数。二次微分表示抛物线函数的加速度变化,故称 C 为加速度阶跃值。当 $C=1$ 时,称为单位加速度函数。

加速度函数可以表示为

$$r(t) = \frac{1}{2}Ct^2 \cdot 1(t)$$

加速度函数的拉普拉斯变换为

$$L\left[\frac{1}{2}Ct^2 \cdot 1(t)\right] = \frac{C}{s^3}$$

4. 脉冲函数

脉冲函数的数学描述定义为

$$r(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \text{ 或 } t > h \\ \frac{A}{h}, & 0 \leq t \leq h \end{cases}$$

如图 3.4 所示,其中脉冲宽度为 h ,脉冲面积等于 A 。若对脉冲的宽度 h 取趋于零的极限,则有

$$\begin{cases} r(t) \rightarrow \infty, & t \rightarrow 0 \\ r(t) = 0, & t \neq 0 \end{cases}$$

及

$$\int_{-\infty}^{+\infty} r(t) dt = A$$

当 $A=1(h \rightarrow 0)$ 时,称此脉冲函数为理想单位脉冲函数,记为 $\delta(t)$ 。

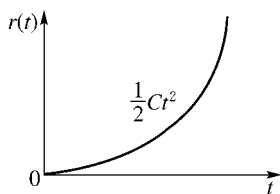


图 3.3 加速度函数

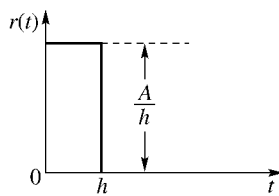


图 3.4 脉冲函数

理想单位脉冲函数的拉普拉斯变换为

$$L[\delta(t)] = 1$$

理想单位脉冲函数 $\delta(t)$ 在现实中是不存在的,只有数学上的意义,但却是一种重要的输入信号。脉冲电压信号、冲击力、阵风等都可近似为脉冲作用。

5. 正弦函数

正弦函数也是常用的典型输入信号之一。

正弦函数(见图 3.5)的数学描述定义为

$$r(t) = A \sin \omega t$$

式中, A ——振幅;

ω ——角频率。

正弦函数的拉普拉斯变换为

$$L[A \sin \omega t] = \frac{A \omega}{s^2 + \omega^2}$$

海浪对舰艇的扰动力、伺服振动台的输入指令、电源及机械振动的噪声等,均可近似正弦作用。

由于上述函数都是简单的时间函数,因此应用这些函数作为典型输入信号,可以很容易地对控制系统进行分析和试验研究。

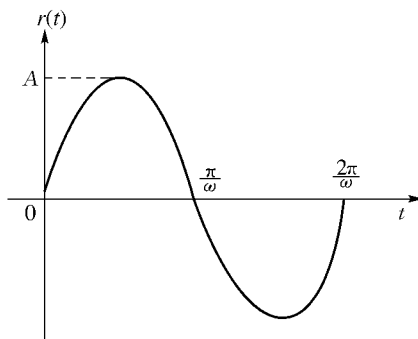


图 3.5 正弦函数

3.1.2 动态过程与稳态过程

在典型输入信号作用下,任何一个控制系统的时间响应都由动态过程和稳态过程两个部分组成。

1. 动态过程

动态过程又称为过渡过程或瞬态过程,是指系统在典型输入信号作用下,系统输出量从初始状态到接近最终状态的响应过程。由于实际控制系统具有惯性、摩擦以及其他一些原因,系统输出量不可能完全复现输入量的变化。根据系统结构和参数选择情况,动态过程表现为衰减、发散或等幅振荡形式。显然,一个可以实际运行的控制系统,其动态过程必须是衰减的,换句话说,系统必须是稳定的。动态过程除提供系统稳定性的信息外,还可以提供响应速度及阻尼情况等信息,这些信息用动态性能描述。

2. 稳态过程

稳态过程是系统在典型输入信号作用下,当时间 t 趋于无穷时,系统输出量的表现方式。稳态过程又称稳态响应,表征系统输出量最终复现输入量的程度,提供系统有关稳态精度的信息,用稳态误差来描述。

由此可见,控制系统在典型输入信号作用下的性能指标,通常由动态性能和稳态性能两部分组成。

3.1.3 时域性能指标

稳定是控制系统能够运行的首要条件,因此只有当动态过程收敛时,研究系统的动态性能才有意义。

1. 动态性能指标

一般认为,阶跃输入对系统来说是最严峻的工作状态。如果系统在阶跃函数作用下的

动态性能满足要求,那么系统在其他形式的函数作用下,其动态性能也是令人满意的。所以通常在阶跃函数作用下,测定或计算系统的动态性能。

描述稳定系统在单位阶跃函数作用下,动态过程随 t 衰减的变化状态的指标,称为动态性能指标。为了便于分析和比较,假定系统在单位阶跃输入信号作用前处于静止状态,而且输出量及其各阶导数均等于 0。对于大多数控制系统来说,这种假设是符合实际情况的。对于图 3.6 所示单位阶跃响应 $c(t)$,其动态性能指标通常如下:

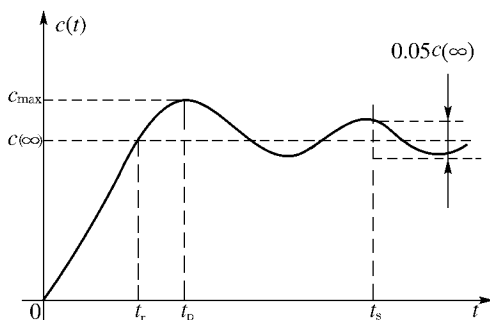


图 3.6 单位阶跃响应曲线

(1) 上升时间 t_r : 指响应曲线从 0 至第一次到达稳态值所需要的时间。有些情况下,指输出响应由稳态值的 10% 上升到 90% 所需的时间。

(2) 峰值时间 t_p : 指响应曲线从 0 至第一个峰值所需要的时间。

(3) 调节时间 t_s : 指响应曲线从 0 到达且以后不再超过稳态值的 $\pm 5\%$ 或 $\pm 2\%$ 误差范围所需的最小时间。调节时间又称为过渡过程时间。

(4) 超调量 $\sigma\%$: 指在系统响应过程中,输出量的最大值超过稳态值的百分比,即

$$\sigma\% = \frac{c(t_p) - c(\infty)}{c(\infty)} \times 100\%$$

式中, $c(\infty)$ 为 $t \rightarrow \infty$ 时的输出值。

(5) 振荡次数 N : 在调节时间内, $c(t)$ 偏离 $c(\infty)$ 的振荡次数。

上述各种性能指标中, t_r 、 t_p 、 t_s 是阶跃响应过程的快速性指标, $\sigma\%$ 、 N 是时间响应的平稳性指标。

2. 稳态性能指标

稳态误差 e_{ss} 是描述系统稳态性能的一种性能指标,是当时间 t 趋于无穷时,系统单位阶跃响应的稳态值与输入量 $1(t)$ 之差,即

$$e_{ss} = 1 - c(\infty)$$

稳态误差是系统控制精度或抗干扰能力的一种度量。

具有单调上升的阶跃响应曲线如图 3.7 所示,由于响应过程不出现超调 ($c(\infty)$ 是整个响应过程的最大值),一般只取调节时间 t_s 作为动态性能指标。

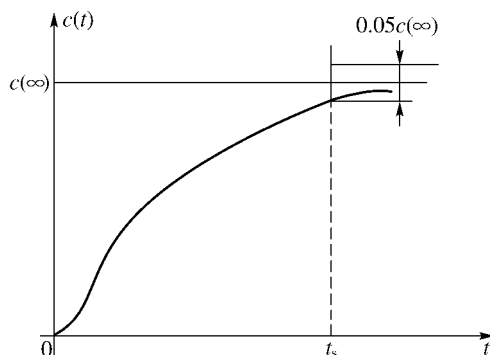


图 3.7 单调变化的阶跃响应曲线

3.2 一阶系统的动态性能

凡是由一阶微分方程描述的系统称为一阶系统。在工程实践中,一阶系统的应用广泛。一些控制元、部件及简单的系统,如 RC 网络、发电机励磁控制系统、空气加热器和液压控制系统等,都可视为一阶系统。有些高阶系统的特性,常可用一阶系统的特性来近似表征。

3.2.1 一阶系统的时域数学模型

一阶系统的时域微分方程为

$$T \frac{dc(t)}{dt} + c(t) = r(t) \quad (3.1)$$

式中, $c(t)$ 和 $r(t)$ 分别为系统的输出信号和输入信号; T 为时间常数,具有时间“秒”的量纲,此外时间常数 T 也是表征系统惯性的一个主要参数,所以一阶系统也称为惯性环节。

由式(3.1)在初始条件为零时两边取拉普拉斯变换,可得其闭环传递函数为

$$\Phi(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1}{Ts + 1} \quad (3.2)$$

一阶系统的结构图如图 3.8 所示。

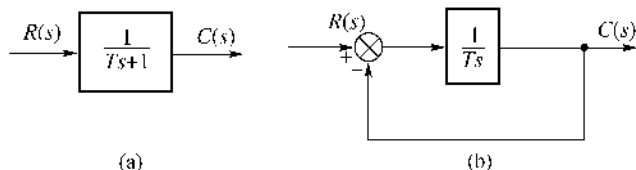


图 3.8 一阶系统的结构图

下面分析一阶系统在典型输入信号作用下的响应。设系统的初始工作条件为零。

1. 单位阶跃响应

输入 $r(t) = 1(t)$, 即 $R(s) = \frac{1}{s}$ 时, 系统输出量的拉普拉斯变换式为

$$C(s) = \Phi(s)R(s) = \frac{1}{Ts + 1} \cdot \frac{1}{s} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s + \frac{1}{T}} \quad (3.3)$$

对上式两边求拉普拉斯反变换,可得输出量的时域表达式

$$c(t) = 1 - e^{-\frac{t}{T}} \quad t \geq 0 \quad (3.4)$$

式(3.4)表明,响应由两部分组成:一是与时间 t 无关的定值“1”,称为稳态分量;二是与时间 t 有关的指数项 $e^{-\frac{t}{T}}$,称为暂态(或动态、瞬态)分量。当 $t \rightarrow \infty$ 时,暂态分量衰减到零,输出量等于输入量,没有稳态误差($e_{ss}=0$)。响应曲线如图 3.9 所示。

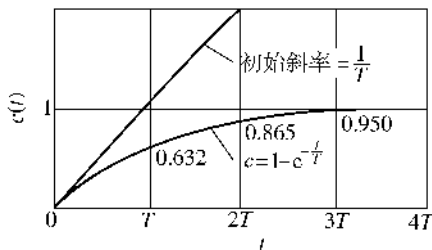


图 3.9 一阶系统的单位阶跃响应曲线

由图 3.9 所示的曲线可以看出,一阶系统的单位阶跃响应曲线是一条由 0 开始,按指数规律上升并最终趋于 1 的曲线。响应曲线具有非振荡特征,为非周期响应。

响应具有两个重要特征:

(1) 时间常数 T 是表征系统响应特性的唯一参数,它与输出值有以下确定的对应关系:

$$\begin{aligned} t=0, \quad c(0) &= 1 - e^0 = 0 \\ t=T, \quad c(T) &= 1 - e^{-1} = 0.632 \\ t=2T, \quad c(2T) &= 1 - e^{-2} = 0.865 \\ t=3T, \quad c(3T) &= 1 - e^{-3} = 0.950 \\ t=4T, \quad c(4T) &= 1 - e^{-4} = 0.982 \\ \vdots & \\ t \rightarrow \infty, \quad c(\infty) &= 1 \end{aligned}$$

(2) 响应曲线的初始斜率等于 $1/T$ 。

$$\left. \frac{dc(t)}{dt} \right|_{t=0} = \left. \frac{1}{T} e^{-\frac{t}{T}} \right|_{t=0} = \frac{1}{T}$$

上式表明,在 $t=0$ 时,响应曲线的切线斜率为 $1/T$ 。其物理意义是,一阶系统的单位阶跃响应如果以初始速度等速上升至稳态值 1 时,所需要的时间恰好为 T 。这一特点为用实验方法求取系统的时间常数 T 提供了依据。

根据动态性能指标定义,可知一阶系统的阶跃响应没有超调量 $\sigma\%$ 和峰值时间 t_p ,其主要动态性能指标是调节时间 t_s ,表征系统暂态过程进行的快慢。 T 越小,调节时间 t_s 越小,响应过程的快速性也越好。 t_s 的取值为

$$t_s = 3T (\text{对应 } \Delta = 5\% \text{ 误差带}) \quad (3.5)$$

$$t_s = 4T (\text{对应 } \Delta = 2\% \text{ 误差带}) \quad (3.6)$$

例 3.1 一阶系统结构图如图 3.10 所示,试求该系统单位阶跃响应的调节时间 t_s 。若要求调节时间 $t_s \leq 0.1s$,试确定系统的反馈系数的取值。

解 首先由系统结构图求得闭环传递函数

$$\Phi(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\frac{100}{s}}{1 + 0.1 \times \frac{100}{s}} = \frac{10}{0.1s + 1}$$

由闭环传递函数得到时间常数

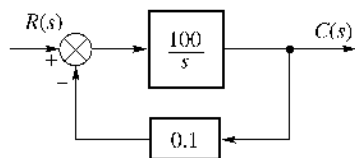


图 3.10 一阶系统的结构图

$$T = 0.1 \text{ s}$$

由式(3.5)得调节时间

$$t_s = 3T = 0.3 \text{ s (取 } \Delta = 5\% \text{ 误差带)}$$

其次, 设满足 $t_s \leq 0.1 \text{ s}$ 的反馈系数为 $\mu (\mu > 0)$, 同样由系统结构图求得闭环传递函数

$$\Phi(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\frac{100}{s}}{1 + \frac{100}{s}\mu} = \frac{\frac{1}{\mu}}{\frac{0.01}{\mu}s + 1}$$

由上述闭环传递函数得到时间常数

$$T = \frac{0.01}{\mu} \text{ s}$$

则有

$$t_s = 3T = \frac{0.03}{\mu} \leq 0.1 \text{ s}$$

所以

$$\mu \geq 0.3$$

2. 单位斜坡响应

输入 $r(t) = t \cdot 1(t)$, 即 $R(s) = \frac{1}{s^2}$ 时, 系统输出量的拉普拉斯变换式为

$$C(s) = \Phi(s)R(s) = \frac{1}{Ts + 1} \cdot \frac{1}{s^2} = \frac{1}{s^2} - \frac{T}{s} + \frac{T}{s + \frac{1}{T}} \quad (3.7)$$

对上式两边求拉普拉斯反变换, 可得输出量的时域表达式

$$c(t) = (t - T) + Te^{-\frac{1}{T}t} \quad t \geq 0 \quad (3.8)$$

式(3.8)表明, 响应由两部分组成。式(3.8)中

$(t - T)$ 和 $Te^{-\frac{1}{T}t}$ 分别为系统响应的稳态分量和瞬态分量, 当 $t \rightarrow \infty$ 时, 瞬态分量衰减到零。其斜坡响应曲线如图 3.11 所示。

系统响应的初始斜率等于 0, 即

$$\left. \frac{dc(t)}{dt} \right|_{t=0} = 1 - e^{-\frac{1}{T}t} \Big|_{t=0} = 0 \quad (3.9)$$

由图 3.11 可见, 一阶系统在单位斜坡输入下的稳态输出, 与输入的斜率相等, 只是滞后一个时间 T 。显然一阶系统单位斜坡响应具有稳态误差

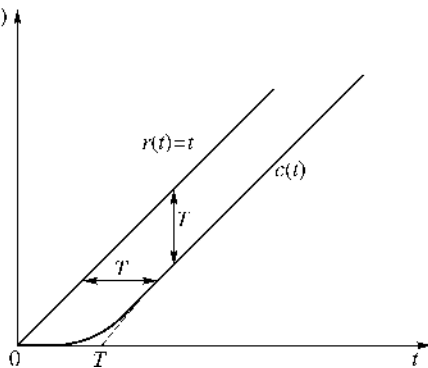


图 3.11 一阶系统的单位斜坡响应曲线

$$\begin{aligned} e_{ss} &= \lim_{t \rightarrow \infty} [t - c(t)] \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} [t - (t - T + Te^{-\frac{1}{T}t})] = T \end{aligned} \quad (3.10)$$

这里, 输入信号 $r(t) = t \cdot 1(t)$ 是输出量的期望值。式(3.10)还表明, 一阶系统在跟踪单位斜坡输入信号时, 输出量与输入量存在跟踪误差, 其稳态误差值与系统的 T 的值相等。一

阶系统在跟踪斜坡输入信号所带来的原理上的位置误差,只能通过减小时间常数 T 来降低,而不能最终消除它。

3. 单位抛物线响应

输入 $r(t) = \frac{1}{2}t^2 \cdot 1(t)$, 即 $R(s) = \frac{1}{s^3}$ 时, 系统输出量的拉普拉斯变换式为

$$C(s) = \Phi(s)R(s) = \frac{1}{Ts+1} \cdot \frac{1}{s^3} = \frac{1}{s^3} - \frac{T}{s^2} + \frac{T^2}{s} - \frac{T^2}{s + \frac{1}{T}} \quad (3.11)$$

对上式两边求拉普拉斯反变换, 得系统输出量的时域表达式

$$c(t) = \frac{1}{2}t^2 - Tt + T^2(1 - e^{-\frac{t}{T}}) \quad t \geq 0 \quad (3.12)$$

上式表明, 当时间 $t \rightarrow \infty$ 时, 系统输出信号与输入信号之差将趋于无穷大。这说明对于一阶系统是不能跟踪单位抛物线函数输入信号的。

4. 单位脉冲响应

输入 $r(t) = \delta(t)$, 即 $R(s) = 1$ 时, 系统输出量的拉普拉斯变换式为

$$\begin{aligned} C(s) &= \Phi(s)R(s) = \frac{1}{Ts+1} \cdot 1 \\ &= \frac{\frac{1}{T}}{s + \frac{1}{T}} \end{aligned} \quad (3.13)$$

对上式两边求拉普拉斯反变换, 得输出量的时域表达式

$$c(t) = \frac{1}{T}e^{-\frac{t}{T}} \quad t \geq 0 \quad (3.14)$$

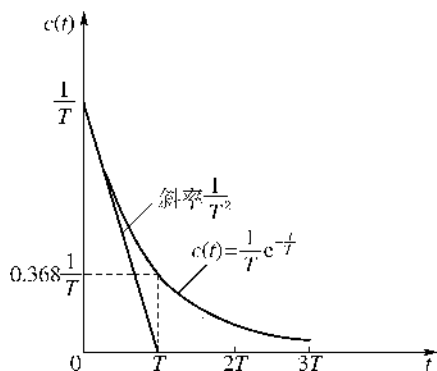


图 3.12 一阶系统的单位脉冲响应曲线

相应的响应曲线如图 3.12 所示。

3.2.2 一阶系统的重要特性

根据上面的分析, 可将一阶系统在典型输入作用下的响应归纳如表 3.1 所示。

表 3.1 一阶系统对典型输入信号的输出

输入信号 $r(t)$	输出信号 $c(t)$
$\delta(t)$	$\frac{1}{T}e^{-\frac{t}{T}}$
$1(t)$	$1 - e^{-\frac{t}{T}}$
$t \cdot 1(t)$	$(t - T) + Te^{-\frac{t}{T}}$
$\frac{1}{2}t^2 \cdot 1(t)$	$\frac{1}{2}t^2 - Tt + T^2(1 - e^{-\frac{t}{T}})$

从表 3.1 中各响应得到如下结论:

(1) 一阶系统只有一个特征参数,即其时间常数 T 。在一定的输入信号作用下,其时间响应 $c(t)$ 由其时间常数唯一确定。

(2) 比较一阶系统对脉冲、阶跃、斜坡和抛物线输入信号的响应,可以发现它们与输入信号之间有如下关系

$$r_{\text{脉冲}} = \frac{d}{dt} r_{\text{阶跃}} = \frac{d^2}{dt^2} r_{\text{斜坡}} = \frac{d^3}{dt^3} r_{\text{抛物线}} \quad (3.15)$$

$$c_{\text{脉冲}} = \frac{d}{dt} c_{\text{阶跃}} = \frac{d^2}{dt^2} c_{\text{斜坡}} = \frac{d^3}{dt^3} c_{\text{抛物线}} \quad (3.16)$$

式(3.15)和式(3.16)表明,系统对输入信号微分(或积分)的响应,就等于系统对该输入信号响应的微分(或积分)。这是线性定常系统的一个重要特性,适用于任何线性定常连续控制系统。因此,研究和分析线性定常连续控制系统的输出时,不必对每种输入信号的响应都进行计算或求解,只要求解出其中一种典型响应,便可通过上述关系求出其他典型响应;或者,只取其中一种典型输入进行研究即可。

3.3 二阶系统的动态性能

凡是由二阶微分方程描述的系统,称为二阶系统。控制工程中的许多系统都是二阶系统,如 RLC 系统、具有质量的物理系统、忽略电枢电感 L_a 后的电动机等。尤其值得注意的是,在一定的条件下,许多高阶系统常常可以近似成二阶系统。因此,二阶系统的性能分析在自动控制系统分析中有非常重要的地位。

3.3.1 数学模型的标准式

首先研究一个实际的二阶物理系统结构并推导出其数学模型,然后将其数学模型化成二阶系统数学模型的标准式,以便使分析的结果具有代表性。

如图 3.13 所示是 RLC 振荡电路。其运动方程可用线性二阶微分方程式描述,即

$$LC \frac{d^2 u_o(t)}{dt^2} + RC \frac{du_o(t)}{dt} + u_o(t) = u_i(t) \quad (3.17)$$

图 3.13 所示的 RLC 振荡电路是一个二阶系统。为使研究结果具有普遍意义,将式(3.17)改写为如下所示的二阶系统的标准运动方程式

$$T^2 \frac{d^2 c(t)}{dt^2} + 2\zeta T \frac{dc(t)}{dt} + c(t) = r(t) \quad (3.18)$$

式中, $T = \sqrt{LC}$ 为二阶系统的时间常数,单位为 s ; $\zeta = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}}$ 为二阶系统的阻尼比或相对阻尼系数,无量纲。

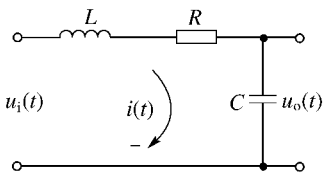


图 3.13 RLC 振荡电路

二阶系统的闭环传递函数为

$$\Phi(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1}{T^2 s^2 + 2\zeta Ts + 1} \quad (3.19)$$

引入参数 $\omega_n = 1/T$, 称作二阶系统的自然角频率或无阻尼振荡角频率, 单位为 rad/s, 则

$$\Phi(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad (3.20)$$

式(3.19)和式(3.20)为典型二阶系统的闭环传递函数。二阶系统通常表示为图 3.14 所示的单位负反馈的结构形式。二阶系统有两个结构参数

ζ 和 ω_n (或 T)。二阶系统性能的分析 and 描述, 基本上是以这两个体现其特征的结构参数表示的。

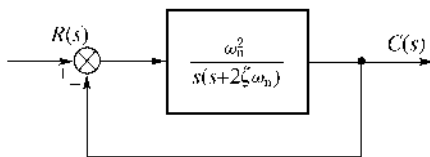


图 3.14 标准化二阶系统

3.3.2 典型二阶系统的单位阶跃响应

下面, 以式(3.20)所示的典型二阶系统为例, 来分析其单位阶跃响应。设初始条件为零, 当输入量为单位阶跃函数时, 输出量的拉普拉斯变换式为

$$C(s) = \Phi(s)R(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \cdot \frac{1}{s} \quad (3.21)$$

系统的特征方程为

$$s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = 0 \quad (3.22)$$

特征根为

$$s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1} \quad (3.23)$$

由式(3.23)可以看出, 特征根的性质与阻尼比 ζ 有关。因此, 当 ζ 为不同值时, 所对应的单位阶跃响应将有不同的形式, 下面逐一加以说明。

1. 无阻尼($\zeta=0$)状态

当 $\zeta=0$ 时, 由式(3.23)可得系统特征根为一对共轭虚根

$$s_{1,2} = \pm j\omega_n$$

$s_{1,2}$ 在 s 平面位置如图 3.15 所示, 其输出量的拉普拉斯变换式为

$$C(s) = \Phi(s)R(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + \omega_n^2} \cdot \frac{1}{s} = \frac{1}{s} - \frac{s}{s^2 + \omega_n^2}$$

上式两边取拉普拉斯反变换, 可得

$$c(t) = 1 - \cos\omega_n t \quad t \geq 0 \quad (3.24)$$

式(3.24)表明, 无阻尼时二阶系统的单位阶跃响应为等幅正弦振荡曲线(如图 3.16 所示), 振荡角频率为 ω_n 。

2. 欠阻尼($0 < \zeta < 1$)状态

当 $0 < \zeta < 1$ 时, 由式(3.23)可得系统特征根为一对共轭复根(如图 3.17 所示)