第3章 母函数

3.1 母函数的基本概念

母函数又称发生函数或生产函数，它是解决组合计数问题的一个重要工具之一。

母函数有多种类型，这里仅讨论最常见的两种：普通母函数和指数母函数。下面分别进行讨论。

1. 普通母函数

定义 3.1 给定一个无穷序列$(a_0, a_1, \cdots, a_n, \cdots)$（简记为$\{a_n\}$，下同），称函数

$$f(x) = a_0 + a_1x^1 + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + \cdots = \sum_{i=0}^{\infty} a_ix^i \tag{3.1}$$

为序列$(a_0, a_1, \cdots, a_n, \cdots)$的普通母函数。

必须注意的是，在定义 3.1 中，普通母函数是一个无穷级数，没有必要去讨论它的收敛性，实质上它只是引进一个表示序列的记号而已。此时的变量 x 只是一种形式变元。对这种级数可以把它看成形式幂级数，可以按通常方式定义其加法、乘法、形式微分等运算，从而构成一个代数体系。

从定义 3.1 可知，一个序列和它的普通母函数是一一对应的。给定了一个序列就可以得到这个序列的普通母函数。反之，如果给定了普通母函数，则序列也随之而定。由此可见，普通母函数实质上是序列的另一种表达形式。

由于一个有限序列$(a_0, a_1, \cdots, a_n)$可以表示成一个无穷序列$(a_0, a_1, \cdots, a_n, a_{n+1}, \cdots)$，其中 $a_{n+1} = a_{n+2} = \cdots = 0$，因此有限序列同样可用普通母函数表示。

【例 1】 求序列$\left(\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \cdots, \binom{n}{n}\right)$的普通母函数。

【解】
$$\begin{aligned} f(x) &= \binom{n}{0} + \binom{n}{1}x^1 + \binom{n}{2}x^2 + \cdots + \binom{n}{n}x^n \\ &= (1+x)^n \end{aligned}$$

【例 2】 求序列$\left(\binom{n-1}{0}, -\binom{n}{1}, \binom{n+1}{2}, \cdots, (-1)^k\binom{n+k-1}{k}, \cdots\right)$的普通母函数。

【解】
$$\begin{aligned} f(x) &= \binom{n-1}{0} - \binom{n}{1}x + \binom{n+1}{2}x^2 + \cdots + (-1)^k\binom{n+k-1}{k}x^k + \cdots \\ &= (1+x)^{-n} \end{aligned}$$

【例 3】 证明$(1-4x)^{-1/2}$是序列$\left(\binom{0}{0},\binom{2}{1},\binom{4}{2},\cdots,\binom{2n}{n},\cdots\right)$的普通母函数。

【证明】 由牛顿二项式定理式(1.16)得

$$\begin{aligned}(1-4x)^{-1/2} &= 1+\sum_{i=1}^{\infty}\frac{-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}-1\right)\left(-\frac{1}{2}-2\right)\cdots\left(-\frac{1}{2}-i+1\right)}{i\,!}(-4x)^{i}\\
&= 1+\sum_{i=1}^{\infty}\frac{4^{i}\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{2}\right)\cdots\left(\frac{(2i-1)}{2}\right)}{i\,!}x^{i}\\
&= 1+\sum_{i=1}^{\infty}\frac{2^{i}\times 1\times 3\times 5\times\cdots\times(2i-1)}{i\,!}x^{i}\\
&= 1+\sum_{i=1}^{\infty}\frac{2^{i}\times i\,!\times 1\times 3\times 5\times\cdots\times(2i-1)}{i\,!\times i\,!}x^{i}\\
&= 1+\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(2\times 4\times 6\times\cdots\times 2i)(1\times 3\times 5\times\cdots\times(2i-1))}{i\,!\times i\,!}x^{i}\\
&= 1+\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(2i)\,!}{i\,!\times i\,!}x^{i}\\
&= 1+\sum_{i=1}^{\infty}\binom{2i}{i}x^{i}\\
&= \binom{0}{0}+\binom{2}{1}x^{1}+\binom{4}{2}x^{2}+\cdots+\binom{2n}{n}x^{n}+\cdots\end{aligned}$$

由定义 3.1，$(1-4x)^{-1/2}$是序列$\left(\binom{0}{0},\binom{2}{1},\binom{4}{2},\cdots,\binom{2n}{n},\cdots\right)$的普通母函数。

【例 4】 求序列$(0,1\times2\times3,2\times3\times4,\cdots,n(n+1)(n+2),\cdots)$的普通母函数。

【解】 由式(1.20)得

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^{n}$$

将上式两边同时微分两次得

$$\frac{2}{(1-x)^{3}}=\sum_{n=0}^{\infty}n(n-1)x^{n-2}$$

再将上式两边微分有

$$\frac{6}{(1-x)^{4}}=\sum_{n=0}^{\infty}n(n-1)(n-2)x^{n-3}$$

再将上式两边同乘以 x 得

$$\begin{aligned}\frac{6x}{(1-x)^{4}} &= \sum_{n=0}^{\infty}n(n-1)(n-2)x^{n-2}\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}n(n+1)(n+2)x^{n}\\
&= 0+1\times2\times3x^{1}+2\times3\times4x^{2}+\cdots+n(n+1)(n+2)x^{n}+\cdots\end{aligned}$$

由定义 3.1 知，$f(x)=6x/(1-x)^{4}$ 是序列$(0,1\times2\times3,2\times3\times4,\cdots,n(n+1)(n+2),\cdots)$的普通母函数。

2. 指数母函数

由上面的例子可见，普通母函数特别适用于某些序列，尤其是包含组合数的序列，这是由于它具有牛顿二项式定理的形式。但是，对于具有排列数的那些序列，我们考虑下列类型的母函数(指数母函数)更为合适。

定义 3.2 给定无穷序列$(a_0,a_1,\cdots,a_n,\cdots)$，称函数

$$f_e(x)=a_0+a_1\frac{x^1}{1!}+a_2\frac{x^2}{2!}+\cdots+a_n\frac{x^n}{n!}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\frac{x^n}{n!} \tag{3.2}$$

为序列$(a_0,a_1,\cdots,a_n,\cdots)$的指数母函数。之所以称为指数每函数是由于式(3.2)的右边很像指数函数 e^{ax} 的幂级数展开式。注意，指数母函数也是形式幂级数。

【例 5】 设 n 是整数，求序列$(P(n,0),P(n,1),\cdots,P(n,n))$的指数母函数 $f_e(x)$。

【解】 由定义 3.2、式(1.7)以及例 1 的结论有

$$\begin{aligned}f_e(x)&=P(n,0)+P(n,1)\frac{x^1}{1!}+P(n,2)\frac{x^2}{2!}+\cdots+P(n,n)\frac{x^n}{n!}+0+\cdots\\&=\binom{n}{0}+\binom{n}{1}x+\binom{n}{2}x^2+\cdots+\binom{n}{n}x^n\\&=(1+x)^n\end{aligned}$$

【例 6】 求序列$(P(0,0),P(2,1),P(4,2),\cdots,P(2n,n),\cdots)$的指数母函数 $f_e(x)$。

【解】 由定义 3.2 和式(1.7)，再利用例 3 的结果有

$$\begin{aligned}f_e(x)&=P(0,0)+P(2,1)\times\frac{x^1}{1!}+P(4,2)\times\frac{x^2}{2!}+\cdots+P(2n,n)\times\frac{x^n}{n!}+\cdots\\&=\binom{0}{0}+\binom{2}{1}x^1+\binom{4}{2}x^2+\cdots+\binom{2n}{n}x^n+\cdots\\&=(1-4x)^{-1/2}\end{aligned}$$

【例 7】 求序列$(1,a,a^2,\cdots,a^n,\cdots)$的指数母函数 $f_e(x)$，其中 a 是实数。

【解】 由定义 3.2 知

$$f_e(x)=1+a\times\frac{x^1}{1!}+a^2\times\frac{x^2}{2!}+\cdots+a^n\times\frac{x^n}{n!}+\cdots=e^{ax}$$

若 $a=1$，则序列$(1,1,\cdots,1,\cdots)$的指数母函数为 e^x。

【例 8】 求序列$(1,1\times4,1\times4\times7,1\times4\times7\times\cdots\times(3n+1),\cdots)$的指数母函数。

【解】 由定义 3.2 和二项式定理式(1.16) 有

$$\begin{aligned}f_e(x)&=1+(1\times4)\frac{x^1}{1!}+(1\times4\times7)\frac{x^2}{2!}+\cdots\\&\quad+1\times4\times7\times\cdots\times(3n+1)\frac{x^n}{n!}+\cdots\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1\times4\times7\times\cdots\times(3n+1)}{n!}x^n\\&=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(\frac{4}{3}\right)\left(\frac{7}{3}\right)\cdots\left(\frac{3n+1}{3}\right)}{n!}3^nx^n\\&=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(-\frac{4}{3}\right)\left(-\frac{7}{3}\right)\cdots\left(-\frac{4}{3}-n+1\right)}{n!}(-3x)n\end{aligned}$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(-\frac{4}{3}\right)\left(-\frac{4}{3}-1\right)\cdots\left(-\frac{4}{3}-n+1\right)}{n!}(-3x)^n$$
$$= (1-3x)^{-4/3}$$

由定义 3.2 易见，序列$(a_0, a_1, \cdots, a_n, \cdots)$的指数母函数也是序列$(a_0, a_1, a_2/2!, \cdots, a_n/n!, \cdots)$的普通母函数。这说明普通母函数与指数母函数之间有着密切的联系，这种联系可由下面的定理表示。

定理 3.1 设 $f(x)$，$f_e(x)$分别是序列$(a_0, a_1, \cdots, a_n, \cdots)$的普通母函数和指数母函数，则

$$f(x) = \int_0^{\infty} e^{-s} f_e(sx)\,ds$$

【证明】 由指数母函数的定义 3.2 有

$$f_e(sx) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{(sx)^n}{n!}$$

将上式两边同乘以 e^{-s}并从 0 到∞积分得。

$$\int_0^{\infty} e^{-s} f(sx)\,ds = \int_0^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-s} a_n \frac{s^n x^n}{n!} ds$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^n}{n!} \int_0^{\infty} e^{-s} s^n\,ds$$

由分部积分法有

$$\int_0^{\infty} e^{-s} s^n\,ds = n!$$

因此

$$\int_0^{\infty} e^{-s} f_e(sx)\,ds = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = f(x)$$

定理得证。

3.2 母函数的基本运算

第 3.1 节介绍了普通母函数和指数母函数的概念，这节将讨论母函数的运算以及一些基本关系。

设 $A(x)$，$B(x)$和 $C(x)$分别是序列$(a_0, a_1, \cdots, a_r, \cdots)$，$(b_0, b_1, \cdots, b_r, \cdots)$和$(c_0, c_1, \cdots, c_r, \cdots)$的普通母函数，则有

定义 3.3 $C(x) = A(x) + B(x)$ 当且仅当对所有的 i，都有 $c_i = a_i + b_i$($i = 0, 1, 2, \cdots, r, \cdots$)。

定义 3.4 $C(x) = A(x)B(x)$ 当且仅当对所有的 i，都有 $c_i = \sum_{k=0}^{i} a_k b_{i-k}$($i = 0, 1, 2, \cdots, r, \cdots$)。

【例 9】 设 $A(x)$是序列$(a_0, a_1, \cdots, a_r, \cdots)$的普通母函数，则$\frac{A(x)}{1-x}$是序列$(a_0, a_0 + a_1, \cdots, a_0 + a_1 + \cdots + a_r, \cdots)$的普通母函数。

【证明】 由式(1.20)有

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots+x^r+\cdots$$

故 $1/(1-x)$ 是序列$(1,1,\cdots,1,\cdots)$ 的普通母函数。

令 $B(x)=1/(1-x)$，由定义 3.4 有

$$\begin{aligned}
c_0&=|a_0|=c_0\\
c_1&=|a_0|+|a_1|=a_0+a_1\\
c_2&=|a_0|+|a_1|+|a_2|=a_0+a_1+a_2\\
&\vdots\\
c_r&=|a_0|+|a_1|+\cdots+|a_r|=a_0+a_1+\cdots a_r
\end{aligned}$$

故$\dfrac{A(x)}{1-x}=A(x)B(x)=C(x)$是序列$(a_0,a_0+a_1,a_0+a_1+a_2,\cdots,a_0+a_1+\cdots+a_r,\cdots)$的普通母函数。

【例 10】 求 $\sum\limits_{i=1}^{r}i^2$ 的值。

【解】 先求序列$(0^2,1^2,2^2,\cdots,r^2,\cdots)$的普通母函数。

由式(1.20)有

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots+x^r+\cdots$$

上式两边微分后再乘以 x 得

$$\frac{x}{(1-x)^2}=\sum_{k=0}^{\infty}kx^k$$

再将上式两边微分后再乘以 x 得

$$\frac{x(1+x)}{(1-x)^3}=\sum_{k=0}^{\infty}k^2x^k=0+1^2x^1+2^2x^2+\cdots+r^2x^r+\cdots$$

故$\dfrac{x(1+x)}{(1-x)^3}$是序列$(0^2,1^2,2^2,\cdots,r^2,\cdots)$的普通母函数。

由例 9 的结论知，$\dfrac{1}{1-x}\times\dfrac{x(1+x)}{(1-x)^3}=\dfrac{x(1+x)}{(1-x)^4}$是序列$(0^2,0^2+1^2,0^2+1^2+2^2,\cdots,0^2+1^2+2^2+\cdots+r^2,\cdots)$的普通母函数。

又由二项式定理式(1.16)知

$$\begin{aligned}
\frac{x(1+x)}{(1-x)^4}&=x(1+x)\left[\sum_{r=0}^{\infty}\binom{4+r-1}{r}x^r\right]\\
&=x(1+x)\left[1+\sum_{r=1}^{\infty}\frac{(r+3)!}{3!r!}x^r\right]\\
&=x(1+x)+x(1+x)\sum_{r=1}^{\infty}\frac{(r+1)(r+2)(r+3)}{6}x^r
\end{aligned}$$

由上式可见，在$\dfrac{x(1+x)}{(1-x)^4}$的展开式中，x^r 的系数是

$$\frac{r(r+1)(r+2)}{6}+\frac{(r-1)r(r+1)}{6}=\frac{r(r+1)(2r+1)}{6}$$

故有

$$\sum_{i=1}^{r} i^2 = 1^2 + 2^2 + \cdots + r^2 = \frac{r(r+1)(2r+1)}{6}$$

设 $A(x)$，$B(x)$和 $C(x)$分别是序列$(a_0,a_1,\cdots,a_r,\cdots)$，$(b_0,b_1,\cdots,b_r,\cdots)$和$(c_0,c_1,\cdots,c_r,\cdots)$的指数母函数，于是有

定义 3.5 $C(x)=A(x)+B(x)$ 当且仅当对所有的 i，都有 $c_i=a_i+b_i(i=0,1,2,\cdots,r,\cdots)$。

定义 3.6 $C(x)=A(x)B(x)$ 当且仅当对所有的 i，都有 $c_i=\sum_{k=0}^{i}\binom{i}{k}a_k b_{i-k}(i=0,1,2,\cdots,r,\cdots)$。

【例 11】 证明恒等式

$$\sum_{i=0}^{r}\frac{r!}{(r-i+1)!(i+1)!}=\frac{2(2^{r+1}-1)}{(r+2)(r+1)}$$

【证明】

$$\begin{aligned}\text{原式左端} &= \sum_{i=0}^{r}\frac{r!}{(r-i+1)!(i+1)!}\\ &= \sum_{i=0}^{r}\frac{r!}{(r-i)!i!}\times\frac{1}{(r-i+1)}\times\frac{1}{i+1}\\ &= \sum_{i=0}^{r}\binom{r}{i}\frac{1}{i+1}\times\frac{1}{r-i+1}\end{aligned}$$

将上式与定义 3.6 相比较，有

$$a_i=\frac{1}{i+1},\quad b_{r-i}=\frac{1}{r-i+1}$$

现考虑序列$(a_0,a_1,\cdots,a_r,\cdots)=(1,\frac{1}{2},\cdots,\frac{1}{r+1},\cdots)$，求它的指数母函数。

由于

$$e^x=1+\frac{1}{1!}x+\frac{1}{2!}x^2+\cdots+\frac{1}{r!}x^r+\frac{1}{(r+1)!}x^{r+1}+\cdots$$

故有

$$\frac{e^x-1}{x}=1+\frac{1}{2}\times\frac{x}{1!}+\frac{1}{3}\times\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{1}{r}\times\frac{x^{r-1}}{(r-1)!}+\frac{1}{r+1}\times\frac{x^r}{r!}+\cdots$$

因此$\frac{e^x-1}{x}$是序列$(a_0,a_1,\cdots,a_r,\cdots)=\left(1,\frac{1}{2},\cdots,\frac{1}{r+1},\cdots\right)$的指数母函数。又由定义 3.6 知，$\frac{e^x-1}{x}\times\frac{e^x-1}{x}=\frac{(e^x-1)^2}{x^2}$ 是序列

$$\left[1\times1,\frac{1}{2}\times1+1\times\frac{1}{2},\binom{2}{0}\times\frac{1}{3}\times1+\binom{2}{1}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\binom{2}{2}\times1\times\frac{1}{3},\cdots,\right.$$
$$\left.\sum_{i=0}^{r}\binom{r}{i}\frac{1}{i+1}\frac{1}{r-i+1},\cdots\right]$$

的指数母函数。而

$$\begin{aligned}\frac{(e^x-1)^2}{x^2}&=\frac{1}{x^2}(e^{2x}-2e^x+1)\\ &=\frac{1}{x^2}\left\{\left[1+\frac{1}{1!}(2x)^1+\frac{1}{2!}(2x)^2+\cdots+\frac{1}{r!}(2x)^r+\cdots\right]\right.\end{aligned}$$

$$-2\left[1+\frac{1}{1!}x+\frac{1}{2!}x^2+\cdots+\frac{1}{r!}x^r+\cdots\right]+1\Big\}$$

$$=\left(\frac{2^2}{2!}-\frac{2}{2!}\right)+\left(\frac{2^3}{3!}-\frac{2}{3!}\right)\frac{x}{1!}+2!\left(\frac{2^4}{4!}-\frac{2}{4!}\right)\frac{x^2}{2!}+\cdots$$

$$+r!\left(\frac{2^{r+2}}{(r+2)!}-\frac{2}{(r+2)!}\right)\frac{x^r}{r!}+\cdots$$

这表明$(e^x-1)^2/x^2$也是序列

$$\left\{\left(\frac{2^2}{2!}-\frac{2}{2!}\right),\left(\frac{2^3}{3!}-\frac{2}{3!}\right),2!\left(\frac{2^4}{4!}-\frac{2}{4!}\right),\cdots,r!\left[\frac{2^{r+2}}{(r+2)!}-\frac{2}{(r+2)!}\right],\cdots\right\}$$

的指数母函数。

故有

$$\sum_{i=0}^{r}\binom{r}{i}\frac{1}{i+1}\times\frac{1}{r-i+1}=r!\left[\frac{2^{r+2}}{(r+2)!}-\frac{2}{(r+2)!}\right]=\frac{2(2^{r+1}-1)}{(r+2)(r+1)}$$

从而有

$$\sum_{i=0}^{r}\frac{1}{(r-i+1)!}\times\frac{1}{(i+1)!}=\frac{2(2^{r+1}-1)}{(r+2)(r+1)}$$

3.3 母函数在排列、组合中的应用

母函数有着广泛的应用，它不仅可以用来处理排列组合的计数问题、整数分拆问题，而且还可以用来证明(或推导)各种有用的组合恒等式。特别是在第4章讨论的递归关系中有着重要的应用。

首先考虑下列事实。令a,b,c表示三个不同的物体。显然有三种方法从这三个不同的物体中选取一个，或者选a，或者选b，或者选c。我们把这些可能的选取象征性地记为

$$a+b+c$$

同样，从这三个不同的物体中选取两个有三种方法，或者选取a和b，或者选取b和c，或者选取c和a。我们把这些可能选取也象征性地记为

$$ab+bc+ca$$

而从这三个不同的物体中选取三个只有一种方法，把这种可能的选取象征性地记为abc考虑多项式

$$(1+ax)(1+bx)(1+cx)=1+(a+b+c)x^1+(ab+bc+ca)x^2+(abc)x^3$$

从这个多项式可以看出，以上所有的可能选取方法都作为x的幂的系数被表示出来了。特别是，x^i的系数就是从三个不同的物体中选取i个物体的方法的表示。这并不是偶然的巧合。下面，利用乘法规则和加法规则对上面的多项式予以解释。

对物体a，因子$(1+ax)$象征性地表示有两种选取方法。不选取a，或选取a。其中x仅是一个形式变量。x^0的系数表明不选取a，x^1的系数表明a被选取。对于$(1+bx)$，$(1+cx)$可作类似的解释。这样，$(1+ax)(1+bx)(1+cx)$就表明，对三个不同的物体a,b,c，其选择方法是，不选取a或选取a；不选取b或选取b；不选取c或选取c。于是这三个因子的乘积中x的幂指数就表示被选取的物体的个数，而对应的系数则表明了所有可能的选取方法。因此，由普通母函数的定义知，三个因子的乘积$(1+ax)(1+bx)(1+cx)$就是选取物

体 a,b,c 的所有不同方法的普通母函数。

如果由于某种实际的需要，只对可能的选取方法的个数感兴趣，而不是对不同的选取方法感兴趣，则可令 $a=b=c=1$。于是有

$$(1+x)(1+x)(1+x)=(1+x)^3=1+3x+3x^2+x^3$$

该多项式表明只有一种方法 $\left[\binom{3}{0}=1\right]$ 从三个物体中一个也不选取，有三种方法 $\left[\binom{3}{1}=3\right]$ 从这三个物体中选取一个，有三种方法 $\left[\binom{3}{2}=3\right]$ 从这三个物体中选取两个。有一种方法 $\left[\binom{3}{3}=1\right]$ 从这三个物体中选取三个。一般说来，考虑多项式

$$(1+x)(1+x)\cdots(1+x)=(1+x)^n=\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}x^r$$

对于这个多项式可作上面 $n=3$ 时的同样的解释。也就是说，从 n 个不同的物体中选取 r 个物体，其方法数为 $(1+x)^n$ 的幂级数展开式中 x^r 的系数。

以上讨论的是从 n 个不同物体中选取 r 个物体（每个物体至多选取一次）的简单情形。当从 n 个不同的物体中，允许重复选取 r 个物体时，上面的情况就可作如下的推广。

由于因子 $(1+x)$ 象征性地表示某一物体可以不选，或者只选一次。那么，类似地，我们可以用因子 $(1+x+x^2)$ 象征性地表示某一物体可以不选，或者选一次，或者选两次。也就是说某一物体至多选两次。同样，用因子 $(1+x+x^2+x^3+\cdots)$ 象征性地表示某一物体可以不选，或者选一次，或者选两次，或者选三次……那么，$(1+x+x^2+x^3+\cdots)^n$ 的幂级数展开式中，x^r 的系数 a^r 就表示从 n 个不同的物体中允许重复地选取 r 个物体的方式数。

下面举例说明母函数分别在排列、组合问题中的应用。

【例 12】 证明从 n 个不同的物体中允许重复地选取 r 个物体的方式数为 $F(n,r)=\binom{n+r-1}{r}$。

这个问题可以等价地叙述为：证明重集 $B=\{\infty\cdot b_1,\infty\cdot b_2,\cdots,\infty\cdot b_n\}$ 的 r-组合数为 $\binom{n+r-1}{r}$。这就是定理 1.6 已经证明过的结论。下面用母函数法证明。

【证明】 设 a_r 表示从 n 个物体中允许重复选取 r 个物体的方式数，由上面的分析可知，序列 $(a_0,a_1,\cdots,a_r,\cdots)$ 的普通母函数为

$$\begin{aligned}f(x)&=(1+x+x^2+\cdots)^n=\left(\frac{1}{1-x}\right)^n\\&=(1-x)^{-n}\end{aligned}$$

根据式(1.18)得

$$\begin{aligned}f(x)&=\sum_{r=0}^{\infty}\binom{n+r-1}{r}x^r\\&=\sum_{r=0}^{\infty}F(n,r)x^r\end{aligned}$$

所以有

$$a_r = F(n,r) = \binom{n+r-1}{r}$$

【例 13】 证明从 n 个不同的物体中允许重复地选取 r 个物体，但每个物体至少出现一次的方式数为 $\binom{r-1}{n-1}$。

【证明】 设 a_r 表示从 n 不同的物体中允许重复地选取 r 个物体，但每个物体至少出现一次方式数，则序列$(a_0,a_1,\cdots,a_r,\cdots)$的普通母函数为

$$\begin{aligned}
f(x) &= (x+x^2+\cdots+x^r+\cdots)^n = x^n(1+x+x^2+\cdots)^n \\
&= x^n\left(\frac{1}{1-x}\right)^n \\
&= x^n\sum_{r=0}^{\infty}\binom{n+r-1}{r}x^r \\
&= \sum_{r=0}^{\infty}\binom{n+r-1}{r}x^{r+n} \\
&= \sum_{r=n}^{\infty}\binom{r-1}{r-n}x^r \\
&= \sum_{r=n}^{\infty}\binom{r-1}{n-1}x^r \\
&= \sum_{r=0}^{\infty}\binom{r-1}{n-1}x^r \quad \left(\text{注意，当 } k>n \text{ 时，}\binom{n}{k}=0\right)
\end{aligned}$$

故有

$$a_r = \binom{r-1}{n-1}$$

【例 14】 求从 n 个不同的物体中允许重复的取 r 个物体，但每个物体出现奇数次的方式数。

【解】 设 a_r 表示从 n 不同的物体中允许重复地选取 r 个物体，但每个物体出现奇数次的方式数，则序列$(a_0,a_1,\cdots,a_r,\cdots)$的普通母函数为

$$\begin{aligned}
f(x) &= (x+x^3+x^5+\cdots)^n \\
&= x^n(1+x^2+x^4+\cdots)^n \\
&= \frac{x^n}{(1-x^2)^n} \\
&= x^n\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n+k-1}{k}(x^2)^k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\binom{n+k-1}{n-1}x^{n+2k} \\
&= \sum_{r=0}^{\infty}\begin{bmatrix}\dfrac{n+r}{2}-1 \\ n-1\end{bmatrix}x^r
\end{aligned}$$

所以

$$a_r = \binom{\frac{n+r}{2}-1}{n-1}$$

【例 15】 求从 n 个不同的物体中允许重复地选取 $2r$ 个物体，但每个物体出现偶数次的方式数。

【解】 设 a_{2r} 为所求的方式数，由于每个物体出现偶数次，故可用因子$(1+x^2+x^4+\cdots)$表示某一物体可以不选，或选取两次，或选取 4 次……因此序列$(a_0,a_1,\cdots,a_r,\cdots)$的普通母函数为

$$\begin{aligned} f(x) &= (1+x^2+x^4+\cdots)^n = \left(\frac{1}{1-x^2}\right)^n \\ &= 1+\binom{n}{1}x^2+\binom{n+1}{2}x^4+\binom{n+2}{3}x^6+\cdots+\binom{n+r-1}{r}x^{2r}+\cdots \\ &= \sum_{r=0}^{\infty}\binom{n+r-1}{r}x^{2r} \end{aligned}$$

故有

$$a_{2r} = \binom{n+r-1}{r}$$

【例 16】 在一个书架上共有 16 本书，其中 4 本是高等数学，3 本是普通物理，4 本是数据结构，5 本是离散数学。求从中选取 r 本书的方式数，其中 $r=12$。

【解】 这个问题实际上是求重集 $B=\{4\cdot M,3\cdot P,4\cdot S,5\cdot D\}$的 r-组合数。也是 2.2 节中例 7 的问题。设 a_r 是选取 r 本书的方式数。由于高等数学最多只能选 4 本，普通物理最多只能选 3 本，数据结构最多只能选 4 本，离散数学最多只能选 5 本。故序列$(a_0,a_1,\cdots,a_r,\cdots)$的普通母函数为

$$\begin{aligned} f(x) = {} & (1+x+x^2+x^3+x^4)(1+x+x^2+x^2+x^3) \\ & (1+x+x^2+x^3+x^4)(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5) \\ = {} & 1+4x+10x^2+20x^3+34x^4+50x^5+65x^6+76x^7+80x^8 \\ & +76x^9+65x^{10}+50x^{11}+34x^{12}+20x^{13}+10x^{14}+4x^{15}+x^{16} \end{aligned}$$

$f(x)$展开式中 x^r 的系数即为 a_r。因 x^{12} 的系数为 34，即所求的方式数

$$a_{12} = 34$$

这个问题的答案与 2.2 节中例 7 用容斥原理所求的结果是一致的。可见一个重集的 r-组合数也可用母函数的方法求得。

【例 17】 现有 $2n$ 个 A，$2n$ 个 B 和 $2n$ 个 C 个，求从它们中选出 $3n$ 个字母的不同的方式数。

【解】 这个问题实际上是求重集 $B=\{2n\cdot A,2n\cdot B,2n\cdot C\}$的 $3n$-组合数。设 a_r 为所求的方式数，则序列$(a_0,a_1,\cdots a_r,\cdots)$的普通母函数为

$$\begin{aligned} f(x) &= (1+x+x^2+\cdots+x^{2n})^3 \\ &= \left(\frac{1-x^{2n+1}}{1-x}\right)^3 \\ &= (1-x^{2n+1})^3(1-x)^{-3} \end{aligned}$$

根据式(1.18)得

$$f(x)=(1-3x^{2n+1}+3x^{4n+2}-x^{6n+3})\sum_{k=0}^{\infty}\binom{k+2}{2}x^k$$

显然，在上式中 x^{3n} 的系数为

$$\binom{3n+2}{2}-3\binom{n+1}{2}$$

故当 $r=3n$ 时有

$$a_{3n}=\binom{3n+2}{2}-3\binom{n+1}{2}$$

以上讨论了普通母函数在组合计数问题中的应用。下面说明指数母函数在排列计数问题中的一些应用。

我们已知

$$(1+x)^n=\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}x^r$$

是从 n 个不同的物体中选取 r 个物体的组合数 a_r 所成的序列的普通母函数。利用式(1.7)将上式变形，有

$$(1+x)^n=\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}x^r=\sum_{r=0}^{n}p(n,r)\frac{x^r}{r!}$$

这表明从 n 个不同的物体中选取 r 个物体的排列数恰好是 $\frac{x^r}{r!}$ 的系数。而 $(1+x)=\left(1+\frac{x^1}{1!}\right)$ 象征性地表示了某一物体在排列中可以不选取，或者选取一次。由此得到启发，某一物体在排列中可以不选，或取一次，或取两次……或取 r 次，可用如下形式表示。

$$1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^r}{r!}$$

特别地，如果某物体的重复次数是 ∞ 时，则上式变为

$$1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^r}{r!}+\cdots$$

同样地，如果某一物体在排列中至少取两次，至多取 5 次，则可用下面的形式表示

$$\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}++\frac{x^5}{5!}$$

下面，我们举例说明。

【例 18】 证明从 n 个不同的物体中允许重复地选取 r 个物体的排列数为 n^r。

【证明】 这个问题实质上是证明重集 $B=\{\infty\cdot b_1,\infty\cdot b_2,\cdots,\infty\cdot b_n\}$ 的 r-排列数为 n^r。这就是 1.2 节定理 1.3 已经证明过的结论。这里用指数母函数的方法证明。

设 a_r 为所求的排列数，由上面的分析知，序列 $(a_0,a_1,\cdots a_r,\cdots)$ 的指数母函数为

$$\begin{aligned}f_e(x)&=\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^r}{r!}+\cdots\right)^n\\&=(e^x)^n=e^{nx}\\&=\sum_{r=0}^{\infty}n^r\frac{x^r}{r!}\end{aligned}$$

故有

$$a_r=n^r$$

【例 19】 求 1,3,5,7,9 5 个数字组成 r 位数的个数。其中要求 1,3 出现的次数为偶数。其余数字的出现不加限制。

【解】 这个问题等价于求重集 $B=\{\infty\cdot 1,\infty\cdot 3,\infty\cdot 5,\infty\cdot 7,\infty\cdot 9\}$ 的 r-排列数。其中要求 1,3 出现偶数次。设所求的 r-排列数为 a_r,则序列$(a_0,a_1,\cdots,a_r,\cdots)$的指数母函数为

$$f_e(x)=\left(1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots\right)^2\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots\right)^3$$

而

$$e^{-x}=1-x+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^n}{n!}+\cdots$$

$$e^{x}=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots$$

故

$$\frac{e^{-x}+e^x}{2}=1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots$$

所以有

$$\begin{aligned}f_e(x)&=\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2(e^x)^3\\&=\frac{1}{4}(e^{5x}+2e^{3x}+e^x)\\&=\frac{1}{4}\left(\sum_{r=0}^{\infty}\frac{5^r}{r!}x^r+2\sum_{r=0}^{\infty}\frac{3^r}{r!}x^r+\sum_{r=0}^{\infty}\frac{x^r}{r!}\right)\\&=\frac{1}{4}\sum_{r=0}^{\infty}(5^r+2\times 3^r+1)\frac{x^r}{r!}\end{aligned}$$

故

$$a_r=\frac{1}{4}(5^r+2\times 3^r+1)$$

【例 20】 用红、白和绿三种颜色给 $1\times n$ 棋盘中的正方形着色,要求有偶数个正方形着红色,而着白色和绿色的正方形个数不加限制,求不同的着色方式数。

【解】 若用 R,B 和 V 分别表示红、白和绿三种颜色,则该问题实际上是求重集 $B=\{\infty\cdot \mathrm{R},\infty\cdot \mathrm{B},\infty\cdot \mathrm{V}\}$的 n-排列数。其中要求 R 出现偶数次。

设 a_n 为所求的方式数,定义 $a_0=1$,于是序列$(a_0,a_1,\cdots,a_n,\cdots)$的指数母函数为

$$\begin{aligned}f_e(x)&=\left(1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots\right)\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots\right)^2\\&=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})e^{2x}=\frac{1}{2}(e^{3x}+e^x)\\&=\frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty}3^n\frac{x^n}{n!}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\right)\\&=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(3^n+1)\frac{x^n}{n!}\end{aligned}$$

故有

$$a_n=\frac{1}{2}(3^n+1)$$

【例 21】 在所有的 n 位数中，包含数字 3，8，9，但不包含数字 0，4 的数有多少？

【解】 这是第 2 章容斥原理的习题 8。这里用母函数法来求解。

这个问题实际上是求重集 $B=\{\infty\cdot 1,\infty\cdot 2,\infty\cdot 3,\infty\cdot 5,\infty\cdot 6,\infty\cdot 7,\infty\cdot 8,\infty\cdot 9\}$ 的 n-排列个数，其中要求数字 3，8，9 至少出现一次，而其他的数字则不加限制。设符合题意的数为 a_n，则序列 $(a_0,a_1,\cdots,a_r,\cdots)$ 的指数母函数为

$$
\begin{aligned}
f_{\mathrm{e}}(x) &= \left(x+\frac{x^2}{2!}+\cdots\right)^3\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots\right)^5 \\
&= (\mathrm{e}^x-1)^3(\mathrm{e}^x)^5 \\
&= \mathrm{e}^{8x}-3\mathrm{e}^{7x}+3\mathrm{e}^{6x}+\mathrm{e}^{5x} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(8^n-3\times 7^n+3\times 6^n-5^n)\frac{x^n}{n!}
\end{aligned}
$$

故有

$$a_n=8^n-3\times 7^n+3\times 6^n-5^n$$

这个结果与用容斥原理所得的结果是一致的。

【例 22】 求 1，2，3，4，5 5 个数字组成的 r 位数的个数，其中要求 1 出现的次数与 2 出现的次数的和必须是偶数。

【解】 设 a_r 为所求的符合题意的个数。由于 1 出现次数与 2 出现的次数的和为偶数，这有两种情况。

(1) 1 出现的次数与 2 出现的次数都为偶数。

(2) 1 出现的次数与 2 出现的次数都为奇数。由加法规则知，序列 $(a_0,a_1,a_r,\cdots)$ 的指数母函数为

$$
\begin{aligned}
f_{\mathrm{e}}(x) &= \left(1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots\right)^2\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots\right)^3 \\
&\quad+\left(x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots\right)^2\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots\right)^3 \\
&= \left(\frac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2}\right)^2\mathrm{e}^{3x}+\left(\frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{2}\right)^2\mathrm{e}^{3x} \\
&= \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{5x}+\mathrm{e}^x) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(5^n+1)\frac{x^n}{n!}
\end{aligned}
$$

故有

$$a_n=\frac{1}{2}(5^n+1)$$

根据上述过程可以看出，对于一般的重集 $B=\{k_1\cdot b_1,k_2\cdot b_2,\cdots,k_n\cdot b_n\}$，$k_i$ 为有限数，$i=1,2,\cdots,n,n>1$，要求其 r-组合数 a_r，最关键之处是构造重集 B 的 r-组合数 a_r 形成的序列的普通母函数。据此，可以得到求一般的重集 $B=\{k_1\cdot b_1,k_2\cdot b_2,\cdots,k_n\cdot b_n\}$ 的 r-组合数 a_r 的下述算法 3.2。

在介绍算法 3.2 之前，先根据母函数的乘法得到两个多项式相乘的算法 3.1。

假设两个多项式 $M_i(i=1,2)$，每个多项式 M_i 用对应的系数向量(数组)$\boldsymbol{C}_i$ 和指数向量(数组)$\boldsymbol{Z}_i$ 表示，$\boldsymbol{C}_i$ 和 $\boldsymbol{Z}_i$ 都有 l_i+1 个数，其中，l_i 为多项式 M_i 的最高次数，$\boldsymbol{C}_i$ 中第 j 个数 $\boldsymbol{C}_i[j]$ 为 M_i 中 x^j 的系数，$\boldsymbol{Z}_i$ 中每一个数 $\boldsymbol{Z}_i[j]=j$，$j=0,1,2,\cdots,l_i$。令两个多项式 M_1 和

M_2 的乘积为多项式 M_0，其系数向量（数组）为 $\boldsymbol{C}_0$，指数向量（数组）为 $\boldsymbol{Z}_0$，$\boldsymbol{C}_0$ 和 $\boldsymbol{Z}_0$ 中均有 l_1+l_2+1 个数，$\boldsymbol{C}_0$ 中第 j 个数 $\boldsymbol{C}_0[j]$为 M_0 中 x^j 的系数，$\boldsymbol{Z}_0$ 中每一个数 $\boldsymbol{Z}_0[j]=j$，$j=0,1,2,\cdots,l_1+l_2+1$。

算法 3.1

第 1 步，初始化，$i_1=0$，$\boldsymbol{C}_0[0]=\boldsymbol{C}_0[1]=\cdots=\boldsymbol{C}_0[l_1+l_2]=0$。

第 2 步，判断 $i_1<l_1+1$，如果为真，进入下一步（第 2.1 步）；否则跳到第 4 步。

第 2.1 步，令 $i_2=0$。

第 2.2 步，判断 $i_2<l_2+1$，如果为真，进入下一步（第 2.2.1 步）；否则跳到第 3 步。

第 2.2.1 步，计算 $\boldsymbol{C}_1[i_1]$和 $\boldsymbol{C}_2[i_2]$的乘积 $\boldsymbol{C}_1[i_1]\times\boldsymbol{C}_2[i_2]$。

第 2.2.2 步，计算 $\boldsymbol{C}_0[i_1+i_2]=\boldsymbol{C}_0[i_1+i_2]+\boldsymbol{C}_1[i_1]\times\boldsymbol{C}_2[i_2]$。

第 2.3 步，$i_2=i_2+1$，转到第 2.2 步。

第 3 步，$i_1=i_1+1$，转到第 2 步。

第 4 步，得到乘积多项式 M_0 的系数向量（数组）$\boldsymbol{C}_0$ 和指数向量（数组）$\boldsymbol{Z}_0$。

算法 3.2

第 1 步，构造 n 个多项式 $M_i(i=1,2,\cdots,n)$，每个多项式 M_i 用对应的系数向量（数组）$\boldsymbol{C}_i$ 和指数向量（数组）$\boldsymbol{Z}_i$ 表示，$\boldsymbol{C}_i$ 和 $\boldsymbol{Z}_i$ 都有 k_i+1 个数，其中 $\boldsymbol{C}_i$ 中每一个数 $\boldsymbol{C}_i[j]=1$，$\boldsymbol{Z}_i$ 中每一个数 $\boldsymbol{Z}_i[j]=j$，$j=0,1,2,\cdots,k_i$。

第 2 步，令 $m=3$；运用算法 3.1 计算多项式 M_1 和 M_2 的乘积多项式 M_0，其系数向量（数组）为 $\boldsymbol{C}_0$，指数向量（数组）为 $\boldsymbol{Z}_0$。

第 3 步，判断 $m\leqslant n$，如果为真，进入第 4 步；否则跳到第 6 步。

第 4 步，运用算法 3.1 计算多项式 M_0 和 M_m 的乘积多项式，仍用 M_0 表示，其系数向量（数组）仍用 $\boldsymbol{C}_0$ 表示，指数向量（数组）仍用 $\boldsymbol{Z}_0$ 表示。

第 5 步，$m=m+1$，转到第 3 步。

第 6 步，$\boldsymbol{Z}_0[r]$项对应的 $\boldsymbol{C}_0[r]$即为重集 B 的 r-组合数 a_r。

类似地，对于一般的重集 $B=\{k_1\cdot b_1,k_2\cdot b_2,\cdots,k_n\cdot b_n\}$，$k_i$ 为有限数，$i=1,2,\cdots,n$，$n>1$，要求其 r-排列数 p_r，最关键之处是构造重集 B 的 r-排列数 p_r 形成的序列的指数母函数。据此，可以求一般的重集 $B=\{k_1\cdot b_1,k_2\cdot b_2,\cdots,k_n\cdot b_n\}$的 r-排列数 p_r 的算法 3.3 如下。

算法 3.3

第 1 步，构造 n 个多项式 $M_i(i=1,2,\cdots,n)$，每个多项式 M_i 用对应的系数向量（数组）$\boldsymbol{C}_i$ 和指数向量（数组）$\boldsymbol{Z}_i$ 表示，$\boldsymbol{C}_i$ 和 $\boldsymbol{Z}_i$ 都有 k_i+1 个数，其中 $\boldsymbol{C}_i$ 中每一个数 $\boldsymbol{C}_i[j]=\dfrac{1}{j!}$，$\boldsymbol{Z}_i$ 中每一个数 $\boldsymbol{Z}_i[j]=j$，$j=0,1,2,\cdots,k_i$。

第 2 步，令 $m=3$；运用算法 3.1 计算多项式 M_1 和 M_2 的乘积多项式 M_0，其系数向量（数组）为 $\boldsymbol{C}_0$，指数向量（数组）为 $\boldsymbol{Z}_0$。

第 3 步，判断 $m\leqslant n$，如果为真，进入第 4 步；否则跳到第 6 步。

第 4 步，运用算法 3.1 计算多项式 M_0 和 M_m 的乘积多项式，仍用 M_0 表示，其系数向量（数组）仍用 $\boldsymbol{C}_0$ 表示，指数向量（数组）仍用 $\boldsymbol{Z}_0$ 表示。

第 5 步，$m=m+1$，转到第 3 步。

第 6 步，$\boldsymbol{Z}_0[r]$项对应的 $\boldsymbol{C}_0[r]$乘以 $r!$ 即为重集 B 的 r-排列数 p_r，即 $p_r=\boldsymbol{C}_0[r]\cdot r!$。

如果重集 $B=\{k_1\cdot b_1,k_2\cdot b_2,\cdots,k_n\cdot b_n\}$中某个元素的重数 k_i 为∞，可以将上述算法 3.2

和算法 3.3 进行适当改动,仍然可以求出其 r-组合数 a_r 和 r-排列数 p_r,请读者自行考虑。

类似地,如果对某个元素出现的最少次数也做了限定,也可以将上述算法 3.2 和算法 3.3 进行适当改动,仍然可以求出其 r-组合数 a_r 和 r-排列数 p_r,请读者自行考虑。

3.4 整数的拆分

作为母函数应用的一个实例,下面讨论把 n 个无区别的球放在一些无区别的盒子中的问题。

把 n 个无区别的球分放在一些无区别的盒子中,究竟有多少种不同的放法?无区别的盒子意味着,如果有 4 个相同的球,则在第一个盒子中放入三个球,第二个盒子中放入一个球与第一个盒子中放入一个球,第二个盒子中放入三个球的放法是一样的。

一个整数的拆分是把整数分拆为若干个正整数部分,而这些部分的次序是无关紧要的。如 5=3+2 和 5=2+3 被认为是同样的拆分法。显然整数 n 的一个拆分等价于把 n 个无区别的球分放入一些无区别的盒子中的一种方法。

正整数 n 的拆分数记作 $P(n)$。例如,对于正整数 $n=1,2,3,4$ 的拆分是

$P(1)=1(1=1)$

$P(2)=2(2=2,2=1+1)$

$P(3)=3(3=3,3=2+1,3=1+1+1)$

$P(4)=5(4=4,4=3+1,4=2+2,4=2+1+1,4=1+1+1+1)$

首先考虑恒等式

$$1+x+x^2+x^3+\cdots=\frac{1}{1-x}$$

$$1+x^2+x^4+x^6+\cdots=\frac{1}{1-x^2}$$

$$1+x^3+x^6+x^9+\cdots=\frac{1}{1-x^3}$$

于是有

$$\begin{aligned}&\frac{1}{(1-x)(1-x)^2(1-x^3)}\\&=(1+x+x^2+\cdots)(1+x^2+x^4+\cdots)(1+x^3+x^6+\cdots)\\&=1+x+2x^2+3x^3+4x^4+5x^5+7x^6+\cdots\end{aligned}$$

在上式中可以看出 x^n 的系数等于 n 拆分为 1,2,3 的和的方法数。

例如 x^3 的系数是 3,这表示整数 3 拆分成 1,2,3 的和的方法数是 3,即

$$3=3,\quad 3=2+1,\qquad 3=1+1+1$$

又如 x^4 的系数是 4,它表明有 4 种方法将 4 拆分为 1,2,3 的和,即

$$4=3+1,\quad 4=2+2,\quad 4=2+1+1,\ 4=1+1+1+1$$

这与上面的例子是吻合的。

由此可以分析如下。在因子 $(1+x+x^2+x^3+\cdots)$ 中的 $1,x,x^2,x^3,\cdots$ 分别表示数字 1 没有被选,或选一个 1,或选二个 1,或选三个 1……同样地,因子 $(1+x^2+x^4+x^6+\cdots)$ 则表示 2 没有被选,或选一个 2,或选两个 2,或选三个 2……因子 $(1+x^3+x^6+x^9+\cdots)$ 则表示 3 没有被选,或选一个 3,或选两个 3,或选三个 3……这样,上面三个因子的乘积的 x^n 的系数就

是 n 拆分为 1,2,3 的和的方法数。

又如 x^6 的系数是 7,它表示 6 拆分为 1,2,3 之和的方法有 7 种,如表 3-1 所示。由此可见,函数 $1/(1-x)(1-x^2)(1-x^3)$ 的级数展开式中,x^n 的系数就等于把 n 拆分为 1,2,3 之和的方法数 $P(n)$。

表　3-1

第一个因子中取出	第二个因子中取出	第三个因子中取出	划分情况
x^6	1	1	1+1+1+1+1+1
x^4	x^2	1	1+1+1+1+2
x^3	1	x^3	1+1+1+3
x^2	x^4	1	1+1+2+2
x	x^2	x^3	1+2+3
1	x^6	1	2+2+2
1	1	x^6	3+3

一般地,有下面的定理。

定理 3.2　设 $a,b,c,\cdots$ 是大于 0 的正整数,则 $\dfrac{1}{(1-x^a)(1-x^b)(1-x^c)\cdots}$ 的级数展开式中的 x^n 系数等于把正整数 n 拆分成 $a,b,c,\cdots$ 的和的方法数。

【证明】　如前所述,只需注意

$$\frac{1}{(1-x^a)(1-x^b)(1-x^c)}$$
$$=(1+x^a+x^{2a}+\cdots)(1+x^b+x^{2b}+\cdots)(1+x^c+x^{2c}+\cdots)$$

如果 x^n 是由 $x^{3a},x^b,x^{2c},\cdots$ 的乘积所组成的,则

$$n=a+a+a+b+c+c+\cdots$$

于是每当 n 可以拆分为 $a,b,c,\cdots$ 的和时,x^n 就会出现。

定理得证。

定义 3.7

(1) 用 $P_k(n)$ 表示 n 拆分成 $1,2,\cdots,k$ 的允许重复的方法数。

(2) 用 $P_o(n)$ 表示 n 拆分成奇整数的方法数。

(3) 用 $P_d(n)$ 表示 n 拆分成不同的整数的方法数。

(4) 用 $P_t(n)$ 表示 n 拆分成 2 的不同幂(即 $1,2,4,8,\cdots$)的方法数。

由上面的讨论和定理 3.2 即可得如下推论。

推论 1　$\{P_3(n)\}$ 的普通母函数是

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)}$$

推论 2　$\{P_k(n)\}$ 的普通母函数是

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^2)\cdots(1-x^k)}$$

推论 3 $\{P(n)\}$的普通母函数是

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\cdots}$$

在定理 3.2 中,令 $a,b,c,\cdots$是奇整数,又有

推论 4 $\{P_{\mathrm{o}}(n)\}$的普通母函数是

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^3)(1-x^5)(1-x^7)\cdots}$$

定理 3.3 设 $a,b,c,\cdots$都是大于 0 的正整数,则

$$(1+x^a)(1+x^b)(1+x^c)\cdots$$

的级数展开式中 x^n 的系数就是把 n 拆分为 $a,b,c,\cdots$的和,且 $a,b,c,\cdots$最多只出现一次的方法数。

【证明】 留作练习。

由定理 3.3 即可得以下推论。

推论 1 $\{P_{\mathrm{d}}(n)\}$的普通母函数是

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^3)(1+x^4)\cdots$$

推论 2 $\{P_{\mathrm{t}}(n)\}$的普通母函数是

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)\cdots$$

定理 3.4(Euler) 对于正整数 n 都有

$$P_{\mathrm{o}}(n)=P_{\mathrm{d}}(n)$$

【证明】 因为 $1+x=\frac{1-x^2}{1-x}$,$1+x^2=\frac{1-x^4}{1-x^2}$

$$1+x^3=\frac{1-x^6}{1-x^3},\quad 1+x^4=\frac{1-x^8}{1-x^4},\quad \cdots$$

所以$(1+x)(1+x^2)(1+x^3)(1+x^4)\cdots=\frac{1-x^2}{1-x}\times\frac{1-x^4}{1-x^2}\times\frac{1-x^6}{1-x^3}\times\frac{1-x^8}{1-x^4}\times\cdots$

上式的左端正好是 $P_{\mathrm{d}}(n)$的普通母函数(由定理 3.3 的推论 1 得到),而上式的右端可将分子分母的所有偶次幂约去就得到

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^3)(1-x^5)(1-x^7)\cdots}$$

这正好是 $P_{\mathrm{o}}(n)$的普通母函数(由定理 3.2 的推论 4 得到)。

所以

$$P_{\mathrm{o}}(n)=P_{\mathrm{d}}(n)$$

定理得证。

以上证明了把 n 拆分成奇整数的和的方式数等于把 n 拆分成不相同的整数的和的方式数。下面验证当 $n=7$ 的情况。

$7=7$	$7=7$
$7=5+1+1$	$7=6+1$
$7=3+3+1$	$7=5+2$
$7=3+1+1+1+1$	$7=4+3$
$7=1+1+1+1+1+1+1$	$7=4+2+1$

所以　　$P_o(7)=5$　　　　　　$P_d(7)=5$

于是 $P_o(7)=P_d(7)$。

定理 3.5(Sylvester)　对正整数 n,有

$$P_t(n)=1$$

【证明】　我们知道,任何正整数都可唯一地用一个二进制数来表示,而一个二进制数又可唯一地表示成2的幂的和。

由此即得结论。

如正整数41可以表示为

$$41=101001=2^0+2^3+2^5$$

$$\uparrow\qquad\qquad\uparrow$$

十进制数　二进制数

下面用另一种方法来证明定理3.5。

我们知道,序列(1,1,…,1)的普通母函数是

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\cdots$$

因为

$$1+x=\frac{1-x^2}{1-x},\quad 1+x^2=\frac{1-x^4}{1-x^2}$$

$$1+x^4=\frac{1-x^8}{1-x^4},\quad 1+x^8=\frac{1-x^{16}}{1-x^8},\cdots$$

所以

$$(1-x)(1-x^2)(1-x^4)(1-x^8)\cdots$$

$$=\frac{1-x^2}{1-x}\times\frac{1-x^4}{1-x^2}\times\frac{1-x^8}{1-x^4}\times\frac{1-x^{16}}{1-x^8}\times\cdots$$

$$=\frac{1}{1-x}$$

而上式左端是 $P_t(n)$ 的普通母函数(由定理3.3的推论2得到)。

所以

$$\sum_{n=0}^{\infty}p_t(n)x^n=\sum_{n=0}^{\infty}1\cdot x^n$$

故

$$P_t(n)=1$$

定理得证。

【例23】　证明恒等式

$$\frac{1}{1-x}=(1+x+x^2+\cdots+x^9)(1+x^{10}+x^{20}+\cdots+x^{90})(1+x^{100}+x^{200}+\cdots+x^{900})\cdots(1+x^{10^k}+x^{2\times10^k}+\cdots+x^{9\times10^k})\cdots$$

并用整数拆分的说法,这个恒等式的组合意义是什么?

【证明】　　左端$=\dfrac{1}{1-x}$

$$=\frac{1-x^{10}}{1-x}\times\frac{1-x^{100}}{1-x^{10}}\times\frac{1-x^{1000}}{1-x^{100}}\times\cdots\times\frac{1-x^{10^{k+1}}}{1-x^{10^k}}\times\cdots$$

$$= (1+x+x^2+\cdots+x^9)\times(1+x^{10}+x^{20}+\cdots+x^{90})\times$$
$$(1+x^{100}+x^{200}+\cdots+x^{900})\times\cdots$$
$$\times(1+x^{10^k}+x^{2\times10^k}+\cdots+x^{9\times10^k})\times\cdots$$
$$=\text{右端}$$

而

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\cdots$$

因此,这个恒等式表明,任何正整数都可唯一地拆分成形式为

$$10^n k,\quad k=0,1,2,\cdots 9;\quad n=0,1,2,\cdots$$

的不同部分。换句话说,任何整数的十进制表示是唯一的。

例如,对于整数 309 有唯一的拆分。$349=9\times10^0+0\times10^1+3\times10^2$。通常,对于大的 n,要求出将 n 拆分成某些整数的和的方式数 $P(n)$ 是很困难的,但在有些问题中并不需要 $P(n)$ 的精确值,只需 $P(n)$ 的估计式就够了。下面的定理就给出了 $P(n)$ 的估计式。

定理 3.6 对于任何正整数 n,有

$$p(n)<\mathrm{e}^{3\sqrt{n}}$$

【证明】 由定理 3.2 的推论 3 知 $\{P(n)\}$ 的普通母函数为

$$f(x)=\frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\cdots}$$

将上式两边取对数得

$$\ln f(x)=-\ln(1-x)-\ln(1-x^2)-\ln(1-x^3)-\cdots$$

由对数的泰勒展开式知

$$-\ln(1-y)=y+\frac{y^2}{2}+\frac{y^3}{3}+\cdots$$

于是有

$$\begin{aligned}\ln f(x)&=\left(x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots\right)+\left(x^2+\frac{x^4}{2}+\frac{x^6}{3}+\cdots\right)+\left(x^3+\frac{x^6}{2}+\frac{x^9}{3}+\cdots\right)+\cdots\\&=(x+x^2+x^3+\cdots)+\left(\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{2}+\frac{x^6}{2}\cdots\right)+\left(\frac{x^3}{3}+\frac{x^6}{3}+\frac{x^9}{3}\cdots\right)+\cdots\\&=\frac{x}{1-x}+\frac{1}{2}\left(\frac{x}{1-x^2}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{x^3}{1-x^3}\right)+\cdots\end{aligned}\tag{A}$$

对于 $\frac{x^n}{1-x^n}$,设 $x\in(0,1)$,则有

$$x^{n-1}<x^{n-2}<\cdots<x^2<x<1$$

故有

$$x^{n-1}<\frac{1+x+x^2+\cdots+x^{n-1}}{n}$$

即

$$\frac{x^{n-1}}{1+x+x^2+\cdots+x^{n-1}}<\frac{1}{n}$$

而

$$\frac{x^n}{1-x^n}=\frac{x}{1-x}\times\frac{x^{n-1}}{1+x+x^2+\cdots+x^{n-1}}$$

故有

$$\frac{x^n}{1-x^n}<\frac{1}{n}\times\frac{x}{1-x}$$

将上面的不等式代入式(A)有

$$\begin{aligned}\ln f(x)&<\frac{x}{1-x}+\left(\frac{1}{2}\right)^2\frac{x}{1-x}+\left(\frac{1}{3}\right)^2\frac{x}{1-x}+\cdots\\&=\frac{x}{1-x}\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots\right)\end{aligned}$$

又由于

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots<1+\int_1^{\infty}\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x=2$$

故有

$$\ln f(x)<\frac{2x}{1-x}$$

而

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}P(n)x^n>P(n)x^n$$

故有

$$\ln P(n)<\ln f(x)-n\ln x<\frac{2x}{1-x}-n\ln x \tag{B}$$

而对于 $x>1$ 时,有

$$\ln x<x-1$$

于是有

$$-\ln x=\ln\frac{1}{x}<\frac{1}{x}-1=\frac{1-x}{x}$$

将以上结果代入式(B)即得

$$\ln P(n)<2\left(\frac{x}{1-x}\right)+n\left(\frac{1-x}{x}\right)$$

在上式中,令 $x=\dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}+1}$,则有

$$\ln P(n)<3\sqrt{n}$$

所以有

$$p(n)<\mathrm{e}^{3\sqrt{n}}$$

定理得证。

这个定理的估计式还可以进一步加以改进。现在,已经有人证明了近似式

$$P(n)\approx\frac{1}{4\sqrt{3}\,n}\mathrm{e}^{\pi\sqrt{2/3}\sqrt{n}}$$

下面讨论与整数拆分有着密切关系的 Ferrers 图。

设 n 的一个拆分为

$$n = a_1 + a_2 + \cdots + a_k$$

并假设 $a_1 \geqslant a_2 \geqslant a_3 \geqslant \cdots \geqslant a_k \geqslant 1$。

下面画一个图。这个图由一行行的点所组成。在第一行有 a_1 个点，第二行有 a_2 个点……第 k 行有 a_k 个点，称这图为 Ferrers 图。整数的拆分可以用一个 Ferrers 图来表示，例如 16=6+5+3+1+1 的 Ferrers 图如图 3-1 所示。

当给定 Ferrers 图后，可以将它的行与列对换，这就得到另一个图。显然，这个图也是一个 Ferrers 图。也就是说，一个 Ferrers 图的行与列对换所得的图仍是一个 Ferrers 图。如图 3-1 所示做行与列的对换就得到图 3-2。称图 3-2 为图 3-1 的共轭图。这个图表示整数 16 的另一个拆分。

$$16 = 5 + 3 + 3 + 2 + 2 + 1$$

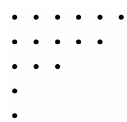

图 3-1

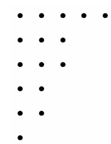

图 3-2

由此可见，n 的一个拆分对应唯一的一个 Ferrers 图，反过来，一个 Ferrers 图又对应一个 n 的唯一拆分。所以 n 的一个拆分同它的 Ferrers 图之间是一一对应的。

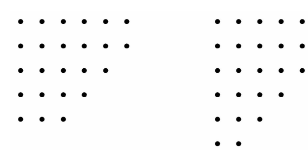

图 3-3

定理 3.7 正整数 n 拆分成 m 项的和的方式数等于 n 拆分成最大数为 m 的方式数。

【证明】 只需考虑 Ferrers 图和它的共轭图之间的关系，本定理结论即可得证。

例如，对 $n=24$，如图 3-3 所示，有

$$n=24=\underbrace{6+6+5+4+3}_{\substack{\text{共5项}\\ \text{最大数为6}}} \qquad n=24=\underbrace{5+5+5+4+3+2}_{\substack{\text{共6项}\\ \text{最大数为5}}}$$

定理 3.8 整数 n 拆分成最多不超过 m 个项的和的方式数等于 n 拆分成最大的数不超过 m 的方式数。

【证明】 留作练习。

3.5 母函数在组合恒等式中的应用

母函数不仅是解决计数问题的有力工具，而且它也是证明（或推导）组合恒等式的一个重要方法。事实上，在第 1 章第 1.5 节中已经利用二项式展开级数作为母函数导出了一些恒等式。下面再举几例加以说明。

【例 24】 设 p,q 为任意正整数，证明

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{k}{p}\binom{n-k}{q} = \binom{n+1}{p+q+1} \tag{3.3}$$

【证明】 我们知道，一个序列是与它的母函数一一对应的。而两个母函数间的乘积关系必然反映为两个母函数对应的序列与其乘积对应的序列之间的关系。为了证明上面的恒等式，只需求出两个序列 $\left\{\binom{k}{p}\right\}$，$\left\{\binom{n-k}{q}\right\}$ 对应的母函数，使得它们的乘积对应的序列为$\left\{\binom{n+1}{p+q+1}\right\}$。

先求形如序列$\left\{\binom{k}{p}\right\}$的母函数。

由第 1 章的式(1.21)，有

$$(1-x)^{-n}=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n+k-1}{n-1}x^k$$

故

$$(1-x)^{-n-1}=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n+k}{n}x^k=\sum_{k=n}^{\infty}\binom{k}{n}x^{k-n}$$

在上式中分别令 $n=p$ 和 q 得

$$(1-x)^{-p-1}=\sum_{k=p}^{\infty}\binom{k}{p}x^{k-p}$$

$$(1-x)^{-q-1}=\sum_{k=q}^{\infty}\binom{k}{q}x^{k-q}$$

而

$$\begin{aligned}(1-x)^{-p-1}(1-x)^{-q-1}&=(1-x)^{-(p+q+1)-1}\\&=\sum_{n=p+q+1}^{\infty}\binom{n}{p+q+1}x^{n-(p+q+1)}\\&=\sum_{n=p+q}^{\infty}\binom{n+1}{p+q+1}x^{n-p-q}\end{aligned}$$

又因为

$$\begin{aligned}(1-x)^{-p-1}(1-x)^{-q-1}&=\sum_{k=p}^{\infty}\binom{k}{p}x^{k-p}\sum_{j=q}^{\infty}\binom{j}{q}x^{j-q}\\&=\sum_{n=p+q}^{\infty}\left[\sum_{k=0}^{n}\binom{k}{p}\binom{n-k}{q}\right]x^{n-p-q}\end{aligned}$$

故

$$\sum_{n=p+q}^{\infty}\left[\sum_{k=0}^{n}\binom{k}{p}\binom{n-k}{q}\right]x^{n-p-q}=\sum_{n=p+q}^{\infty}\binom{n+1}{p+q+1}x^{n-p-q}$$

于是得到

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{k}{p}\binom{n-k}{q}=\binom{n+1}{p+q+1}$$

故恒等式得证。

【例 25】 设 p 为非负整数，且 $p\leqslant n$，证明：

$$\sum_{k=p}^{n}\binom{n}{k}\binom{k}{p}(-1)^{k-p}=\begin{cases}1, & p=n\\ 0, & p<n\end{cases} \tag{3.4}$$

【证明】 当 $p=n$ 时，容易验证结论成立。以下设 $p<n$。

由普通母函数的定义以及式(1.13)知，序列 $\left\{\binom{n}{0},\binom{n}{1},\binom{n}{2},\cdots,\binom{n}{n}\right\}$ 的普通母函数为 $(1+x)^n$，即

$$(1+x)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k$$

将上式两边对 x 微分 p 次得

$$n(n-1)(n-2)\cdots(n-p+1)(1+x)^{n-p}=\sum_{k=p}^{n}\binom{n}{k}k(k-1)\cdots(k-p+1)(1+x)^{k-p}$$

将上式两边同乘以 $1/p!$ 得

$$\binom{n}{p}(1+x)^{n-p}=\sum_{k=p}^{n}\binom{n}{k}\binom{k}{p}x^{k-p}$$

在上式中，令 $x=-1$，有

$$\sum_{k=p}^{n}\binom{n}{k}\binom{k}{p}(-1)^{k-p}=\begin{cases}1, & p=n\\ 0, & p<n\end{cases}$$

故恒等式得证。

注意，若令 $x=1$，又可得如下恒等式

$$\binom{n}{p}2^{n-p}=\sum_{k=p}^{n}\binom{n}{k}\binom{k}{p} \tag{3.5}$$

恒等式(3.4)还表明序列 $\left\{(-1)^k\binom{n}{k}\right\}$ 与序列 $\left\{(-1)^p\binom{k}{p}\right\}$ 是一对互相正交的序列(当 $p<n$ 时)。这使得恒等式(3.4)在组合分析中极为有用。

【例 26】 证明

$$\sum_{k=0}^{n}2^k\binom{2n-k}{n}=2^{2n} \tag{3.6}$$

【证明】 由普通母函数的定义以及式(1.13)知，序列$\left(\binom{n}{0},\binom{n}{1},\binom{n}{2},\cdots,\binom{n}{n}\right)$的普通母函数为 $(1+x)^n$，即

$$(1+x)^n=\binom{n}{0}+\binom{n}{1}x+\cdots+\binom{n}{n}x^n$$

于是分别得到下列各式

$$(1+x)^{2n}=\binom{2n}{0}+\binom{2n}{1}x+\cdots+\binom{2n}{n}x^n+\cdots+\binom{2n}{2n}x^{2n}$$

$$2(1+x)^{2n-1}=2\binom{2n-1}{0}+2\binom{2n-1}{1}x+\cdots+2\binom{2n-1}{n}x^n+\cdots+2\binom{2n-1}{2n-1}x^{2n-1}$$

$$2^2(1+x)^{2n-2}=2^2\binom{2n-2}{0}+2^2\binom{2n-2}{1}x+\cdots+2^2\binom{2n-2}{n}x^n+\cdots+2^2\binom{2n-2}{2n-2}x^{2n-2}$$

$$\vdots$$

$$2^n(1+x)^n=2^n\binom{n}{0}+2^n\binom{n}{1}x+\cdots+2^n\binom{n}{n}x^n$$

将以上各式两端分别相加，则其右端和式中 x^n 的系数正好是式(3.6)的左端，而其右端的和为

$$\begin{aligned}f(x)&=(1+x)^{2n}+2(1+x)^{2n-1}+2^2(1+x)^{2n-2}+\cdots+2^n(1+x)^n\\&=2^{2n}\left[\left(\frac{1+x}{2}\right)^{2n}+\left(\frac{1+x}{2}\right)^{2n-1}+\left(\frac{1+x}{2}\right)^{2n-2}+\cdots+\left(\frac{1+x}{2}\right)^{n}\right]\end{aligned}$$

如果我们能求出 $f(x)$展开式中 x^n 的系数是 2^{2n}，则式(3.6)得证。令

$$\begin{aligned}g(x)&=f(x)+2^{2n}\left[\left(\frac{1+x}{2}\right)^{n-1}+\left(\frac{1+x}{2}\right)^{n-2}+\cdots+\left(\frac{1+x}{2}\right)^{0}\right]\\&=2^{2n}\left[\left(\frac{1+x}{2}\right)^{2n}+\left(\frac{1+x}{2}\right)^{2n-1}+\cdots+\left(\frac{1+x}{2}\right)^{n}\right.\\&\qquad\left.+\left(\frac{1+x}{2}\right)^{n-1}+\left(\frac{1+x}{2}\right)^{n-2}+\cdots+\left(\frac{1+x}{2}\right)^{0}\right]\\&=2^{2n+1}\left[\frac{1-\left(\frac{1+x}{2}\right)^{2n+1}}{1-x}\right]\\&=2^{2n+1}\left\{1-\frac{1}{2^{2n+1}}\left[\binom{2n+1}{0}+\binom{2n+1}{1}x+\cdots+\binom{2n+1}{2n+1}x^{2n+1}\right]\right\}\\&\qquad(1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots)\end{aligned}$$

于是，在 $g(x)$中 x^n 的系数也就是在 $f(x)$中 x^n 的系数，即

$$\begin{aligned}a_n&=2^{2n+1}\left\{1-\frac{1}{2^{2n+1}}\left[\binom{2n+1}{0}+\binom{2n+1}{1}+\cdots+\binom{2n+1}{n}\right]\right\}\\&=2^{2n+1}\left\{1-\frac{1}{2^{2n+1}}\cdot\frac{1}{2}\left[\binom{2n+1}{0}+\binom{2n+1}{1}+\cdots\right.\right.\\&\qquad\left.\left.+\binom{2n+1}{n}+\binom{2n+1}{n+1}+\cdots+\binom{2n+1}{2n+1}\right]\right\}\\&=2^{2n+1}\left\{1-\frac{1}{2^{2n+2}}\cdot2^{2n+1}\right\}\\&=2^{2n}\end{aligned}$$

故有

$$\sum_{k=0}^{n}2^k\binom{2n-k}{n}=2^{2n}$$

【例 27】 证明

$$\sum_{j=0}^{m}\binom{n+j}{k}=\binom{n+m+1}{k+1}-\binom{n}{k+1} \tag{3.7}$$

【证明】 由普通母函数的定义以及式(1.13)知,序列$\left\{\binom{n}{0},\binom{n}{1},\binom{n}{2},\cdots,\binom{n}{n}\right\}$的普通母函数为$(1+x)^n$,即

$$(1+x)^n=\binom{n}{0}+\binom{n}{1}x+\cdots+\binom{n}{k}x^k+\cdots+\binom{n}{n}x^n$$

于是分别得到下列各式

$$(1+x)^{n+1}=\binom{n+1}{0}+\binom{n+1}{1}x+\cdots+\binom{n+1}{k}x^k+\cdots+\binom{n+1}{n+1}x^{n+1}$$

$$(1+x)^{n+2}=\binom{n+2}{0}+\binom{n+2}{1}x+\cdots+\binom{n+2}{k}x^k+\cdots+\binom{n+2}{n+2}x^{n+2}$$

$$\vdots$$

$$(1+x)^{n+m}=\binom{n+m}{0}+\binom{n+m}{1}x+\cdots+\binom{n+m}{k}x^k+\cdots+\binom{n+m}{n+m}x^{n+m}$$

将以上各式两端分别相加,则其右端和式中 x^k 的系数正好是式(3.7)的左端,而其左端的和为

$$\begin{aligned}f(x)&=(1+x)^n+(1+x)^{n+1}+(1+x)^{n+2}+\cdots+(1+x)^{n+m}\\&=\frac{(1+x)^n-(1+x)^{n+m+1}}{1-(1+x)}\\&=\frac{1}{x}[(1+x)^{n+m+1}-(1+x)^n]\end{aligned}$$

而在 $f(x)$的幂级数展开中 x^k 的系数为

$$a_k=\binom{n+m+1}{k+1}-\binom{n}{k+1}$$

于是有

$$\sum_{j=0}^{n}\binom{n+j}{k}=\binom{n+m+1}{k+1}-\binom{n}{k+1}$$

【例 28】 证明

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{2i}{i}\binom{2n-2i}{n-i}=4^n$$

【证明】 由于左端出现形如$\left\{\binom{2i}{i}\right\}$的序列,故自然要考虑求序列$\left\{\binom{2i}{i}\right\}$的母函数。由第 3.1 节例 3 可知,序列$\left\{\binom{2i}{i}\right\}$的普通母函数为$(1-4x)^{-1/2}$,即

$$(1-4x)^{-1/2}=\sum_{i=0}^{\infty}\binom{2i}{i}x^i$$

而

$$(1-4x)^{-1}=(1-4x)^{-1/2}(1-4x)^{-1/2}$$

故

$$(1-4x)^{-1}=\left[\sum_{i=0}^{\infty}\binom{2i}{i}x^i\right]\left[\sum_{j=0}^{\infty}\binom{2j}{j}x^j\right]$$

由定义 3.4 知，上式中 x^n 的系数是

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{2i}{i}\binom{2n-2i}{n-i}$$

又由二项式定理有

$$(1-4x)^{-1}=1+4x+(4x)^2+\cdots+(4x)^n+\cdots$$

也就是说，上式中的 x^n 的系数是 4^n。故有

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{2i}{i}\binom{2n-2i}{n-i}=4^n$$

【例 29】 计算 $\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{2n-k}{k}$ 的值。

【解】 由普通母函数的定义以及式(1.13)知，序列 $\left(\binom{n}{0},\binom{n}{1},\binom{n}{2},\cdots,\binom{n}{n}\right)$ 的普通母函数为$(1+x)^n$，即

$$(1+x)^n=\binom{n}{0}+\binom{n}{1}x+\cdots+\binom{n}{n}x^n$$

于是，分别得到下列各式

$$x^{2n}(1-x)^{2n}=\binom{2n}{0}x^{2n}-\binom{2n}{1}x^{2n+1}+\binom{2n}{2}x^{2n+2}-\cdots+\binom{2n}{2n}x^{4n}$$

$$x^{2n-1}(1-x)^{2n-1}=\binom{2n-1}{0}x^{2n-1}-\binom{2n-1}{1}x^{2n}+\binom{2n-1}{2}x^{2n+1}-\cdots-\binom{2n-1}{2n-1}x^{4n-2}$$

$$x^{2n-2}(1-x)^{2n-2}=\binom{2n-2}{0}x^{2n-2}-\binom{2n-2}{1}x^{2n-1}+\binom{2n-2}{2}x^{2n}-\cdots+\binom{2n-2}{2n-2}x^{4n-4}$$

$$\vdots$$

$$x^n(1-x)^n=\binom{n}{0}x^n-\binom{n}{1}x^{n+1}+\binom{n}{2}x^{n+2}-\cdots+(-1)^n\binom{n}{n}x^{2n}$$

将以上各式两端分别相加，则其右端和式中 x^{2n} 的系数正好是我们所求的和式 $\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{2n-k}{k}$，而其右端的和为

$$A(x)=x^{2n}(1-x)^{2n}+x^{2n-1}(1-x)^{2n-1}+x^{2n-2}(1-x)^{2n-2}+\cdots+x^n(1-x)^n$$

如果我们能求出 $A(x)$展开式中 x^{2n}的系数 a_{2n}，则 $\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{2n-k}{k}=a_{2n}$，下面，我们求 a_{2n}。

因为在 $A(x)$ 的后面加上次数低于 x^{2n} 的项不影响我们所要求的和，故令 $B(x)$ 为

$$\begin{aligned}B(x) &= A(x)+x^{n-1}(1-x)^{n-1}+x^{n-2}(1-x)^{n-2}+\cdots+x^0(1-x)^0\\ &=\frac{1-[x(1-x)]^{2n+1}}{1-x(1-x)}=\frac{1-[x(1-x)]^{2n+1}}{1-x+x^2}\times\frac{1+x}{1+x}\\ &=\{1-[x(1-x)]^{2n+1}\}\frac{1+x}{1+x^3}\\ &=\{1-[x(1-x)]^{2n+1}\}(1+x)[1-x^3+x^6-x^9+\cdots+(-1)^k x^{3k}+\cdots]\end{aligned}$$

于是，由上式知，$B(x)$[或 $A(x)$]中的 x^{2n} 的系数 $a_{2n}=\begin{cases}1, & 2n\equiv 0(\bmod 3)\\ -1, & 2n\equiv 1(\bmod 3)\\ 0, & 2n\equiv 2(\bmod 3)\end{cases}$

故有

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{2n-k}{k}=\begin{cases}1, & 2n\equiv 0(\bmod 3)\\ -1, & 2n\equiv 1(\bmod 3)\\ 0, & 2n\equiv 2(\bmod 3)\end{cases}$$

习题 3

1. 求下列序列的普通母函数。

(1) $(1,-1,1,\cdots,(-1)^n,\cdots)$

(2) $\left(\binom{c}{0},-\binom{c}{1},\binom{c}{2},\cdots,(-1)^n\binom{c}{n},\cdots\right)$，($c$ 是实数)

(3) $(c^0,c^1,c^2,\cdots,c^n,\cdots)$，($c$ 是实数)

(4) $(1/0!,-1/1!,1/2!,\cdots,(-1)^n/n!,\cdots)$

(5) $(a_0,a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots)$，其中 $a_n=\binom{n}{2}$

2. 求下列序列的指数母函数。

(1) $(1!,2!,\cdots,n!,\cdots)$

(2) $(0!,1!,2!,\cdots,n!,\cdots)$

(3) $(c_0,c_1,c_2,\cdots,c_n)$，其中 $c_0=1$，$c_n=c(c-1)\cdots(c-n+1)$，$n=1,2,\cdots$

(4) $(1,2,2^2\cdot 2!,2^3\cdot 3!,\cdots,2^n\cdot n!,\cdots)$

3. 若 $A(x)$，$B(x)$ 分别是序列 $(a_0,a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots)$，$(b_0,b_1,b_2,\cdots,b_n,\cdots)$ 的普通母函数，证明：

(1) 若 $b_n=ka_n$，k 为常数，则 $B(x)=kA(x)$。

(2) 若 $b_n=\begin{cases}0, & n<m\\ a_{n-m}, & n\geqslant m\end{cases}$，则 $B(x)=x^mA(x)$。

(3) 若 $b_n=a_{n+m}$，则 $B(x)=\dfrac{A(x)-\sum\limits_{n=0}^{m-1}a_nx^n}{x^m}$。

(4) 若 $b_n=na_n$，则 $B(x)=xA'(x)$。

4. 已知序列$(1,b,b^2,\cdots,b^n,\cdots)$的普通母函数是 $1/(1-bx)$，求以 $b^k x^k/(1-bx)^{k+1}$ 为普通母函数的序列。

5. 有无穷多个字母 A，B 和 C。求从中选出 n 个字母但必须包含偶数个 A 的方式数。

6. 求重集 $B=\{\infty\cdot a,3\cdot b,5\cdot c,7\cdot d\}$的 10-组合数。

7. 求从 n 个不同的物体中允许重复地选取 r 个物体，但每个物体出现奇数次的方式数。

8. 求从 n 个不同的物体中允许重复地选取 r 个物体，但每个物体至少出现三次的方式数。

9. 设重集 $B=\{\infty\cdot b_1,\infty\cdot b_2,\infty\cdot b_3,\infty\cdot b_4,\infty\cdot b_5,\infty\cdot b_6\}$，并设 a_r 是 B 满足以下条件的 r 组合数，求序列$(a_0,a_1,a_2,\cdots,a_r,\cdots)$的普通母函数。

(1) 每个 b_i 出现 3 的倍数次$(i=1,2,3,4,5,6)$。

(2) b_1,b_2 至多出现一次，b_3,b_4 至少出现两次，b_5,b_6最多出现 4 次。

(3) b_1 出现偶数次，b_6出现奇数次，b_3 出现 3 的倍数次，b_4 出现 5 的倍数次。

(4) 每个 $b_i(i=1,2,3,4,5,6)$至多出现 8 次。

10. 有两颗骰子，每个骰子 6 个面上刻有 1，2，3，4，5，6 个点，问掷骰子后，点数之和为 r，两颗骰子的点数有多少种搭配方式？

11. 设有重量分别为 1g，2g，3g，5g 和 7g 的砝码(砝码的数量不限)去称重量为 rg 的物体的方式数为 a_r，求序列$(a_1,a_2,\cdots,a_r,\cdots)$的普通母函数。

12. 求用一分，二分，三分，四分的邮票(邮票允许重复)贴出不同数值的方式数。

13. 对 $1\times n$ 棋盘的每个正方形都用 4 种颜色红、橙、黄、绿着色，若着红色和绿色的正方形的数量都是偶数，求不同的着色方案数。

14. 求由数字 1，2，3，4，5，6 组成的 r 位数中，3 和 4 都出现偶数次，2 和 4 至少出现一次的 r 位数的个数。

15. 设 a_r 表示重集 $B=\{4\cdot a,1\cdot b,2\cdot c,1\cdot d,2\cdot e\}$的 r-排列的个数，求序列$(a_0,a_1,a_2,\cdots,a_r,\cdots)$的指数母函数。

16. 求在重集 $B=\{\infty\cdot 0,\infty\cdot 1,\infty\cdot 2,\infty\cdot 3\}$中的，0 出现偶数次的长为 r 的字的个数。

17. 证明定理 3.2 和定理 3.7。

18. 证明：把整数 n 拆分成 m 个不同的部分的个数，等于把整数 $n-m(m+1)/2$ 拆分成最多 m 个部分的个数$(n>m(m+1)/2)$。

19. 用母函数法证明下列恒等式。

(1) 第 1 章中第 1.5 节的恒等式 7。

(2) $$\sum_{i=0}^{k}\binom{n-i}{k-i}=\begin{cases}0, & k=n+1\\ \binom{n+1}{k}, & 0\leqslant k\leqslant n\end{cases}$$

(3) $$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{2n-2k}{n}\binom{n}{k}=2^n$$

20. 设 n,k 都是非负整数，计算下列诸和的值。

(1) $\binom{n}{0}+\binom{n}{2}+\binom{n}{4}+\cdots+\binom{n}{q}$，其中 n 是偶数时，$q=n$；当 n 是奇数时，$q=n-1$。

(2) $\binom{n}{0}\binom{n}{k}-\binom{n}{1}\binom{n-1}{k-1}+\binom{n}{2}\binom{n-2}{k-2}-\cdots+(-1)^k\binom{n}{k}\binom{n-k}{0}$

(3) $\binom{n}{0}+2\binom{n}{1}+2^2\binom{n}{2}+\cdots+2^n\binom{n}{n}$