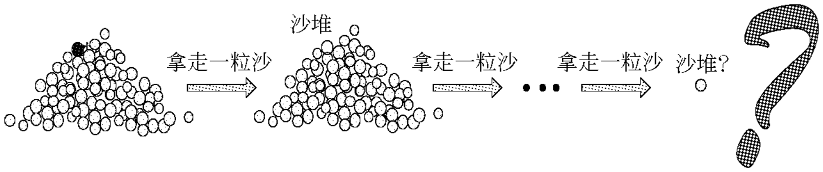
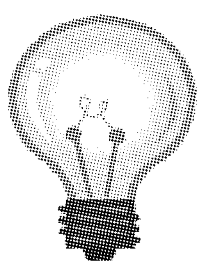
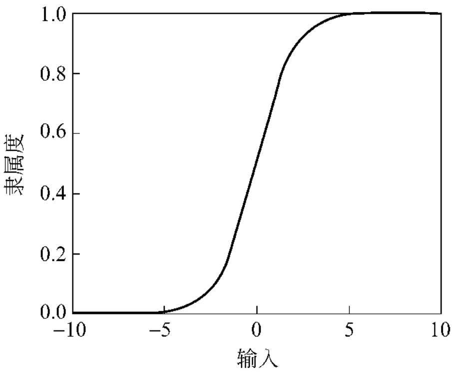
第3章 模糊逻辑



自然语言中的许多概念都具有模糊性，在用传统数学方法精确处理它们的时候产生了不少麻烦。例如，“沙堆”这个概念，究竟多少粒沙子才能叫做“沙堆”呢？如果这里有一个确切的临界值，那么，比这个值少一粒呢？少两粒呢？





模糊逻辑 (Fuzzy Logic, FL) 在一定程度上解决了这个问题。

在模糊逻辑中，一个命题不再非真即假，它可以被认为是“部分的真”。模糊逻辑中的隶属度在 [0,1] 之间取值，用以表示程度。模糊逻辑在机器和自然语言之间架设了一座桥梁。

模糊逻辑作为人工智能领域的一种重要工具，为表示和处理自然语言和人类思维的模糊性提供了一种强有力的手段。

本章对模糊逻辑进行介绍，包括模糊逻辑的基本思想、研究和应用进展，以及模糊集合、模糊推理、模糊计算和模糊神经网络。通过对相关理论及其应用的介绍，本章为读者呈现了模糊理论的主要图景和广泛的应用前景，并提供了相关的参考资料，同时通过一些具体的实例加深读者对模糊逻辑和模糊计算的认识和了解。本章的主要内容如下：

- 模糊逻辑简介；
- 模糊集合与模糊逻辑；
- 模糊逻辑推理；
- 模糊计算的流程；
- 模糊逻辑的应用。

3.1 模糊逻辑简介

3.1.1 模糊逻辑的基本原理

模糊逻辑(Fuzzy Logic，FL)是一种使用隶属度代替布尔真值的逻辑，是模糊理论的重要内容，在人工智能领域有重要意义。与经典的二值逻辑不同，它并不使用截然不同的二值来表达所有命题，而是使用隶属度来表达，因而更适合描述实际生活中陈述的不精确性。模糊逻辑目前已经在工业控制等领域获得了成功的应用，并带来了广泛的实际效益。

模糊理论的创始人，加州大学伯克利分校的 L. Zadeh 教授曾提出过一个不相容原理[1]：“当系统的复杂性增长时，人们对系统特性作出精确而有效的描述的能力就相应降低，直到达到一个阈值。一旦超过这个值，精确性和有效性将变成两个相互排斥的特性。”也就是说，当系统的复杂性达到一定程度时，就不能同时对系统进行既精确又有效的描述。描述的精确性会损害有效性，而有效性要牺牲精确性。系统越复杂，这一现象越明显。

真实世界无疑是复杂的，传统数学方法与人的思维采用不同的方式描述复杂的世界：传统的数学方法常常试图进行精确定义，而人关于真实世界中事物的概念往往是模糊的，没有精确的界限和定义。在处理一些问题时，精确性和有效性形成了矛盾，诉诸精确性的传统数学方法变得无效，而具有模糊性的人类思维却能轻易解决。例如人脸识别问题，这一问题对于擅长精确计算的计算机来说十分棘手，然而对人类的幼儿来说却并不困难。

模糊理论为计算机提供了一种处理现实世界中自然语言与人类思维模糊性的方法。其理论的基本出发点之一就是取消二值之间非此即彼的对立，用隶属度表示二值间的过渡状态。这为进行不精确而有效的描述提供了便利，也为将符合人类思维习惯的模糊推理、模糊决策移植到计算机中提供了理论工具。经典二值逻辑中，通常以 0 表示“假”以 1 表示“真”，一个命题非真即假。但在实际应用中，这种非此即彼的逻辑会遇到不少问题。

例如,“室温在27℃是高温度”,这个命题真值如何呢?如果考虑到命题的实际意义,无论认为是还是否,答案都过于极端。在模糊逻辑中,一个命题不再非真即假,它可以被认为是“部分的真”。模糊逻辑中的隶属度在[0,1]之间取值,用以表示程度。上面关于温度的问题,可以认为该温度对“高温度”的隶属度是0.6,即“部分的高温”。由于模糊逻辑更接近自然语言以及人类的思维方式,故可以为人工智能领域提供一种重要的研究方法。

需要注意的是,尽管以“模糊”为名,但模糊逻辑本身并非捉摸不定的。模糊逻辑扮演了自然语言与机器之间的接口,其自身并没有不确定性和不可预测性,对于特定的模糊系统,给定系统的输入,其输出是完全可以预测的。

3.1.2　模糊逻辑与模糊系统的发展历程

20世纪20年代,波兰数学家Jan Lukasiewicz提出了**多值逻辑**(many-valued logic),1937年量子哲学家Max Black提出了**不明确集合**(vague set),这些均为模糊逻辑的发展奠定了思想来源和理论基础。美国加州大学伯克利分校的L. Zadeh教授于1965年提出了**模糊集合**(fuzzy sets)[1],1973年又提出了模糊逻辑[2]。L. Zadeh教授提出了一个著名的不相容原理,即当系统达到一定复杂度的时候,对系统描述的精确性和有效性成为矛盾。这一理论为模糊逻辑在应用中的有效性提供了支持。

模糊理论被提出后,在争议中继续发展,并在实践中得到了应用。1974年,第一个模糊控制蒸汽引擎系统和第一个模糊交通指挥系统诞生了。这两个系统的设计者是英国伦敦玛丽皇后学院的Ebrahim Mamdani教授。他认为采用模糊理论的优点是可以利用经验法则,而不需要程序模型。1980年,丹麦的史密斯公司开始使用模糊控制操作水泥旋转窑,以控制锻烧温度、出口温度、旋转情况、冷却速率等。

1984年,国际模糊系统学会(International Fuzzy Systems Association,IFSA)成立了日本、北美、欧洲、中国大陆四个分会。1987年,第二届模糊系统学大会在日本东京召开,并展示了模糊自动控制应用于仙台市地铁的自动驾驶的成果。此后,模糊理论获得了较广泛的关注和进一步发展。

进入20世纪90年代,模糊系统在日本电器行业得到了广泛应用,并吸引了大量研究者的注意。然而,尽管模糊系统有众多优点,对模糊系统的严格数学分析方法并没有被构建,模糊系统的设计方法没有成熟化、系统化,其适用的问题也没有得到严格界定。面对这些困难,模糊理论的创始人L. Zadeh教授于1993年提出了**软计算**(Soft Computing)[3],试图以人类的思维方式和自然语言表达变量之间的关系,并以条件命题记录法则。图3.1给出了模糊理论的发展历程。

自1965年模糊集合论被创建以来,在几十年中,模糊系统理论和应用均得到了广泛的关注并取得了飞速的发展。模糊逻辑与神经网络的结合,模糊逻辑与进化计算的结合等也为解决一些复杂非线性问题提供了新的选择。目前,模糊逻辑已经在系统工程、自动控制、信号处理、辅助决策、人工智能、心理学、生态学、语言学等众多研究领域取得了广泛的成功,并成为新世纪人工智能领域具有巨大发展潜力的方向之一。很多重要的国际学术期刊和国际会议都对模糊逻辑方面的研究成果非常重视,收录了很多高质量的学术文章。表3.1列举了模糊系统相关的重要学术期刊和国际会议。

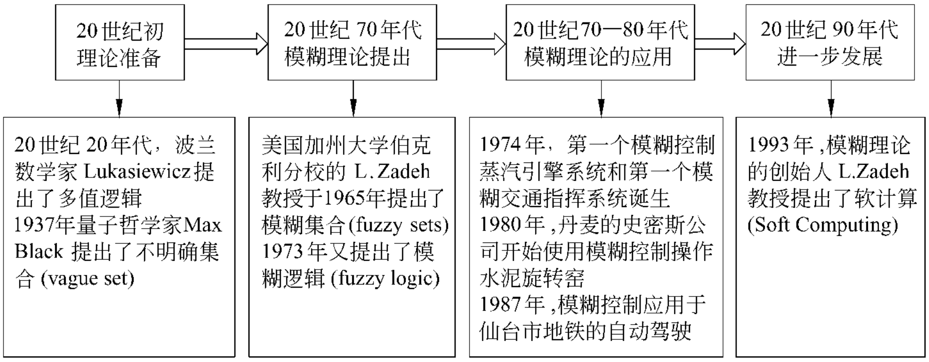


图 3.1 模糊理论的发展历程

表 3.1 模糊逻辑相关的学术期刊和国际会议

学术期刊	IEEE Transactions on Fuzzy Systems IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics Journal of System, Control and Information ⋮
国际会议	IEEE International Conference on Fuzzy Systems IEEE International Conference on Systems, Man, and Cybernetics International Conference on Fuzzy Systems and Knowledge Discovery ⋮

3.2 模糊集合与模糊逻辑

本节是关于模糊集合、模糊逻辑、模糊关系的基础知识，为介绍模糊推理、模糊计算做理论准备，包括下列要点：

- 模糊集合的概念；
- 模糊集合的隶属度函数；
- 模糊集合上的运算及其基本定律；
- 模糊逻辑及其基本定律；
- 模糊关系及其合成运算。

3.2.1 模糊集合与隶属度函数

按照经典集合的定义，对于任意一个集合 A，论域中的任何一个元素 x，或者属于 A，或者不属于 A，没有中间情况存在。论域内的任意元素与集合 A 的关系可以用一个特征函数表达，而同时，集合 A 也可以由其特征函数定义：

$$f_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases} \tag{3.1}$$

这种情况下，一个元素只有完全属于 A 和完全不属于 A 两种情况，任何中间情况都

是不存在的。这种非此即彼在数学上非常自然，然而，由日常生活中的概念规定的集合却并非总是这样清晰，用“非此即彼”的方式来处理它们往往会招来麻烦。

有一个著名的沙堆悖论体现了这种困难，如图3.2所示。且看一个问题：“从一个沙堆里拿走一粒沙子，这还是一个沙堆吗?”如果答案只能是“是”或“否”，看上去显然应该选择“是”。因为在一般人的概念里，“沙堆”指的就是由大量的沙子聚集在一起构成的事物，从中拿走区区一粒，自然还是一个沙堆。然而，如果回答“是”，这样顺推下去就会掉入陷阱：从上次剩下的沙堆里再拿走一粒沙子，剩下的还是一个沙堆，那么，如此反复，直到只剩下两三粒沙子甚至只有一粒沙子时，这也还是一个沙堆了。这显然是与常识相悖的。

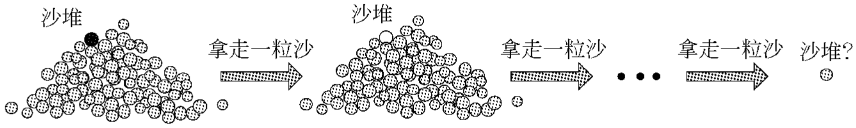


图3.2 沙堆悖论图示

这里的问题就在于“沙堆”这个概念是模糊的，没有一个清晰的界限将“沙堆”与“非沙堆”分开。我们没有办法明确指出，在这个不断拿走沙子的过程中，什么时候“沙堆”不再是“沙堆”。与“沙堆”相似的模糊概念还有“年轻人”、“小个子”、“大房子”等。在用传统数学方法处理这些概念时，它们的模糊性让人头疼，然而有些消除这种模糊性的尝试却是与常识相违的。以“年轻人”构成的集合为例，如果我们规定30岁以下的人才是年轻人，这个概念的模糊性就被消除了，但是，比30岁大1天的人就完全被排除在“年轻人”之外，这显然是不合理的。

模糊集合理论在一定程度上解决了这个问题。在回答沙堆悖论中“是否为沙堆”的问题时，我们可以不再仅仅使用“是”和“否”两种答案，而是可以回答“部分的是”，即给出对“沙堆”的隶属度。使用这种方法来描述“沙堆”、“年轻人”、“小个子”、“大房子”等集合时，这些集合就不再有明确的边界，我们将之称为模糊集合。为区别于经典集合，可以将一个模糊集合记作 $\underset{\sim}{A}$。

1965年，Zadeh教授[1]最早提出了模糊集合的概念并给出其定义。模糊集合的定义为：

定义3.1 设存在一个普通集合 U，U 到[0,1]区间的任一映射 $\mu_{\underset{\sim}{A}}$ 都可以确定 U 的一个模糊子集，称为 U 上的模糊集合 $\underset{\sim}{A}$。其中映射 $\mu_{\underset{\sim}{A}}$ 叫做模糊集 $\underset{\sim}{A}$ 的隶属度函数，对于 U 上一个元素 u，$\mu_{\underset{\sim}{A}}(u)$ 叫做 u 对于模糊集 $\underset{\sim}{A}$ 的隶属度，也可写作 $\underset{\sim}{A}(u)$。

这里，U 被称为模糊集合 $\underset{\sim}{A}$ 的论域，$\mu_{\underset{\sim}{A}}$ 是该模糊集的隶属度函数，U 上的任意元素 u 不再只有属于 $\underset{\sim}{A}$ 和不属于 $\underset{\sim}{A}$ 两种情况，每个元素 u 都有对于 $\underset{\sim}{A}$ 的隶属度 $\mu_{\underset{\sim}{A}}(u)$。隶属度 $\mu_{\underset{\sim}{A}}(u)$ 表示程度，它的值越大，表明 u 属于 $\underset{\sim}{A}$ 的程度越高，反之则表明 u 属于 $\underset{\sim}{A}$ 的程度越低。

经典集合可以看作一种退化的模糊集合，即论域中不属于该经典集合的元素隶属度为0，其余元素隶属度为1。

模糊集合的表示方法有很多种，其中常用的有如下两种：

1. Zadeh 表示法

该表示法的根据是 Zadeh 教授对模糊集合的定义。当论域 U 为离散集合时，一个模糊集合可以表示为：

$$\underset{\sim}{A} = \sum_{u \in U} \frac{\mu_{\underset{\sim}{A}}(u)}{u} \tag{3.2}$$

当论域 U 为连续集合时，一个模糊集合 $\underset{\sim}{A}$ 可以表示为：

$$\underset{\sim}{A} = \int_u \frac{\mu_{\underset{\sim}{A}}(u)}{u} \tag{3.3}$$

需要注意的是，这里仅仅是借用了求和与积分的符号，并不表示求和或积分。

2. 序对表示法

对于一个模糊集合来说，如果给出了论域上所有元素对其隶属度，就等于表示出了该集合。在这种思想的指导下，可以用序对表示法来表示模糊集合 $\underset{\sim}{A}$。

$$\underset{\sim}{A} = \{(u, \mu_A(u)) \mid u \in U\} \tag{3.4}$$

其中，序对 $(u, \mu_A(u))$ 由论域中的一个元素 u，以及 u 对模糊集合 $\underset{\sim}{A}$ 的隶属度构成。

下面通过具体例子说明这种模糊集合。

例 3.1 在考核中，学生的绩点为[0,5]区间上的实数。按照常识，绩点在 3 以下显然不属于“优秀”，绩点在 4.5 以上则显然属于“优秀”，这是没有问题的。然而，绩点为 4.4 时该怎么算呢？这个成绩很接近 4.5，如果和绩点为 3 一样，都不属于“优秀”，未免对绩点为 4.4 的同学太不公平。有了模糊集合这个工具，在 3～4.5 之间就可以认为是一个“灰色地带”，其间的成绩在一定程度上属于“优秀”这个模糊集。假设各绩点对“优秀”的隶属度可以用如图 3.3 所示的曲线表示：

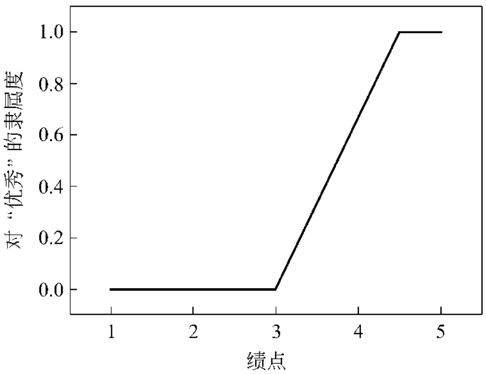


图 3.3 绩点对“优秀”的隶属度函数

在这个例子中，设模糊集合“优秀”为 $\underset{\sim}{A}$，则隶属度函数 $\mu_{\underset{\sim}{A}}(u)$ 为：

$$\mu_{\underset{\sim}{A}}(u) = \begin{cases} 0 & 0 \leqslant u < 3 \\ \dfrac{2}{3}u - 2 & 3 \leqslant u < 4.5 \\ 1 & 4.5 \leqslant u \leqslant 5 \end{cases} \tag{3.5}$$

此处的论域是连续的，模糊集合 $\underset{\sim}{A}$ 用 Zadeh 表示法可以表示为：

$$\underset{\sim}{A} = \int_{0 \leqslant u < 3} \frac{0}{u} + \int_{3 \leqslant u < 4.5} \frac{\frac{2}{3}u - 2}{u} + \int_{4.5 \leqslant u \leqslant 5} \frac{1}{u} \tag{3.6}$$

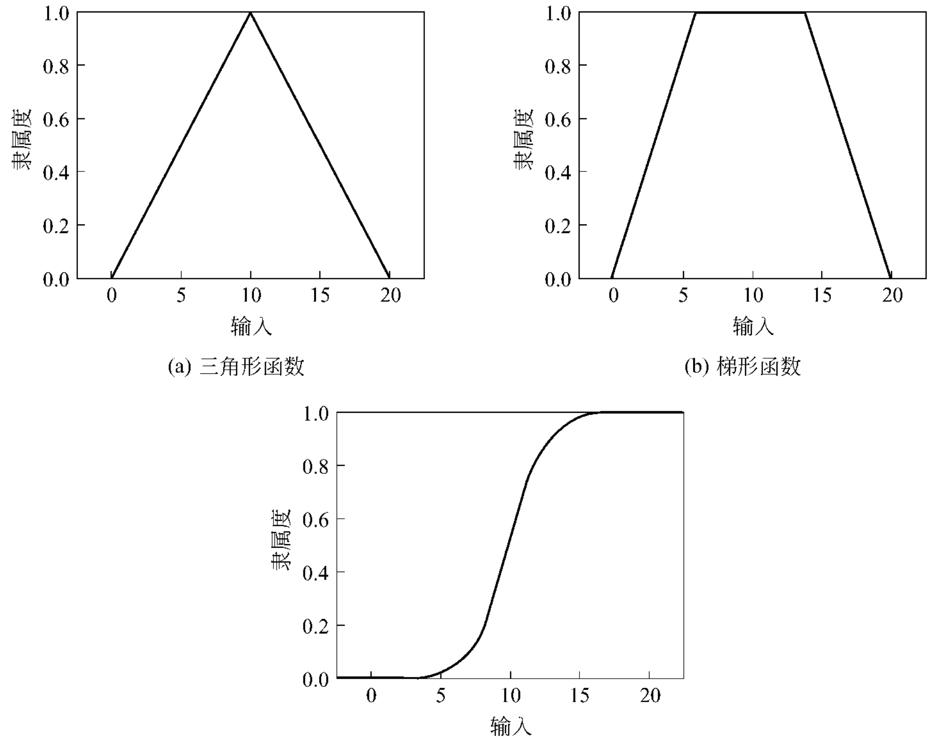
用序对表示法可以表示为：

$$\underset{\sim}{A} = \{(u,0) \mid 0 \leqslant u < 3\} + \left\{\left(u, \frac{2}{3}u - 2\right) \middle| 3 \leqslant u < 4.5\right\} + \{(u,1) \mid 4.5 \leqslant u \leqslant 5\} \tag{3.7}$$

这样，对于一个绩点为 4.4 的学生来说，尽管他的成绩没有达到 4.5，对“优秀”的隶属度小于 1，但他对“优秀”这个模糊集的隶属度约为 0.93，而非完全被排除在“优秀”之外。

对于模糊集合来说，隶属度函数非常重要。一个模糊集合可以被其隶属度函数唯一定义。在上面的例子中，隶属度函数是一个分段函数，每一段都是线性的。

事实上，常用隶属度函数的形式有很多种，如图 3.4 所示的三角形函数、梯形函数、sigmoid 函数等。当隶属度函数有若干点取值为 1，其余点取值为 0 时，该函数对应的模糊集合可以看作一个经典集合。



(a) 三角形函数　(b) 梯形函数　(c) sigmoid 函数

图 3.4　隶属度函数举例

在不同的具体问题中，往往需要选择不同的隶属度函数，对隶属度函数的选择通常依赖相关领域的专家知识。

3.2.2 模糊集合上的运算

模糊集合的子集可以这样定义：

定义 3.2　当且仅当对论域 U 上任意元素 u，都有 $\mu_{\underset{\sim}{A}}(u) \leqslant \mu_{\underset{\sim}{B}}(u)$，则称模糊集合 $\underset{\sim}{A}$

是模糊集合 $\underset{\sim}{B}$ 的子集。

古典集合定义有交、并、补等运算。在模糊集合上，交、并、补等运算也被定义。设 $\underset{\sim}{A}$、$\underset{\sim}{B}$ 是论域 U 上的模糊集合，则

交运算：

$$\mu_{\underset{\sim}{A}\cap\underset{\sim}{B}}(u)=\min\{\mu_{\underset{\sim}{A}}(u),\mu_{\underset{\sim}{B}}(u)\} \tag{3.8}$$

并运算：

$$\mu_{\underset{\sim}{A}}(u)=\max\{\mu_{\underset{\sim}{A}}(u),\mu_{\underset{\sim}{B}}(u)\} \tag{3.9}$$

补运算：

$$\mu_{\bar{\underset{\sim}{A}}}(u)=1-\mu_{\underset{\sim}{A}}(u) \tag{3.10}$$

上述模糊集合上的运算的定义都是目前广泛认可的形式，但这些定义并非唯一。不同文献中可能存在对相同名称运算的不同定义，这是需要注意的。

不难发现，这些定义在模糊集合上的运算也满足一系列定律：

幂等律：

$$\underset{\sim}{A}\cup\underset{\sim}{A}=\underset{\sim}{A},\quad \underset{\sim}{A}\cap\underset{\sim}{A}=\underset{\sim}{A} \tag{3.11}$$

交换律：

$$\underset{\sim}{A}\cap\underset{\sim}{B}=\underset{\sim}{B}\cap\underset{\sim}{A},\quad \underset{\sim}{A}\cup\underset{\sim}{B}=\underset{\sim}{B}\cup\underset{\sim}{A} \tag{3.12}$$

结合律：

$$\begin{gathered}(\underset{\sim}{A}\cup\underset{\sim}{B})\cup\underset{\sim}{C}=\underset{\sim}{A}\cup(\underset{\sim}{B}\cup\underset{\sim}{C})\\(\underset{\sim}{A}\cap\underset{\sim}{B})\cap\underset{\sim}{C}=\underset{\sim}{A}\cap(\underset{\sim}{B}\cap\underset{\sim}{C})\end{gathered} \tag{3.13}$$

分配律：

$$\begin{gathered}\underset{\sim}{A}\cap(\underset{\sim}{B}\cup\underset{\sim}{C})=(\underset{\sim}{A}\cap\underset{\sim}{B})\cup(\underset{\sim}{A}\cap\underset{\sim}{C})\\\underset{\sim}{A}\cup(\underset{\sim}{B}\cap\underset{\sim}{C})=(\underset{\sim}{A}\cup\underset{\sim}{B})\cap(\underset{\sim}{A}\cup\underset{\sim}{C})\end{gathered} \tag{3.14}$$

吸收律：

$$\underset{\sim}{A}\cap(\underset{\sim}{A}\cup\underset{\sim}{B})=\underset{\sim}{A},\quad \underset{\sim}{A}\cup(\underset{\sim}{A}\cap\underset{\sim}{B})=\underset{\sim}{A} \tag{3.15}$$

两极律：

$$\begin{gathered}\underset{\sim}{A}\cap U=\underset{\sim}{A},\quad \underset{\sim}{A}\cup U=\underset{\sim}{A}\\\underset{\sim}{A}\cap\varnothing=\varnothing,\quad \underset{\sim}{A}\cup\varnothing=\varnothing\end{gathered} \tag{3.16}$$

复原律：

$$\overline{\overline{\underset{\sim}{A}}}=\underset{\sim}{A} \tag{3.17}$$

摩根律：

$$\overline{\underset{\sim}{A}\cup\underset{\sim}{B}}=\overline{\underset{\sim}{A}}\cap\overline{\underset{\sim}{B}},\quad \overline{\underset{\sim}{A}\cap\underset{\sim}{B}}=\overline{\underset{\sim}{A}}\cup\overline{\underset{\sim}{B}} \tag{3.18}$$

以上是模糊集合上的运算定律，古典集合上也存在相应的定律。然而，古典集合上成立的矛盾律和排中律对于模糊集合不再成立。

3.2.3 模糊逻辑

模糊集合理论中，论域中的一个元素不再只有属于集合 A 和不属于集合 A 两种情

况。类似的模糊理论也可以用于扩展经典逻辑。经典逻辑是二值逻辑，其中一个变元只有“真”和“假”(1 和 0)两种取值，其间不存在任何第三值。波兰逻辑学家 J. Lukasiewicz 第一次提出了多值逻辑，然而，Lukasiewicz 提出的这种三值逻辑中，命题取值是离散并界限分明的，依旧诉诸精确性，难以体现亦此亦彼的模糊性。模糊逻辑也属于一种多值逻辑，在模糊逻辑中，变元的值可以是[0,1]区间上的任意实数。

设 P、Q 为两个变元，模糊逻辑的基本运算定义如下：

(1) 补运算：　$\overline{P}=1-P$　(3.19)

(2) 交运算：　$P\wedge Q=\min\ (P,Q)$　(3.20)

(3) 并运算：　$P\vee Q=\max\ (P,Q)$　(3.21)

(4) 蕴含：　$P\rightarrow Q=((1-P)\vee Q)$　(3.22)

(5) 等价：　$P\leftrightarrow Q=(P\rightarrow Q)\wedge(Q\rightarrow P)$　(3.23)

根据如上定义，可得模糊逻辑运算定律如下：

(1) 幂等律：

$$P\vee P=P \qquad P\wedge P=P \tag{3.24}$$

(2) 交换律：

$$P\vee Q=Q\vee P \qquad P\wedge Q=Q\wedge P \tag{3.25}$$

(3) 结合律：

$$P\vee(Q\vee R)=(P\vee Q)\vee P \qquad P\wedge(Q\wedge R)=(P\wedge Q)\wedge P \tag{3.26}$$

(4) 吸收律：

$$P\vee(P\wedge Q)=P \qquad P\wedge(P\vee Q)=P \tag{3.27}$$

(5) 分配律：

$$P\vee(Q\wedge R)=(P\vee Q)\wedge(P\vee R) \qquad P\wedge(Q\vee R)=(P\wedge Q)\vee(P\wedge R) \tag{3.28}$$

(6) 双重否定律：

$$\overline{\overline{P}}=P \tag{3.29}$$

(7) 摩根律：

$$\overline{P\vee Q}=\overline{P}\wedge\overline{Q} \qquad \overline{P\wedge Q}=\overline{P}\vee\overline{Q} \tag{3.30}$$

(8) 常数法则：

$$1\vee P=1 \quad 0\vee P=P \qquad 1\wedge P=P \quad 0\wedge P=0 \tag{3.31}$$

这些基本公式可以用于模糊逻辑函数的化简。

3.2.4 模糊关系及其合成运算

模糊关系可以看作经典逻辑关系的扩展。可以给出模糊关系的定义如下：

定义 3.3 设 X 和 Y 是两个经典集合，$X\times Y$ 是 X 与 Y 的笛卡儿乘积。若将 $X\times Y=\{(x,y)\mid x\in X,y\in Y\}$看作退化的模糊集合，则 $X\times Y$ 上的模糊关系是 $X\times Y$ 的一个模糊子集，记为 $\underset{\sim}{R}$。一般来说，$\underset{\sim}{R}$ 的隶属度函数 $\underset{\sim}{R}(x,y)$表征的是 X 上元素 x 与 Y 上元素 y 关系的程度。

模糊关系也是一种模糊集合，若 $\underset{\sim}{R}(x,y)$取值为 0 或 1，这种模糊集合就等同于经典集合，模糊关系也退化为经典关系的形式。当论域离散且有限时，像经典关系可以写成矩阵形式一样，模糊关系也可以写成矩阵形式。

经典关系可以认为是经典集合之间的一种映射，模糊关系也是模糊集合上的一种映射。像经典关系一样，模糊关系上也定义了映射特有的合成运算。

设 X、Y、Z 为论域，R 是 $X\times Y$ 上的模糊关系，S 是 $Y\times Z$ 上的模糊关系，T 是 R 到 S 的合成，记为 $T=R\circ S$，其隶属度函数定义如下：

$$\mu_{R\circ S}(x,z)=\bigvee_{y\in Y}(\mu_R(x,y)\times\mu_S(y,z)) \tag{3.32}$$

在这里，$\vee$ 表示对所有 y 取最大值，$\times$是二项积算子，可以定义为取最小值或者代数积等。在不同的问题中，根据具体定义的不同，模糊关系的合成运算也不尽相同。

在模糊推理系统中，最常用的合成运算是最大一最小合成，其计算公式为：

$$R\circ S\leftrightarrow\mu_{R\circ S}(x,z)=\bigvee_{y\in Y}(\min(\mu_R(x,y),\mu_S(y,z))) \tag{3.33}$$

采用这种合成公式的推理被称为最大一最小推理。

3.3 模糊逻辑推理

模糊推理可以认为是一种不精确的推理，是通过模糊规则将给定输入转化为输出的过程。本节主要介绍模糊推理的概念、方法，并通过实例说明模糊推理的过程。本节需要掌握要点为：

- 模糊语言变量和语言算子的概念。
- 模糊规则的概念。
- 模糊推理的概念和方法。

3.3.1 模糊规则、语言变量和语言算子

什么是模糊推理？什么是模糊规则？可以这么认为，模糊推理就是将输入的模糊集通过模糊逻辑方法对应到特定输出模糊集的计算过程。模糊规则就是在进行模糊推理时依赖的规则，通常可以用自然语言表述。其形式如“如果张三比较胖，则张三需要进行较多锻炼”。

要了解模糊规则，首先要了解几个概念。

1. 语言变量

语言变量，对应于自然语言中的一个词或者一个短语、句子。它的取值就是模糊集合。Zadeh 给语言变量下了如下定义：

语言变量由一个五元组(u, $T(u)$, U, G, M)表达。其中，u 为变量名，如“张三”，