

司徒树平 编著

电动力学导论

Elementary Electrodynamics

清华大学出版社
北京

内 容 简 介

本书是一本关于经典电动力学入门级的基础读本,书中简明扼要地讲述电磁领域中的一些基本问题,主要内容包括:电磁现象的普遍规律,宏观系统的电磁物性,标势与矢势、电磁规范,平面电磁波的传播,电子与电磁场的相互作用,电磁变换、相对论性粒子运动学。

本书适用于短学时的理论物理教学,以一般理工科大学的高等数学和普通物理知识为起点,可作为理工类大学各物理专业和电子工程类专业本科教学用书或参考书,也可以供其他相关专业的读者参考阅读。

版权所有,侵权必究。举报:010-62782989, beiqinquan@tup.tsinghua.edu.cn。

图书在版编目(CIP)数据

电动力学导论/司徒树平编著. —北京:清华大学出版社,2023.5

ISBN 978-7-302-58173-4

I. ①电… II. ①司… III. ①电动力学—高等学校—教材 IV. ①O442

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2021)第 095901 号

责任编辑:佟丽霞

封面设计:常雪影

责任校对:赵丽敏

责任印制:宋 林

出版发行:清华大学出版社

网 址: <http://www.tup.com.cn>, <http://www.wqbook.com>

地 址:北京清华大学学研大厦 A 座 邮 编:100084

社 总 机:010-83470000 邮 购:010-62786544

投稿与读者服务:010-62776969, c-service@tup.tsinghua.edu.cn

质量反馈:010-62772015, zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn

印 装 者:三河市春园印刷有限公司

经 销:全国新华书店

开 本:170mm×240mm 印 张:9.75 字 数:193千字

版 次:2023年5月第1版 印 次:2023年5月第1次印刷

定 价:49.00元

产品编号:045020-01

序言

经典电动力学是理论物理研究与教学中的重要组成部分,关于经典电动力学的教科书籍,林林总总,前辈同行的鸿篇巨制,仿如高山仰止。珠玉在前,如何超越?每当作者有所执笔冲动,想要将历年所讲授的内容付诸文字,仍不禁战战兢兢,诚惶诚恐,生怕徒陈空文,或者谬种流传。

俗语说:“入门靠师傅,修行靠自己。”我们需要好的师傅带学生入门,进入物理学这座雄伟的殿堂,一本好的教材能起到敲门砖的作用。能看通鸿篇巨制,当然是好事,可是对于大部分入门的人而言,未免有点吃力,要求过高,因而事倍功半,欲速不达。古人云:“读书之道,贵在于循序而致精”,面对那些隐晦的公式思路,较为现实的方法是由浅入深,然后几个轮回,蓦然回首,不觉渐入佳境,因此,一本入门级的教材可能更加适合于徘徊在理论物理大厦高昂门坎之前的初学者。

这本书企望主要在三个方面有所努力:一、定位于易懂,尽量避免使用繁杂高深的数学演绎(必要的数学还是不可或缺),能将学生吸引进电动力学这座瑰丽大厦。在编写过程中注重少而精的取材原则,力求做到概念表述简洁,公式推演详细。在选材上,不采用其他教材惯用的“重静场、轻动场”的思路,不把重点放在静止或稳恒电磁场的求解上(这样做需要学生有较好的数理方法基础)。二、将狭义相对论这个堪称理论物理的珍品融会贯通在电磁波讨论这部分章节中,用人人熟悉的简单物理系统来阐明深邃的原理理论,而不像其他教科书那样单列成若干章节来讨论。三、虽说电动力学发轫于百多年前,是一门相当成熟的学科,但是它仍正在深入发展,仍有强大生命力,作为教科书,既要介绍理论的框架体系,同时又要适度反映最新的成就应用,本书有些章节段落,致力于实践这一点,写出其他教材所无暇顾及而又非常适合初学者的内容,形成有特色的教材。

这本书适用于短学时的教学。全书共分6章,前3章基本上与主流教材的思路一致,先介绍电磁现象的普遍规律及背后隐藏的对称性约束,同时介绍电磁系统的能量蕴藏、能量流动问

题,再推广到介质系统中,然后谈及静止或稳恒电磁场的一般处理,由此引入电势和磁矢势,为后续学习规范场理论作铺垫。后3章与传统教科书的叙述有所差别,首先介绍狭义相对论,因为它孕育于电磁规律对时空的制约,是整个电磁理论的时空基础,也就是说不存在非相对论的电磁理论。接下来介绍电磁波在无界空间/有限空间中的传播规律,主要讲述平面电磁波在真空、绝缘介质、导体、等离子体及波导中的传播,然后讨论带电粒子在电磁场中的运动,包括讨论恒定电磁场和平面电磁波的情况,尤其重点关注由最简单带电粒子(电子)和最简单优美电磁波(平面电磁波)组成的电磁系统的行为。最后一章讨论电磁变换问题,它基于这样一个理念,即所有惯性系都是平权的,其时空变换遵从 Lorentz 变换,受此制约,惯性系之间的电磁场、能量动量、波矢频率等一系列变换随之确定。为了照顾初学者的数学程度,这些讨论可以不借助于矩阵运算而直接用代数运算可得,因为对初入门的学生而言,后者更容易被掌握。

作者感谢诸位师长前辈、同仁好友的支持和鼓励,使余有勇气犯难前行,感谢几届同学们的支持,他们耐心地阅读了在形成书稿之前的讲义版,并提出了自己的感觉,他们是这本书最初的忠实读者。

多年以来,作者深得香港中文大学陈耀华教授的指导、支持和鼓励,陈教授给予的诸多启发和点拨,使作者深受教益,在此,谨表我对陈先生的衷心感谢和深切怀念,书中的 5.3 节,取材于陈教授的一系列研究论文,谨以此书纪念陈耀华教授。

感谢清华大学出版社的佟丽霞等诸位编辑的辛勤工作,使本书得以顺利出版。

2022 年暮春 写于广州中山大学康乐园

目录

第 0 章 数学预备知识	1
0.1 矢量运算	1
0.2 矢量的分类	4
第 1 章 电磁现象的普遍规律	7
1.1 电荷与电场	7
1.2 电流与磁场	11
1.3 由对称性确定电磁场	14
1.4 Maxwell 方程组与 Lorentz 力	18
1.5 能量守恒定律、电磁场的能流密度、能量密度和 能量传输	23
附录 1 Maxwell 方程组的对称性	31
附录 2 Poynting 矢量的推导	32
习题 1	32
第 2 章 宏观系统的电磁物性	35
2.1 电介质和磁介质	35
2.2 介质中的 Maxwell 方程组	37
2.3 边界条件	40
附录 1 极化强度 \mathbf{P} 、磁化强度 \mathbf{M} 与电偶极矩、磁偶 极矩的关系	43
习题 2	45
第 3 章 标势与矢势、电磁规范	47
3.1 静电场与电势, 电偶极矩	47
3.2 磁场与矢势, 磁偶极矩	53
3.3 电磁规范场, 规范变换与规范不变性, d'Alembert 方程	57

3.4 A-B(Aharonov-Bohm)效应与 A-C (Aharonov-Casher)效应	60
习题 3	62
第 4 章 平面电磁波的传播	64
4.1 平面波,相位差不变性,时空与测量	64
4.2 电磁规律对时空的制约,Lorentz 变换	68
4.3 间隔不变性,时空相对性,Doppler 效应	74
4.4 自由空间中的平面电磁波	78
4.5 介质中的平面电磁波	82
4.6 谐振腔、波导中的电磁波	90
附录 1 Michelson-Morley 实验	95
附录 2 因果律与相互作用的最大传播速度	96
附录 3 数学公式 $\nabla \cdot \mathbf{E} = -ik \cdot \mathbf{E}$, $\nabla \times \mathbf{E} = -ik \times \mathbf{E}$ 的证明	97
习题 4	97
第 5 章 电子与电磁场的相互作用	100
5.1 平面电磁波的规范势,粒子的动量、能量关系	100
5.2 带电体系在电磁场中的运动	104
5.3 电子和电磁波的散射相互作用	108
习题 5	115
第 6 章 电磁变换、相对论性粒子运动学	117
6.1 电磁场之间的变换	117
6.2 介质中的电磁场变换	125
6.3 电磁波变换	127
6.4 相对论性粒子的运动学	134
习题 6	140
部分习题答案	143
参考文献	147

数学预备知识

0.1 矢量运算

电动力学是研究电磁场和带电物质的运动,在数学上主要涉及标量、矢量和张量的微分运算(梯度、散度和旋度)和矢量的面积分、线积分,以及解偏微分方程组。下面主要是列出常用的一些规律公式,详细的讨论应参考有关的数学物理方法和矢量分析的教科书。

我们记标量为 φ ,矢量为 \mathbf{A} ,张量为 \vec{T} ,其实,它们是不同的阶数的张量而已。严格而言,要区分一个量是标量、矢量还是张量,应该考查它在坐标变换下所遵循的变换规律。在三维直角坐标空间中,标量 φ 、矢量 \mathbf{A} 、张量 \vec{T} 分别有一个、三个和九个分量,分别记为

$$\begin{aligned} &\varphi(x, y, z, t) \\ &\mathbf{A}(x, y, z, t) = A_x \mathbf{e}_x + A_y \mathbf{e}_y + A_z \mathbf{e}_z \\ &\vec{T} = T_{xx} \mathbf{e}_x \mathbf{e}_x + T_{xy} \mathbf{e}_x \mathbf{e}_y + T_{xz} \mathbf{e}_x \mathbf{e}_z + \\ &\quad T_{yx} \mathbf{e}_y \mathbf{e}_x + T_{yy} \mathbf{e}_y \mathbf{e}_y + T_{yz} \mathbf{e}_y \mathbf{e}_z + \\ &\quad T_{zx} \mathbf{e}_z \mathbf{e}_x + T_{zy} \mathbf{e}_z \mathbf{e}_y + T_{zz} \mathbf{e}_z \mathbf{e}_z \end{aligned}$$

它们常用的微分运算有:

标量梯度($\nabla\varphi$): 反映标量的最大变化率的大小以及对应的方向,它是一个矢量。

矢量散度($\nabla \cdot \mathbf{A}$): 衡量一个矢量在某点附近流进流出的差值,它是一个标量。

当 $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ 时,意味着一个量流进流出的差值为零,没有积累。

矢量旋度($\nabla \times \mathbf{A}$): 表示一个矢量在某点附近形成涡旋的程度,它是一个矢量。

以靠近河岸的流动河水为例,当流速分布不均匀时,如果放

一个水轮机上去,就会使叶轮有旋转的能力(见图 0.1),旋度就是这一能力的定量标记。

在直角坐标系下,上述这些微分运算可表示为

$$\nabla\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\mathbf{e}_x + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\mathbf{e}_y + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\mathbf{e}_z$$

$$\nabla\cdot\mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\nabla\times\mathbf{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}$$

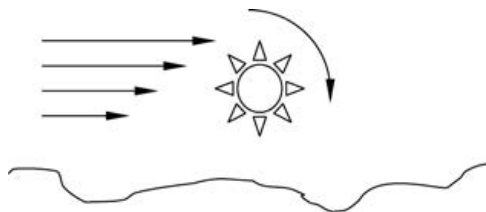


图 0.1 流动的河水有旋度

另外,电动力学中还有一个常常遇见的算符——Laplace(拉普拉斯)算符

$$\nabla^2 = \nabla\cdot\nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

有时候,由于系统具有轴对称性或球对称性,因此用柱坐标系或球坐标系来解决问题较为方便。在柱坐标系下

$$\nabla\cdot\mathbf{A} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\theta}{\partial\theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\nabla\times\mathbf{A} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial\theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z}\right)\mathbf{e}_r + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}\right)\mathbf{e}_\theta + \left[\frac{1}{r}\frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right]\mathbf{e}_z$$

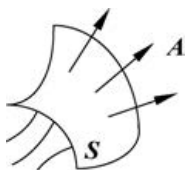
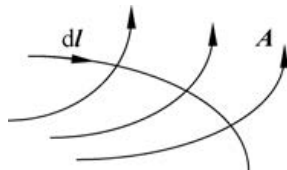
在球坐标系下

$$\nabla^2\varphi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\phi^2}$$

应当指出,不是只有标量才有梯度,也不是只有矢量才有散度、旋度。实际上,所有阶数的张量都可计算其梯度、散度和旋度,只不过常用的是这三种情况而已。

当矢量场中有一曲面 S ,将它分割成若干矢量面元 $d\mathbf{S}$,矢量场 $\mathbf{A}(x, y, z)$ 对任一面元的通量定义为 $\mathbf{A}\cdot d\mathbf{S}$,有限曲面 S 的通量则为 $\iint_S \mathbf{A}\cdot d\mathbf{S}$,实质上是 $\mathbf{A}(x, y, z)$ 对 S 的面积分,表示穿过面 S 的 \mathbf{A} 的量值,它是标量,如图 0.2 所示;若曲面是封闭的,通量则表示为 $\oiint \mathbf{A}\cdot d\mathbf{S}$ 。

另外,矢量场沿着某一曲线的积分 $\int \mathbf{A}\cdot d\mathbf{l}$ 为线积分,表示 \mathbf{A} 投影在路径上的量值,如图 0.3 所示,它也是标量;若曲线是闭合环路,则线积分表示为 $\oint \mathbf{A}\cdot d\mathbf{l}$ 。面积分和线积分反映物理量在一有限不为零的区域内的整体性质。而梯度、散度和旋度反映的是物理量在一个无限小的区域(点)内的局部性质。

图 0.2 矢量 A 穿过曲面 S 的通量图 0.3 矢量 A 沿着曲线 l 的投影(线积分)

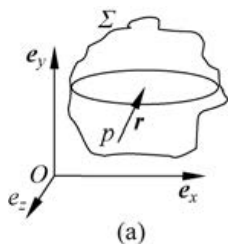
在物理世界中,有一个重要的函数——反平方矢量函数 $\frac{\mathbf{e}_r}{r^2}$, 其中 $\mathbf{r} = r\mathbf{e}_r$ 为从一定点 p 出发的矢径, 该函数有两个重要的积分性质:

(1) 它对任意闭合曲面 Σ 的面积分

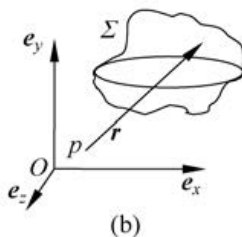
$$\oiint_{\Sigma} \frac{\mathbf{e}_r}{r^2} \cdot d\boldsymbol{\Sigma} = \begin{cases} 4\pi, & \text{如果 } p \text{ 点在闭合曲面 } \Sigma \text{ 内, 见图 0.4(a)} \\ 0, & \text{如果 } p \text{ 点在闭合曲面 } \Sigma \text{ 外, 见图 0.4(b)} \end{cases}$$

(2) 它对任意闭合曲线的线积分(见图 0.5)

$$\oint \frac{\mathbf{e}_r}{r^2} \cdot d\mathbf{l} = 0$$



(a)



(b)

图 0.4 反平方矢量函数的闭合曲面面积分

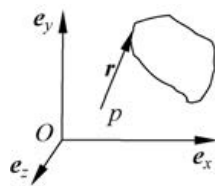


图 0.5 反平方矢量函数的闭合曲线线积分

并且对 $\mathbf{r} \neq \mathbf{0}$, 反平方矢量函数有两个重要的微分运算:

$$\nabla \cdot \frac{\mathbf{e}_r}{r^2} = 0$$

$$\nabla \times \frac{\mathbf{e}_r}{r^2} = 0$$

此外, 在电动力学中, 以下的运算也是常常要用到的。

恒等式:

$$\nabla \times \nabla \varphi = 0 \quad (\text{梯度的旋度恒为零})$$

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0 \quad (\text{旋度的散度恒为零})$$

矢量变换公式:

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})\mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\mathbf{C}$$

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{A})$$

常用微分算符运算式:

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$$

$$\nabla \cdot (\varphi \mathbf{A}) = \varphi \nabla \cdot \mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot \nabla \varphi$$

积分变换公式:

$$\oiint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \iiint (\nabla \cdot \mathbf{E}) dV \quad \text{Gauss(高斯) 定理}$$

$$\oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \iint (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S} \quad \text{Stokes(斯托克斯) 定理}$$

0.2 矢量的分类

物理学中存在两类矢量,一类称为极矢量,另一类称为轴矢量,它们在空间反射变换或镜像变换下具有不同的变换性质,要区分它们就要看其特定的坐标变换——空间反射变换或镜像变换下的变换性质了。

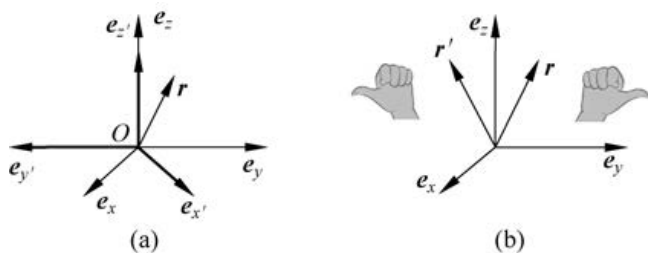


图 0.6 空间反射变换或镜像变换下的极矢量变换

在空间反射变换下,若矢量的变换与坐标变换相同,或者换一个说法,在镜像变换下,其平行镜像的分量(切分量)不变,垂直镜像的分量(法分量)改变符号,则称它为极矢量,如位移、速度、加速度、力、动量、电场等。

如图 0.6(a)所示,在空间反射变换或镜像变换下,新旧坐标系的变换关系为

$$\begin{pmatrix} e_{x'} \\ e_{y'} \\ e_{z'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_x \\ e_y \\ e_z \end{pmatrix}$$

即将右旋坐标系变成左旋坐标系。与此同时,同一位置矢量在新旧坐标系中的变换关系为

$$\begin{pmatrix} r_{x'} \\ r_{y'} \\ r_{z'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \end{pmatrix}$$

因此, $\mathbf{r}' = r_x' \mathbf{e}_{x'} + r_y' \mathbf{e}_{y'} + r_z' \mathbf{e}_{z'} = r_x \mathbf{e}_{x'} - r_y \mathbf{e}_{y'} + r_z \mathbf{e}_{z'}$ 。

可见其平行镜像的 $\mathbf{e}_{x'}$ 和 $\mathbf{e}_{z'}$ 分量不变,垂直镜像的 $\mathbf{e}_{y'}$ 分量改变符号。或者这样理解,这个变换操作把矢量 \mathbf{r} 变成镜中的像 \mathbf{r}' ,把右手变成左手,如图 0.6(b)

所示。

另一类矢量称为轴矢量,是指在镜像变换下,其平行镜像的分量(切分量)改变符号,垂直镜像的分量(法分量)不变,如图 0.7(a)所示。如角速度、角动量、力矩、磁场等。

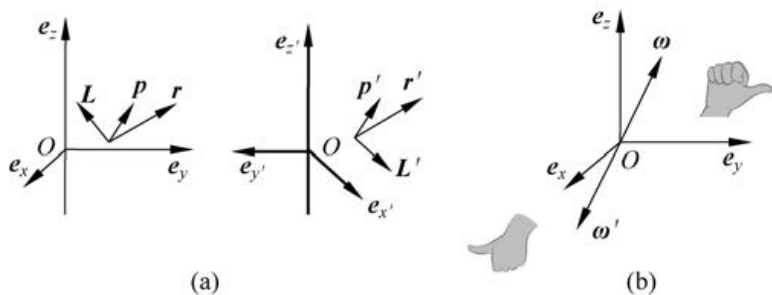


图 0.7 镜像变换下的轴矢量

如图 0.7(a)所示,在空间反射变换或镜像变换下,动量在新旧坐标系的变换关系为

$$\mathbf{p}' = p_x \mathbf{e}_{x'} - p_y \mathbf{e}_{y'} + p_z \mathbf{e}_{z'}$$

而角动量在新旧坐标系中分别表示为

$$\mathbf{L} = L_x \mathbf{e}_x + L_y \mathbf{e}_y + L_z \mathbf{e}_z = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ r_x & r_y & r_z \\ p_x & p_y & p_z \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{L}' = L'_x \mathbf{e}_{x'} + L'_y \mathbf{e}_{y'} + L'_z \mathbf{e}_{z'} = \mathbf{r}' \times \mathbf{p}' = \begin{vmatrix} \mathbf{e}'_x & \mathbf{e}'_y & \mathbf{e}'_z \\ r'_x & r'_y & r'_z \\ p'_x & p'_y & p'_z \end{vmatrix}$$

因此

$$\mathbf{L}' = -L_x \mathbf{e}_{x'} + L_y \mathbf{e}_{y'} - L_z \mathbf{e}_{z'}$$

可见其平行镜像的 $\mathbf{e}_{x'}$ 和 $\mathbf{e}_{z'}$ 改变符号,垂直镜像的 $\mathbf{e}_{y'}$ 分量不变。在原坐标系看来,这个变换操作把矢量 $\boldsymbol{\omega}$ 变成了完全相反的矢量 $\boldsymbol{\omega}'$,除了把右手变成左手之外,还把手掌变成手背,如图 0.7(b)所示。

关于镜像反演下的极矢量与轴矢量的区别,可以用一个例子形象地说明。在一面镜子中,一个垂直于镜面的极矢量,在镜子里的像方向与自己相反;而对螺旋转子而言,若其转轴与镜面平行,则镜子中的像的角速度(轴矢量)跟实物的相反,而若其转轴与镜面垂直,则镜子中的像的角速度跟实物的相同(见图 0.8)。

关于矢量之间的乘法运算规则,容易验证:极矢量与极矢量的叉乘是轴矢量,极矢量与轴矢量的叉乘是极矢量,轴矢量与轴矢量的叉乘仍是轴矢量,任意两个矢量的点乘是标量。电磁规律是左右对称的,或称为宇称不变性。在宇称守恒的理论中,不允许极矢量与轴矢量的直接相加,因此,在公式中不会出现 $\mathbf{E} + \mathbf{B}$ 项,但存

在 $\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}$ 项, 即 Lorentz(洛伦兹)力公式。

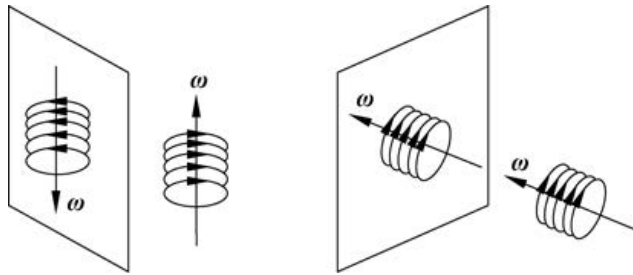


图 0.8 镜像变换下的螺旋转子

如何判断一个矢量是极矢量还是轴矢量? 一是从矢量与矢量之间的关系判断, 例如, 极矢量与极矢量的叉乘是轴矢量, 极矢量与轴矢量的叉乘是极矢量等, 它们可以容易地从矢量在空间反射变换或镜像变换下具有的变换性质中判断出; 二是从物理公式直接判断, 例如, 力是极矢量, 由 Coulomb(库仑)定律 $\mathbf{F} = q\mathbf{E}$ 可知, 电场 \mathbf{E} 也是极矢量; 由 Ampere(安培)定律 $d\mathbf{F} = I d\mathbf{l} \times \mathbf{B}$ 可知, 磁感应强度 \mathbf{B} 是轴矢量; 三是作空间反演, 令三维直角坐标系的三个正交单位矢量方向反转, $\mathbf{r} \rightarrow -\mathbf{r}$, 如果物理量也跟随着改变符号, 则它是极矢量; 如果不改变符号, 则它是轴矢量。

电磁现象的普遍规律

电磁相互作用是自然界四种基本相互作用之一,作用的尺度涵盖了从原子核到宇宙的范围,是属于长程相互作用。尽管在原子核尺度范围内,电磁理论与量子理论已经融合成一门新学科——量子电动力学,但在涉及电荷、电流及其相互作用时,一百多年前总结出来的理论(称为经典电动力学)基于坚实的实验基础,依然保持其完美程度,具有强大的生命力。

电动力学研究的对象有两类:一类是电荷以及流动的电荷(电流),称为源,另一类是弥散在有限空间或无限空间的无形物质,称为场(包括电场、磁场)。本章先从一系列电磁实验定律中(Coulomb 定律、Biot-Savart 定律、Faraday 定律)抽象总结出描述电磁现象的基本规律(Maxwell 方程组和 Lorentz 力公式),并且讨论电磁场的对称性问题,再论述电磁系统所遵循的守恒定律,讨论电磁系统的能量与能量流动问题。

1.1 电荷与电场

真空中两个静止点电荷之间的相互作用遵从 Coulomb 定律:

$$\mathbf{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ}{r^2} \mathbf{e}_r \quad (1.1)$$

其中, $\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \text{C}^2 \cdot \text{N}^{-1} \cdot \text{m}^{-2}$ 是真空的介电常量(真空电容率), r 是两个点电荷之间的距离, q 和 Q 是两个点电荷的电荷量,作用力的方向 \mathbf{e}_r 落在两电荷的连线上,并且大小反比于距离的平方,称为距离的反平方函数。当 q 和 Q 同号时,作用力是排斥力,当 q 和 Q 异号时,是吸引力。现代实验已证实自然界存在最小电荷单位,任何带电系统的电荷量必定是它的整数倍。对于原子尺度上的系统,最小电荷量单位称为元电荷 $e = 1.602 \times 10^{-19} \text{C}$; 一个质子带一个单位的正电荷,而一个电子带一个单位的负电荷,但在高能物理中,可能有理由相信夸克电

荷量是 $\pm \frac{e}{3}$ 或 $\pm \frac{2}{3}e$ 。

近代物理已经否定了超距作用,认为相互作用是必须通过媒介传递的,并且传递是需要时间的,即存在着相互作用的最大传播速度(光速)。因此电荷所处的空间存在着传递相互作用的媒介物质,称为电场,电场弥散充满于全空间或有限空间。值得指出的是,电场是可以独立于电荷而存在的。

如何衡量电场的大小和指向?我们可以在电场中某处放置一电荷 q ,设在电场的作用下它所受的力为 \mathbf{F} ,定义该处的电场强度为

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}}{q} \quad (1.2)$$

于是,在真空中存在有电荷量为 Q 的点电荷,它产生的电场弥散于全空间,在距离点电荷 r 处,点电荷所产生的电场为

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{e}_r = \frac{Q\mathbf{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} \quad (1.3)$$

当空间中存在若干个点电荷时,其他电荷的存在与否并不改变当前两电荷的相互作用形式,因此,当空间存在若干点电荷时,则对于空间中的任意一点,电场满足叠加原理:空间中任意一点 P 的总电场为各个点电荷的共同贡献,如图 1.1 所示,即

$$\mathbf{E} = \sum_i \frac{Q_i \mathbf{r}_i}{4\pi\epsilon_0 r_i^3} \quad (1.4)$$

这一点貌似简单和理所当然,但却是很深刻的,也就是说,电场所遵循的规律是线性的,满足的方程是线性方程。这样的规律为我们指明了一个探索方向,正确地判断出(真空中的)电磁规律应该是线性的。

电动力学通常把研究对象的位置分为两类:一类是观察点,称为场点,其位置用 \mathbf{x} 表示;另一类是电荷、电流的位置,称为源点,用 \mathbf{x}' 表示。则 $\mathbf{r} = \mathbf{x} - \mathbf{x}'$ 就是从源点到场点的矢径,如图 1.2 所示。

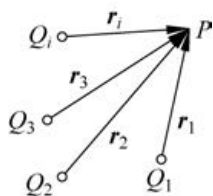


图 1.1 多个点电荷形成的电场叠加

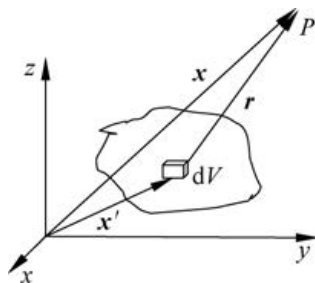


图 1.2 场点与源点

从微观上看,电荷由若干个元电荷构成,为分立的不连续分布。但对宏观尺度而言,由于带电体的尺寸与电荷尺度不可比拟,并且带电体的电荷量远远大于元电

荷,因此,在宏观尺度上研究系统的电磁性质时,通常把带电体看成连续电荷分布。考虑在带电体系内包围某点的一个极其小体积元 dV ,其电荷量为 dq ,定义

$$\rho(\mathbf{x}', t) = \frac{dq}{dV} \quad (1.5)$$

为该点处的单位体积内的电荷量,称为电荷密度。反过来,在体积元 dV 中包含的电荷元为

$$dq = \rho(\mathbf{x}', t) dV \quad (1.6)$$

如图 1.2 所示,根据式(1.3),电荷元 dq 在距离 r 处的 P 点产生的电场为

$$d\mathbf{E} = \frac{\mathbf{r} dq}{4\pi\epsilon_0 r^3} = \frac{\rho(\mathbf{x}') \mathbf{r} dV}{4\pi\epsilon_0 r^3} \quad (1.7)$$

把系统各部分电荷的贡献叠加起来,则整个电荷系统在 P 点产生的总电场为

$$\mathbf{E} = \int \frac{\rho(\mathbf{x}') \mathbf{r} dV'}{4\pi\epsilon_0 r^3} = \int \frac{\rho(\mathbf{x}') \mathbf{e}_r dV}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (1.8)$$

比较式(1.4)和式(1.8),相当于数学上作了这样的处理

$$\begin{aligned} \sum &\rightarrow \int \\ Q &\rightarrow \rho(\mathbf{x}', t) dV' \end{aligned}$$

于是,电场公式由求和形式过渡到了积分形式。

式(1.4)和式(1.8)中的函数是反平方函数,注意其中隐含的两条重要性质以及对应的微分方程。对于反平方函数而言,数学上存在 Gauss 定理和 Stokes 定理(见“数学预备知识”)。

如图 1.3 所示,作一任意闭合曲面 Σ ,根据 Gauss 定理,对 Σ 内所包围的电荷而言,它产生的电场穿过在该曲面上的电通量为

$$\begin{aligned} \oiint_{\Sigma} \mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\Sigma} &= \oiint_{\Sigma} \sum_i \frac{q_i \mathbf{r}_i}{4\pi\epsilon_0 r_i^3} \cdot d\boldsymbol{\Sigma} = \sum_i \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} \oiint_{\Sigma} \frac{\mathbf{r}_i}{r_i^3} \cdot d\boldsymbol{\Sigma} \\ &= \sum_i \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} \oiint_{\Sigma} \frac{\mathbf{e}_i}{r_i^2} \cdot d\boldsymbol{\Sigma} = \sum_i \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} \cdot 4\pi = \sum_i \frac{q_i}{\epsilon_0} = \frac{Q}{\epsilon_0} \end{aligned} \quad (1.9)$$

其中, $Q = \sum_i q_i$ 为闭合曲面 Σ 内所包围的电荷总量;反之,对闭合曲面 Σ 外的电荷,在该闭合曲面上电通量为零,因为闭合曲面外的电荷所产生的电场在该闭合曲面上进出相抵,即电通量为零。

另一个性质是,根据 Stokes 定理,对任意闭合环路,反平方函数的环路积分为零,因此电场沿任意闭合环路的线积分为

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \oint \sum_i \frac{q_i \mathbf{r}_i}{4\pi\epsilon_0 r_i^3} \cdot d\mathbf{l} = \sum_i \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} \oint \frac{\mathbf{e}_i}{r_i^2} \cdot d\mathbf{l} = 0 \quad (1.10)$$

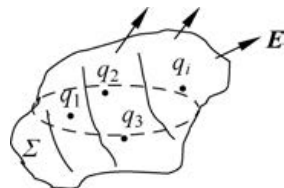


图 1.3 封闭曲面中的电荷与电场

总结一下, 静电荷产生的电场对任意闭合曲面的面积分等于该闭合曲面所包围着的电荷量 Q 除以真空介电常量 ϵ_0 , 电场对任意闭合环路的线积分为零。

进一步, 由式(1.6), 任意闭合曲面内的总电荷可以写成该曲面所包围体积内的电荷密度体积分:

$$Q = \iiint_V \rho dV$$

根据积分变换公式

$$\oiint_{\Sigma} \mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\Sigma} = \iiint_V (\nabla \cdot \mathbf{E}) dV \quad (1.11)$$

式(1.9)可变为

$$\iiint_V (\nabla \cdot \mathbf{E}) dV = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_V \rho dV \quad (1.12)$$

上式对任意大小、任意形状、任意位置的体积都成立。选体积 $\Delta V \rightarrow 0$, 因左右两边的被积函数必须相等, 于是得到微分公式

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (1.13)$$

式(1.13)称为静电场的 Gauss 定理, 它意味着: 电荷是电场的源, 在 $\rho \neq 0$ 的源点, 电场的散度不为零; 反之, 在其他地方, 电场的散度为零, 在该点流进流出的电力线相抵。如图 1.4 所示, 由正负点电荷所产生的电场, 在正电荷 A 处, 电力线只出不进; 在负电荷 B 处, 电力线只进不出, 这两点电场的散度都不为零; 而在其他地方, 例如点 C 处, 电力线连续变化并且互不相交, 进出相抵。

另一方面, 应用 Stokes 定理, 式(1.10)变成

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \iint (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot d\boldsymbol{\Sigma} = 0 \quad (1.14)$$

它对任意环路都成立, 因此对任意位置, 均有

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0 \quad (1.15)$$

即静电荷产生的(静)电场是有源无旋的, 即电场散度在源头不为零, 而旋度处处为零。

另外, 对闭合环路中的任意两点 A 和 B , 把环路分成两条路径 l_1 和 l_2 , 如图 1.5 所示, 由式(1.14)得

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}_1 + \int_B^A \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}_2 = 0$$

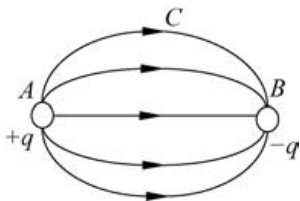


图 1.4 正负点电荷所产生的电场、电力线

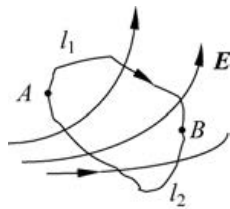


图 1.5 静电场做功与路径无关

即

$$\int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}_1 = \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}_2 \quad (1.16)$$

意味着对于静电场,把电荷 q 从 A 点移到 B 点所做的功

$$W = \int_B^A \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = \int_B^A q\mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \quad (1.17)$$

只与 A 、 B 点的位置有关,与移动的路程无关,这是静电场无旋性具有的特性。

Gauss 定理的正确性取决于平方反比函数关系的 Coulomb 定律。若 Coulomb 定律不严格遵从反平方规律,假设 $\mathbf{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ}{r^{2+\delta}} \mathbf{e}_r$ ($\delta \neq 0$), 则 Gauss 定理不成立,导致的直接后果是,均匀带电球壳里的电场不为零,静电屏蔽效应不再成立,光子静止质量不再为零,进而导致现在通行的整个电动力学的理论基础坍塌,因此检验 Coulomb 定律是否严格遵从反平方规律涉及整个电动力学理论体系的可靠性。20 世纪 70 年代实验给出的上限为 $\delta \leq 10^{-16}$, 相应地,可确定光子静止质量上限为 $m_\gamma < 10^{-50}$ kg; 而在 2006 年,由改进的动态扭秤调制实验可知,这一上限调整到 $m_\gamma < 1.5 \times 10^{-55}$ kg(比较一下,电子质量为 9.1×10^{-31} kg)。

对于非静电场,电场的 Gauss 定理式(1.13)仍然成立,但电场的闭合环路路径积分为零的结论式(1.15)需要修正。

1.2 电流与磁场

静电荷产生静电场,而运动的电荷(电流)还产生另一种场——磁场,本节讨论电流与磁场之间的相互作用的规律。

1. 电流

电荷的流动形成了电流。若带电体在某处的电荷密度为 ρ , 该处电荷速度为 \mathbf{v} , 则定义该处的电流密度 \mathbf{J} 为

$$\mathbf{J} = \rho\mathbf{v} \quad (1.18)$$

它代表单位时间流过单位截面的电荷量,因此流过某一截面 Σ 上的电流为

$$I = \iint \mathbf{J} \cdot d\boldsymbol{\Sigma} = \frac{dq}{dt} \quad (1.19)$$

等于流过该面的电荷的时间变化率。

2. 电荷守恒定律

大量实验表明,电荷既不会凭空产生,也不会无故消失。无论宏观物理过程还是微观物理过程,参与过程的系统的电荷总量不变,这就是电荷守恒定律。或者说,对任意封闭曲面内部而言,如果内部的电荷量减少了,则减少的电荷一定是以

电流的形式穿过曲面流走,把这个思想翻译成数学语言可表述为:流出闭合曲面的电流

$$I = -\frac{dq}{dt} = -\frac{d\left(\iiint \rho(\mathbf{x}', t) dV\right)}{dt} = -\iiint \frac{\partial \rho(\mathbf{x}', t)}{\partial t} dV \quad (1.20)$$

其中 $\rho(\mathbf{x}', t)$ 是闭合曲面内的电荷密度。式(1.20)中对函数 $\rho(\mathbf{x}', t)$ 的两种不同的操作(对空间的积分和对时间的微分)顺序的交换,变成先求时间微分再算空间积分,使得在积分号外的时间微分变成了积分号内的时间偏微分。与此同时,流出闭合曲面的电流为

$$I = \oiint \mathbf{J} \cdot d\boldsymbol{\Sigma} = \iiint (\nabla \cdot \mathbf{J}) dV \quad (1.21)$$

比较式(1.20)和式(1.21),右边的积分对任意大小、任意形状、任意位置的体积都成立,因此

$$\nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (1.22)$$

式(1.22)就是电荷守恒定律的数学形式(微分形式),或称为电流连续性方程。

对局部而言,在某处电荷的减少($\frac{\partial \rho}{\partial t} < 0$)一定是以电流的形式流走($\nabla \cdot \mathbf{J} > 0$)。

若电流线上的某处流进、流出的电荷量相等,即该处电荷没有囤积或流失, $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ 。

因此该处有

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0 \quad (1.23)$$

满足上述条件的电流称为稳恒电流。对于整个闭合环路而言,稳恒电流的流线是闭合的,没有源头也没有终点。

3. 电流产生的磁场

一段通电的直导线,会使附近的指南针发生偏转,说明通电导线产生一种物质来影响指南针,这种物质弥散在全空间,称为磁场。如何衡量磁场的强弱大小?

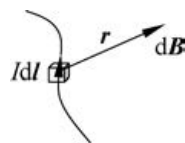
考虑带电体中的某体积元 dV ,内含电荷元 dq ,运动速度为 \mathbf{v} ,沿速度方向的长度元为 dl ,横截面为 S , $\mathbf{v}dq$ 称为电流元。

根据式(1.6)、式(1.18)和式(1.21),电流元可表示为 $\mathbf{J}dV$ 或 $I dl$,因为

$$\mathbf{v} dq = \mathbf{v} \rho dV = \mathbf{J} dV = \mathbf{J} S dl = \mathbf{J} \cdot S dl = I dl \quad (1.24)$$

如图 1.6 所示,由实验上测得通电导线中稳恒电流元 $I dl$ 在距离 r 处产生的磁场为

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I dl \times \mathbf{e}_r}{r^2} \quad (1.25)$$



\mathbf{B} 称为磁感应强度,其单位为 T(特斯拉), $\mu_0 = 4\pi \times$ 图 1.6 电流产生的磁场

$10^{-7} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$ (亨利每米) 是真空磁导率。式(1.25)称为 Biot-Savart (毕奥-萨伐尔) 定律。

反过来, 同样是一段通电的导线, 放在磁场中, 也受到磁场的作用力。测量一下导线所受的力, 就可以确定磁场的大小。实验上发现, 放在磁场 \mathbf{B} 中的电流为 I 的长度元为 $d\mathbf{l}$ 的导线, 电流元所受的力为

$$d\mathbf{F} = I d\mathbf{l} \times \mathbf{B} \quad (1.26)$$

称为 Ampere (安培) 力公式。

若有两个任意的闭合电流环 1 和 2, 如图 1.7 所示, 当中的稳恒电流分别为 I_1 和 I_2 , 电流环 1 中的电流元 $I_1 d\mathbf{l}_1$ 所产生的磁场 $d\mathbf{B}_1$ 对电流环 2 中的电流元 $I_2 d\mathbf{l}_2$ 的作用力为

$$d\mathbf{F}_{12} = I_2 d\mathbf{l}_2 \times d\mathbf{B}_1 = I_2 d\mathbf{l}_2 \times \frac{\mu_0 I_1 d\mathbf{l}_1 \times \mathbf{e}_r}{4\pi r^2}$$

同理, 电流环 2 中的电流元 $I_2 d\mathbf{l}_2$ 所产生的磁场对电流环 1 中的电流元 $I_1 d\mathbf{l}_1$ 的作用力为

$$d\mathbf{F}_{21} = I_1 d\mathbf{l}_1 \times d\mathbf{B}_2 = I_1 d\mathbf{l}_1 \times \frac{\mu_0 I_2 d\mathbf{l}_2 \times (-\mathbf{e}_r)}{4\pi r^2}$$

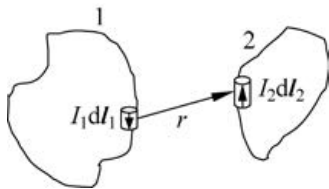


图 1.7 两个电流环的相互作用

值得注意的是, 利用矢量变换公式 $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})\mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\mathbf{C}$, 可知 $d\mathbf{F}_{12} \neq -d\mathbf{F}_{21}$, 即两个电流环中的电流元之间的相互作用并不遵从牛顿第三定律 (当然, 孤立的稳恒电流元并不存在)。但对两个电流圈整体而言, 两者之间的相互作用力仍然遵从牛顿第三定律, 大小相等, 方向相反, 即 $\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}$ 。

4. 稳恒电流磁场的两个重要性质

磁感强度 \mathbf{B} 穿过曲面 Σ 的量称为磁通量, 记为 $\Phi = \iint_{\Sigma} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{\Sigma}$ 。

Biot-Savart 定律式(1.25)描述的是稳恒电流产生的磁场, 它蕴含着两个重要的性质, 即

$$\oiint_{\Sigma} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{\Sigma} = 0 \quad (1.27)$$

$$\oint_l \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I \quad (1.28)$$

其中, I 为被闭合环路 l 包围着的电流。即磁场对任意形状的闭合曲面 Σ 的面积分为零, 磁场对任意形状的闭合环路 l 的路径积分正比于该环路所包围的电流。

进一步, 由 Gauss 定理和 Stokes 定理, 式(1.27)和式(1.28)可写成

$$\oiint_{\Sigma} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{\Sigma} = \iiint (\nabla \cdot \mathbf{B}) dV = 0 \quad (1.29)$$

$$\iint (\nabla \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{\Sigma} = \oint_l \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I = \mu_0 \iint \mathbf{J} \cdot d\mathbf{\Sigma} \quad (1.30)$$

它们对于任意形状和大小的曲面均成立,因此只能是等式两边的被积函数相等,于是稳恒电流磁场的性质可写成微分形式:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (1.31)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} \quad (1.32)$$

稳恒电流产生的磁场是无源有旋的,即磁场散度处处为零,而旋度在电流处不为零,式(1.32)称为 Ampere 环路定理。下面将会看到,在普遍的情况下,对于非稳恒磁场,磁场的闭合曲面面积分为零的结论即式(1.31)仍然成立;但磁场的闭合环路路径积分公式即式(1.32)需要修正。

1.3 由对称性确定电磁场

前面我们总结了静电场和稳恒电流磁场的规律,即式(1.13)、式(1.15)、式(1.31)和式(1.32)。电磁场所遵从的规律是偏微分方程组,对一般电磁系统而言,要求出问题的解是不容易的,只有那些电荷或电流分布具有很好对称性的系统,方可较为容易地求得方程的解。因为此时电场或磁场分布的某些特征可以由对称性原理直接得到。

电磁规律是左右对称的。以前,人们普遍相信物理定律是左右对称的,即任何物理过程的镜像也是一个可能的物理过程,认为自然定律的镜像对称性(或称“宇称不变性”)应是不言而喻的。但 1956 年李政道和杨振宁发现,在弱作用过程中,宇称不变性从未被证实过,随后吴健雄用实验验证了,宇称在弱作用过程中不是不变的。

对称性要求是凌驾于物理规律之上的,也就是说,物理规律必须要符合对称性的要求^①。由对称性可确定,极矢量必定是落在对称面上的,轴矢量必定是垂直于对称面的。

我们已经知道,电场是极矢量,而磁感强度是轴矢量(见“数学预备知识”)。因此,根据对称性的要求,可以通过下面的论证得到这样的结论:

对于具有对称分布的电荷或电流系统,如果系统的电荷对某一个平面具有对称分布,则在该平面上各点的电场方向就一定落在该平面上。

如果系统的电流对某一个平面具有对称分布,则在该平面上各点的磁场方向就一定垂直该平面。

先讨论电场的情况。若两个同号电荷源电荷密度 ρ 和 ρ' 关于平面 Π 镜像对称分布,两个观察点 M 和 M' 也关于平面 Π 镜像对称,如图 1.8(a)所示。由于电场是极矢量,于是在这两个观察点上,平行于对称面的电场分量相等,垂直于对称面的

^① 见参考文献[6]。

电场分量等量相反,即

$$\mathbf{E}'(M')_{//} = \mathbf{E}(M)_{//}, \quad \mathbf{E}'(M')_{\perp} = -\mathbf{E}(M)_{\perp}$$

于是,在对称面上, M 和 M' 重合,垂直于对称面的电场分量消失, $\mathbf{E}'(M')_{\perp} = -\mathbf{E}(M)_{\perp} = \mathbf{0}$,剩下落在平面上的平行分量。

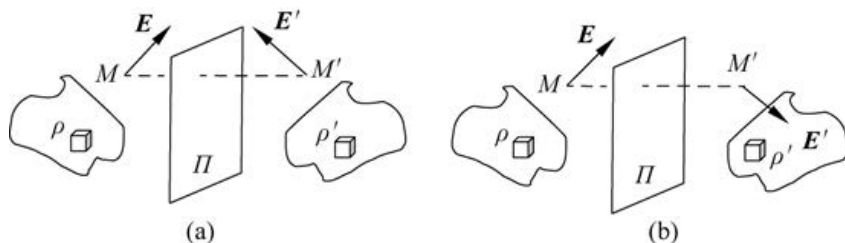


图 1.8 同/异号电荷源关于平面 Π 镜像对称分布

进一步,若两个异号电荷源 ρ 和 ρ' 关于平面 Π 镜像对称分布,两个观察点 M 和 M' 也关于平面 Π 镜像对称,如图 1.8(b) 所示,则在这两个观察点上,平行于对称面的电场分量等量相反,垂直于对称面的电场分量相等:

$$\mathbf{E}'(M')_{//} = -\mathbf{E}(M)_{//}, \quad \mathbf{E}'(M')_{\perp} = \mathbf{E}(M)_{\perp}$$

于是,在对称面上, M 和 M' 重合,平行于对称面的电场分量消失, $\mathbf{E}'(M')_{//} = -\mathbf{E}(M)_{//} = \mathbf{0}$,剩下垂直平面上的分量。

再来讨论磁场的情况。如图 1.9(a) 所示,若两个电流源 \mathbf{J} 和 \mathbf{J}' 关于平面 Π 镜像对称分布,两个观察点 M 和 M' 也关于平面 Π 镜像对称,由于磁感强度是轴矢量,则在这两个观察点上,平行于对称面的磁感强度分量等量相反,垂直于对称面的磁感强度分量相等,即

$$\mathbf{B}'(M')_{//} = -\mathbf{B}(M)_{//}, \quad \mathbf{B}'(M')_{\perp} = \mathbf{B}(M)_{\perp}$$

于是,在对称面上, M 和 M' 重合,平行于对称面的磁感强度分量消失, $\mathbf{B}'(M')_{//} = -\mathbf{B}(M)_{//} = \mathbf{0}$,剩下垂直平面上的分量。

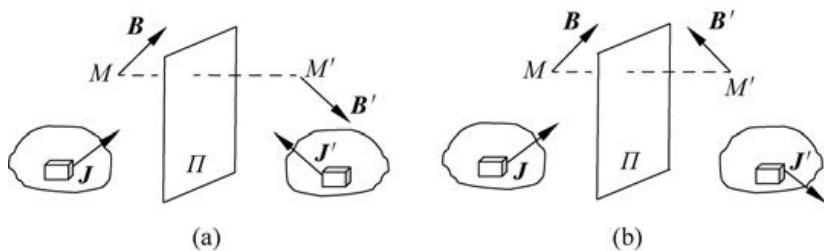


图 1.9 电流源关于平面 Π 镜像对称/反对称分布

进一步,如图 1.9(b) 所示,若两个电流源 \mathbf{J} 和 \mathbf{J}' 关于平面 Π 镜像反对称分布(即平行镜面分量改变符号,垂直镜面分量不变),两个观察点 M 和 M' 也关于平面 Π 镜像对称,则在这两个观察点上,平行于对称面的磁感强度分量相等,垂直于对称面的磁感强度分量等量相反:

$$\mathbf{B}'(M')_{//} = \mathbf{B}(M)_{//}, \quad \mathbf{B}'(M')_{\perp} = -\mathbf{B}(M)_{\perp}$$

于是,在对称面上,垂直于对称面的磁场分量消失, $\mathbf{B}'(M')_{\perp} = -\mathbf{B}(M)_{\perp} = 0$, 剩下落在平面上的平行分量。

我们已经知道,点电荷(一种最简单的球对称系统)的电场必定是球对称,只有径向分量。原因很简单,过球心作两个互相垂直的平面,这两个平面都是关于球对称系统(点电荷)的对称面,在这两个面相交线上的任一点,电场的方向都要同时落在两个对称面上,因此只有径向分量满足这个要求。

如图 1.10 所示,若系统是均匀的带电球体,即对 Π_1 平面和 Π_2 平面而言都是镜像对称的,可沿三个互相正交的方向分解为

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_r + \mathbf{E}_\varphi + \mathbf{E}_z$$

电场是极矢量,则电场也应对 Π_1 平面是镜像对称的,电场必定落在该面上, $E_\varphi = 0$, 同时电场也必定落在 Π_2 平面, $E_z = 0$, 只有径向分量 E_r 才同时满足这两个要求。因此,得出点电荷的电场必定是球对称的,就只有径向分量 E_r 。

同理,如图 1.11 所示,对无限长圆形截面均匀电流导线产生的磁场,在柱坐标下磁场可分解为

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_r + \mathbf{B}_\varphi + \mathbf{B}_z$$

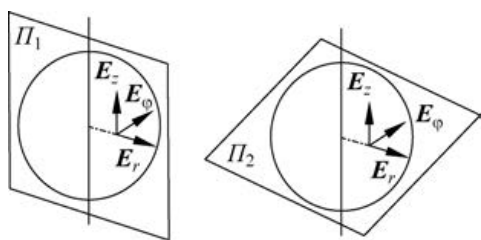


图 1.10 均匀的带电球体的电场分布

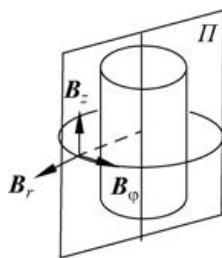


图 1.11 无限长圆柱均匀电流产生的磁场分布

设平面 Π 过导线轴线,这平面是轴对称系统(无限长圆直导线)的对称面,磁感强度是轴矢量,由于电流分布对 Π 平面是镜像对称的,则该面上的磁感强度方向必定垂直于该面,也即 $\mathbf{B}_r = \mathbf{B}_z = \mathbf{0}$, 只剩下切向矢量分量 \mathbf{B}_φ 。

同样的道理,对于无限长圆柱绝缘线上均匀分布的电荷,柱外的电场是沿径向分布的,而稳恒电流圆环在圆心处的磁场是垂直于圆环平面的。

例 1-1 半径为 a 的球状体中电荷量 Q 均匀分布,求球内外的电场。

解: 对具有球对称的系统,取与球状体共球心的半径为 r 的球面 Σ ,如图 1.12 所示,在该面上的每一点,电场的大小都相等,并且只有径向分量,因此在整个球面上的电通量积分为

$$\oiint \mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\Sigma} = E_r \oiint d\Sigma = E_r \cdot 4\pi r^2 = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_i q_i$$

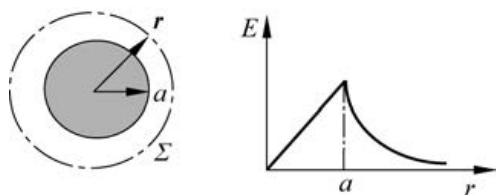


图 1.12 电荷均匀分布的球状体的电场

其中, $\sum_i q_i$ 为球面所包围的电荷量, 在球状体外的空间, 即球面半径大于球状体半径 ($r > a$), 则 $\sum_i q_i = Q$, 因此球外电场

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{e}_r \quad (r > a)$$

与点电荷产生的电场相同。对球状体内的空间, 均匀分布的电荷体密度为

$$\rho = \frac{Q}{4\pi a^3 / 3}$$

取球面半径 $r \leq a$, 球面内包围着的电荷量为

$$\sum_i q_i = \iiint \rho dV = \rho \cdot \frac{4\pi r^3}{3} = Q \cdot \left(\frac{r}{a}\right)^3$$

因此球内电场

$$\mathbf{E} = \frac{Qr}{4\pi\epsilon_0 a^3} \mathbf{e}_r \quad (r \leq a)$$

例 1-2 半径为 a 的无限长圆柱直导线均匀流过电流 I , 如图 1.13 所示, 求它所产生的磁场及其旋度。

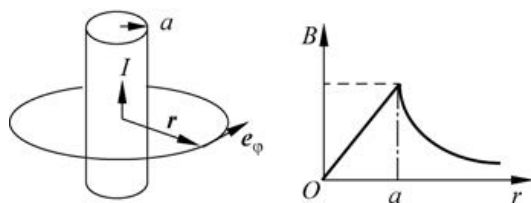


图 1.13 无限长圆柱直导线均匀电流的磁场

解: 对具有轴对称的系统, 在垂直于轴线的平面上取半径为 r 的圆环, 在该环上的每一点, 磁感强度的大小都相等, 并且只有切向分量, 因此磁感强度沿圆环的闭路积分有

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = B_\varphi \oint dl = B_\varphi \cdot 2\pi r = \mu_0 I'$$

其中 I' 为闭合环路所包围的电流, 在导线外的空间, 即圆环半径大于导线半径, 有 $I' = I$, 因此

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \mathbf{e}_\varphi \quad (r > a)$$

磁感强度只有切向分量,且反比于 r ,由柱坐标下的旋度公式(见“数学预备知识”)得,其旋度为零,即 $\nabla \times \mathbf{B} = \mathbf{0}$ 。

对直导线内的区域,闭合环路所包围的电流量为

$$I' = \iint \mathbf{J} \cdot d\boldsymbol{\Sigma} = \frac{I}{\pi a^2} \cdot \pi r^2 = I \frac{r^2}{a^2}$$

因此

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I r}{2\pi a^2} \mathbf{e}_\varphi \quad (r \leq a)$$

此处磁感强度正比于 r ,由柱坐标下的旋度公式,可得

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{r} \frac{\partial(rB_\varphi)}{\partial r} \mathbf{e}_z = \frac{\mu_0 I}{\pi a^2} \mathbf{e}_z$$

注意到例 1-1 和例 1-2 中在电磁体系的外部电场与 r^2 成反比,而磁感强度与 r 成反比。

1.4 Maxwell 方程组与 Lorentz 力

我们已经介绍了描述不随时间变化的“静态的”电磁现象的规律,现在进一步把研究领域拓展到含时的“动态的”范畴,从而构造建立起现代自然科学——经典电磁理论。

1. Faraday(法拉第)定律

实验表明,运动的磁铁会导致旁边的闭合线圈产生电流,或者相对磁铁运动的导体“切割”磁力线时,导体两端会产生电动势;两个互相嵌套的线圈,当一个线圈中的电流发生变化时,会在另一个线圈中产生电流,从这些现象可总结出 Faraday 电磁感应定律:变化的磁场产生感应电动势。

如图 1.14 所示,在磁场中有一闭合线圈 l ,令 Φ 为通过闭合线圈的磁通量,当磁场变化时,在磁场中的闭合线圈的感应电动势为

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt} \iint \mathbf{B} \cdot d\boldsymbol{\Sigma} \quad (1.33)$$

而感应电动势与导线内的感应电场的关系为^①

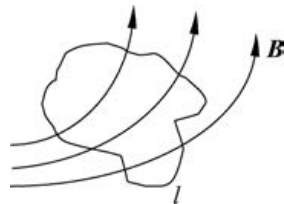


图 1.14 变化磁场中的闭合线圈会产生感应电动势

^① 关于电场与电势的关系可参见第 3 章。

$$\epsilon = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \quad (1.34)$$

其中的感应电场不是无旋的,因此它的环路积分不为零。

另一方面,由 Stokes 定理

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \iint (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot d\boldsymbol{\Sigma}$$

即

$$\iint (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot d\boldsymbol{\Sigma} = -\frac{d}{dt} \iint \mathbf{B} \cdot d\boldsymbol{\Sigma} = -\iint \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\boldsymbol{\Sigma} \quad (1.35)$$

于是有

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (1.36)$$

即变化的磁场可产生左旋电场,式(1.36)是 Faraday 电磁感应定律的微分形式。有旋电场是一种左旋场,即磁场增加的方向与由此产生的有旋电场的方向构成左手螺旋关系。作为对比,电流产生的磁场也是有旋场,但电流的方向和它所产生的磁场的方向成右手螺旋关系,所以是右旋场。

2. 位移电流

磁场旋度方程式(1.32)是在稳恒电流情况下导出的,事实上,对方程两边取散度,根据旋度的散度恒为零这一数学性质(见“数学预备知识”),则

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) = \mu_0 \nabla \cdot \mathbf{J} \equiv 0 \quad (1.37)$$

因此方程自动包含有稳恒电流的要求(电流线是闭合的, $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$)。但在一般的非稳恒电流的条件下,情况又会是怎么样的?

如图 1.15 所示,以交流电源和电容器组成的简单物理系统为例,电源向电容器充电,导线中有电荷流动,且没有电荷积累,电荷向电容器极板集结积累,但在极板之间是没有电荷的流动,此处 $\mathbf{J} = \mathbf{0}$,即在这里电流线不再闭合,电流不再是稳恒的,也即 $\nabla \cdot \mathbf{J} \neq 0$ 。

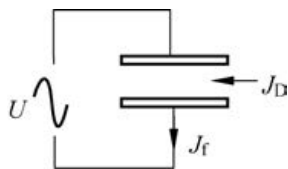


图 1.15 由交流电源和电容器组成的非稳恒电流系统

在非稳恒电流的一般情况下,磁场旋度方程式(1.32)是不自洽的。那么,其理论是保留下来还是推倒重来呢?

在 Faraday 实验的启发下,Maxwell(麦克斯韦)提出了关键的一步,在导线之外的极板之间补上一项虚拟的位移电流项 \mathbf{J}_D ,使得在电容极板中断的电流被接续下去,电流线仍闭合,总电流 $\mathbf{J} = \mathbf{J}_f + \mathbf{J}_D$ 仍满足稳恒条件:

$$\nabla \cdot (\mathbf{J}_f + \mathbf{J}_D) = 0 \quad (1.38)$$

其中 \mathbf{J}_f 是传统意义上的电荷流动形成的电流,称为传导电流,因此方程式(1.32)经修正后仍成立,即

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{J}_f + \mathbf{J}_D) \quad (1.39)$$

另一方面,要使方程式(1.39)能反映真正的物理规律,那么这项虚拟的位移电流 \mathbf{J}_D 必须能与可观测的电磁物理量相联系。比较电荷守恒定律式(1.22):

$$\nabla \cdot \mathbf{J}_f + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

及式(1.38)有

$$\nabla \cdot \mathbf{J}_D = \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

而由 Gauss 定理式(1.13),可得

$$\rho = \epsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E}$$

因此

$$\nabla \cdot \mathbf{J}_D = \frac{\partial(\epsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E})}{\partial t} = \epsilon_0 \nabla \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right)$$

即

$$\mathbf{J}_D = \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mathbf{C} \quad (1.40)$$

其中 \mathbf{C} 为常矢量,从数学上来说, \mathbf{J}_D 并不能唯一确定,但从物理上考虑,对于真空且无电磁场的区域 ($\mathbf{J} = \mathbf{0}, \rho = 0, \mathbf{E} = \mathbf{0}, \mathbf{B} = \mathbf{0}$),若方程仍要成立,必须取 $\mathbf{C} = \mathbf{0}$,则式(1.39)变为

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}_f + \mu_0 \mathbf{J}_D = \mu_0 \mathbf{J}_f + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (1.41)$$

于是,在式(1.32)Ampere 环路定理中补上位移电流这一项,这样既修正完善了方程,同时也不违反电荷守恒定律,则问题迎刃而解。

3. Lorentz 力公式

Maxwell 方程组描述了电磁场的运动规律,而带电体系所受的电磁力作用,是由 Lorentz 总结的。根据式(1.2),在电场中,带电粒子所受的电场力为 $\mathbf{F} = q\mathbf{E}$,对体积元 dV 内电荷所受的电场力可写成

$$d\mathbf{F} = \rho \mathbf{E} dV$$

记 $\mathbf{f} = \frac{d\mathbf{F}}{dV}$ 为单位体积系统所受的力,称为力密度,电场力密度为

$$\mathbf{f}_e = \rho \mathbf{E}$$

另外,在磁场中,长为 $d\mathbf{l}$ 的通电导线的受力由安培定律式(1.26)给出

$$d\mathbf{F} = I d\mathbf{l} \times \mathbf{B} = \mathbf{J} dV \times \mathbf{B}$$

于是单位体积系统所受的磁力为 $\mathbf{f}_m = \mathbf{J} \times \mathbf{B}$ 。综合起来,包含电荷密度 ρ 和电流密度 \mathbf{J} 的电磁系统在电磁场所受的电磁力密度为

$$\mathbf{f} = \mathbf{f}_e + \mathbf{f}_m = \rho \mathbf{E} + \mathbf{J} \times \mathbf{B} \quad (1.42)$$

称为 Lorentz 力。单个带电粒子所受的电磁力为

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (1.43)$$

4. 电磁现象的普遍规律

描述电磁世界的基本规律总结如下。

Maxwell 方程组的微分形式为

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (\text{MG})$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (\text{MF})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (\text{M0})$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (\text{MA})$$

Lorentz 力公式为

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) + \mathbf{R} \quad (\text{L1})$$

相应地, Maxwell 方程组的积分形式为

$$\oiint_{\Sigma} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{\Sigma} = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad (\text{MG})$$

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\iint \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{\Sigma} \quad (\text{MF})$$

$$\oiint_{\Sigma} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{\Sigma} = 0 \quad (\text{M0})$$

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \iint \mathbf{J} \cdot d\mathbf{\Sigma} + \mu_0 \epsilon_0 \iint \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \cdot d\mathbf{\Sigma} \quad (\text{MA})$$

方程式(MG)是 Gauss 定理,它是库仑定律严格遵守反平方定理的体现,也说明电荷是电场的源泉;方程式(MF)是 Faraday 定理,它体现了动磁生电的思想;方程式(M0)反映的是磁场的无源性,即任何一条磁力线都是闭合的,没有起点也没有终点,也就是说,不存在着磁荷(磁单极);方程式(MA)是 Ampere 环路定理加上 Maxwell 位移电流的修正,体现了动电生磁的思想。建立在 Maxwell 方程组和 Lorentz 力公式基础上的电磁理论称为经典电动力学。

事实上,Maxwell 方程组自动满足电荷守恒定律,这容易从方程组中看出,对式(MG)求时间导数和对式(MA)取其散度,并注意到求时间导数和取散度的次序可作交换

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} &= \epsilon_0 \frac{\partial \nabla \cdot \mathbf{E}}{\partial t} = \epsilon_0 \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \\ \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) &= \mu_0 \nabla \cdot \mathbf{J} + \mu_0 \epsilon_0 \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \equiv 0 \end{aligned}$$

因此有

$$\nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

Maxwell 方程组是偏微分方程组,当给定空间电荷和电流分布,以及给定电磁场的初始条件和研究区域的边界条件时,电磁场的解唯一由 Maxwell 方程组确定,因此 Maxwell 方程组是完备的。另外,从方程的形式上看,Maxwell 方程组有着若干优美的对称性(见本章附录 1)。

Maxwell 凭借优异的数学基础和敏锐的思维在理论上统一了电和磁,并预言了电磁波的存在,成为继牛顿之后 19 世纪最伟大的物理学家。我们会惊讶地发现,原来支配缤纷多彩的电磁世界的规律却又是如此的简单、朴素、漂亮和对称,我们不得不赞叹大自然造物主的伟大,可以说,如果没有 Maxwell 方程组,就没有我们的现代文明,我们至今仍在黑暗中摸索。

带电粒子在电磁场中运动,受到电磁力的作用式(L1)而作加速运动,因而产生电磁辐射(见第 5 章),而辐射的电磁场会伴随着能量向外辐射,因而相当于存在一个辐射的反冲作用力,称为辐射阻尼力 \mathbf{R} (radiation reaction),它与电荷的加速度有关,虽然一般而言,它是个小量,忽略它并不显著影响计算结果,但在经典电动力学(狭义相对论平直时空)的框架内,是无法解决这个问题的,这是经典电动力学的悬案,寄望将来也许在广义相对论弯曲时空的框架下有所突破。

例 1-3 无限长直导线流过缓慢变化电流 $I(t)$,如图 1.16 所示,求它所产生的感应电场。

解: 由于电流变化缓慢,适用静场近似,在距离导线 r 处产生的磁场切向分量大小为 $B = \mu_0 I / 2\pi r$,磁场变化缓慢,并且绕直导线转圈,根据式(MF), \mathbf{E} 与 $\partial \mathbf{B} / \partial t$ 互相垂直,也即 $\mathbf{E} \perp \mathbf{B}$,因此电场的切向分量 E_φ 为零;另外,电场的轴向分量 E_z 与坐标变量 z 无关,根据式(MG)得

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{r} \frac{\partial(rE_r)}{\partial r} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0$$

则感应电场的径向分量 $E_r = \frac{C}{r}$,结合在轴线附近($r \rightarrow 0$)的 E_r 有限的要求,常数 $C=0$,即感应电场的径向分量为零,因此感应出的电场方向是沿轴向方向, $\mathbf{E} = E(r)\mathbf{e}_z$ 。

应用式(MF)的积分形式,选长方形(虚线)为电场积分环路,左右两端的电场方向与路径方向垂直,路径积分为零,因此

$$\begin{aligned} \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} &= E(r_0)l - E(r)l = - \iint \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\boldsymbol{\Sigma} \\ &= - \frac{\mu_0 l}{2\pi} \frac{dI}{dt} \int_{r_0}^r \frac{1}{r} \cdot dr = - \frac{\mu_0 l}{2\pi} \frac{dI}{dt} \ln \frac{r}{r_0} \end{aligned}$$

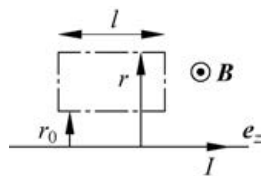


图 1.16 无限长直导线缓变电流感应产生电磁场

在 r 处感应产生的电场为

$$\mathbf{E}(r) = \left(E_0 + \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{dI}{dt} \ln \frac{r}{r_0} \right) \mathbf{e}_z$$

观察一下这个结果,你会发现,随着 $r \rightarrow \infty$, 电场趋于无穷大; 这个令人惊讶的结果当然不对,原因是,电流的变化引起磁场的变化,而磁场的变化是需要时间传递的(以光速 c 传播),在 t 时刻到达 r 处的磁场是在之前的 $\tau = t - r/c$ 时刻 ($\tau < t$) 发出的,因此静场近似只适用于电流变化缓慢和距离不太远的情况,在极远处,该电场公式已经不适用了。

1.5 能量守恒定律、电磁场的能流密度、能量密度和能量传输

虽然电磁场看不见摸不着,但它也是物质的一种存在形式,因此它也同样具有物质的种种特性,即它具有能量、质量、动量、角动量和(能量流动形成的)能流。

无论是力学系统、电磁系统,或者其他系统,不管其运动形式如何,其运动的能力都有一个共同的量度——能量,而运动的形式可以互相转化,伴随着这种转化,能量从一种形式转换成另一种形式,从一个物体传递到另一个物体。对孤立系统,在能量的转换和传递的过程中,各种形式、各个物体的能量的总和保持不变。这个规律被称为能量守恒定律,它是物理学的普遍规律,其根源来自于系统 Lagrangian (拉格朗日量)对时间平移的对称性。

这一节首先把这个物理学的普遍规律——能量守恒定律用严谨的数学语言表达出来,然后应用到具体电磁系统,把电磁系统的能量、能流、动量、角动量等物理量用电磁场量来表示,再重点讨论电磁能量的存储和传输。

1. 能量守恒定律的数学形式

如图 1.17 所示,考虑区域 V 内能量以场的形式进入而产生的变化。设 V 的边界为 Σ , \mathbf{f} 为场对区域内物质的作用力密度, \mathbf{v} 为区域内物质的运动速度,定义:

能流密度 \mathbf{S} ——单位时间内穿过单位截面的能量。

能量密度 w ——单位体积内的能量。

场对区域 V 内的物质做功的功率为

$$\iiint_V (\mathbf{f} \cdot \mathbf{v}) dV;$$

区域 V 内场的能量增加率为 $\iiint_V \frac{\partial w}{\partial t} dV;$

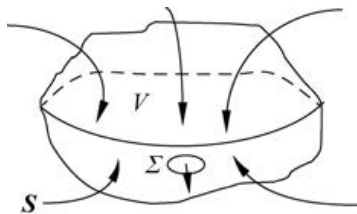


图 1.17 穿过界面 Σ 进入区域 V 内的能流

单位时间进入区域 V 内的场的总能量为(负号代表流进的能量) $-\oint \mathbf{S} \cdot d\boldsymbol{\Sigma}$ 。

由能量守恒定律,能量既不会凭空产生,也不会无故消失。对区域 V 而言,单位时间内穿过区域 V 的表面 Σ 而进入的能量等于区域内能量的增加率和对系统做的功,即

$$-\oint \mathbf{S} \cdot d\boldsymbol{\Sigma} = \iiint_V \frac{\partial \omega}{\partial t} dV + \iiint_V (\mathbf{f} \cdot \mathbf{v}) dV \quad (1.44)$$

另外,由 Gauss 定理,有

$$\oint_{\Sigma} \mathbf{S} \cdot d\boldsymbol{\Sigma} = \iiint_V (\nabla \cdot \mathbf{S}) dV$$

即

$$-\iiint_V (\nabla \cdot \mathbf{S}) dV = \iiint_V \frac{\partial \omega}{\partial t} dV + \iiint_V (\mathbf{f} \cdot \mathbf{v}) dV$$

上式对于任意形状、任意位置、任意大小的区域都成立,因此只能是等式两边的被积函数相等,于是有

$$-\nabla \cdot \mathbf{S} = \frac{\partial \omega}{\partial t} + \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \quad (1.45)$$

这就是能量守恒定律的微分形式,表明单位时间内能量在某点流进的净增量等于在该点囤积的能量增加率,加上对该处物质做功的功率。它是一条普适的定律,并不局限于电磁系统,其他形式的能量同样成立。

2. 电磁场的能流密度、能量密度

对电磁系统,设区域 V 内有电荷 ρ , 电流 \mathbf{J} , \mathbf{v} 为电荷的运动速度, \mathbf{f} 为电磁场对电荷的作用力密度,则 Lorentz 力由式(1.42)得

$$\mathbf{f} = \rho \mathbf{E} + \mathbf{J} \times \mathbf{B}$$

将 Maxwell 方程组代入电磁场的 \mathbf{E} 和 \mathbf{B} 公式,可推导出 \mathbf{S} 有无数多的选择,迄今为止尚无一种实验能判定哪个是正确的解,一种最简单的选择是(见本章附录 2)

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \times \mathbf{B} \quad (1.46)$$

同时

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \epsilon_0 \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (1.47)$$

式(1.46)中的 \mathbf{S} 称为 Poynting(坡印廷)矢量,是描述单位时间内穿过单位截面的电磁场所携带的能量。式(1.46)和式(1.47)与目前为止所有的实验结果是自洽的。进一步,式(1.47)变成

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \frac{\epsilon_0}{2} \frac{\partial \mathbf{E}^2}{\partial t} + \frac{1}{2\mu_0} \frac{\partial \mathbf{B}^2}{\partial t}$$