第 3 章　线性规划的解法

线性规划的求解实质上就是研究在一组线性约束之下，求某线性函数的最值问题。自从 20 世纪 30 年代末，苏联科学家康托洛维奇首先研究线性规划问题，并提出解线性规划问题的“解乘数法”后，许多学者对此做了深入的研究。其中具有里程碑性质的研究是，1947 年美国学者丹捷格提出的单纯形方法，统一了求解线性规划的算法。配合计算机的应用，线性规划的求解变得迅速而有效。

本章将介绍线性规划的图解法、单纯形法，以及 Excel 求解法。

3.1　线性规划的图解法

当决策变量只有 2～3 个时，线性规划问题可以采用在平面上作图的方法求解，这种方法称为图解法。这种方法具有简单、直观、容易理解的特点，它从几何的角度说明了线性规划方法的思路。所以，图解法有助于了解一般线性规划问题的实质和求解的原理。

1. 线性规划的图解法

下面举例说明用图解法求解线性规划问题的具体方法。

例 3-1　设线性规划问题的模型为：

$$\text{目标函数}\quad \max z = 2x_1 + 3x_2 \tag{3-1}$$

$$\text{约束条件}\quad \text{s.t.}\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leqslant 8 \\ 4x_1 \leqslant 16 \\ 4x_2 \leqslant 12 \\ x_1, x_2 \geqslant 0 \end{cases} \tag{3-2}$$

以决策变量 x_1 为横坐标，以决策变量 x_2 为纵坐标，建立一个平面直角坐标系（如果是 3 个决策变量，则建立一个三维立体坐标系），由于 $x_1, x_2 \geqslant 0$ 为非负约束条件，所以决策变量的取值范围在第一象限。

令 3 个约束条件中的不等式为等式，并用直线将它们在平面直角坐标系中表示出来，则得到如图 3-1 所示。

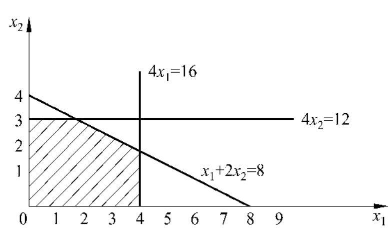

图　3-1

由图 3-1 可以看出，同时满足约束条件(3-2)的 x_1，x_2 取值范围，只能在由两条坐标轴以及表示另外 3 个等式的 3 条直线所限定的区域内(阴影部分)，此区域称为该线性规划化问题的**可行域**。

由式(3-1)变换得到

$$x_2 = -\frac{2}{3}x_1 + \frac{1}{3}z \tag{3-3}$$

其中，$-2/3$ 代表斜率，$z/3$ 代表截距。在普通直线方程中，z 是不变量(取常数)，x_2 作为因变量，随自变量 x_1 变化而变化。但这里 z 是可以取任何实数的未知数，因此，可令 $z=0$，画出第一条目标函数的等值线(在该直线上，决策变量 x_1，x_2 的任何取值，对应目标函数 z 的取值相等)。令 $x_1=3$，$z=12$ 代入式子(3-3)，则 $x_2=2$，如图 3-2 所示。

在图 3-2 中阴影的范围内，x_1，x_2 所对应的点都满足式(3-2)所规定的约束条件，当 z 的取值增加时，意味着直线的截距增加，斜率不变，于是就形成一组斜率为 $-2/3$ 的平行线。当平行线向上移动到恰好要离开图 3-2 中阴影部分的临界点时，就得到了 z 的最大化目标值，如图 3-3 所示。

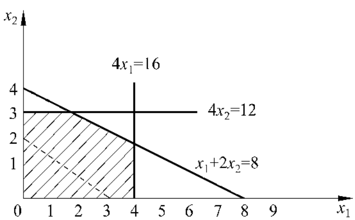

图 3-2

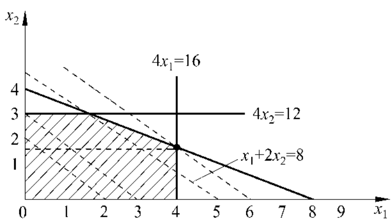

图 3-3

显然，当平行线向下移动到恰好要离开图 3-3 中阴影部分的临界点时，就得到了 z 的最小化目标值。

可见，图解法既可以求解最大化问题，也可以求解最小化问题。

由图 3-3 可知，等值线与阴影图形的临界交汇点处的坐标为 $x_1=4$ 和 $x_2=2$，代入式(3-1)得到 $z=14$，这就是满足约束条件(3-2)的最优解。

由例 3-1 可以看出，线性规划问题的最优解出现在可行域的一个顶点上，此时线性规划问题有唯一解。但有时线性规划问题还可能出现有无穷多个最优解，无有限最优解，甚至没有可行解的情况，下面再通过例题来说明。

(1) 无穷多个最优解的情形。若将例 3-1 中的目标函数改变为求 $\max z=2x_1+4x_2$，则目标函数的等值线与边界线 $x_1+2x_2=8$ 平行，线段 P_1P_2 上的任意一点都使 z 取得相同的最大值 $z=8$，此时线性规划问题有无穷多个最优解，如图 3-4 所示。

事实上，阴影部分构成一个凸多边形，其中 P_1 和 P_2 分别是两个极点，这两个极点的坐标分别构成上例问题的两个典型的最优解，而连接 P_1 和 P_2 两点之间的线段上的每一个点的坐标值，都是上例的一个最优解。

(2) 无界解的情形。考虑下列线性规划问题：

$$\max z = x_1 + x_2$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}-2x_1+x_2\leqslant 4\\ x_1-x_2\leqslant 2\\ x_1,x_2\geqslant 0\end{cases}$$

在 $x_1 0 x_2$ 坐标平面上作边界线 l_1：$-2x_1+x_2=4$，l_1：$x_1-x_2=2$，确定可行域(如图 3-5 中的阴影部分所示)，可以看出可行域无界。为求最优解作等值线 $x_1+x_2=k$，当 k 值由小变大时，等值线平行向上移动，无论 k 值增大多少，等值线上总有一段位于可行域内，因此，目标函数无上界，该问题无有限最优解。

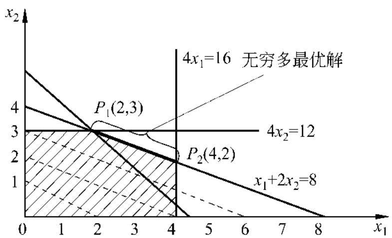

图 3-4

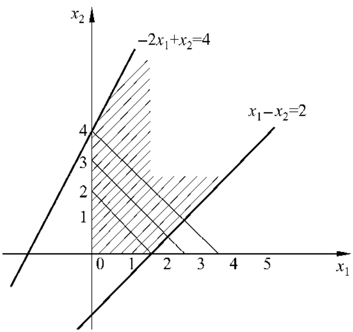

图 3-5

显然，图 3-5 中的阴影部分是一个无界凸多边形，在这个凸多边形中，等值线无论怎样移动，都无法遇到两个约束条件相交汇的顶点，因此，该问题的最优解只能是无界解。

注意，可行域无界时，线性规划问题有时也有有限最优解。比如将该例的目标函数改变为 $\max z=-x_1-x_2$ 或 $\min z=x_1+x_2$ 时，线性规划问题有最优解 $x_1=x_2=0$，即目标函数在原点取得最优值。

另外，若在模型中增加一个约束条件：$2x_1+x_2\leqslant 6$，则该问题的模型变为

$$\max z = x_1 + x_2 \tag{3-4}$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}-2x_1+x_2\leqslant 4\\ x_1-x_2\leqslant 2\\ 2x_1+x_2\leqslant 6\\ x_1,x_2\geqslant 0\end{cases}$$

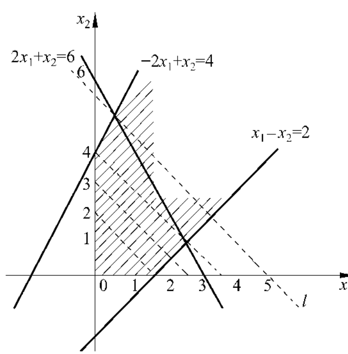

图 3-6

因为增加了一个恰当的约束条件，该问题的可行域变成了有界情形，因此，可能存在有限最优解，其可行域可由图 3-6 表示。

对式(3-4)作变换，得到 $x_2=z—x_1$，令 $z=k$，得到等值线(图 3-6 虚线表示)。

该问题可以取得最优解为：$x_1=0.5$，$x_2=5$。

(3) 无可行解的情形。如果在线性规划模型：

$$\max z = 2x_1 + 3x_2$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leqslant 8 \\ 4x_1 \qquad \leqslant 16 \\ \qquad 4x_2 \leqslant 12 \\ x_1, x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

中增加约束条件 $x_1 + x_2 \geqslant 9$，则边界方程 $l: x_1 + x_2 = 9$ 的上方不满足约束条件，因此，该问题的可行域为空集，即没有满足所有约束条件的点存在，可行域如图 3-7 所示。所以，问题无可行解，更不存在最优解。

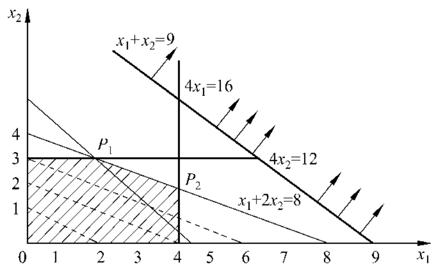

图　3-7

图解法适合求解只有 2 个或 3 个变量的线性规划问题，求解的具体步骤归纳如下：

(1) 画出所有约束方程(约束条件取等式)对应的直线，用原点判定直线的哪一边符合约束条件；

(2) 找出所有约束条件都同时满足的公共平面区域，即得可行域；

(3) 给定目标函数 z 一个特定的值 k，画出相应的目标函数等值线；当 k 值发生变化时，等值线将平行移动。对于目标函数最大化问题，找出目标函数值增加的方向(即坐标系纵轴值增大的方向)，等值线平行上移到可行域(阴影部分)的临界点，最终交点就是取得目标函数最大值的最优解；对于目标函数最小化问题，找出目标函数值减少的方向(即坐标系纵轴值减少的方向)，等值线平行下移到可行域(阴影部分)的临界点，最终交点就是取得目标函数最小值的最优解。

图解法非常直观，但它一般只能求解含有两个或三个变量的线性规划问题，在求解含有超过三个决策变量的线性规划问题时，一般不采用图解法，而采用代数方法，常用的方法是单纯形法。在介绍单纯形法之前，先介绍有关概念。

2. 线性规划问题的相关概念

(1) 凸多边形：全部由若干直线线段相交而封闭的内部没有空洞的多边形称为凸多边形；实心圆是一种全部直线线段都退化为点的特殊凸多边形。凸多边形和凸多面体可以是有界的，也可以是无界的。

(2) 凸多面体：实心多面体和实心球体称为凸多面体。

(3) 凸集：设 K 是 n 维欧氏空间(记为 $\boldsymbol{E}^n$)的一个点集，若任意两点 $X^{(1)} \in K X^{(2)} \in K$

连线上的一切点 $\alpha X^{(1)}+(1-\alpha)X^{(2)}\in K(0\leqslant\alpha\leqslant 1)$，则称 K 为凸集。

从直观上看，由凸集的点构成的凸多边形和凸多面体没有凹入部分，也没有内部空洞。如图 3-8(a)、(b)所示均为凸集，而(c)不是凸集。

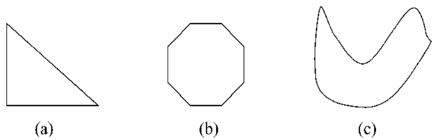

图 3-8　凸集与非凸集

显然，凸多边形、凸多面体都是凸集的特殊情形。

(4) 凸组合：设 $X^{(1)},X^{(2)},\cdots,X^{(k)}$ 是 $\boldsymbol{E}^n$ 中的 k 个点，若存在 $\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_k$，且($0\leqslant\mu_i\leqslant 1;i=1,2,\cdots,k;\sum_{i=1}^{k}u_i=1$)，使得

$$\boldsymbol{X}=\mu_1X^{(1)}+\mu_2X^{(2)}+\cdots+\mu_kX^{(k)}$$

则称 $\boldsymbol{X}$ 是 $X^{(1)},X^{(2)},\cdots,X^{(k)}$ 的凸组合。

(5) 顶点(又称为极点)：设 K 是凸集，$X\in K$；若 X 不能被不同的两点 $X^{(1)}\in K$ 和 $X^{(2)}\in K$ 的线性组合表示为 $\alpha X^{(1)}+(1-\alpha)X^{(2)}\in K(0\leqslant\alpha\leqslant 1)$，则称 X 为 K 的一个顶点或极点。

3. 线性规划模型的标准形式

线性规划问题是求一个线性目标函数在一组线性约束条件下的最大值或最小值问题。在线性规划模型中，目标函数根据实际问题的要求可能是求最大化，也可能是求最小化；每一个函数约束可能是相等约束，即约束函数=资源常量项，也可能是不等约束，即约束函数>资源常量项或约束函数<资源常量项；资源常量项可能非负也可能非正；决策变量取值范围可能非负也可能非正，甚至可能无限制等。因此，线性规划模型的形式多种多样，这给求解线性规划问题带来不便。虽然图解法对线性规划模型的形式没有限制，但它对变量个数有约束。为了方便起见，要求规范线性规划模型的标准形式，将线性规划模型的所有形式都转化为标准形式进行研究。

1) 线性规划模型的标准形式

$$\max z=c_1x_1+c_1x_2+\cdots+c_nx_n$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2\\\quad\vdots\\a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m\\x_1,x_2,\cdots,x_n\geqslant 0\end{cases}\tag{3-5}$$

其中，$b_i\geqslant 0(i=1,2,\cdots,m)$

$$\max z=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j$$

或简记为

$$\text{s. t.} \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i & (i = 1,2,\cdots,m) \\ x_j \geqslant 0 & (j = 1,2,\cdots,n) \end{cases}$$

称其为标准形式的**一般式**。

若记

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & \vdots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{c} = (c_1, c_1, \cdots, c_n), \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{P}_j = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}, \quad (j = 1,2,\cdots,n)$$

则线性规划模型标准形式的**矩阵式**为

$$\max z = \boldsymbol{cX}$$

$$\text{s. t.} \begin{cases} \boldsymbol{AX} = \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{X} \geqslant \boldsymbol{0} \end{cases}$$

向量式为

$$\max z = \boldsymbol{cX}$$

$$\text{s. t.} \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{P}_j x_j = \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{X} \geqslant \boldsymbol{0} \end{cases}$$

线性规划模型标准形式中的一般式、矩阵式和向量式等三种表达式是等价的，在应用中可根据需要灵活使用。

线性规划模型的标准形式具有如下 4 个特点：

(1) 目标函数是最大化类型：$\max z=\boldsymbol{cX}$

(2) 约束条件均由等式组成：$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$

(3) 决策变量均为非负：$\boldsymbol{X}\geqslant 0$

(4) 资源常数项非负：$\boldsymbol{b}\geqslant 0$

2) 线性规划模型的标准化

根据线性规划模型标准形式的特点，可以将其他形式的线性规划模型转化为标准形式，这种转化过程称为线性规划模型的标准化。

(1) 目标函数的转化。

若原问题的目标函数是最小化，即 $\min z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$，则可将原目标函数乘以 -1，等价转化为最大化问题

$$\max z' = \min(-z) = -\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

转化后的问题与原问题有相同的最优解。

(2) 约束条件的转化。

约束条件的转化是将不等式约束化为等式约束。如果约束条件是线性不等式

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leqslant b_i$$

则引入松弛变量 $x_{n+i} \geqslant 0$，将其转化为等价的等式约束条件

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + x_{n+i} = b_i$$

如果约束条件是线性不等式

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geqslant b_i$$

则引入剩余变量 $x_{n+i} \geqslant 0$，将其转化为等价的等式约束条件

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - x_{n+i} = b_i$$

总之，若原问题的约束为"$\leqslant$"型，则左边加松弛变量转化为等式约束；若约束为"$\geqslant$"型，则左边减剩余变量转化为等式约束。

(3) 变量约束的转化。

如果原问题中某变量非正，即 $x_j \leqslant 0$，则令 $x_j' = -x_j \geqslant 0$；

如果原问题中某变量 x_j 是自由变量(即无非负限制)，则可令

$$x_j = x_j' - x_j'', \quad x_j' \geqslant 0, \quad x_j'' \geqslant 0$$

将变换后的变量代入原问题，得到的转化后的问题与原问题具有相同的最优解。

(4) 资源常量的转化。

如果某个资源常量 $b_i \leqslant 0$，则先将 $b_i \leqslant 0$ 所在的约束式两边乘以 -1，使得 $b_i' = -b_i \geqslant 0$ 后，再将不等约束化为等式约束。

例 3-2 将下列线性规划问题标准化。

$$\min z = -x_1 + 2x_2 - 3x_3$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leqslant 7 \\ -x_1 + x_2 - x_3 \leqslant -2 \\ -3x_1 + x_2 + 2x_3 = 5 \\ x_1, x_3 \geqslant 0, \quad x_2 \text{ 无约束} \end{cases}$$

解：

(1) 将最小化目标函数乘以 -1 转化为最大化。因此，转化后的等价目标函数为：

$$\max z' = -(-x_1 + 2x_2 - 3x_3) = x_1 - 2x_2 + 3x_3$$

(2) 在第一个约束条件中引入松弛变量 $x_4 \geqslant 0$，化为等式约束：

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 7$$

(3) 在第二个约束条件中乘以 -1，将资源常数 $b_2 = -2$ 化为正数，则第二个约束条件

化为：

$$x_1 - x_2 + x_3 \geqslant 2$$

再引入剩余变量 $x_5 \geqslant 0$，化为等式约束：

$$x_1 - x_2 + x_3 - x_5 = 2$$

（4）再令无约束的自由变量 $x_2 = x_2' - x_2''$，$x_2' \geqslant 0$，$x_2'' \geqslant 0$。

因此，可得到与原问题等价的线性规划模型的标准形式

$$\max z' = x_1 - 2(x_2' - x_2'') + 3x_3$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} x_1 + 2(x_2' - x_2'') + 3x_3 + x_4 = 7 \\ x_1 - (x_2' - x_2'') + x_3 - x_5 = 2 \\ -3x_1 + (x_2' - x_2'') + 2x_3 = 5 \\ x_1, x_2', x_2'', x_3, x_4, x_5 \geqslant 0 \end{cases}$$

例 3-3 将下列线性规划问题化为标准形。

$$\max z = -|x| - |y|$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} x + y \geqslant 2 \\ x \leqslant 3 \\ x, y \text{ 无约束} \end{cases}$$

解：令

$$x' = \begin{cases} x, & \text{当 } x \geqslant 0 \\ 0, & \text{当 } x < 0 \end{cases}, \quad x'' = \begin{cases} 0, & \text{当 } x \geqslant 0 \\ -x, & \text{当 } x < 0 \end{cases}$$

$$y' = \begin{cases} y, & \text{当 } y \geqslant 0 \\ 0, & \text{当 } y < 0 \end{cases}, \quad y'' = \begin{cases} 0, & \text{当 } y \geqslant 0 \\ -y, & \text{当 } y < 0 \end{cases}$$

则有

$$x = x' - x'', \quad |x| = x' + x''$$

$$y = y' - y'', \quad |y| = y' + y''$$

加入剩余变量 s，松弛变量 w，得到原问题模型的标准形式：

$$\max z = -(x' + x'') - (y' + y'')$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} x' - x'' + y' - y'' - s = 2 \\ x' - x'' + w = 3 \\ x', x'', y', y'', s, w \geqslant 0 \end{cases}$$

例 3-4 将下列线性规划问题标准化。

$$\max z = 2x_1 - x_2 + x_3$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 \leqslant 20 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 \geqslant 12 \\ x_1 - 4x_2 - 4x_3 \geqslant 2 \\ x_1, x_2 \geqslant 0, \quad 2 \leqslant x_3 \leqslant 6 \end{cases}$$

解：首先考察变量，令 $x_3' = x_3 - 2$，则 $2 \leqslant x_3 \leqslant 6$ 转化为

$$0 \leqslant x_3' = x_3 - 2 \leqslant 4$$

即有

$$x_3' \geqslant 0, \quad x_3' \leqslant 4$$

从而得到等价模型为

$$\max z = 2x_1 - x_2 + x_3' - 2$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3' \leqslant 22 \\ 2x_1 - x_2 + x_3' \geqslant 10 \\ x_1 - 4x_2 - 4x_3' \geqslant 10 \\ x_3' \leqslant 4 \\ x_1, x_2, x_3' \geqslant 0 \end{cases}$$

在等价模型中，第 1、4 个约束条件左边分别加上松弛变量 x_4、x_5，第 2、3 个约束条件左边分别减去剩余变量 x_6、x_7，则得到原问题模型的标准形式：

$$\max z = 2x_1 - x_2 + x_3' - 2$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3' + x_4 = 22 \\ 2x_1 - x_2 + x_3' - x_6 = 10 \\ x_1 - 4x_2 - 4x_3' - x_7 = 10 \\ x_3' + x_5 = 4 \\ x_1, x_2, x_3', x_4, x_5, x_6, x_7 \geqslant 0 \end{cases}$$

4. 线性规划问题解的概念

设线性规划问题为

$$\max z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{3-6}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \quad (i = 1, \cdots, m) \tag{3-7}$$

$$x_j \geqslant 0 \quad (j = 1, \cdots, n) \tag{3-8}$$

则从代数学的角度得到如下概念。

可行解：满足上述约束条件(3-7)，(3-8)的解 $\boldsymbol{X} = (x_1, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}}$，称为线性规划问题的可行解。

可行域：全部可行解的集合，称为线性规划问题的可行域。

最优解：使目标函数(3-6)达到最大值的可行解称为最优解，对应的目标函数值称为最优值。求解线性规划问题就是求其最优解和最优值，但用纯代数的方法求解是困难的。

如果线性规划问题的最优解存在且唯一，则称线性规划问题有唯一最优解。如果线性规划问题的最优解存在但不唯一，则称线性规划问题有多重最优解。

基：设 $\boldsymbol{A}$ 为约束方程组(3-7)的 $m \times n$ 阶系数矩阵（设 $n > m$），其秩为 m，$\boldsymbol{B}$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中的一个 $m \times m$ 阶的满秩子矩阵，称 $\boldsymbol{B}$ 是线性规划问题的一个基。不失一般性，设

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm} \end{bmatrix} = (\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{P}_2, \cdots, \boldsymbol{P}_m)$$

$\boldsymbol{B}$ 中的每一个列向量 $\boldsymbol{P}_j(j=1,\cdots,m)$ 称为**基向量**，与基向量 $\boldsymbol{P}_j$ 对应的变量 x_j 称为**基变量**。线性规划中除基变量以外的变量称为**非基变量**。

基解：在约束方程组(3-7)中，令所有非基变量 $x_{m+1}=x_{m+2}=\cdots=x_n=0$，又因为有 $|\boldsymbol{B}|\neq 0$，根据克莱姆规则，由 m 个约束方程可解出 m 个基变量的唯一解 $\boldsymbol{X}_B=(x_1,\cdots,x_m)^{\mathrm{T}}$。将这个解加上非基变量取零值，则有 $\boldsymbol{X}=(x_1,x_2,\cdots,x_m,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}$，称 $\boldsymbol{X}$ 为线性规划问题的基解。

显然，在基解中，变量取非零值的个数不大于方程个数 m，故基解的总数不超过 C_n^m 个。

基可行解：满足变量非负约束条件(3-8)的基解称为基可行解。

可行基：对应于基可行解的基称为可行基。

退化解：如果基解中非零分量的个数小于 m，则称此基解为退化的，否则是非退化的。

最优基解：如果对应于基 $\boldsymbol{B}$ 的基可行解是最优解，则称 $\boldsymbol{B}$ 为最优基，相应的解称为最优基解。

线性规划问题解之间的关系如图 3-9 所示。

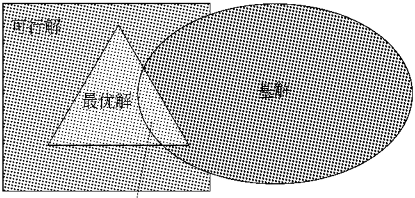

图 3-9　线性规划问题解之间的关系

例 3-5　求出下列线性规划问题的全部基解，指出其中的基可行解，并确定最优解。

$$\max z = 2x_1 + 3x_2 + x_3$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leqslant 10 \\ x_2 \leqslant 4 \\ x_1 + x_3 = 5 \\ x_i \geqslant 0 \quad (i=1,2,3,4,5) \end{cases}$$

解：原问题的标准形式为

$$\max z = 2x_1 + 3x_2 + x_3$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_4 = 10 \\ x_2 + x_5 = 4 \\ x_1 + x_3 = 5 \\ x_i \geqslant 0 \quad (i=1,2,3,4,5) \end{cases}$$

由约束方程组可以得到其增广矩阵 $\bar{\boldsymbol{A}}$，

$$\bar{\boldsymbol{A}} = \left(\begin{array}{ccccc:c} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{行初等变换}} \left(\begin{array}{ccccc:c} 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 5 \end{array}\right)$$