第 3 章　经典检测理论

本章提要

本章简要介绍了信号检测理论的基本概念，分析了在经典检测理论中常用的 5 个检测准则，即最大后验概率准则、Bayes(贝叶斯)准则、最小错误概率准则、极大极小准则和 Neyman-Pearson(奈曼-皮尔逊)准则等。

在许多实际问题中，经常会遇到在几种可能发生的情况中做出判断的问题。如在雷达系统中要观测雷达回波，根据观测到的被各种干扰淹没了的随机信号波形，做出目标是否存在的判决。在数字通信系统中，信号在传输过程中，可能会受到工业噪声、交流噪声、随机脉冲噪声、宇宙噪声以及元器件内部热噪声的污染，同时还会受到符号间干扰、同信道干扰、邻信道干扰的影响，波形会产生畸变。因此，接收机要根据接收到的、畸变了的波形来判断发送波形是几种可能波形中的哪一种。

以上所列举的判决问题就是需要利用检测理论来解决的问题。检测理论就是在噪声和干扰环境下，根据有限的观测数据，来识别信号有无或判断信号类别的理论。

在检测过程中，每次判决得到的结论并不都是正确的，而是尽可能使判决结论满足某种准则。这里的准则是指在特定条件下具有不同含义的最优准则，检测理论中常用的准则有 Bayes 准则、最大后验概率准则(MAP)、最小错误概率准则、极大极小准则、Neyman-Pearson 准则等。因此，信号检测是一种基于某种最优准则，对观测数据的概率统计特性进行分析，最终做出判决的过程，它属于统计判决的范畴，其理论基础是统计判决理论和假设检验理论。

3.1　检测理论的基本概念

本节先从最简单的二元检测问题入手来讨论检测理论的基本概念。

二元检测又称为双择检测，其理论模型如图 3.1 所示。

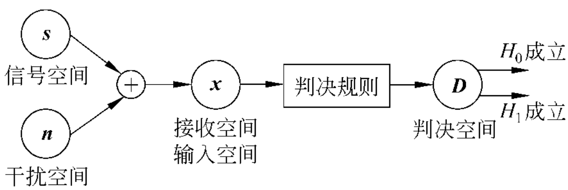

图 3.1　二元检测模型

在二元检测模型中，第一部分是信号空间 s，即发射端发送的信号，只有 $s_0(t)$和 $s_1(t)$两种状态。如在数字通信系统中，$s_1(t)$可以代表 1 码的波形，$s_0(t)$代表 0 码的波形。在雷达中，$s_1(t)$代表有雷达回波信号的波形，$s_0(t)$代表无回波信号的波形。

第二部分是干扰空间 $\boldsymbol{n}$,是指信号在信道上传输时所叠加的噪声。一般假设为均值为 0,方差为 σ^2 的高斯白噪声。

第三部分为接收空间或称为输入空间 $\boldsymbol{x}$,它既是接收端接收到的受到干扰的信号,也是需要进行判决处理的信号,即判决处理单元的输入信号。对于二元检测系统,$x(t)=s_i(t)+n(t)(i=0,1)$。

第四部分为判决规则,是对输入空间的受噪信号按照某种准则进行判决归类,判断发送端发送的是 $s_1(t)$ 还是 $s_0(t)$。

第五部分为判决空间 $\boldsymbol{D}$,在二元检测中,$\boldsymbol{D}$ 分为 D_0 区域和 D_1 区域两部分。如果输入空间的信号落在 D_1 区域,则判决发送端发送的是 $s_1(t)$;如果落在 D_0 区域,则判决发送端发送的是 $s_0(t)$。这样,二元检测就有两种可能的判决结果,对应两种假设 H_0 和 H_1。即

$$H_0: x(t) = s_0(t) + n(t) \tag{3.1}$$

$$H_1: x(t) = s_1(t) + n(t) \tag{3.2}$$

其中,$x(t)$ 为观测到的信号,即输入空间的元素;$n(t)$ 为干扰信号,即干扰空间的元素。

因此,二元检测就是将判决空间 $\boldsymbol{D}$ 按照某种准则划分为 D_1 和 D_0 两个区域。若输入信号 $x(t)$ 落在 D_1 区域,则判定 H_1 假设为真;反之,则判定 H_0 假设为真,如图 3.2 所示。

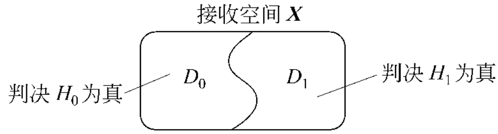

图 3.2　双择检测示意图

这样会出现 4 种可能的判决结果:

(1) 实际是 H_0 假设为真,而判决为 H_0 假设为真;

(2) 实际是 H_0 假设为真,而判决为 H_1 假设为真;

(3) 实际是 H_1 假设为真,而判决为 H_0 假设为真;

(4) 实际是 H_1 假设为真,而判决为 H_1 假设为真。

显然,(1)、(4)两种假设是正确的,(2)、(3)两种假设是错误的。

设代价函数 C_{ij} 表示实际是 H_j 假设为真,而判决为 H_i 假设为真所付出的代价,也称为风险函数。第一个下标表示选择哪一种假设为真,第二个下标表示哪一种假设实际为真。

当 H_0 假设为真,而判决为 H_1 假设为真,即本来无信号而判决为有信号,称为虚警,也称为第一类错误。虚警发生的概率表示为 $P(D_1|H_0)$,称为虚警概率。虚警引入的代价称为虚警代价,记作 C_{10}。

当 H_1 假设为真,而判决为 H_0 假设为真,即本来有信号而判决为无信号,称为漏报,也称为第二类错误。漏报发生的概率表示为 $P(D_0|H_1)$,称为漏报概率。漏报引入的代价称为漏报代价,记作 C_{01}。

正确判决应无代价,一般记作 $C_{00}=C_{11}=0$。正确判决的概率分别表示为 $P(D_1|H_1)$和 $P(D_0|H_0)$,称为检测概率。

双择检测的本质是如何决定判决区间的划分,使判决在某种意义上为最佳。即如何设计信号处理系统,以便最佳地从干扰背景中发现信号和提取信号所携带的信息,这也是设计

各种条件下的最佳接收机(又称理想接收机,是指在检测时能够使错误判决为最小的接收机,或是能够从信号加噪声的波形中提取最多有用信息的接收机),并根据其输入做出有无信号或信号参量取值的决策。

3.2 最大后验概率准则

3.2.1 接收机结构形式

在二元检测中,信源的输出有 $s_0(t)$ 和 $s_1(t)$ 两种状态,对应 H_0 和 H_1 两种假设。两个输出发生的概率 $P(H_0)$ 和 $P(H_1)$ 称为先验概率。先验概率表示实验进行之前,观察者关于源的知识。

H_0 和 H_1 两个假设总有一个要发生,因此有

$$P(H_0)+P(H_1)=1 \tag{3.3}$$

用条件概率 $P(H_0|x)$ 表示在得到样本 x 的条件下,H_0 假设为真的概率。用 $P(H_1|x)$ 表示在得到样本 x 的条件下,H_1 假设为真的概率。这两种条件概率都称为后验概率。

二元检测就是根据观测到的样本值 x,来选择或判决 H_0 假设为真还是 H_1 假设为真。

判决必须遵循一定的原则或准则。一种直观上合理的准则就是最大后验概率准则,按照这个准则就是要选择最可能出现的信号为最终的判决结果。也就是,若 $P(H_0|x)>P(H_1|x)$,则判决 H_0 假设为真;反之,判决 H_1 假设为真。记作

$$\frac{P(H_1 \mid x)}{P(H_0 \mid x)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} 1 \tag{3.4}$$

即选择与最大后验概率相对应的那个假设作为判决结果,这个准则称为最大后验概率准则(maximum a posterior probability criterion,简称 MAP 准则),或记作

$$P(H_1 \mid x) \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} p(H_0 \mid x) \tag{3.5}$$

也可表示为 $P(H_0|x)/P(H_1|x)>1$,判为 H_0 假设为真;反之,判为 H_1 假设为真。

根据贝叶斯(Bayes)公式,后验概率可以表示为

$$P(H_i \mid x)=\frac{P(H_i)P(x \mid H_i)}{P(x)} \tag{3.6}$$

其中,$P(H_i)$ 为 H_i 假设发生的先验概率。

若随机变量 X 的概率密度函数为 $f(x)$,则

$$P(x)=P(x \leqslant X \leqslant x+\mathrm{d}x) \approx f(x)\mathrm{d}x \tag{3.7}$$

同理

$$P(x \mid H_i)=P(x \leqslant X \leqslant x+\mathrm{d}x \mid H_i) \approx f(x \mid H_i)\mathrm{d}x \tag{3.8}$$

式中,$f(x|H_i)$ 称为条件概率密度函数,在概率论中又称为似然函数。

将式(3.7)和式(3.8)代入式(3.6),得

$$P(H_i \mid x)=\frac{P(H_i)f(x \mid H_i)}{f(x)} \tag{3.9}$$

将上式代入最大后验概率准则公式(3.4),得

$$\frac{P(H_1 \mid x)}{P(H_0 \mid x)}=\frac{\dfrac{P(H_1)f(x \mid H_1)}{f(x)}}{\dfrac{P(H_0)f(x \mid H_0)}{f(x)}}=\frac{f(x \mid H_1)P(H_1)}{f(x \mid H_0)P(H_0)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} 1 \tag{3.10}$$

上式也可以等效为

$$l(x)=\frac{f(x \mid H_1)}{f(x \mid H_0)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} l_0=\frac{P(H_0)}{P(H_1)}=\frac{P(H_0)}{1-P(H_0)} \tag{3.11}$$

式中，$l(x)$称为似然比，$l_0=P(H_0)/P(H_1)$称为门限值。

由上式可见，判决过程变为求出在不同假设条件下似然函数的似然比，然后与门限值相比，如果大于门限值，则判决 H_1 假设为真；否则，判决 H_0 假设为真。其接收机结构形式如图 3.3 所示。

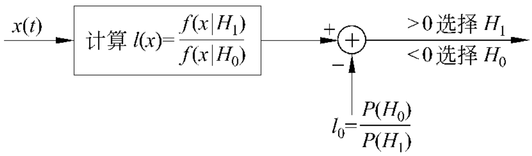

图 3.3　最大后验概率准则下的接收机形式

【例 3.1】 设在某二元通信系统中，有通信信号和无通信信号的先验概率分别为 $P(H_1)=0.9$、$P(H_0)=0.1$。若对某观测值 x 有条件概率分布 $f(x|H_1)=0.25$ 和 $f(x|H_0)=0.45$，试用最大后验概率准则对该观测样本 x 进行分类。

解：利用 Bayes 公式，分别计算 H_1 和 H_0 的后验概率为

$$P(H_1 \mid x)=\frac{f(x \mid H_1)P(H_1)}{\sum_{i=0}^{1} f(x \mid H_i)P(H_i)}=\frac{0.25\times 0.9}{0.25\times 0.9+0.45\times 0.1}\approx 0.833$$

$$P(H_0 \mid x)=\frac{f(x \mid H_0)P(H_0)}{\sum_{i=0}^{1} f(x \mid H_i)P(H_i)}=\frac{0.45\times 0.1}{0.25\times 0.9+0.45\times 0.1}\approx 0.167$$

根据最大后验概率准则可知

$$P(H_1 \mid x) > P(H_0 \mid x)$$

故合理的判决是把 x 归类于有信号状态。

另一种解法为

由于 $l(x)=\dfrac{f(x|H_1)}{f(x|H_0)}=\dfrac{0.25}{0.45}\approx 0.56$

$$l_0=\frac{P(H_0)}{P(H_1)}=\frac{0.1}{0.9}\approx 0.11$$

$$l(x)>l_0$$

所以判决 H_1 假设为真。

3.2.2　接收机性能评价

最大后验概率准则可以使平均错误概率为最小。下面予以证明。

虚警概率为

$$P(D_1 \mid H_0)=\int_{D_1} f(x \mid H_0)\mathrm{d}x \tag{3.12}$$

漏报概率为

$$P(D_0 \mid H_1)=\int_{D_0} f(x \mid H_1)\mathrm{d}x \tag{3.13}$$

总错误率(即平均错误概率)为

$$\begin{aligned} P_e &= P(H_1)P(D_0 \mid H_1)+P(H_0)P(D_1 \mid H_0) \\ &= P(H_1)\int_{D_0} f(x \mid H_1)\mathrm{d}x + P(H_0)\int_{D_1} f(x \mid H_0)\mathrm{d}x \end{aligned} \tag{3.14}$$

因为 D_0、D_1 覆盖了 x 的全部空间,故

$$\int_{D_0+D_1} f(x \mid H_1)\mathrm{d}x = 1 \tag{3.15}$$

即

$$\int_{D_0} f(x \mid H_1)\mathrm{d}x+\int_{D_1} f(x \mid H_1)\mathrm{d}x = 1 \tag{3.16}$$

$$\begin{aligned} P(D_0 \mid H_1) &= \int_{D_0} f(x \mid H_1)\mathrm{d}x = 1-\int_{D_1} f(x \mid H_1)\mathrm{d}x \\ &= 1-P(D_1 \mid H_1) \end{aligned} \tag{3.17}$$

同理

$$P(D_1 \mid H_0) = 1-P(D_0 \mid H_0) \tag{3.18}$$

利用式(3.17)消去式(3.14)中的 D_0,则有

$$\begin{aligned} P_e &= P(H_1)\left[1-\int_{D_1} f(x \mid H_1)\mathrm{d}x\right]+P(H_0)\int_{D_1} f(x \mid H_0)\mathrm{d}x \\ &= P(H_1)+\int_{D_1}[P(H_0)f(x \mid H_0)-P(H_1)f(x \mid H_1)]\mathrm{d}x \end{aligned} \tag{3.19}$$

为使总错误率最小,显然应该选择使第二项的被积函数在 D_1 区域不为正,即

$$P(H_1)f(x \mid H_1) > P(H_0)f(x \mid H_0) \tag{3.20}$$

$$\frac{f(x \mid H_1)}{f(x \mid H_0)} > \frac{P(H_0)}{P(H_1)} = l_0 \tag{3.21}$$

这恰好是最大后验概率准则,故最大后验概率准则又称为最小错误概率准则。

【例 3.2】 在存在加性噪声的情况下,测量只能为 1V 或 0V 的直流电压,设噪声服从均值为 0、方差为 σ^2 的正态分布,试对测量结果进行分类。

解:根据正态分布的概率密度函数形式

$$f(x \mid H_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$$

$$f(x \mid H_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(x-1)^2}{2\sigma^2}}$$

似然比为

$$l(x)=\frac{f(x \mid H_1)}{f(x \mid H_0)} = \mathrm{e}^{-\frac{(x-1)^2}{2\sigma^2}+\frac{x^2}{2\sigma^2}} = \mathrm{e}^{\frac{2x-1}{2\sigma^2}}$$

根据最大后验概率准则,判决规则为

$$l(x) = e^{\frac{2x-1}{2\sigma^2}} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} l_0$$

由于 $\ln(x)$是 x 的单调函数，故对上式两边取对数不等式依然成立。

$$\frac{2x-1}{2\sigma^2} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \ln l_0$$

即

$$x \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \frac{1}{2} + \sigma^2 \ln l_0 = \beta$$

可见，当观测值 x 大于$\frac{1}{2}+\sigma^2\ln l_0$ 时，判为被测直流电压为 1V；当观测值小于$\frac{1}{2}+\sigma^2\ln l_0$ 时，判为被测直流电压为 0V。

上述判决过程可以认为是以 β 为分界点，将 x 的样本空间$(-\infty,+\infty)$划分为 D_0（区间范围为$(-\infty,\beta)$）和 D_1（区间范围为$(\beta,+\infty)$）两部分，如图 3.4 所示。若 x 落入 D_0 区域，判为 H_0 假设(0V)为真；若落入 D_1 区域，则判为 H_1 假设(1V)为真。

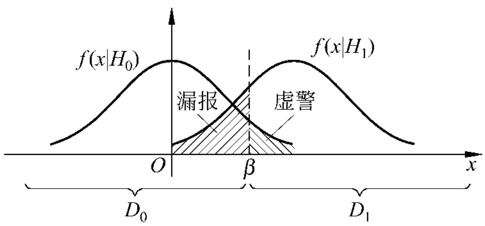

图 3.4　例 3.2 中似然函数及虚警和漏报概率图示

二元数字通信系统中，经常设定等概发送二元信号，即 $P(H_0)=P(H_1)=0.5$。此时，$l_0=1,\beta=0.5$，漏报概率和虚警概率相等。

3.3　最小风险 Bayes 准则

3.3.1　接收机结构形式

最大后验概率准则只能使平均错误概率最小，并未考虑两类错误判决所造成的损失大小。Bayes 准则是使平均风险（也称为平均代价或平均损失）最小的准则。

风险函数 C_{ij}表示实际是 H_j 假设为真，而判决为 H_i 假设为真所引起的风险。

从理论上讲，正确判决的风险小于错误判决的风险，因此

$$\begin{cases} C_{01} - C_{11} \geqslant 0 \\ C_{10} - C_{00} \geqslant 0 \end{cases} \tag{3.22}$$

在已知 H_1 假设为真的条件下，做出判决的平均代价称为 H_1 假设下的条件风险，记作 γ_1。即

$$\gamma_1 = P(D_0 \mid H_1)C_{01} + P(D_1 \mid H_1)C_{11} \tag{3.23}$$

在已知 H_0 假设为真的条件下，做出判决的平均代价称为 H_0 假设下的条件风险，记作 γ_0。即

$$\gamma_0 = P(D_0 \mid H_0)C_{00} + P(D_1 \mid H_0)C_{10} \tag{3.24}$$

由于事先并不知道是 H_1 假设还是 H_0 假设为真，因而总的平均代价，即平均风险应为各条件风险按其先验概率进行平均。

$$\begin{aligned}R &= P(H_0)\gamma_0 + P(H_1)\gamma_1 \\ &= P(H_0)[P(D_0 \mid H_0)C_{00} + P(D_1 \mid H_0)C_{10}] \\ &\quad + P(H_1)[P(D_0 \mid H_1)C_{01} + P(D_1 \mid H_1)C_{11}]\end{aligned} \tag{3.25}$$

Bayes 准则就是按照使 R 为最小的原则来划分 D_0 和 D_1 区域。

将 $P(D_0|H_1)=1-P(D_1|H_1)$，$P(D_0|H_0)=1-P(D_1|H_0)$代入上式，得

$$\begin{aligned}R &= P(H_0)\{[1-P(D_1 \mid H_0)]C_{00} + P(D_1 \mid H_0)C_{10}\} \\ &\quad + P(H_1)\{[1-P(D_1 \mid H_1)]C_{01} + P(D_1 \mid H_1)C_{11}\} \\ &= P(H_0)C_{00} + P(H_1)C_{01} + P(H_0)(C_{10}-C_{00})P(D_1 \mid H_0) \\ &\quad - P(H_1)(C_{01}-C_{11})P(D_1 \mid H_1)\end{aligned} \tag{3.26}$$

将虚警概率及检测概率的计算公式代入上式，得

$$\begin{aligned}R &= P(H_0)C_{00} + P(H_1)C_{01} + \int_{D_1}[P(H_0)(C_{10}-C_{00})f(x \mid H_0) \\ &\quad - P(H_1)(C_{01}-C_{11})f(x \mid H_1)]\mathrm{d}x\end{aligned} \tag{3.27}$$

上式中，由于第一项、第二项为常数项，$P(H_0)(C_{10}-C_{00})f(x|H_0)$和 $P(H_1)(C_{01}-C_{11})f(x|H_1)$均为正，故欲使 R 为最小，必须把第三项的被积函数不为正的点分配到 D_1 域，即

$$P(H_0)(C_{10}-C_{00})f(x \mid H_0) < P(H_1)(C_{01}-C_{11})f(x \mid H_1) \tag{3.28}$$

$$\frac{f(x \mid H_1)}{f(x \mid H_0)} > \frac{C_{10}-C_{00}}{C_{01}-C_{11}} \cdot \frac{P(H_0)}{P(H_1)} \tag{3.29}$$

因此，最小风险 Bayes 准则叙述为，若

$$l(x) = \frac{f(x \mid H_1)}{f(x \mid H_0)} > \frac{(C_{10}-C_{00})P(H_0)}{(C_{01}-C_{11})P(H_1)} \tag{3.30}$$

则判决 $x \in H_1$，反之 $x \in H_0$。

若将 $l_0=(C_{10}-C_{00})P(H_0)/(C_{01}-C_{11})P(H_1)$也视为一门限值，则 Bayes 准则也是一种似然比检验，即将似然函数 $l(x)$与门限值 l_0 比较。若 $l(x)>l_0$，判决 H_1 假设为真；反之，则判决 H_0 假设为真，其接收机结构形式如图 3.5 所示。

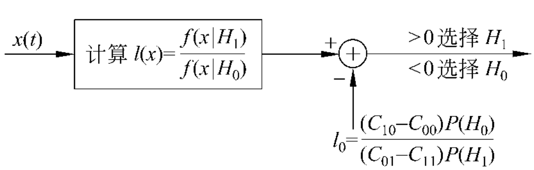

图 3.5　Bayes 准则下的接收机形式

下面是 Bayes 准则的另一种推导方法。

设判决区间 D_0、D_1 的分界点为 β，则区域 D_0 和 D_1 的区间范围分别为$(-\infty,\beta)$和$(\beta,+\infty)$。

平均风险为

$$R = P(H_0)[C_{00}P(D_0 \mid H_0) + C_{10}P(D_1 \mid H_0)]$$

$$\begin{aligned}&+P(H_1)[C_{01}P(D_0 \mid H_1)+C_{11}P(D_1 \mid H_1)]\\&=P(H_0)\left[C_{00}\int_{-\infty}^{\beta} f(x \mid H_0)\mathrm{d}x+C_{10}\int_{\beta}^{\infty} f(x \mid H_0)\mathrm{d}x\right]\\&+P(H_1)\left[C_{01}\int_{-\infty}^{\beta} f(x \mid H_1)\mathrm{d}x+C_{11}\int_{\beta}^{\infty} f(x \mid H_1)\mathrm{d}x\right]\end{aligned}\tag{3.31}$$

要使平均风险 R 为最小，可令 $\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}\beta}=0$，得

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}\beta}&=P(H_0)[C_{00}f(\beta \mid H_0)-C_{10}f(\beta \mid H_0)]\\&+P(H_1)[C_{01}f(\beta \mid H_1)-C_{11}f(\beta \mid H_1)]=0\end{aligned}\tag{3.32}$$

得

$$l_0=\frac{f(\beta \mid H_1)}{f(\beta \mid H_0)}=\frac{P(H_0)(C_{10}-C_{00})}{P(H_1)(C_{01}-C_{11})}$$

因此，Bayes 准则可表示为

$$l(x)=\frac{f(x \mid H_1)}{f(x \mid H_0)}\underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} l_0=\frac{(C_{10}-C_{00})P(H_0)}{(C_{01}-C_{11})P(H_1)}\tag{3.33}$$

3.3.2 Bayes 准则与最大后验概率准则的关系

(1) Bayes 准则与最大后验概率准则均属于似然比检验，只是门限值不同而已。

(2) 最小风险 Bayes 准则的门限值不仅与先验概率 $P(H_0)$和 $P(H_1)$有关，而且还与代价函数 C_{10}、C_{00}、C_{01}、C_{11}有关。最大后验概率准则的门限值仅与先验概率有关。

(3) 最大后验概率准则是最小风险 Bayes 准则中取 $C_{10}-C_{00}=C_{01}-C_{11}$时的一种特例。一般地，$C_{00}=C_{11}=0$，$C_{10}=C_{01}$，即最大后验概率准则中两类错误判决的代价是相同的，故又将最大后验概率准则称为理想观测者准则，理想系指最少主观偏见。

3.4 最小错误概率准则

在二元假设检验的情况下，判决的平均错误概率为

$$P_e=P(H_1)P(D_0 \mid H_1)+P(H_0)P(D_1 \mid H_0)\tag{3.34}$$

最小错误概率准则就是使上述平均错误概率为最小的准则。

比较上式与 Bayes 准则中的平均风险表达式(3.25)，可以看到，当 $C_{00}=C_{11}=0$、$C_{10}=C_{01}=1$ 时，平均风险等于平均错误概率，平均风险最小等价于平均错误概率最小，即

$$\begin{aligned}R&=P(H_0)[P(D_0 \mid H_0)C_{00}+P(D_1 \mid H_0)C_{10}]\\&+P(H_1)[P(D_1 \mid H_1)C_{11}+P(D_0 \mid H_1)C_{01}]\\&=P(H_0)P(D_1 \mid H_0)+P(H_1)P(D_0 \mid H_1)=P_e\end{aligned}\tag{3.35}$$

事实上，风险函数的确定是非常困难的。在雷达系统中漏报的风险就很难确定；二元数字通信系统中，“0”、“1”码误判的风险也很难确定。因此，在许多应用场合，常常假定正确判决的风险为零，错误判决的风险为 1。在此条件下，Bayes 准则就转化为最小错误概率准则。

将 $C_{00}=C_{11}=0$、$C_{10}=C_{01}=1$ 代入 Bayes 准则的判决公式(3.33)中，得到最小错误概率准则的判决公式，为

$$l(x)=\frac{f(x\mid H_1)}{f(x\mid H_0)}\underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}}\frac{P(H_0)}{P(H_1)} \tag{3.36}$$

最小错误概率准则的接收机结构形式如图 3.6 所示。

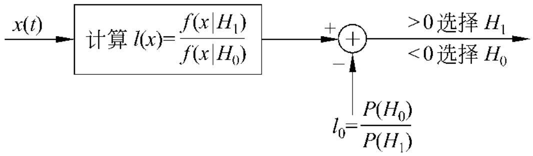

图 3.6　最小错误概率准则下的接收机形式

由此可见,最小错误概率准则与最大后验概率准则的判决公式相同,均称为理想观测者准则。

【例 3.3】 设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是统计独立的方差为 σ^2 的高斯随机变量,在 H_1 假设下均值为 a_1,H_0 假设下均值为 a_0,试对其进行判决,并证明随着观测次数 n 的增加,判决的错误概率减小。

解: 在 H_1 假设下,$x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的联合概率密度函数为

$$\begin{aligned}f(\boldsymbol{x}\mid H_1)&=f(x_1,x_2,\cdots,x_n\mid H_1)\\&=f(x_1\mid H_1)f(x_2\mid H_1)\cdots f(x_n\mid H_1)=\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\right)^n \mathrm{e}^{-\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-a_1)^2}{2\sigma^2}}\end{aligned}$$

在 H_0 假设下,$x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的联合概率密度函数为

$$f(\boldsymbol{x}\mid H_0)=\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\right)^n \mathrm{e}^{-\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-a_0)^2}{2\sigma^2}}$$

似然比为

$$l(\boldsymbol{x})=\frac{f(x\mid H_1)}{f(x\mid H_0)}=\mathrm{e}^{-\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-a_1)^2}{2\sigma^2}+\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-a_0)^2}{2\sigma^2}}$$

指数部分可以进行如下简化

$$\begin{aligned}&-\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-a_1)^2}{2\sigma^2}+\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-a_0)^2}{2\sigma^2}\\&=\frac{1}{2\sigma^2}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\sum_{i=1}^{n}2a_0x_i+na_0^2-\sum_{i=1}^{n}x_i^2+\sum_{i=1}^{n}2a_1x_i-na_1^2\right)\\&=\frac{a_1-a_0}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}x_i-\frac{n(a_1^2-a_0^2)}{2\sigma^2}=\frac{n(a_1-a_0)}{\sigma^2}\bar{x}-\frac{n(a_1^2-a_0^2)}{2\sigma^2}\end{aligned}$$

根据判决公式得

$$l(\boldsymbol{x})=\mathrm{e}^{\frac{n(a_1-a_0)}{\sigma^2}\bar{x}-\frac{n(a_1^2-a_0^2)}{2\sigma^2}}\underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}}l_0$$

即

$$\bar{x}\underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}}\frac{a_1+a_0}{2}+\frac{\sigma^2}{n(a_1-a_0)}\ln l_0=\beta$$

根据算术平均值的分布，写出其概率密度函数

$$f(\bar{x} \mid H_1) = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{n(\bar{x}-a_1)^2}{2\sigma^2}}$$

$$f(\bar{x} \mid H_0) = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{n(\bar{x}-a_0)^2}{2\sigma^2}}$$

两种错误概率分别为

$$P(D_1 \mid H_0) = \int_{\beta}^{\infty} f(\bar{x} \mid H_0) d\bar{x} = \int_{\beta}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{n(\bar{x}-a_0)^2}{2\sigma^2}} d\bar{x}$$

$$P(D_0 \mid H_1) = \int_{-\infty}^{\beta} f(\bar{x} \mid H_1) d\bar{x} = 1 - \int_{\beta}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{n(\bar{x}-a_1)^2}{2\sigma^2}} d\bar{x}$$

根据误差函数的计算公式

$$\mathrm{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$$

令 $t=\dfrac{\sqrt{n}(\bar{x}-a_0)}{\sqrt{2}\sigma}$，得 $dt=\dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{2}\sigma}d\bar{x}$，$d\bar{x}=\dfrac{\sqrt{2}\sigma}{\sqrt{n}}dt$，代入上式得

$$\begin{aligned} P(D_1 \mid H_0) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{\sqrt{n}(\beta-a_0)}{\sqrt{2}\sigma}}^{\infty} e^{-t^2} dt = \frac{1}{2}\left[\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty} e^{-t^2} dt - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{\sqrt{n}(\beta-a_0)}{\sqrt{2}\sigma}} e^{-t^2} dt\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[1 - \mathrm{erf}\left(\frac{\sqrt{n}(\beta-a_0)}{\sqrt{2}\sigma}\right)\right] \end{aligned}$$

同理

$$\begin{aligned} P(D_0 \mid H_1) &= 1 - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{\sqrt{n}(\beta-a_1)}{\sqrt{2}\sigma}}^{\infty} e^{-t^2} dt = 1 - \frac{1}{2}\left[\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty} e^{-t^2} dt - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{\sqrt{n}(\beta-a_1)}{\sqrt{2}\sigma}} e^{-t^2} dt\right] \\ &= 1 - \frac{1}{2}\left[1 - \mathrm{erf}\left(\frac{\sqrt{n}(\beta-a_1)}{\sqrt{2}\sigma}\right)\right] = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\mathrm{erf}\left(\frac{\sqrt{n}(a_1-\beta)}{\sqrt{2}\sigma}\right) \end{aligned}$$

当观测次数 $n\to\infty$ 时，$\mathrm{erf}\left(\dfrac{\sqrt{n}(\beta-a_0)}{\sqrt{2}\sigma}\right)\to 1$，$\mathrm{erf}\left(\dfrac{\sqrt{n}(a_1-\beta)}{\sqrt{2}\sigma}\right)\to 1$，故 $P(D_1 \mid H_0)\to 0$，$P(D_0 \mid H_1)\to 0$。

可见，随着观测次数的增加，判决的错误概率降低。

3.5 极大极小准则

在使用 Bayes 准则时，必须事先知道各个代价因子 C_{ij}（i，j 为 0 或 1）和先验概率 $P(H_0)$ 及 $P(H_1)$。在有些情况下，这些参数难以确定。如在雷达观测中，敌机出现与不出现的先验概率很难确定，虚警与漏报的代价也无法估计。在博弈时，对手出某牌的先验概率也很难知道。

在先验概率未知的情况下，要想使用 Bayes 准则就必须首先推测一个先验概率 $P(H_0)=q_1$（如在一些二元数字通信系统中，都假定先验概率相等，即 $q_1=0.5$）。但采用推测的先验