第 3 章

泛函空间与线性算子

泛函分析或算子方法是分布参数系统控制的主要数学工具. 本章首先介绍距离空间 (主要指赋范空间及内积空间) 上的各种拓扑性质, 如收敛性、紧性、压缩映射等; 然后讨论泛函空间中一些主要线性算子的性质及应用, 包括有界算子、连续算子、稠定算子、伴随算子及算子谱理论等; 最后对 Sobolev 空间作一简要介绍.

3.1 距离空间

首先我们给出距离的定义并讨论其基本属性. 距离是实数集 $\mathbb{R}$ 上两点距离, 即两元函数 $d(x,y)=|x-y|$ 的推广.

定义 3.1.1 设 X 为一非空集合, 如果存在从 $X\times X=\{(x,y)\,|\,x,y\in X\}$ 到 $\mathbb{R}$ 的映射 d, 使得 $\forall\, x,y,z\in X$, d 满足

(1) 非负性: $d(x,x)\geqslant 0$, $d(x,y)=0\Longleftrightarrow x=y$;

(2) 对称性: $d(x,y)=d(y,x)$;

(3) 三角不等式: $d(x,y)\leqslant d(x,z)+d(z,y)$.

则称 $d(x,y)$ 为 X 中元 x 和 y 之间的距离, 而赋以距离 d 的集合 X 叫做距离空间, 记作 (X,d).

注意 $X\times X$ 上任意二元函数 d 只要满足定义中的三个属性, 都叫做距离. 距离反映的是 X 中两个元之间的接近程度. 此外, 同一集合 X 中可有不同的距离, 比如 d_1 和 d_2, 从而 (X,d_1) 和 (X,d_2) 是两个不同的距离空间.

还要注意的是, 这里的集合不一定是数集, 也不一定有线性结构. 为直观起见, 今后称距离空间中的元为“点”. 在上下文已经明确且不会引致混淆的情形下, “距离空间 (X,d)” 就简记为 “距离空间 X”.

例 3.1.1 在 $\mathbb{R}$ 中定义 $d(x,y)=|x-y|$, 则 $(\mathbb{R},d)$ 是一距离空间. □

例 3.1.2 设 $\mathbb{R}^n=\{x=(\xi_1,\cdots,\xi_n)\,|\,\xi_k\in\mathbb{R},1\leqslant k\leqslant n\}$, 在 $\mathbb{R}^n$ 中定义

$$d_2(x,y)=\left(\sum_{k=1}^{n}(\xi_k-\eta_k)^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

其中 $x=(\xi_1,\cdots,\xi_n)$, $y=(\eta_1,\cdots,\eta_n)\in\mathbb{R}^n$. 今证 d_2 是 $\mathbb{R}^n$ 上的一个距离. 事实上, 对

于任意 $a_k, b_k \in \mathbb{R}$, $k = 1, 2, \cdots, n$ 和任意 $\lambda \in \mathbb{R}$, 我们有

$$0 \leqslant \sum_{k=1}^{n} (a_k + \lambda b_k)^2 = \sum_{k=1}^{n} a_k^2 + 2\lambda \sum_{k=1}^{n} a_k b_k + \lambda^2 \sum_{k=1}^{n} b_k^2.$$

上式右端是 λ 的二次多项式, 其最小值

$$\left[\sum_{k=1}^{n} a_k^2 \sum_{k=1}^{n} b_k^2 - \left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \right)^2 \right] \Big/ \sum_{k=1}^{n} b_k^2$$

必须非负, 从而得到

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \right)^2 \leqslant \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \sum_{k=1}^{n} b_k^2.$$

这就是著名的 Cauchy 不等式.

d_2 满足距离属性 (1) 和 (2) 是明显的. 下面证明 d_2 满足距离属性 (3). 注意从 Cauchy 不等式可得

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)^2 &= \sum_{k=1}^{n} a_k^2 + 2 \sum_{k=1}^{n} a_k b_k + \sum_{k=1}^{n} b_k^2 \\ &\leqslant \sum_{k=1}^{n} a_k^2 + 2 \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2 \sum_{k=1}^{n} b_k^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \sum_{k=1}^{n} b_k^2 \\ &= \left(\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right)^2. \end{aligned}$$

设 $x = (\xi_1, \cdots, \xi_n)$, $y = (\eta_1, \cdots, \eta_n)$, $z = (\zeta_1, \cdots, \zeta_n) \in \mathbb{R}^n$, 并令 $a_k = \xi_k - \zeta_k$, $b_k = \zeta_k - \eta_k$, $k = 1, \cdots, n$, 代入上式即得

$$\left(\sum_{k=1}^{n} (\xi_k - \eta_k)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} (\xi_k - \zeta_k)^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{k=1}^{n} (\zeta_k - \eta_k)^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

此即距离属性 (3). 于是 $(\mathbb{R}^n, d_2)$ 是距离空间, 通常称为欧几里得空间, 简称欧氏空间, 而 d_2 则叫做欧氏距离. □

例 3.1.3 设 $C[a, b]$ 表示 $[a, b]$ 到 $\mathbb{R}$ 的所有连续函数组成的集合, 对于 $f, g \in C[a, b]$, 定义

$$d_1(f, g) = \int_a^b |f(t) - g(t)| \mathrm{d}t,$$

则 $(C[a, b], d_1)$ 是一距离空间. □

例 3.1.4 设 (X,d) 是一距离空间, 令

$$d_1(x,y)=\frac{d(x,y)}{1+d(x,y)},\quad \forall\, x,y\in X,$$

则 d_1 也是 X 上的一个距离. 事实上, 距离属性 (1) 和 (2) 显然成立; 至于属性 (3), 只需注意

$$f(\alpha)=\frac{\alpha}{1+\alpha}$$

是 $\alpha>0$ 的单调递增函数, 从而 $\forall\,\alpha>0,\ \beta>0$, 有

$$\frac{\alpha+\beta}{1+\alpha+\beta}<\frac{\alpha+\beta+\alpha\beta}{1+\alpha+\beta+\alpha\beta}<\frac{\alpha+\beta+2\alpha\beta}{1+\alpha+\beta+\alpha\beta}=\frac{\alpha}{1+\alpha}+\frac{\beta}{1+\beta}.$$

□

定义距离的主要目的是刻画空间中点之间的逼近, 也就是收敛. 今后为记号简单起见, 距离空间 X 中的序列 $\{x_n\,|\,n\geqslant 1\}$ 通常简记作 $\{x_n\}$.

下面介绍 $\mathbb{R}^n$ 中开集、闭集、内点、稠集等拓扑概念, 它们是一般拓扑空间的特例, 进一步的讨论与证明均可见 第 6 章 .

定义 3.1.2 距离空间 X 中的点列 $\{x_n\}$ 叫做收敛于 $x_0(\in X)$, 或称 $\{x_n\}$ 以 x_0 为极限, 是指 $d(x_n,x_0)\to 0\ (n\to\infty)$. 这时我们写作

$$\lim_{n\to\infty}x_n=x_0,\quad \text{或 } x_n\to x_0.$$

有时为确切起见, $x_n\to x_0$ 也写作 $x_n\to x_0\ (n\to\infty)$. 距离空间中的收敛具有数学分析中数列收敛所具有的一些性质, 特别地有如下定理.

定理 3.1.1 在距离空间 X 中, 每个点列至多收敛于一个点, 并且若点列 $\{x_n\}$ 收敛于 x_0, 则 $\{x_n\}$ 的任意子列 $\{x_{n_k}\}$ 也收敛于 x_0.

注意我们引进距离所关心的主要是它所规定的收敛. 因此, 对于同一集合上的两个距离, 如果它们定义出相同的收敛, 则我们就应该认为这两个距离并没有本质的区别. 于是我们提出如下的距离等价性定义.

定义 3.1.3 集合 X 上两个距离 d_1 和 d_2 叫做等价的, 是指它们在 X 上规定出相同的收敛, 即

$$d_1(x_n,x_0)\to 0(n\to\infty)\Longleftrightarrow d_2(x_n,x_0)\to 0(n\to\infty).$$

例 3.1.5 在 $\mathbb{R}^n$ 中定义距离 $d(x,y)=\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n}|\xi_k-\eta_k|$, 那么这个距离在 $\mathbb{R}^n$ 上规定的收敛是按坐标收敛; 而例 3.1.2 中的距离 d_2 规定的收敛是平均收敛. 容易看出, 有

$$d(x,y)\leqslant d_2(x,y)\leqslant\sqrt{n}d(x,y),\quad \forall\, x,y\in\mathbb{R}^n,$$

从而 d 和 d_2 是 $\mathbb{R}^n$ 上两个等价的距离. □

例 3.1.6 在 $C[a,b]$ 中定义

$$d_\infty(f,g)=\max_{a\leqslant t\leqslant b}|f(t)-g(t)|,\quad \forall\, f,g\in C[a,b],$$

则 d_∞ 是 $C[a,b]$ 中的一个距离, 它所规定的收敛是连续函数列在区间 $[a,b]$ 上的一致收敛, 而例 3.1.3 中距离 d_1 所规定的收敛则是连续函数列在区间 $[a,b]$ 上的积分平均收敛. 显然

$$d_1(f,g)\leqslant (b-a)d_\infty(f,g).$$

因此, 若函数列 $\{f_n\}$ 按距离 d_∞ 收敛, 则它也按距离 d_1 收敛; 但反之则不然. 比如, 令

$$f_n(t)=\begin{cases}\frac{b+(n-1)a-nt}{b-a}, & \text{若 } a\leqslant t\leqslant t+\frac{b-a}{n},\\ 0, & \text{若 } a\leqslant t+\frac{b-a}{n}<t\leqslant b,\end{cases}$$

则 $d_1(f_n,0)=\frac{b-a}{2n}\to 0(n\to\infty)$, 但 $d_\infty(f_n,0)=1,\ \forall\, n\geqslant 1$. 因此, d_1 和 d_∞ 是 $C[a,b]$ 中两个不等价的距离. □

下面讨论距离空间中的点集. 在距离空间 X 中, 设 $x_0\in X$, $r>0$, 点集

$$B_r(x_0)=\{x\in X\,|\,d(x,x_0)<r\}$$

叫做以点 x_0 为中心, 以 r 为半径的开球. 若上式中 "$<$" 换成 "$\leqslant$", 则相应的点集叫做闭球. 记作 $\overline{B}_r(x_0)$.

定义 3.1.4 设 M 为距离空间 X 中一子集. 点 $x\in X$ 叫做 M 的内点, 如果存在 $\varepsilon>0$, 使得 $B_\varepsilon(x)\subset M$. M 的内点全体叫做 M 的内部, 记作 $\mathring{M}$. 若 $M=\mathring{M}$, 则称 M 为开集.

例 3.1.7 在欧氏距离下 $\mathbb{R}$ 中的开球、闭球分别是开、闭区间; $\mathbb{R}^2$ 中的开球、闭球分别为不带边界、带边界的圆盘; $\mathbb{R}^3$ 中的开球、闭球则是平常初等几何中熟知的概念. □

定理 3.1.2 设 X 为距离空间, 那么: (1) X 中的任意集合的内部都是开集; (2) X 中任意多个开集之并仍是开集; (3) X 中有穷个开集之交仍是开集.

定义 3.1.5 设 M 为距离空间 X 中的子集. 点 $x\in X$ 叫做 M 的极限点 (也称聚点), 是指存在序列 $\{x_n\}\subset(M\setminus\{x\})$, 使得 $x_n\to x$.

容易看出, x 是 M 的极限点, 当且仅当

$$M\cap(B_\varepsilon(x)\setminus\{x\})\neq\varnothing,\quad \forall\,\varepsilon>0.$$

注意, 点集 M 的极限点可以属于 M, 也可以不属于 M. 例如, 在 $\mathbb{R}$ 中取 $M=\{t\,|\,0\leqslant t<1\}$, 则 M 中的点都是其极限点, 并且 1 也是 M 的极限点, 但 1 不在 M 中.

定义 3.1.6 设 M 为距离空间 X 的子集. (1) 若 M 的余集 M^c 为开集, 则称 M 为闭集; (2) 包含 M 的最小闭集叫做 M 的闭包, 记作 $\overline{M}$.

注意, 由 De Morgan 公式可知, 任意多个闭集之交是闭集, 有限个闭集之并是闭集. 因此, 包含 M 的最小闭集即为包含 M 的所有闭集之交.

例 3.1.8 距离空间 X 中的空集 $\varnothing$、全空间 X 以及闭球都是闭集. □

定理 3.1.3 设 M 为距离空间 X 中的任意子集. 那么 M 是闭集当且仅当 M 包含其所有的极限点.

定义 3.1.7 设 M 为距离空间 X 中的子集. $x \in X$ 称为 M 的边界点, 如果对于任意 $\varepsilon > 0$, $B_\varepsilon(x)$ 中既有 M 的点, 又有不在 M 的点. M 的边界点全体叫做 M 的边界, 记作 ∂M.

从定义直接看出, $\partial M = \overline{M} \cap \overline{M^c}$.

定义 3.1.8 设 M 和 N 为距离空间 X 中的两个子集, $M \subset N$. M 称为在 N 中稠, 如果 $N \subset \overline{M}$; 若 M 在全空间 X 中稠, 则简称 M 为稠集; 若 X 有一可数稠子集, 则称 X 是可分空间.

例 3.1.9 在 $C[a,b]$ 上定义上确界距离: $d(x,y) = \max\limits_{a \leqslant t \leqslant b} |x(t) - y(t)|$, 从 Weirstrass 定理知道, 多项式集在 $C[a,b]$ 中稠. 另一方面, 显然任意实系数多项式可以用有理系数多项式任意逼近, 但有理系数多项式全体形成可数集, 因此 $C[a,b]$ 是可分的. □

下面讨论距离空间之间映射的连续性.

定义 3.1.9 设 (X,d) 和 (Y,ρ) 为两个距离空间. 映射 $T: X \to Y$ 称为在点 $x_0 \in X$ 处连续, 如果对于 X 中的点列 $\{x_n\}$ 有

$$d(x_n, x_0) \to 0 \Longrightarrow \rho(Tx_n, Tx_0) \to 0.$$

如果 T 在 X 的每一点处都连续, 则称 T 在 X 上连续, 或简称 T 是连续映射.

由距离空间到数集 $\mathbb{K}$ 的映射通常叫做函数或泛函. 例如, 固定一点 $a \in X$, X 的泛函 $d(x,a)$ 是连续的. 事实上, 这是因为

$$|d(x_n,a) - d(x_0,a)| \leqslant d(x_n,x_0) \to 0 \ (n \to \infty).$$

定理 3.1.4 为了从距离空间 (X,d) 到距离空间 (Y,ρ) 的映射 T 是连续的, 当且仅当 $\forall \varepsilon > 0, \forall x_0 \in X$ 存在 $\delta = \delta(x_0,\varepsilon) > 0$, 使得

$$d(x,x_0) < \delta \Longrightarrow \rho(Tx,Tx_0) < \varepsilon. \tag{3.1.1}$$

证明 (必要性) 设 T 连续而条件 (3.1.1) 不成立, 于是存在一正数 $\varepsilon > 0$ 与一点 x_0, 使得对于每一自然数 n, 必有一点 $x_n \in X$ 满足

$$d(x_n,x_0) < 1/n, \quad \text{但 } \rho(x_n,x_0) \geqslant \varepsilon.$$

这就是说, $d(x_n,x_0)\to 0$, 但 $\rho(Tx_n,Tx_0)\not\to 0$, 与 T 的连续性矛盾. 因此, 条件 (3.1.1) 是必要的.

(充分性) 设条件 (3.1.1) 成立, 而 X 中点列 $\{x_n\}$ 收敛于 x_0. 给定 $\varepsilon>0$, 取定条件中的正数 δ, 又有 $x_n\to x_0$, 故可取充分大的自然数 $n_0=n_0(\delta)$, 使得 $n\geqslant n_0\Longrightarrow d(x_n,x_0)<\delta$. 于是根据式 (3.1.1), 当 $n\geqslant n_0$ 时 $\rho(Tx_n,Tx_0)<\varepsilon$. 这正是说 $\rho(Tx_n,Tx_0)\to 0$, 证明了 T 是连续映射. □

下面考虑距离空间的完备化. 我们知道有理数集 $\mathbb{Q}$ 和实数集 $\mathbb{R}$ 在同一距离 $d(x,y)=|x-y|$ 下都是距离空间, 但它们之间有本质区别, 这就是 $\mathbb{Q}$ 是不完备的, 而 $\mathbb{R}$ 是完备的.

定义 3.1.10 称距离空间 X 中的点列 $\{x_n\}$ 为基本列或 Cauchy 列, 如果对于任意 $\varepsilon>0$, 必有自然数 N, 使得当 $m,n>N$ 时有 $d(x_m,x_n)<\varepsilon$.

显然收敛列一定是基本列, 反之则不然. 比如, 有理数集 $\mathbb{Q}$ 中由 π 的近似值组成的数列是一基本列, 但它在 $\mathbb{Q}$ 中却没有极限.

定义 3.1.11 在距离空间 X 中, 如果每一个基本列都收敛到 X 的一点, 则称 X 为完备的.

在数学分析中, 实数集 $\mathbb{R}$ 中 Cauchy 列必收敛于一实数是一个熟知的事实, 称为 Cauchy 准则. 因此, 一维欧氏空间是完备的.

例 3.1.10 n 维欧氏空间 $(\mathbb{R}^n,d_2)$ 是完备的. 事实上, 设 $\{x_n\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的基本列, 令

$$x_k=(\xi_1^k,\cdots,\xi_n^k),\quad \xi_j^k\in\mathbb{R},\ j=1,\cdots,n.$$

对于每个 j, $j=1,\cdots,n$,

$$|\xi_j^k-\xi_j^m|\leqslant\left(\sum_{i=1}^n|\xi_i^k-\xi_i^m|^2\right)^{\frac{1}{2}}=d_2(x_k,x_m),$$

故 $\{\xi_j^k\,|\,k\geqslant 1\}$ 是 $\mathbb{R}$ 中的基本列, 从而收敛于某个 $\xi_j\in\mathbb{R}$. 记 $x=(\xi_1,\cdots,\xi_n)\in\mathbb{R}^n$, 则显然 $d_2(x_k,x)\to 0$, 从而证明了 $\mathbb{R}^n$ 的完备性. □

例 3.1.11 $C[a,b]$ 在上确界距离 $d_\infty(f,g)=\max\limits_{a\leqslant t\leqslant b}|f(t)-g(t)|$ 下是完备的.

事实上, 设 $\{f_n\}$ 是 $C[a,b]$ 中的基本列, 则 $\forall\varepsilon>0$, 存在自然数 $n_0=n_0(\varepsilon)$, 使得

$$m,n\geqslant n_0\Longrightarrow\max_{a\leqslant t\leqslant b}|f_n(t)-f_m(t)|<\varepsilon.\tag{3.1.2}$$

于是对于每个 $t\in[a,b]$, $\{f_n(t)\,|\,n\geqslant 1\}$ 是 $\mathbb{R}$ 中基本列, 从而存在 $f(t)\in\mathbb{R}$, 使得 $f_n(t)\to f(t)(n\to\infty)$. 在式 (3.1.2) 中让 $m\to\infty$, 得到

$$n\geqslant n_0\Longrightarrow|f_n(t)-f(t)|\leqslant\varepsilon,$$

上式表明 $\{f_n\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 $f\in C[a,b]$, 这就证明了 $C[a,b]$ 的完备性. □

例 3.1.12 $C[0,1]$ 中赋以距离 $d_1(f,g)=\int_0^1|f(t)-g(t)|\mathrm{d}t$ 所得到的距离空间 $(C[a,b],d_1)$ 是不完备的.

事实上, 我们在 $C[0,1]$ 中构造函数

$$f_n(t)=\begin{cases}0, & 0\leqslant t\leqslant \frac{1}{2},\\ n(t-\frac{1}{2}), & \frac{1}{2}<t\leqslant \frac{1}{2}+\frac{1}{n},\\ 1, & \frac{1}{2}+\frac{1}{n}<t\leqslant 1.\end{cases}$$

显然函数列 $\{f_n\}\subset C[0,1]$, 并且当 $m\geqslant n$ 时,

$$d_1(f_m,f_n)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{m}\right)<\frac{1}{2n}.$$

因此, $\{f_n\}$ 是距离空间 $(C[0,1],d_1)$ 中的基本列. 今若有 $f\in C[0,1]$ 使得 $d_1(f_n,f)\to 0$, 则当 $t\in(0,\frac{1}{2})$ 时必须有 $f(t)=0$. 这是因为若有 $t_0\in(0,\frac{1}{2})$, $f(t_0)\neq 0$, 则由连续函数性质, 存在 $\delta>0$, 使得 $B(t_0;\delta)\subset(0,\frac{1}{2})$, 而当 $t\in B(t_0,\delta)$ 时, $|f(t)|\geqslant\frac{1}{2}|f(t_0)|$. 于是当 $n\geqslant n_0$ 时,

$$d_1(f_n,f)\geqslant 2\delta\frac{1}{2}|f(t_0)|=\delta|f(t_0)|>0,$$

与 $d_1(f_n,f)\to 0$ 相矛盾.

类似地可证, 当 $t\in(\frac{1}{2},1)$ 时, $f(t)=0$. 因此, f 在 $t=\frac{1}{2}$ 处不连续, 从而 $\{f_n\}$ 在距离空间 $(C[0,1],d_1)$ 中不可能收敛, 表明 $(C[0,1],d_1)$ 是不完备的. □

一个距离空间之所以不完备, 是由于它有一些基本列没有收敛的点. 直观地说, 就是此类空间中有一些 "空隙". 对这种不完备的距离空间, 可以加进一些 "新的点" 形成一个更大的空间, 使得在这个更大的空间中, 所有的基本列都收敛于一点, 从而新的空间是完备的. 这一过程称为距离空间的完备化. 实际上, 有理数集扩充为实数集的过程就是这种完备化过程具体体现. 一个不完备的距离空间都可以通过完备化过程扩充为一个完备的距离空间. 限于篇幅, 这里我们将略去这部分内容的叙述, 有兴趣的读者可参阅, 例如文献 [18, 40].

定义 3.1.12 设 X 为距离空间, $T:X\to X$ 称为压缩映射, 如果它满足

$$d(Tx,Ty)\leqslant\alpha d(x,y),\quad\forall x,y\in X,$$

其中 $\alpha\in(0,1)$ 为一正常数, 称为压缩系数; X 中的点 x 叫做 T 的不动点, 如果它满足不动点方程: $Tx=x$.

下面的压缩映射原理, 也称 Banach 不动点原理, 是分析中一个强有力的工具.

定理 3.1.5 (压缩映射原理) 设 T 为完备距离空间 X 中的压缩映射, α 为相应的压缩系数. 那么 T 在 X 中有唯一的不动点.

证明 任取 $x_0 \in X$, 令 $x_{n+1} = Tx_n$, $n = 0, 1, 2, \cdots$. 今证 $\{x_n\}$ 是 X 中的基本列. 事实上, 对于每一自然数 n 有

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n-1}) &= d(Tx_{n-1}, Tx_{n-2}) \leqslant \alpha d(x_{n-1}, x_{n-2}) \\ &\leqslant \alpha^2 d(x_{n-2}, x_{n-3}) \leqslant \cdots \leqslant \alpha^{n-1} d(x_1, x_0). \end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned} d(x_{n+k}, x_n) &\leqslant d(x_{n+k}, x_{n+k-1}) + \cdots + d(x_{n+1}, x_n) \\ &\leqslant (\alpha^{n+k-1} + \cdots + \alpha^n) d(x_1, x_0) \leqslant \frac{\alpha^n}{1-\alpha} d(x_1, x_0). \end{aligned}$$

由于 $0 < \alpha < 1$, 故上述不等式表明 $\{x_n\}$ 是 X 中的基本列. 又由于 X 是完备的, 所以存在 $x \in X$ 使得 $x_n \to x$. 由于压缩映射显然是连续的, 所以

$$Tx = \lim_{n\to\infty} Tx_n = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = x,$$

即 x 是 T 的不动点. 现在设 y 是 T 的另一个不动点, 于是

$$d(x, y) = d(Tx, Ty) \leqslant \alpha d(x, y).$$

由于 $0 < \alpha < 1$, 故必有 $d(x, y) = 0$, 即 $x = y$. □

上述证明过程实际上反映了求解方程 $Tx = x$ 的迭代解法的收敛性. 注意在证明中, 我们得到了一个估计式

$$d(x_{n+k}, x_n) \leqslant \frac{\alpha^n}{1-\alpha} d(x_1, x_0).$$

若在上式中让 $k \to \infty$, 则得

$$d(x, x_n) \leqslant \frac{\alpha^n}{1-\alpha} d(x_1, x_0),$$

这是用迭代法求解方程 $Tx = x$ 时的收敛速率的估计式.

例 3.1.13 考察线性积分方程

$$x(t) = f(t) + \lambda \int_a^b K(t, s) x(s) \mathrm{d}s, \tag{3.1.3}$$

其中 λ 为实参数. 设 $f \in C[a, b]$, $K(t, s)$ 在 $[a, b] \times [a, b]$ 上连续. 我们在赋以上确界距离下的完备的距离空间 $C[a, b]$ 中将式 (3.1.3) 写成不动点方程形式: $Tx = x$, 其中 $T : C[a, b] \to C[a, b]$ 定义为

$$(Tx)(t) = f(t) + \lambda \int_a^b K(t, s) x(s) \mathrm{d}s, \quad \forall\, x \in C[a, b].$$

于是对 $x, y \in C[a,b]$, 有

$$\begin{aligned} d(Tx,Ty) &= |\lambda| \max_{a\leqslant t\leqslant b} \left| \int_a^b K(t,s)(x(s)-y(s))\mathrm{d}s \right| \\ &\leqslant |\lambda| \max_{a\leqslant t\leqslant b} \int_a^b |K(t,s)|\mathrm{d}s \; d(x,y). \end{aligned}$$

因此, 如果

$$|\lambda| \max_{a\leqslant t\leqslant b} \int_a^b |K(t,s)|\mathrm{d}s < 1, \tag{3.1.4}$$

那么 T 是 $C[a,b]$ 中的压缩映射, 从而有唯一不动点. 这就是说, 只要参数 λ 充分小使得式 (3.1.4) 满足, 则式 (3.1.3) 在 $C[a,b]$ 中有唯一解. □

下面讨论距离空间的列紧性. 在实数理论中我们知道, 任何有界数列必存在收敛子列, 或等价地, 实数域 $\mathbb{R}$ 中任何有界的无穷子集至少有一个极限点. 这就是实数集中有界集的列紧性原理, 这种列紧性实质上与 Cauchy 收敛准则, Heine-Borel 有限覆盖定理等是等价的, 奠定了数学分析的严格的理论基础.

在距离空间中, 一个点集称为是有界的, 如果它能包含在某个球之中. 那么自然要问, 在一般的距离空间中, 任意有界的无穷点列是否也一定有收敛子列呢? 可以设想, 这是一个非常重要的理论问题.

我们来考察距离空间 $C[0,1]$ 中的点列 $\{x_n\}$: $x_n(t) = t^n$, $n = 1, 2, \cdots$. 显然 $\{x_n\}$ 是有界的: 取 $x_0(t) \equiv 0$, 则

$$d(x_n, x_0) = \max_{t\in[0,1]} |x_n(t)| = \max_{t\in[0,1]} |t^n| = 1, \quad n = 1, 2, \cdots.$$

今证 $\{x_n\}$ 没有收敛子列. 事实上, 若 $\{x_{n_k}\}$ 是其收敛子列, 并且 $d(x_{n_k}, x) \to 0$ $(k \to \infty)$. 注意到 $C[0,1]$ 中收敛就是函数列的一致收敛, 因此

$$x(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant t < 1, \\ 1, & t = 1. \end{cases}$$

这与函数 x 在 $t = 1$ 处的连续性相矛盾.

因此, 一般距离空间中有界集不一定具有列紧性.

定义 3.1.13 设 M 为距离空间 X 的一子集. 我们称 M 为相对列紧的, 如果 M 中任一无限点列 $\{x_n\}$ 都有收敛子列 $\{x_{n_k}\}$, 使得 $x_{n_k} \to x \in X$; 进而若收敛子列的极限都在 M 中, 则称 M 是列紧的. 特别, 若空间 X 本身是列紧的, 则称 X 是列紧空间.

定理 3.1.6 设 M 是距离空间 X 中的一集合, 那么

(1) 若 M 是相对列紧的, 则 M 是有界的, 并且其闭包是列紧的;

(2) 若 X 是列紧的, 则 X 是完备的, 并且当 M 是闭集时 M 也是列紧的.

证明 (1) 设 M 是相对列紧的, 若 M 无界, 则存在 M 一无限点列 $\{x_n\}$, 使得 $d(x_0,x_n)>n$, 其中 x_0 是 X 的某个固定点. 显然 $\{x_n\}$ 的任何子列不可能收敛, 与 M 的相对列紧性矛盾, 因此 M 必定有界. 现在设 $\{x_k\}\subset\overline{M}$, 于是对于每个 k, 存在 $y_k\in M$, 使得 $d(x_k,y_k)<1/k$. 由于 M 是相对列紧的. 故存在子列 $\{y_{n_k}\}$, 使得 $y_{n_k}\to x_0$ $(k\to\infty)$. 从

$$d(x_{n_k},x_0)\leqslant d(x_{n_k},y_{n_k})+d(y_{n_k},x_0)<1/n_k+d(y_{n_k},x_0)\to 0,$$

可知 $x_{n_k}\to x_0$. 但 $\overline{M}$ 是闭的, 故 $x_0\in\overline{M}$, 这就证明了 $\overline{M}$ 的列紧性.

(2) 设 $\{x_n\}$ 是列紧距离空间 X 的一基本列, 故 $\{x_n\}$ 有收敛于某 x 的子列 $\{x_{n_k}\}$. 于是对于任给的 $\varepsilon>0$, 存在自然数 k_0 和 N_0, 使得

$$k\geqslant k_0\Longrightarrow d(x_{n_k},x)<\frac{\varepsilon}{2},\quad m,n\geqslant N_0\Longrightarrow d(x_m,x_n)<\frac{\varepsilon}{2}.$$

现在取 k_1 充分大, 使得 $n_{k_1}\geqslant N_0$. 于是当 $n\geqslant n_{n_{k_1}}$ 时, 有

$$d(x_n,x)\leqslant d(x_n,x_{n_{k_1}})+d(x_{n_{k_1}},x)<\varepsilon/2+\varepsilon/2=\varepsilon.$$

这表明 $x_n\to x$, 即 X 中基本列都收敛, 从而 X 是完备的. 至于最后一个结论, 即闭集的列紧性是显然的. □

定义 3.1.14 设 M 为距离空间 X 的一子集.

(1) 对正数 ε, 若存在子集 E 使得 $M\subset\bigcup_{x\in E}B_\varepsilon(x)$, 则称 E 是 M 的一个 ε-网.

(2) 若对任一正数 ε, 存在 M 的一个有限的 ε-网, 即存在有限点集 $E_\varepsilon=\{x_1,\cdots,x_n\}$, 使得 $M\subset\bigcup_{k=1}^n B(x_k,\varepsilon)$, 则称 M 是全有界的.

(3) 设 $\mathcal{U}$ 是 X 的一子集族, 称 $\mathcal{U}$ 是 M 的一个覆盖, 是指 $M\subset\bigcup_{B\in\mathcal{U}}B$; 而这时若 $\mathcal{U}$ 中每一集合都是 X 中的开集, 则称 $\mathcal{U}$ 是 M 的一开覆盖; 而若 $\mathcal{U}$ 仅包含有限个集合, 则称 $\mathcal{U}$ 是 M 的有限覆盖; 最后若 $\mathcal{U}$ 中一个子集族 $\mathcal{V}$ 就覆盖了 M, 则称 $\mathcal{V}$ 是 M 子覆盖.

定理 3.1.7 设 X 是距离空间, 则如下 3 个命题是等价的:

(1) X 是列紧的;

(2) X 是全有界且完备的;

(3) X 的每一开覆盖都含有一个有限的子覆盖.

证明 先证 (1)$\Longrightarrow$(2). 设 X 是列紧空间. 注意列紧空间一定是完备的, 这是因为若 X 中基本列有一子列收敛于一点, 则整个序列也收敛于这一点. 今若 X 不是全有界的, 则对某个 $\varepsilon>0$, 不存在 X 的有限 ε-网. 于是任取 $x_1\in X$, $B(x_1,\varepsilon)$ 不能包含整个 X, 故有 $x_2\in X\setminus B(x_1,\varepsilon)$. 同理, $B(x_1,\varepsilon)\cup B(x_2,\varepsilon)$ 不能包含整个 X, 故有 $x_3\in X\setminus(B(x_1,\varepsilon)\cup B(x_2,\varepsilon))$. 一般地, 可取 $x_n\in X\setminus\bigcup_{k=1}^{n-1}B(x_k,\varepsilon)$. 如此, 我们得到 X 中一个无限点列 $\{x_n\}$, $d(x_n,x_m)\geqslant\varepsilon$, $m\neq n$. 显然, $\{x_n\}$ 没有收敛子列, 这与 X 的列紧性矛盾. 因此 X 一定是全有界的.

下证 (2)$\Longrightarrow$(3). 设 X 是全有界且完备的. 今若 (3) 不成立, 则 X 必有一开覆盖 $\mathcal{U}$ 没有有限覆盖. 设 $B_0=X$, 然后用归纳法构造出 X 中开球 $B_1,B_2,\cdots,B_n$, 满足: ① B_n

的半径是 $1/2^n$; ② $B_n \cap B_{n-1} \neq \varnothing$; ③ $\mathcal{U}$ 中没有有限子集族覆盖 B_n. 现在来构造开球 B_{n+1}, 使之仍然具有上述特性. 注意全有界空间的子集 B_n 也是全有界的, 因此 B_n 能被有限个半径为 $1/2^{n+1}$ 的开球族 $\{V_1, \cdots, V_m\}$ 覆盖, 当然, 不妨可以要求 $V_j \cap B_n \neq \varnothing$, $1 \leqslant j \leqslant m$. 在 $V_1, \cdots, V_m$ 中至少有一个球不能被 $\mathcal{U}$ 中有限个集合覆盖, 因为否则的话, B_n 就被 $\mathcal{U}$ 中有限个开集覆盖了. 将 $V_1, \cdots, V_m$ 中不能被 $\mathcal{U}$ 中有限个开集覆盖的开球用 B_{n+1} 表示, 显然 B_{n+1} 满足上述要求.

这样我们得到一无限开球序列 $\{B_n \,|\, n \geqslant 1\}$. 设开球 B_n 的球心在 x_n, 由于 $B_n \cap B_{n-1} \neq \varnothing$, 因此, 当 $n \geqslant 2$ 时, $d(x_n, x_{n-1}) \leqslant 1/2^n + 1/2^{n-1} < 1/2^{n-2}$. 于是, 当 $j > k \geqslant m \geqslant 1$ 时, 有

$$d(x_k, x_j) \leqslant \sum_{i=k}^{j-1} d(x_i, x_{i+1}) < \sum_{i=k}^{j-1} \frac{1}{2^{i-1}} < \frac{1}{2^{k-1}} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^i} \leqslant \frac{1}{2^{k-2}}.$$

由此可见 $\{x_n\}$ 是 X 中的一个基本列, 但 X 是完备的, 从而存在 $x_0 \in X$, 使得 $x_n \to x_0$. 由于 $\mathcal{U}$ 是 X 的覆盖, 故存在一集合 $U \in \mathcal{U}$, 使得 $x_0 \in U$. 由于 U 是开集, 故存在 $\varepsilon > 0$ 使得 $B(x_0, \varepsilon) \subset U$. 然后选取一充分大的自然数 $N > 1$, 使得 $\frac{1}{2^N} < \frac{\varepsilon}{2}$ 和 $d(x_N, x_0) < \frac{\varepsilon}{2}$. 于是对于任意 $x \in B_N$, 有

$$d(x, x_0) \leqslant d(x, x_N) + d(x_N, x_0) < 1/2^N + \varepsilon/2 < \varepsilon,$$

这表明 $x \in B(x_0, \varepsilon)$, 从而 $B_N \subset B(x_0, \varepsilon) \subset U$, 与属性③相矛盾. 于是关于 X 的有限覆盖的命题 (3) 成立.

最后证 (3)$\Longrightarrow$(1). 设 (3) 成立, $\{x_n\}$ 是 X 中任一点列. 对于每一自然数 n, 设 F_n 为集合 $\{x_n, x_{n+1}, \cdots\}$ 的闭包. 今证开集族 $\{F_n^c \,|\, n \geqslant 1\}$ 不能覆盖 X. 事实上, 若 $\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n^c = X$, 则从 (3) 可知有有限个 F_n^c 就能覆盖 X, 不妨设 $\bigcup_{k=1}^{n} F_k^c = X$. 由此可得 $\bigcap_{k=1}^{n} F_k = \varnothing$, 矛盾. 因此 $\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n^c \neq X$. 设 $x_0 \in (\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n^c)^c = \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$. 对于每一 k, 由于 $x_0 \in F_k$, 故存在 $n_k \geqslant k$, 使得 $d(x_{n_k}, x_0) < 1/2^n$. 从而 $x_{n_k} \to x_0$, 即 $\{x_{n_k}\}$ 是收敛子列. □

定理 3.1.7 中条件 (3) 称为 "有限开覆盖性质". 在一般拓扑空间 X 中, 通常当集合 M 具有有限开覆盖性质时称其为紧集, 紧性与列紧性是有区别的. 但正如定理 3.1.7 所述, 在距离空间中紧性和列紧性是等价的. 因此在本章中, 我们对术语 "紧" 和 "列紧" 将不作严格区分.

在一个具体的距离空间中, 验证一个集合的列紧性并不是一件容易的事情. 这里我们不作证明地列出 $C[a, b]$ 中集合的列紧性条件.

定理 3.1.8 (Arzela-Ascoli **定理**) 设 $C[a, b]$ 是赋以上确界距离下的距离空间, $M \subset C[a, b]$. 那么, M 是相对列紧的, 当且仅当

(1) M 是一致有界的, 即存在正常数 μ, 使得

$$|f(t)| \leqslant \mu, \quad \forall\, f \in M,\ t \in [a, b];$$

(2) M 是一等度连续函数族, 即 $\forall \varepsilon > 0$, 存在常数 $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, 使得

$$|f(t) - f(s)| < \varepsilon, \quad \forall f \in M,\ \forall t, s \in [a, b],\ |t - s| < \delta.$$

实际上, Arzela-Ascoli 定理对更一般的连续函数空间 $C(\Omega)$ 也是对的, 这里 Ω 是某个距离空间中的紧集, $C(\Omega)$ 表示定义在 Ω 上连续函数全体所形成的距离空间, 距离定义为

$$d(x, y) = \max_{t \in \Omega} |x(t) - y(t)|.$$

3.2 赋范线性空间

在 3.1 节中, 我们引进了距离的概念, 并通过距离引入了收敛或极限的概念, 为分析奠定了基础. 本节进一步考虑具有线性结构的距离空间, 也就是说, 我们考虑的距离空间 X 中有元素的加法和数乘运算, 并且 X 相对于这些运算还是封闭的, 即

$$x, y \in X,\ \alpha \in \mathbb{K} \quad \Longrightarrow \quad x + y \in X,\ \alpha x \in X,$$

这里 $\mathbb{K}$ 表示线性空间所基于的数域, 可以是实数域, 也可以是复数域. 在一般情形下我们将不指出线性空间的数域, 这时可以理解成实线性空间, 也可以理解成复线性空间. 本书中我们假定读者已经熟悉了线性空间的基本概念和理论.

首先我们给出范数的定义.

定义 3.2.1 设 X 是数域 $\mathbb{K}$ 上的线性空间. X 上的范数是指从 X 到 $\mathbb{R}$ 的一个映射: $x \mapsto \|x\|$, 它对于任意的 $x, y \in X, \alpha \in \mathbb{K}$ 满足

(1) 非负性: $\|x\| \geqslant 0$, $\|x\| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$;

(2) 比例性: $\|\alpha x\| = |\alpha|\ \|x\|$;

(3) 三角不等式: $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$.

$\|x\|$ 叫做点 x 的范数. 赋以范数的线性空间叫做赋范线性空间或线性赋范空间, 有时也简称赋范空间, 记作 $(X, \|\cdot\|)$.

当上下文已经明确或约定成俗的情形下, 往往简称线性赋范空间 X, 而不再特别说明所用的范数.

在线性赋范空间 X 中, 若令 $d(x, y) = \|x - y\|$, 则易见 d 是 X 中的一个距离, 称为由范数导出的距离, 从而 (X, d) 是一个距离空间. 于是线性赋范空间 X 中像开集、闭集、收敛和极限等这样一些拓扑概念都可以借助由范数导出的距离给出. 例如, 开球 $B(x_0, \varepsilon) = \{x \in X \,|\, \|x - x_0\| < \varepsilon\}$, 而 $x_n \to x_0 (n \to \infty)$ 意指 $\|x_n - x_0\| \to 0 (n \to \infty)$.

今后, 涉及极限, 例如 $x_n \to x_0 (n \to \infty)$, 有时为了记号简单起见, 在不致引起歧义的情形下, 往往会省略 $(n \to \infty)$.

定义 3.2.2 若一个线性赋范空间 X 按其导出的距离是一个完备的距离空间, 则称该线性赋范空间是一个 Banach 空间.

在列举一些常见的线性赋范空间的例子之前, 我们先证明一些有用的不等式.

引理 3.2.1 设 $a \geqslant 0, b \geqslant 0,\ p > 1, q > 1,\ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, 那么

$$a^{\frac{1}{p}} b^{\frac{1}{q}} \leqslant \frac{a}{p} + \frac{b}{q}. \tag{3.2.1}$$

证明 设 $0 < \alpha < 1$, 并令 $f(x) = x^{\alpha} - \alpha x,\ 0 < x < \infty$. 不难看出 $f(x)$ 在 $x = 1$ 时达到最大值 $1 - \alpha$, 从而

$$x^{\alpha} \leqslant \alpha x + (1 - \alpha), \quad 0 < x < \infty.$$

特别在上式中取 $x = \frac{a}{b}$, $\alpha = \frac{1}{p}$, $1 - \alpha = \frac{1}{q}$, 即得式 (3.2.1). □

今后我们记 $\ell^p = \left\{ x = \{\xi_k\} \;\middle|\; \sum\limits_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p < \infty \right\}$.

引理 3.2.2 (Hölder 不等式) 设 $p > 1, q > 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,\ x = \{\xi_k\} \in \ell^p,\ y = \{\eta_k\} \in \ell^q$. 那么如下 Hölder 不等式成立

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k \eta_k| \leqslant \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\eta_k|^q \right)^{\frac{1}{q}}. \tag{3.2.2}$$

证明 在式 (3.2.1) 中令 $\alpha = a^{\frac{1}{p}}$, $\beta = b^{\frac{1}{q}}$, 得到

$$\alpha\beta \leqslant \frac{\alpha^p}{p} + \frac{\beta^q}{q}, \quad \alpha \geqslant 0,\ \beta \geqslant 0.$$

然后在上式中令

$$\alpha = \frac{|\xi_j|}{\left(\sum\limits_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}}, \quad \beta = \frac{|\eta_j|}{\left(\sum\limits_{k=1}^{\infty} |\eta_k|^q \right)^{\frac{1}{q}}},$$

得到

$$\frac{|\xi_j|\,|\eta_j|}{\left(\sum\limits_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum\limits_{k=1}^{\infty} |\eta_k|^q \right)^{\frac{1}{q}}} \leqslant \frac{|\xi_j|^p}{p \sum\limits_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p} + \frac{|\eta_j|^q}{q \sum\limits_{k=1}^{\infty} |\eta_k|^q}.$$

最后对 j 从 1 到 ∞ 求和, 即得式 (3.2.2). □

引理 3.2.3 (Minkowski 不等式) 设 $p \geqslant 1,\ x,\ y \in \ell^p$, 其中 $x = \{\xi_k\},\ y = \{\eta_k\}$. 那么如下 Minkowski 不等式成立

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k + \eta_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\eta_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}. \tag{3.2.3}$$

证明 $p=1$ 显见. 因此下面假设 $p>1$, 并且 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. 今设 $z=\{\zeta_k\}\in\ell^p$, 并令 $\tilde{z}=\{|\zeta_k|^{p-1}\}$. 由于 $(p-1)q=p$, 故 $\tilde{z}\in\ell^q$.

注意对于任意数 a,b, 有

$$|a+b|^p\leqslant(2\max\{|a|,|b|\})^p\leqslant 2^p(|a|^p+|b|^p). \tag{3.2.4}$$

于是从式 (3.2.4) 推出 $\{\xi_k+\eta_k\}\in\ell^p$, 从而利用 Hölder 不等式 (3.2.2) 得到

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty}|\xi_k+\eta_k|^p&\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}|\xi_k+\eta_k|^{p-1}|\xi_k|+\sum_{k=1}^{\infty}|\xi_k+\eta_k|^{p-1}|\eta_k|\\&\leqslant\left[\left(\sum_{k=1}^{\infty}|\xi_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{k=1}^{\infty}|\eta_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right]\left(\sum_{k=1}^{\infty}|\xi_k+\eta_k|^p\right)^{\frac{1}{q}}.\end{aligned}$$

然后经适当整理即得 Minkowski 不等式 (3.2.3). □

例 3.2.1 ℓ^p 空间 $(1\leqslant p\leqslant\infty)$. 当 $1\leqslant p<\infty$ 时, 从引理 3.2.3 可见 ℓ^p 是一线性空间. 定义

$$\|x\|_p=\left(\sum_{k=1}^{\infty}|\xi_k|^p\right)^{\frac{1}{p}},\quad\forall\,x=\{\xi_k\}\in\ell^p.$$

从引理 3.2.3 看出, $\|x\|_p$ 是 ℓ^p 上的一个范数. 今证 $(\ell^p,\|\cdot\|_p)$ 是完备的, 从而是一个 Banach 空间. 事实上, 设 $\{x_n\,|\,n\geqslant1\}$ 是 ℓ^p 中一基本列, 这里 $x_n=\{\xi_k^{(n)}\}$, $n\geqslant1$. 于是对于每一自然数 k 有

$$\left|\xi_k^{(m)}-\xi_k^{(n)}\right|\leqslant\|x_m-x_n\|_p,$$

由此可见, $\{\xi_k^{(n)}\,|\,n\geqslant1\}$ 是 $\mathbb{K}$ 中一基本列, 从而存在 $\xi_k^{(0)}\in\mathbb{K}$, 使得 $\xi_k^{(n)}\to\xi_k^{(0)}(n\to\infty)$. 记 $x_0=\{\xi_k^{(0)}\}$.

对于任给的 $\varepsilon>0$, 存在自然数 $N=N(\varepsilon)$, 使得当 $m,n>N$ 时 $\|x_m-x_n\|_p<\varepsilon$. 于是当 $m,n>N$ 时

$$\left(\sum_{j=1}^{k}|\xi_j^{(m)}-\xi_j^{(n)}|^p\right)^{\frac{1}{p}}\leqslant\|x_m-x_n\|_p<\varepsilon,\quad\forall\,k\geqslant1.$$

在上式中让 $m\to\infty$, 得到

$$\left(\sum_{j=1}^{k}|\xi_j^{(0)}-\xi_j^{(n)}|^p\right)^{\frac{1}{p}}\leqslant\|x_0-x_n\|_p\leqslant\varepsilon,\quad\forall\,k\geqslant1.$$

然后在上式中再让 $k\to\infty$ 即得

$$\left(\sum_{j=1}^{\infty}|\xi_j^{(0)}-\xi_j^{(n)}|^p\right)^{\frac{1}{p}}\leqslant\varepsilon,\quad\forall\,n>N.$$

上式表明, $x_0 \in \ell^p$, 并且 $x_n \to x_0$. 这样我们证明了 ℓ^p 中每一基本列都有极限, 从而 ℓ^p 是完备的, 即 ℓ^p 是 Banach 空间.

当 $p=\infty$ 时, 令 $\ell^\infty = \left\{x=\{\xi_k\} \,\middle|\, \sup_{1\leqslant k<\infty}|\xi_k|<\infty\right\}$, 并令

$$\|x\|_\infty = \sup_{1\leqslant k<\infty}|\xi_k|, \quad \forall\, x=\{\xi_k\}\in\ell^\infty,$$

那么容易验证 $\|x\|_\infty$ 是 ℓ^∞ 的一个范数, 并且 ℓ^∞ 也是一个 Banach 空间. □

例 3.2.2 $L^p(E)$ 空间 $(1\leqslant p\leqslant\infty)$. 设 E 是 $\mathbb{R}$ 中一可测集, $\mathrm{m}(E)<\infty$, 先令 $1\leqslant p<\infty$ 为一给定常数. 设 $L^p(E)$ 表示 E 上所有 p 次幂勒贝格可积函数的集合, 这里 E 上函数 f 的 p 次幂指 $|f(x)|^p$. 今后, $L^p(E)$ 几乎处处相等的函数认为是同一个函数, 因此, 严格地说, $L^p(E)$ 中元素是 p 次可积函数的等价类. 对于 $f\in L^p(E)$, 令

$$\|f\|_p = \left(\int_E |f(x)|^p \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}},$$

则

$$L^p(E) = \{f\in\mathcal{M}(E)\,|\,\|f\|_p<\infty\},$$

这里 $\mathcal{M}(E)$ 表示 E 上可测函数全体.

设 $f\in\mathcal{M}(E)$, 如果存在一正常数 μ, 使得 $|f(x)|\leqslant\mu$, a.e. 于 E, 则称 f 是一本性有界函数; 对于如此的上界 μ 取下确界, 记作 $\|f\|_\infty$, 称为 f 的本性上界. $L^\infty(E)$ 表示 E 上所有本性有界函数构成的集合. 容易验证, 对于 $f\in L^\infty(E)$ 有

$$\|f\|_\infty = \inf_{\omega\subset E,\,\mathrm{m}(\omega)=0}\ \sup_{x\in E\setminus\omega}|f(x)|.$$

设 $f,g\in L^p(E)$, 并且 $p\geqslant 1, q\geqslant 1$, 则从式 (3.2.4) 可知

$$|f(x)+g(x)|^p \leqslant 2^p(|f(x)|^p+|g(x)|^p), \quad x\in E.$$

上式两边在 E 上积分, 得到

$$\int_E |f(x)+g(x)|^p\mathrm{d}x \leqslant 2^p\left(\int_E|f(x)|^p\mathrm{d}x+\int_E|g(x)|^p\mathrm{d}x\right).$$

由此可见当 $f,g\in L^p(E)$ 时, $f+g\in L^p(E)$, 而若 $\alpha\in\mathbb{K}$, 则 $\alpha f\in L^p(E)$ 是显然的. 因此, $L^p(E)$ 是一个线性空间. 这一结论显然对于 $p=\infty$ 也是对的. □

我们将证明 $\|f\|_p$ 是 $L^p(E)$ 中的范数. 为此, 我们需要一些准备. 利用类似于 ℓ^p 情形的方法, 可以证明函数形式的 Hölder 不等式和 Minkowski 不等式.

引理 3.2.4 (Hölder 不等式) 设 $p>1$, $q>1$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, $f\in L^p(E)$, $g\in L^q(E)$. 那么如下 Hölder 不等式成立

$$\int_E |f(x)g(x)|\mathrm{d}x \leqslant \left(\int_E|f(x)|^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_E|g(x)|^q\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}}. \tag{3.2.5}$$

引理 3.2.5 (Minkowski 不等式) 设 $p \geqslant 1$, $f, g \in L^p(E)$. 那么如下 Minkowski 不等式成立

$$\left(\int_E |f(x)+g(x)|^p \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\int_E |f(x)|^p \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_E |g(x)|^p \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{3.2.6}$$

例 3.2.3 (例 3.2.2 的继续) 下面证明 $\|f\|_p$ 是 $L^p(E)$ 中的范数. 首先考虑 $1 \leqslant p < \infty$ 的情形. 从勒贝格积分理论可知, $\|f\|_p = 0$ 等价于 $f(x) = 0$, a.e. 于 E, f 是零元, 于是范数性质 (1) 成立; 范数性质 (2) 是显然的; 从 Minkowski 不等式直接可得范数性质 (3) 成立. 因此 $\|f\|_p$ 确实是一个范数. 当 $p = \infty$ 时, 证明将更直接简单. □

下面考虑 $L^p(E)$ 空间的完备性. 设 $\{f_n \,|\, n \geqslant 1\}$ 是 $L^p(E)$ 的一基本列, 我们要证明存在 $f \in L^p(E)$ 使得 $f_n \to f (n \to \infty)$. 由于 $\|f_n - f_m\|_p \to 0\,(n, m \to \infty)$, 故可取一列自然数 $\{n_j \,|\, j \geqslant 1\}$, $n_1 < n_2 < \cdots$, 使得

$$\|f_{n_{j+1}} - f_{n_j}\|_p < 1/2^j.$$

对于每个自然数 k, 记 $E_k = E \cap \{x \in \mathbb{R} \,|\, |x| < k\}$, 则 $\mathrm{m}(E_k) < \infty$, 并且

$$E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k.$$

在 E_k 上对函数 $|f_{n_{j+1}} - f_{n_j}|$ 和常值函数 1 应用 Hölder 不等式, 得到

$$\int_{E_K} |f_{n_{j+1}}(x) - f_{n_j}(x)| \mathrm{d}x \leqslant \mathrm{m}(E_k)^{1/q} \|f_{n_{j+1}} - f_{n_j}\|_p.$$

于是

$$\begin{aligned}
&\int_{E_k} \left(\sum_{j=1}^{\infty} \left|f_{n_{j+1}}(x) - f_{n_j}(x)\right|\right) \mathrm{d}x \\
=&\sum_{j=1}^{\infty} \int_{E_k} \left|f_{n_{j+1}}(x) - f_{n_j}(x)\right| \mathrm{d}x \\
\leqslant& \mathrm{m}(E_k)^{1/q} \sum_{j=1}^{\infty} \|f_{n_{j+1}} - f_{n_j}\|_p < \mathrm{m}(E_k)^{1/q} < \infty.
\end{aligned}$$

由此可见, 当 $k \to \infty$ 时

$$|f_{n_1}(x)| + \sum_{j=1}^{k-1} |f_{n_{j+1}} - f_{n_j}|$$

在 E_k 上几乎处处收敛, 因为否则积分将发散. 从而

$$f_{n_1}(x) + \sum_{j=1}^{k-1} \left(f_{n_{j+1}} - f_{n_j}\right) = f_{n_k}(x)$$

在 E_k 上也几乎处处收敛. 记 f 为其极限函数, 这里在 f_{n_k} 不收敛的点 x 上定义 $f(x)=0$. f 是 E 上的可测函数.

对于任给 $\varepsilon>0$, 由于 $\{f_n\}$ 是 $L^p(E)$ 中基本列, 故存在自然数 N, 使得

$$\int_E |f_n(x)-f_m(x)|^p \mathrm{d}x<\varepsilon^p, \quad \forall m,n>N.$$

今取自然数 J 充分大, 使得 $n_J>N$. 于是

$$\int_E |f_n(x)-f_{n_j}(x)|^p \mathrm{d}x<\varepsilon^p, \quad \forall n>N, j>J.$$

固定 n, 对于非负函数列 $\left\{|f_n(x)-f_{n_j}(x)|\,|\,j\geqslant 1\right\}$ 应用定理 2.9.6 (Fatou 引理), 得到

$$\int_E |f_n(x)-f(x)|^p \mathrm{d}x<\varepsilon^p, \quad \forall n>N.$$

这表明 $f_n-f\in L^p(E)$, 从而 $f\in L^p(E)$, 并且 $f_n\to f(n\to\infty)$, 即 $L^p(E)$ 中基本列有极限. 因此, $L^p(E)$ 是 Banach 空间.

至于 $L^\infty(E)$ 的完备性的证明则更简单, 读者可作为练习.

下一定理说明赋范线性空间中线性运算对于范数的连续性.

定理 3.2.1 设 X 是数域 $\mathbb{K}$ 上的赋范线性空间, 令

$$f(x,y)=x+y,\ \ g(\lambda,x)=\lambda x,\ \ h(x)=\|x\|,$$

那么 $f:X\times X\to X$, $g:\mathbb{K}\times X\to X$, $h:x\to\mathbb{R}$ 都是连续函数.

证明 设 $\{x_n\}$, $\{y_n\}\subset X$, $\{\lambda_n\}\subset\mathbb{R}$, $x,y\in X$, 使得 $x_n\to x$, $y_n\to y$, $\lambda_n\to\lambda$. 于是从范数的定义可得

$$\begin{aligned}
\|f(x_n,y_n)-f(x,y)\| &\leqslant \|x_n-x\|+\|y_n-y\|\to 0(n\to\infty),\\
\|f(\lambda_n,x_n)-f(\lambda,x)\| &\leqslant \|\lambda_n x_n-\lambda_n x\|+\|\lambda_n x-\lambda x\|\\
&\leqslant |\lambda_n|\,\|x_n-x\|+|\lambda_n-\lambda|\,\|x\|\to 0(n\to\infty),\\
|h(x_n)-h(x)| &\leqslant \|x_n-x\|\to 0(n\to\infty).
\end{aligned}$$

□

3.1 节定义了同一集合上不同距离之间的等价性, 据此, 一个线性空间 X 上两个范数 $\|\cdot\|_1$ 和 $\|\cdot\|_2$ 称为等价, 是指对于 X 中点列 $\{x_n\}$ 有

$$\|x_n\|_1\to 0\Longleftrightarrow\|x_n\|_2\to 0.$$

定理 3.2.2 线性空间 X 上两个范数 $\|\cdot\|_1$ 和 $\|\cdot\|_2$ 等价的充分必要条件是存在两个正常数 μ_1 和 μ_2, 使得

$$\mu_1\|x\|_2\leqslant\|x\|_1\leqslant\mu_2\|x\|_2, \quad \forall x\in X.$$

证明 充分性是显然的, 下面用反证法证明必要性. 假定两个范数 $\|\cdot\|_1$ 和 $\|\cdot\|_2$ 等价, 但不存在正常数 μ_2, 使得 $\|x\|_1 \leqslant \mu_2\|x\|_2, \forall\, x \in X$. 于是对于每一 n, 存在 $x_n \in X$, 使得 $\|x_n\|_1 > n\|x_n\|_2$, 从而若令 $y_n = \|x_n\|_1^{-1}x_n$, 则 $\|y_n\|_2 < 1/n$, 即 $\|y_n\|_2 \to 0(n \to \infty)$. 但 $\|y_n\|_1 = 1$, 与两个范数的等价性假设相矛盾. 同理可证存在正常数 μ_1, 使得 $\mu_1\|x\|_2 \leqslant \|x\|_1, \forall\, x \in X$. □

赋范线性空间 X 称为是有穷维的, 是指线性空间 X 的维数 $\dim X = n < \infty$. 设 X_n 是 n 维赋范线性空间, $e_1, e_2, \cdots, e_n$ 是线性空间 X_n 的基. 于是每一 $x \in X_n$ 可唯一表示为

$$x = \xi_1 e_1 + \cdots + \xi_n e_n,$$

其中 $\xi_k \in \mathbb{R}$(或 $\mathbb{C}$) 为 x 的坐标.

定理 3.2.3 设 X_n 是 n 维赋范线性空间, 那么 X_n 上的任意两个范数都是等价的.

证明 如上, 设 $e_1, e_2, \cdots, e_n$ 为 X_n 的基, X_n 上任意元 x 唯一地表示为 $x = \xi_1 e_1 + \cdots + \xi_n e_n$. 设 $\|\cdot\|$ 为 X_n 的一个范数, 首先我们证明存在两个正常数 ν 和 μ, 使得

$$\nu\sqrt{\sum_{k=1}^{n}|\xi_k|^2} \leqslant \|x\| \leqslant \mu\sqrt{\sum_{k=1}^{n}|\xi_k|^2}, \quad \forall\, x \in X_n. \tag{3.2.7}$$

事实上, 令 $f(\xi_1, \cdots, \xi_n) = \|x\| = \|\xi_1 e_1 + \cdots + \xi_n e_n\|$, 显然 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 是 n 元连续函数. 令

$$E = \{(\xi_1, \cdots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n \,|\, |\xi_1|^2 + \cdots + |\xi_n|^2 = 1\}.$$

显然 E 是 $\mathbb{R}^n$ 中的有界闭集. 于是 f 在 E 上达到最大值 μ 和最小值 ν. 容易看出 $\nu > 0$, 因为否则的话, 存在 $x \in E$, 使得 $f(x) = \|x\| = 0$, 从而 $x = \xi_1 e_1 + \cdots + \xi_n e_n = 0$, 即 $\xi_1 = \xi_2 = \cdots = \xi_n = 0$, 与 $|\xi_1|^2 + \cdots + |\xi_n|^2 = 1$ 相矛盾. 于是 $\nu > 0$.

现在任取 $x = \xi_1 e_1 + \cdots + \xi_n e_n$. 令 $y = x/\sqrt{|\xi_1|^2 + \cdots + |\xi_n|^2}$, 则显然 $y \in E$, 从而 $\nu \leqslant f(y) = \|x\|/\sqrt{|\xi_1|^2 + \cdots + |\xi_n|^2} \leqslant \mu$, 即得式 (3.2.7).

现在设 $\|\cdot\|_1$ 和 $\|\cdot\|_2$ 是 X_n 上的两个范数. 于是根据上述, 存在 4 个正常数 ν_1, μ_1, ν_2 和 μ_2, 使得

$$\nu_1\sqrt{\sum_{k=1}^{n}|\xi_k|^2} \leqslant \|x\|_1 \leqslant \mu_1\sqrt{\sum_{k=1}^{n}|\xi_k|^2}, \quad \forall\, x \in X_n;$$

$$\nu_2\sqrt{\sum_{k=1}^{n}|\xi_k|^2} \leqslant \|x\|_2 \leqslant \mu_2\sqrt{\sum_{k=1}^{n}|\xi_k|^2}, \quad \forall\, x \in X_n.$$

由此从上述两式不难推出

$$\frac{\nu_1}{\mu_2}\|x\|_2 \leqslant \|x\|_1 \leqslant \frac{\mu_1}{\nu_2}\|x\|_2, \quad \forall\, x \in X_n.$$

即 $\|\cdot\|_1$ 和 $\|\cdot\|_2$ 等价. □

3.3 内积空间

本节介绍内积空间, 它是 n 维欧氏空间向量内积的无穷维推广.

定义 3.3.1 设 X 是数域 $\mathbb{K}$ 上的线性空间. 定义在 $X\times X$ 上的泛函 $\langle x,y\rangle$ 叫做 X 上的内积, 如果它满足

(1) 正定性: $\forall\, x\in X$, $\langle x,x\rangle\geqslant 0$, 并且 $\langle x,x\rangle=0\Longleftrightarrow x=0$;

(2) 共轭对称性: $\forall\, x,y\in X$, $\langle x,y\rangle=\overline{\langle y,x\rangle}$;

(3) 关于第一变元的线性性: $\forall\, x,y\in X$, $\forall\,\alpha,\beta\in\mathbb{K}$, $\langle \alpha x+\beta y,z\rangle=\alpha\langle x,z\rangle+\beta\langle y,z\rangle$.

这里对于 $\alpha\in\mathbb{K}$, $\overline{\alpha}$ 表示 α 的复共轭 (当 $\mathbb{K}$ 是复数域 $\mathbb{C}$ 时).

赋以内积的线性空间叫做内积空间, 记作 $(X,\langle\cdot,\cdot\rangle)$, 而在不致引起混淆的情形下, 简记内积空间 X.

记 $\|x\|=\sqrt{\langle x,x\rangle}$, 称为元 x 的范数. 下面我们将证明如此定义的 $\|x\|$ 确实满足范数的条件, 从而是 X 中的范数. 一个内积空间, 如果它按其内积导出的范数是完备的, 则称此内积空间为 Hilbert 空间.

例 3.3.1 n 维欧氏空间 $\mathbb{K}^n$, 这里 $\mathbb{K}$ 取 $\mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C}$, 分别得到实欧氏空间和复欧氏空间. 在 $\mathbb{K}^n$ 中定义内积

$$\langle x,y\rangle=\sum_{k=1}^{n}=\xi_k\overline{\eta}_k,\quad \forall\, x=(\xi_1,\cdots,\xi_n),y=(\eta_1,\cdots,\eta_n)\in\mathbb{K}^n.$$

由该内积导出的范数正好是前面已经引入的欧氏范数. $\mathbb{K}^n$ 是有限维 Hilbert 空间. □

例 3.3.2 空间 ℓ^2. 对于 $x=\{\xi_k\}$, $y=\{\eta_k\}\in\ell^2$, 定义

$$\langle x,y\rangle=\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k\overline{\eta}_k,$$

则不难验证, $\langle x,y\rangle$ 是 ℓ^2 中的内积, 并且由 $\langle x,y\rangle$ 导出的范数恰好是前面定义的 ℓ^2 中的范数, 从而 ℓ^2 是 Hilbert 空间. □

例 3.3.3 空间 $L^2(a,b)$. 设 $x,y\in L^2(a,b)$, 定义

$$\langle x,y\rangle=\int_a^b x(t)\overline{y(t)}\mathrm{d}t,$$

则不难验证, $\langle x,y\rangle$ 是 $L^2(a,b)$ 中的内积, 并且内积 $\langle x,y\rangle$ 导出的范数恰好是前面定义的 $L^2(a,b)$ 中的范数, 从而 $L^2(a,b)$ 是 Hilbert 空间. □

例 3.3.4 空间 $C[a,b]$. 定义

$$\langle x,y\rangle=\int_a^b x(t)\overline{y(t)}\,\mathrm{d}t,\quad \forall\, x,y\in C[a,b],$$

则不难验证, $\langle x,y\rangle$ 是 $C[a,b]$ 中内积, 但在 3.1 节中知道, $C[a,b]$ 在由该内积 $\langle x,y\rangle$ 导出的范数下是不完备的, 从而不是 Hilbert 空间. □

命题 3.3.1 设 X 是一内积空间, 则

(1) $\forall x,y\in X$, 成立如下的 Schwarz 不等式

$$|\langle x,y\rangle|\leqslant\|x\|\,\|y\|;$$

(2) $\|x+y\|\leqslant\|x\|+\|y\|$, $\forall x,y\in X$.

证明 (1) 不妨设 $x\neq 0$. 对任意 $x,y\in X$, $\alpha,\beta\in\mathbb{K}$, 有

$$\begin{aligned}0\leqslant&\langle\alpha x+\beta y,\alpha x+\beta y\rangle\\=&|\alpha|^2\|x\|^2+\alpha\overline{\beta}\langle x,y\rangle+\overline{\alpha}\beta\langle y,x\rangle+|\beta|^2\|y\|^2\\=&\left(\alpha\|x\|+\beta\|x\|^{-1}\langle y,x\rangle\right)\overline{\left(\alpha\|x\|+\beta\|x\|^{-1}\langle y,x\rangle\right)}\\&+|\beta|^2\left(\|y\|^2-\|x\|^{-2}|\langle x,y\rangle|\right).\end{aligned}$$

特别取 $\alpha=-\beta\|x\|^{-2}|\langle x,y\rangle$, 得到 $|\langle x,y\rangle|^2\leqslant\|x\|^2\|y\|^2$. 由此即得 Schwarz 不等式.

(2) 直接由 Schwarz 不等式得出

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2=\langle x+y,x+y\rangle&=\|x\|^2+2\mathrm{Re}\,\langle x,y\rangle+\|y\|^2\\&\leqslant\|x\|^2+2\|x\|\,\|y\|+\|y\|^2=(\|x\|+\|y\|)^2.\end{aligned}$$

□

由命题 3.3.1 不难验明 $\|x\|$ 确实满足范数的所有要求.

命题 3.3.2 设 X 是一内积空间, 则其内积 $\langle x,y\rangle$ 是双变元连续泛函, 即若 $x_n\to x_0$, $y_n\to y_0$, 则 $\langle x_n,y_n\rangle\to\langle x_0,y_0\rangle$.

证明 我们有

$$\begin{aligned}&|\langle x_n,y_n\rangle-\langle x_0,y_0\rangle|\leqslant|\langle x_n,y_n-y_0\rangle|+|\langle x-x_0,y_0\rangle|\\&\leqslant\|x_n\|\,\|y_n-y_0\|+\|x_n-x_0\|\,\|y\|\to 0(n\to\infty),\end{aligned}$$

这里我们利用了收敛列范数的有界性. □

三维空间中两个向量 x 和 y 之间夹角 θ 的余弦可表示成

$$\cos\theta=\frac{\langle x,y\rangle}{\|x\|\,\|y\|}.$$

在一般内积空间中, 根据内积性质有 $\frac{|\langle x,y\rangle|}{\|x\|\,\|y\|}\leqslant 1$, 从而在无穷维内积空间中, 也可按照上式定义两个向量之间的夹角. 这样就可以讨论内积空间中许多几何性质. 为此, 我们给出如下定义.

定义 3.3.2 设 X 是一内积空间, M, N 为 X 的两非空子集.

(1) 对于 $x, y \in X$, 若 $\langle x, y\rangle = 0$, 则称 x 与 y 相互直交, 记作 $x \perp y$;

(2) 如果 $\langle x, y\rangle = 0, \forall y \in M$, 则称 x 与 M 直交, 记作 $x \perp M$;

(3) M 的直交补是指集合 $M^{\perp} = \{x \in X \,|\, \langle x, y\rangle = 0,\ \forall y \in M\}$;

(4) M 和 N 称为相互直交, 记作 $M \perp N$, 是指 $\langle x, y\rangle = 0, \forall x \in M, y \in N$.

命题 3.3.3 设 X 是一内积空间, M、N 为 X 中两个子集.

(1) (勾股定理) 若 $x, y \in X$, $x \perp y$, 则

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2;$$

(2) 若 $M \perp N$, 则它们的闭包也相互直交, 即 $\overline{M} \perp \overline{N}$;

(3) 若 $\overline{M} = X$, 即 M 在 X 中稠, 且 $x \perp M$, 则 $x = 0$;

(4) 若 $M \subset N$, 则 $N^{\perp} \subset M^{\perp}$;

(5) $M^{\perp}$ 是 X 中一闭子空间.

证明 将 $\|x + y\|^2 = \langle x + y, x + y\rangle$ 展开即得 (1). 利用命题 3.3.2 可得 (2) 和 (3), 而 (5) 的证明是显见的. □

下面的结论称为直交分解定理.

定理 3.3.1 设 M 是 Hilbert 空间 H 中的闭线性子空间, 那么 H 中任意元 x 可唯一地表示成 $x = y + z$, 其中 $y \in M$, $z \in M^{\perp}$, 而且

$$\|y - x\| = \inf_{v \in M} \|v - x\|,$$

即 y 是 M 中距 x 最近的点.

证明 首先我们来找出 M 中距 x 最近的向量. 令

$$\alpha = \inf_{v \in M} \|v - x\|,$$

根据下确界的定义, 对于任意自然数 n, M 中有元 y_n, 使得

$$\alpha \leqslant \|y_n - x\| < \alpha + 1/n,$$

从而 $\|y_n - x\| \to \alpha$. 今证 $\{y_n\}$ 是基本列. 事实上, 根据命题 3.3.1 的平行四边形公式有

$$\begin{aligned}\|y_m - y_n\|^2 &= \|(y_m - x) - (y_n - x)\|^2 \\ &= 2\left(\|y_m - x\|^2 + \|y_n - x\|^2\right) - \|(y_m - x) + (y_n - x)\|^2 \\ &= 2\|y_m - x\|^2 + 2\|y_n - x\|^2 - 4\left\|\frac{y_m + y_n}{2} - x\right\|^2.\end{aligned}$$

由于 $y_m, y_n \in M$, 故 $\frac{1}{2}(y_m + y_n) \in M$, 从而

$$\alpha \leqslant \left\| \frac{y_m + y_n}{2} - x \right\|.$$

注意到 $\|y_n - x\| \to \alpha$, $\|y_m - x\| \to \alpha$, 可知当 m, n 充分大时 $\|y_m - y_n\|$ 可任意小, 从而 $\{y_n\}$ 是一个基本列.

由于 H 是完备的, 故 $\{y_n\}$ 在 H 中有极限 y. 由假设 M 是闭的, 故 $y \in M$. 于是 $\|y - x\| = \alpha$, 即 y 是 M 中距 x 最近的向量.

下面证明 $(x - y) \perp M$. 事实上, 若不然, 则存在 $u \in M$, 使得 $\beta = \langle x - y, u \rangle \neq 0$. 令 $w = y + \beta u$, 则 $w \in M$, 并且

$$\begin{aligned} \|x - w\|^2 &= \langle x - y - \beta u, x - y - \beta u \rangle \\ &= \|x - y\|^2 - \overline{\beta}\langle x - y, u \rangle - \beta \langle u, x - y \rangle + |\beta|^2 \\ &= \|x - y\|^2 - \overline{\beta}\beta - \beta\overline{\beta} + |\beta|^2 = \|x - y\|^2 - |\beta|^2 \\ &< \|x - y\|^2, \end{aligned}$$

与 y 是 M 中距 x 最近的假设矛盾.

于是若令 $z = x - y$, 则 $x = y + z$, $y \in M$, $z \in M^{\perp}$. 现在证明 x 的这种分解是唯一的. 事实上, 如果还有一个分解: $x = y' + z'$, $y' \in M$, $z' \in M^{\perp}$, 则得 $y - y' = z' - z$, 从而

$$\|y' - y\|^2 = \|z' - z\|^2 = \langle y' - y, z - z' \rangle = 0.$$

这正是说 $y' = y$, $z' = z$. □

定理 3.3.1 中的元 y 叫做 x 在 M 中投影, 记作 $y = Px$, P 叫做 H 到闭子空间 M 上的投影算子. 不难看出, P 是 H 中的有界线性算子, 并且 $P^2 = P$.

定理 3.3.1 的结果可叙述成如下形式: 对于 Hilbert 空间 H 中任意闭线性子空间 M, H 可表示成 M 和 $M^{\perp}$ 的直交和

$$H = M \oplus M^{\perp}.$$

$M^{\perp}$ 叫做 M 的直交补.

设 $\{e_k \,|\, k \in \mathbb{N}\}$ 是 Hilbert 空间 H 中一列相互直交的单位向量

$$\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}, \quad \forall\, i, j \in \mathbb{N}.$$

这样的序列叫做直交规范组. 对于任意 $x \in H$

$$\left\langle x - \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k, e_i \right\rangle = \langle x, e_i \rangle - \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle \delta_{ik} = 0, \quad \forall\, 1 \leqslant i \leqslant n.$$

因此 $(x - \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k) \perp e_i$, $\forall\, i = 1, 2, \cdots, n$. 若记 M 为由 $e_1, e_2, \cdots, e_n$ 张成的 n 维线性子空间, 则 $x - \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k \in M^{\perp}$. 由此可见, $x - \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k$ 恰是 x 在 M 中离 x 最近的元, 即 x 在 M 中的投影.

定理 3.3.2 (Bessel 不等式) 设 $\{e_k\}$ 为 Hilbert 空间中一直交规范组. 那么对于任意 $x \in H$, 有

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\langle x, e_k\rangle|^2 \leqslant \|x\|^2, \quad \forall\, n \geqslant 1. \tag{3.3.1}$$

证明 对任意自然数 n, 经直接计算可得

$$\begin{aligned} 0 &\leqslant \left\langle x - \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k\rangle e_k, x - \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k\rangle e_k \right\rangle \\ &= \|x\|^2 - 2\sum_{i=1}^{n} |\langle x, e_i\rangle|^2 + \sum_{i,k=1}^{n} \langle x, e_i\rangle \overline{\langle x, e_k\rangle} \delta_{ik} \\ &= \|x\|^2 - \sum_{i=1}^{n} |\langle x, e_i\rangle|^2, \end{aligned} \tag{3.3.2}$$

由此即得

$$\sum_{k=1}^{n} |\langle x, e_k\rangle|^2 \leqslant \|x\|^2, \quad \forall\, n \geqslant 1.$$

在上式中让 $n \to \infty$ 就得到式 (3.3.1). □

一般来说, 有可能式 (3.3.1) 是真不等式, 但若式 (3.3.1) 是等式, 则根据式 (3.3.2), 有

$$\lim_{n\to\infty} \left\| x - \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k\rangle e_k \right\| = 0.$$

这就是说, 如下无穷级数按 H 的范数收敛到 x

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \langle x, e_k\rangle e_k. \tag{3.3.3}$$

反过来, 由式 (3.3.2) 可见, 从式 (3.3.3) 也能推出式 (3.3.1) 成为等式.

如果一直交规范组 $\{e_k\}$ 使得每一个 $x \in H$ 都能表示成式 (3.3.3) 的形式, 则称 $\{e_k\}$ 是 H 的一直交规范基. 这时式 (3.3.3) 叫做 x 按直交基 $\{e_k\}$ 的 Fourier 展开, 而 $\langle x, e_k\rangle$ 则叫做 x 按直交基 $\{e_k\}$ 的 Fourier 系数.

从式 (3.3.3) 可见, 若 $\{e_k\}$ 是 H 的直交基, 则

$$\langle x, e_k\rangle = 0, \quad \forall\, k \in \mathbb{N} \Longrightarrow x = 0. \tag{3.3.4}$$

反过来, 若有一元 $x \in H$, $x \neq 0$, 使得 $\langle x, e_k\rangle = 0$, $\forall\, k \in \mathbb{N}$, 那么式 (3.3.1) 不能成为等式, 从而式 (3.3.3) 对于 x 不成立. 因此 $\{e_k\}$ 不是 H 的直交基. 这就是说, 式 (3.3.4) 是直交组 $\{e_k\}$ 成为 H 的直交基的充分必要条件.

例 3.3.5 空间 $L^2(0,2\pi)$ 中三角函数. 令

$$e_k(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-ikt},\quad k\in\mathbb{Z},$$

其中 $\mathbb{Z}$ 表示所有整数组成的集合. 那么 $\{e_k\,|\,k\in\mathbb{Z}\}$ 是 $L^2(0,2\pi)$ 的直交规范基.

之所以将上式称为三角函数, 是由于 De Morgan 公式

$$\mathrm{e}^{i\theta}=\cos(\theta)+i\sin(\theta),\quad \theta\in\mathbb{R}.$$

□

例 3.3.6 空间 ℓ^2 的直交规范基. 设 e_k 为 ℓ^2 中第 k 个分量为 1 而其余分量都为 0 的元, 那么 $\{e_k\,|\,k\in\mathbb{N}\}$ 是 ℓ^2 的直交规范基. □

显然, 具有可数直交规范基的 Hilbert 空间必定是可分的. 一个自然的问题是, 是否每个可分 Hilbert 空间都存在可数的直交规范基呢? 答案是肯定的. 我们有如下定理.

定理 3.3.3 *每个可分 Hilbert 空间 H 都具有可数直交规范基.*

证明 我们仅给出证明的大体思路. 设 $\{x_k\,|\,k\in\mathbb{N}\}$ 是 H 中一可数稠子集, 我们可利用归纳法构造 $\{x_k\,|\,k\in\mathbb{N}\}$ 的子集 $G=\{y_1,y_2,\cdots\}$, 使得 G 中任何有限个向量是线性无关的, 并且每个 x_n 是 G 中有限个元的线性组合. 这样, 由 G 张成的闭线性子空间 $\overline{\operatorname{span}G}=H$.

然后在 G 的基础上, 利用 Schmidt 直交化程序构造 H 的一组直交规范基. 对于每个 $n\in\mathbb{N}$, 记 $H_n=\operatorname{span}\{y_1,\cdots,y_n\}$, P_n 为 H 到 H_n 上的投影算子. 我们用归纳法来构造 e_k.

令 $e_1=\|y_1\|^{-1}y_1$, 则 $\operatorname{span}\{e_1\}=H_1$. 假定已找到直交组 $\{e_1,\cdots,e_n\}$, 使得 $H_m=\operatorname{span}\{e_1,\cdots,e_m\}$, $\forall\, m\leqslant n$. 注意 $y_{n+1}\notin H_n$, 因为否则 $y_1,\cdots,y_{n+1}$ 就线性相关了. 于是根据直交分解定理, $y_{n+1}-P_ny_{n+1}\in H_n^{\perp}$. 令 $e_{n+1}=\|y_{n+1}-P_ny_{n+1}\|^{-1}(y_{n+1}-P_ny_{n+1})$, 则显然有 $\operatorname{span}\{e_k\,|\,1\leqslant k\leqslant n+1\}=H_{n+1}$. 若 H 为有限维空间, 则上述过程在有限步后停止, 从而得到有限个元构成的直交规范组; 否则这一过程会无限进行下去, 得到一列直交规范组 $\{e_k\,|\,k\in\mathbb{N}\}$, 使得 $\operatorname{span}\{e_1,\cdots,e_n\}=H_n$, $\forall\, n\in\mathbb{N}$, 并且 $\overline{\operatorname{span}\{e_k\,|\,k\in\mathbb{N}\}}=H$. □

3.4 有界线性算子

在有穷维线性空间理论中, 空间之间的线性变换, 其在空间基底下的表现形式就是矩阵, 这是线性代数理论研究的中心内容之一. 同样在无穷维 Banach 空间理论中, 空间之间的变换, 通常称为映射或算子, 则是泛函分析中研究的中心内容之一. 本节介绍赋范线性空间中有界线性算子的定义和基本性质.

定义 3.4.1 *设 X 和 Y 是同一数域 $\mathbb{K}$ 上的两个线性赋范空间, 今后为记号简单起见, 两个空间中的范数, 在不致引起混淆的情形下, 都将记作 $\|\cdot\|$. 设 D 是 X 中一线性*

子空间, 由 D 到 Y 的映射 T, 记作 $T: D \to Y$, D 叫做 T 的定义域, 记作 $\mathcal{D}(T)$, 而集合 $\mathcal{R}(T) = \{Tx \,|\, x \in \mathcal{D}(T)\}$ 则叫做 T 的值域.

(1) T 称为线性算子, 如果它满足

$$T(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha T x_1 + \beta T x_2, \quad \forall\, x_1, x_2 \in D(T),\ \forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{K}.$$

(2) 设 $x_0 \in D(T)$, 如果对任意收敛于 x_0 的点列 $\{x_n\} \subset D(T)$, 有 $Tx_n \to Tx_0$, 则称 T 在 x_0 处连续; 而如果 T 在 $D(T)$ 的每一点处连续, 则称 T 是连续算子.

(3) 如果对于任意有界子集 $B \subset D$, 像集 $TB = \{Tx \,|\, x \in B\}$ 是 Y 中有界集, 则称 T 是有界算子.

定理 3.4.1 设 X 和 Y 是同一数域 $\mathbb{K}$ 上的两个线性赋范空间, D 是 X 中一线性子空间, $T: D \to Y$ 为线性算子, 那么

(1) T 有界的充要条件是存在正常数 μ, 使得

$$\|Tx\| \leqslant \mu \|x\|, \quad \forall\, x \in D; \tag{3.4.1}$$

(2) T 在 D 上连续的充要条件是 T 在 D 的某一点 x_0 上连续;

(3) T 为有界算子的充要条件是 T 为连续算子.

证明 (1) 充分性显然. 今用反证法证明必要性. 设 T 有界, 但不存在常数 $\mu \geqslant 0$ 使得式 (3.4.1) 成立. 于是对于每一 n, 必存在 $x_n \in D$, 使得

$$\|Tx_n\| > n\|x_n\|.$$

令 $z_n = \|x_n\|^{-1} x_n$. 由于 D 是线性子空间, 故 $z_n \in D$, 并且 $\|z_n\| = 1$, $n = 1, 2, \cdots$. 但 $\|Tz_n\| > n$, $n = 1, 2, \cdots$, 这与 T 的有界性矛盾, 因此式 (3.4.1) 成立.

(2) 只需证充分性. 设 T 在某点 x_0 连续. 今任取 $x \in D$, 并设 $\{x_n\} \subset D$, $x_n \to x$, 从而 $x_n - x + x_0 \to x_0$. 于是由 T 在 x_0 连续, 可知 $Tx_n - Tx + Tx_0 \to Tx_0$, 即得 $Tx_n \to Tx$. 由于 $x \in D$ 的任意性, 故得证 T 在 D 上连续.

(3) 根据 (1), 必要性显然. 下面用反证法证明充分性. 设 T 连续但无界, 于是对于每一自然数 n, 存在 $x_n \in D$, 使得

$$\|Tx_n\| > n\|x_n\|.$$

显然 $x_n \neq 0$. 令 $z_n = (n\|x_n\|)^{-1} x_n$, 则 $\|z_n\| = \frac{1}{n}$, 从而 $z_n \to 0$. 但 $\|Tz_n\| > 1$, 这与 T 的连续性矛盾, 故 T 有界. □

定义 3.4.2 设 X 和 Y 是同一数域 $\mathbb{K}$ 上的两个线性赋范空间, D 是 X 中一线性子空间, $T: D \to Y$ 为有界线性算子. 令

$$\|T\| = \sup\{\|Tx\| \,|\, x \in D, \|x\| \leqslant 1\},$$

称 $\|T\|$ 为线性算子 T 的范数.

定理 3.4.2 设 X 和 Y 是同一数域 $\mathbb{K}$ 上的两个线性赋范空间, D 是 X 中一线性子空间, $T: D \to Y$ 为线性算子, 那么

(1) $\|Tx\| \leqslant \|T\|\,\|x\|, \quad \forall x \in D$;

(2) $\|T\| = \sup\{\|Tx\| \,|\, x \in D, \|x\| = 1\} = \sup\{\|Tx\|/\|x\| \,|\, x \in D, x \neq 0\}$;

(3) $\|T\| = \inf\{\mu \geqslant 0 \,|\, \|Tx\| \leqslant \mu\|x\|, \forall x \in D\}$.

证明 (1) 任取 $x \in D$, $x \neq 0$, 令 $y = \|x\|^{-1}x$, 则 $\|y\| = 1$, 从而依据算子范数定义有 $\|Ty\| \leqslant \|T\|$, 由此即得 $\|Tx\| \leqslant \|T\|\,\|x\|, \forall x \in D$.

(2) 显然 $\sup\{\|Tx\| \,|\, x \in D, \|x\| = 1\} \leqslant \sup\{\|Tx\| \,|\, x \in D, \|x\| \leqslant 1\}$. 另一方面, 对于任意 $x \in D$, $x \neq 0$, $\|x\| \leqslant 1$, 令 $y = \|x\|^{-1}x$, 则 $\|y\| = 1$. 于是, 由于 $\|x\|^{-1} \geqslant 1$, 故 $\|Tx\| \leqslant \|Tx\|\,\|x\|^{-1} = \|Ty\| \leqslant \sup\{\|Tz\| \,|\, z \in D, \|z\| = 1\}$. 因此 $\sup\{\|Tx\| \,|\, x \in D, \|x\| = 1\} = \|T\|$. 至于 (2) 中的第二等号成立是显然的.

(3) 如果 $\mu \geqslant 0$ 满足 $\|Tx\| \leqslant \mu\|x\|, \forall x \in D$, 则 $\|Tx\|/\|x\| \leqslant \mu, \forall x \in D$. 因此根据 (1), $\|T\| \leqslant \mu$, 由此从 (1) 即得 (3) 成立. □

例 3.4.1 恒等算子和零算子. 设 X 是赋范线性空间, 令 $id_X(x) = x$, $\forall x \in X$, 则 id_X 称为 X 中的恒等算子, 而若令 $\theta x = 0$, $\forall x \in X$, 则称 θ 为 X 中的零算子. 如无混淆, id_X 简记作 I. 显然 I 和 θ 都是 X 中的有界线性算子, 并且 $\|I\| = 1$, $\|\theta\| = 0$. □

例 3.4.2 设 $\mathbb{R}^n$ 中向量 x 表示成列向量形式: $x = (\xi_1, \cdots, \xi_n)^{\mathrm{T}}$, 设 $A = (a_{ij})$ 为 $n \times n$ 方阵, 则 A 可以看成 $\mathbb{R}^n$ 中算子: $Ax = y$ 是指 A 把 $x = (\xi_1, \cdots, \xi_n)^{\mathrm{T}}$ 变换成 $y = (\eta_1, \cdots, \eta_n)^{\mathrm{T}}$, 其中

$$\eta_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\xi_j, \quad i = 1, 2, \cdots, n.$$

按照矩阵的运算法则, 容易看出 A 是 $\mathbb{R}^n$ 中的线性算子. 设在 $\mathbb{R}^n$ 中赋以欧氏范数. 于是根据 Cauchy 不等式, 有

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \eta_i^2\right)^{1/2} \leqslant \left(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^2\right)^{1/2} \left(\sum_{j=1}^{n} \xi_j^2\right)^{1/2},$$

即

$$\|Ax\| \leqslant \left(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^2\right)^{1/2} \|x\|, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

从而 A 是 $\mathbb{R}^n$ 中一有界线性算子, 并且

$$\|A\| \leqslant \left(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^2\right)^{1/2}.$$

□

例 3.4.3 $[0,1]$ 上连续函数空间 $C[0,1]$ 中赋以范数 $\|x\|_0 = \max\limits_{0\leqslant t\leqslant 1}|x(t)|$; 而 $[0,1]$ 上连续可微函数空间 $C^1[0,1]$ 中赋以范数 $\|x\|_1 = \|x\|_0 + \|x'\|_0$, 这里 x' 表示函数 x 的微商. 容易验证 $C^1[0,1]$ 也是一 Banach 空间. 定义 $C^1[0,1]$ 到 $C[0,1]$ 的微分算子 $T = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$ 为

$$(Tx)(t) = \frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}, \quad \forall\, x \in C^1[0,1].$$

显然, T 是 $C^1[0,1]$ 到 $C[0,1]$ 的线性算子, 并且

$$\|Tx\|_0 = \|x'\|_0 \leqslant \|x'\|_0 + \|x\|_0 = \|x\|_1, \quad \forall\, x \in C^1[0,1].$$

因此 T 是 $C^1[0,1]$ 到 $C[0,1]$ 的有界线性算子, 并且 $\|T\| \leqslant 1$.

但是, 若把微分算子 T 看成 $C[0,1]$ 到 $C[0,1]$ 的线性算子, 其定义域 D 是 $C[0,1]$ 中连续可微函数全体构成的一个线性子空间, 那么 T 不是有界算子. 事实上, 设 $x_n(t) = \mathrm{e}^{-nt}$, 则 $\{x_n \,|\, n \geqslant 1\} \subset D$, 并且 $\frac{\mathrm{d}x_n(t)}{\mathrm{d}t} = -nx_n(t)$, $\|x_n\| = 1$, $n = 1, 2, \cdots$. 于是 $M = \{x_n \,|\, n \geqslant 1\} \subset D$ 是 $C[0,1]$ 中的有界集, 而 $TM = \{Tx_n \,|\, n \geqslant 1\} = \{-nx_n \,|\, n \geqslant 1\}$ 则是 $C[0,1]$ 中的无界集, 因此 T 是 $C[0,1]$ 中的无界算子. □

例 3.4.4 设在 Banach 空间 $C[0,1]$ 中定义积分算子 T 如下

$$(Tx)(t) = \int_0^1 K(t,s)x(s)\mathrm{d}s, \quad \forall\, x \in C[0,1],$$

其中积分核 $K(t,s)$ 是 $[0,1]\times[0,1]$ 上的连续函数. 显然 T 是 $C[0,1]$ 中的线性算子. 我们有

$$\|Tx\| = \max_{0\leqslant t\leqslant 1}\left|\int_0^1 K(t,s)x(s)\mathrm{d}s\right| \leqslant \max_{0\leqslant t\leqslant 1}\int_0^1 |K(t,s)|\mathrm{d}s\|x\|, \ \forall\, x \in C[0,1].$$

因此 T 是 $C[0,1]$ 中的有界线性算子, 并且

$$\|T\| \leqslant \max_{0\leqslant t\leqslant 1}\int_0^1 |K(t,s)|\mathrm{d}s.$$

□

3.5 有界线性泛函和伴随算子

有界线性泛函是一种特殊的有界线性算子, 其值域空间为数域 $\mathbb{K}$. 下面介绍的 Hahn-Banach 延拓定理在泛函分析的理论和应用中起着十分重要的作用.

定理 3.5.1 (Hahn-Banach 定理) 设 X_0 为赋范线性空间 X 的一线性子空间, f_0 是 X_0 上的一有界线性泛函, 那么存在定义在全空间 X 上的有界线性泛函 f, 使得

(1) $f(x) = f_0(x)$, $\forall\, x \in X_0$;

(2) $\|f\| = \|f_0\|_{X_0}$, 这里 $\|f_0\|_{X_0}$ 表示 f_0 在 X_0 上的范数.

定理是说, 定义在一子空间上的有界线性泛函可以保范地延拓到全空间. 该定理的证明比较复杂, 这里从略, 有兴趣的读者可参阅文献 [18, 40] 等.

无论在理论上还是应用上, 有界线性泛函的存在性是一个重要的问题. 下一定理是说, 任意赋范线性空间上不仅存在有界线性泛函, 而且还 "足够多". 为了简单起见, 我们用 X^* 表示赋范线性空间 X 上所有有界线性泛函组成的集合.

推论 3.5.1 (1) 每个赋范线性空间 X 上有 "足够多" 的有界线性泛函, 更确切地说, 对于每个 $x_0 \in X$, $x_0 \neq 0$, 必有定义在全 X 上的有界线性泛函 f, 即 $f \in X^*$, 使得 $f(x_0) = \|x_0\|$, 并且 $\|f\| = 1$.

(2) 对于给定的元 $x_0 \in X$, 如果 $f(x_0) = 0, \forall f \in X^*$, 则 $x_0 = 0$.

证明 令 $X_0 = \{\alpha x_0 \,|\, \alpha \in \mathbb{K}\}$, 即 X_0 是由 x_0 张成的一维线性子空间. 在 X_0 上定义线性泛函 $f_0(\alpha x_0) = \alpha\|x_0\|$, 于是 $f_0(x_0) = \|x_0\|$, 并且易见 $\|f_0\| = 1$. 现在利用 Hahn-Banach 延拓定理, 把 f_0 保范地延拓成全空间 X 上的有界线性泛函 f, 显然 f 满足推论中 (1) 的要求. (2) 是 (1) 的直接结果. □

注意推论中第二个结论实质上描述了 X 上有界线性泛函 "足够多" 的含义: X 上有界线性泛函足够多, 多到可以区分 X 中的元, 即对于给定的 $x, y \in X$, 若 $f(x) = f(y)$, $\forall f \in X^*$, 则必 $x = y$.

推论 3.5.2 设 X 为赋范线性空间, 则对于每个 $x \in X$, 有

$$\|x\| = \sup\{|f(x)| \,|\, f \in X^*, \|f\| = 1\}.$$

证明 依线性泛函范数的定义, 若 $f \in X^*$, $\|f\| = 1$, 则有

$$|f(x)| \leqslant \|f\|\,\|x\| = \|x\|.$$

因此 $\sup\{|f(x)| \,|\, f \in X^*, \|f\| = 1\} \leqslant \|x\|$. 另一方面, 根据推论 3.5.1, 存在 $f \in X^*$, 使得 $\|f\| = 1$, $f(x) = \|x\|$, 从而所要结论成立. □

推论 3.5.3 设 X_0 为赋范线性空间 X 的线性子空间. 若 $x_1 \in X$ 到 X_0 的距离大于零, 即

$$d(x_1, X_0) = \inf\{\|x_1 - y\| \,|\, y \in X_0\} = h > 0,$$

则必有 $f \in X^*$, 使得 $\|f\| = 1$, 且 $f(y) = 0, \forall y \in X_0$.

证明 设 X_1 是由 x_1 和 X_0 张成的线性子空间

$$X_1 = \{\alpha x_1 + y \,|\, \alpha \in \mathbb{K}, y \in X_0\}.$$

X_1 中的元 $x = \alpha x_1 + y$ 由 α 和 y 唯一确定. 事实上, 对于 $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, $y, z \in X_0$, 若 $\alpha x_1 + y = \beta x_1 + z$, 则 $(\alpha - \beta)x_1 = z - y \in X_0$. 由此可见, 只能有 $\alpha = \beta$, $y = z$, 否则 $x_1 \in X_0$, 导致矛盾. 于是可以在 X_1 上定义线性泛函 f_1

$$f_1(\alpha x_1 + y) = \alpha h, \quad \forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall y \in X_0.$$

显然 $f_1(x_1)=h$, 并且 $f_1(y)=0, \forall y\in X_0$. 另一方面, 对于 $\alpha\in\mathbb{K}$,

$$\|\alpha x_1+y\|=|\alpha|\|x_1-(-\alpha^{-1}y)\|\geqslant|\alpha|h,\quad \forall y\in X_0.$$

从而

$$|f_1(\alpha x_1+y)|=|\alpha|h\leqslant\|\alpha x_1+y\|,$$

即 f_1 是 X_1 上的有界线性泛函, 并且 $\|f_1\|_{X_1}\leqslant 1$. 从 h 的定义, 我们可取 $y_n\in X_0$, 使得 $\|y_n-x_1\|\to h$. 于是

$$|f_1(y_n-x_1)|=|f_1(x_1)|=h\leqslant\|f_1\|_{X_1}\|y_n-x_1\|.$$

在上式中让 $n\to\infty$, 得到 $\|f_1\|_{X_1}\geqslant 1$. 于是我们有 $\|f_1\|_{X_1}=1$. 最后, 利用定理 3.5.1, 将 f_1 保范延拓到全 X 上, 即得所要的 $f\in X^*$. □

现在我们在有界线性泛函集 X^* 中引入加法和数乘法如下

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x),\quad \forall f,g\in X^*,\ \forall x\in X,$$

$$(\alpha f)(x)=\overline{\alpha}f(x),\quad \forall f\in X^*,\ \forall\alpha\in\mathbb{K},\ \forall x\in X.$$

这样 X^* 成为一线性空间, 并且在线性泛函范数下构成一 Banach 空间. 有时为了方便起见, 往往把线性泛函 f 在点 x 的值记作

$$f(x)=\langle x,f\rangle.$$

于是 $\langle x,f\rangle$ 具有类似 "内积" 的一些性质 (关于内积, 见 3.3 节)

$$\langle\alpha x,f\rangle=\alpha\langle x,f\rangle,\quad \langle x,\alpha f\rangle=\overline{\alpha}\langle x,f\rangle.$$

这也是在定义 X^* 中数乘法式时不用 $(\alpha f)(x)=\alpha f(x)$ 的原因之一.

X^* 叫做 X 的对偶空间, 也称 X 的共轭空间. X^* 作为 Banach 空间也有自己的对偶空间 $(X^*)^*=X^{**}$, 叫做 X 的第二对偶空间. X^{**} 当然也是一个 Banach 空间.

对于 $x\in X$, 定义 X^* 上的泛函

$$\varphi_x(f)=\overline{f(x)},\quad \forall f\in X^*.$$

不难验证, φ_x 是 X^* 上的线性泛函, 并且

$$|\varphi_x(f)|\leqslant\|f\|\,\|x\|,$$

从而 $\varphi_x\in X^{**}$. 根据推论 3.5.2, $\|\varphi_x\|=\|x\|$.

现在定义映射 $T: X\to X^{**}$ 为 $Tx=\varphi_x$. 对于任意 $x,y\in X$, $\forall\alpha,\beta\in\mathbb{K}$, 有

$$\begin{aligned}\varphi_{\alpha x+\beta y}(f)&=\overline{f(\alpha x+\beta y)}=\overline{\alpha f(x)}+\overline{\beta f(x)}\\&=(\alpha\varphi_x)(f)+(\beta\varphi_y)(f),\quad \forall f\in X^*,\end{aligned}$$

从而 T 是线性映射. 此外, T 还是一一的, 因为 $\varphi_x=\varphi_y\Longrightarrow f(x)=f(y), \forall f\in X^*$, 从而依据推论 3.5.1, $x=y$.

定义 3.5.1 两个赋范线性空间 X 和 Y 叫做等价的, 是指存在 X 到 Y 上的一一线性映射 T, 并且 T 还是等距的: $\|Tx\| = \|x\|, \forall x \in X$. 这时 T 叫做由 X 到 Y 上的等价映射.

上面的分析证明了如下定理.

定理 3.5.2 设 X 是一赋范线性空间, 则 X 必等价于 X^{**} 的一个线性子空间. 如果 X 是完备的, 则 X 等价于 X^{**} 的一个闭线性子空间.

这个定理常常表达成 $X \subset X^{**}$. 当 X 与 X^{**} 等价时, 称 X 是自反的, 记作 $X = X^{**}$. 自反空间显然必定是一 Banach 空间.

下面给出对偶空间的一些例子.

例 3.5.1 序列空间 ℓ^p $(1 < p < \infty)$ 上的有界线性泛函. 设 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. 为简单起见, 我们考虑实 ℓ^p 空间, 即其中每个元的分量都是实数. 任取 $y = \{\eta_n\} \in \ell^q$, 定义 ℓ^p 上的线性泛函 f

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n \eta_n, \quad \forall x = \{\xi_n\} \in \ell^p. \tag{3.5.1}$$

根据引理 3.2.2 (Hölder 不等式), $|f(x)| \leqslant \|x\|_p \|y\|_q$, 这里 $\|x\|_p$ 和 $\|y\|_q$ 分别表示 ℓ^p 和 ℓ^q 范数. 因此 $f \in (\ell^p)^*$, 并且 $\|f\| \leqslant \|y\|_q$. 下面证对于任意 $f \in (\ell^p)^*$, 必有 $y = \{\eta_n\} \in \ell^q$, 使得 $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n \eta_n, \forall x = \{\xi_n\} \in \ell^p$.

为此, 令 $e_n = \{\delta_{nk} \,|\, k \geqslant 1\}$, 这里当 $k = n$ 时 $\delta_{nk} = 1$, 而当 $k \neq n$ 时 $\delta_{nk} = 0$. 不难看出, x 可表成 $x = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n e_n$. 令 $\eta_n = f(e_n)$, 则由 f 的线性和连续性可知

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n f(e_n) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n \eta_n.$$

记 $y = \{\eta_n\}$, 显然 y 由 f 唯一确定. 今证 $y \in \ell^q$. 事实上, 令 $z_n = \{\xi_k^{(n)}\}$, 其中

$$\xi_k^{(n)} = \begin{cases} |\eta_k|^{q-1} \operatorname{sgn} \eta_k, & \text{若 } k \leqslant n, \\ 0, & \text{若 } k > n, \end{cases}$$

sgn 为符号函数: 当 $\xi > 0$ 时 $\operatorname{sgn} \xi = 1$, 当 $\xi = 0$ 时 $\operatorname{sgn} \xi = 0$, 而当 $\xi < 0$ 时 $\operatorname{sgn} \xi = -1$. 于是

$$f(z_n) = \sum_{k=1}^{n} |\eta_k|^q \leqslant \|f\| \, \|z_n\|_p = \|f\| \left(\sum_{k=1}^{n} |\eta_k|^q \right)^{\frac{1}{p}},$$

即

$$\left(\sum_{k=1}^{n} |\eta_k|^q \right)^{\frac{1}{q}} \leqslant \|f\|.$$

让 $n\to\infty$, 得到

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}|\eta_k|^q\right)^{\frac{1}{q}}\leqslant\|f\|.$$

因此 $y\in\ell^q$, 从而由 $\|f\|\leqslant\|y\|_q$ 可知 $\|f\|=\|y\|_q$. 这表明, 式 (3.5.1) 是 ℓ^p 上有界线性泛函的一般表达形式, 并且 $\|f\|=\|y\|_q$.

于是若定义映射 $T:(\ell^p)^*\to\ell^q$ 为 $Tf=y$, 则 T 是 $(\ell^p)^*$ 到 ℓ^q 上的等距线性一一映射. 因此, $(\ell^p)^*$ 与 ℓ^q 等价: $(\ell^p)^*=\ell^q$. 同理, $(\ell^q)^*$ 与 ℓ^p 等价, 因此 $(\ell^p)^{**}$ 与 ℓ^p 等价: $(\ell^p)^{**}=\ell^p$, 即 ℓ^p 是自反的. □

限于篇幅, 下面我们列出 $L^p(a,b)$ 上的有界线性泛函, 读者可参阅文献 [18, 40] 等.

例 3.5.2 函数空间 $L^p(a,b)$ $(1<p<\infty)$ 上的有界线性泛函的一般形式是

$$f(x)=\int_a^b x(t)y(t)\mathrm{d}t,\quad\forall\,x\in L^p(a,b),\tag{3.5.2}$$

其中 $y\in L^q(a,b)$, $\|f\|=\|y\|_{L^q}$. $(L^p(a,b))^*$ 与 $L^q(a,b)$ 等价, $(L^p(a,b))^{**}$ 与 $L^p(a,b)$ 等价, 从而 $(L^p(a,b))^{**}=L^p(a,b)$, 即 $L^p(a,b)$ 是自反的. □

下一个定理刻画出 Hilbert 空间上的有界线性泛函.

定理 3.5.3 (Riesz 表现定理) 设 H 为 Hilbert 空间, $f\in H^*$, 则必有唯一元 $y\in H$, 使得

$$f(x)=\langle x,y\rangle,\quad\forall\,x\in H,\tag{3.5.3}$$

并且 $\|f\|=\|y\|$.

证明 若 $f=0$, 则取 $y=0$ 即可. 因此不妨设 $f\neq0$. 由于 f 连续, 故 f 的零空间 $\mathcal{N}(f)$ 是 H 中一闭子空间. 于是 H 有直交分解: $H=\mathcal{N}(f)\oplus\mathcal{N}(f)^\perp$. 今取 $z\in\mathcal{N}(f)^\perp$, $\|z\|=1$. 显然 $f(z)\neq0$. 对于任意 $x\in H$, 由于 $f(x-f(x)f(z)^{-1}z)=0$, 故 $x-f(x)f(z)^{-1}z\in\mathcal{N}(f)$. 于是 $\langle x-f(x)f(z)^{-1}z,z\rangle=0$, 即

$$f(x)=f(z)\langle x,z\rangle.$$

令 $y=\overline{f(z)}z$, 即得式 (3.5.3). 从式 (3.5.3) 得到 $|f(x)|\leqslant\|y\|\,\|x\|$, $\forall\,x\in H$. 因此 $\|f\|\leqslant\|y\|$. 由 $|f(y)|\,\|y\|^{-1}=\|y\|$, 可知 $\|f\|=\|y\|$.

现在假定另有一元 $w\in H$, 使得 $f(x)=\langle x,w\rangle$, $\forall\,x\in H$. 于是 $\langle x,y-w\rangle=0$, $\forall\,x\in H$, 从而 $w=y$. □

定义 3.5.2 赋范线性空间 X 中的序列 $\{x_n\}$ 叫做弱收敛于 $x_0\in X$, 如果它满足

$$\lim_{n\to\infty}f(x_n)=f(x_0),\quad\forall\,f\in X^*;$$

X^* 中序列 $\{f_n\}$ 叫做弱 * 收敛于 $f_0\in X^*$, 如果它满足

$$\lim_{n\to\infty}f_n(x)=f_0(x),\quad\forall\,x\in X.$$

赋范线性空间 X 中序列 $\{x_n\}$ 通常的收敛是指 $\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n-x_0\|=0$, 有时也称为强收敛. 显然, 强收敛隐含弱收敛.

根据 Riesz 表现定理, Hilbert 空间 H 中序列 $\{x_n\}$ 弱收敛于 $x_0\in H$ 等价于

$$\lim_{n\to\infty}\langle x,x_n\rangle=\langle x,x_0\rangle,\quad \forall\, x\in H.$$

例 3.5.3 设 $\{e_n\}$ 为 Hilbert 空间 H 中直交规范基, 那么 $\{e_n\}$ 弱收敛于零元. 事实上, 根据 $\{e_n\}$ 是直交规范基的性质, 有

$$\sum_{n=1}^{\infty}|\langle x,e_n\rangle|^2=\|x\|^2,\quad \forall\, x\in H.$$

于是

$$\lim_{n\to\infty}\langle x,e_n\rangle=0,\quad \forall\, x\in H,$$

这正是说 $\{e_n\}$ 弱收敛于零元. 另一方面, 由于 $\|e_n\|=1$, 故 $\{e_n\}$ 不可能强收敛于 0. □

在定理 3.5.3 中若记 $Tf=y$, 则不难验证 T 是 H^* 到 H 之上的线性一一等距满射, 从而 H^* 与 H 等价: $H=H^*$. 这正是说 Hilbert 空间是自对偶空间.

下面我们介绍线性算子的伴随算子概念. 首先从有界线性算子的伴随说起. 设 X 和 Y 为两个赋范线性空间, $T\in\mathcal{L}(X,Y)$. 对于每个 $g\in Y^*$, 令

$$f(x)=g(Tx)=\langle Tx,g\rangle,\quad \forall\, x\in X,$$

显然 f 是 X 上的线性泛函. 由于 $|f(x)|\leqslant\|g\|\,\|Tx\|$, $\forall\, x\in X$, 故 $f\in X^*$, 并且 f 由 g 唯一确定, 记作 $f=T^*g$. 容易验证 T^* 是 Y^* 到 X^* 的线性算子, 称为 T 的伴随算子, 有时也简称伴随. 注意 T^* 的定义可写成

$$\langle Tx,g\rangle=\langle x,T^*g\rangle,\quad \forall\, x\in X,\ g\in Y^*,$$

于是 $\|T^*g\|\leqslant\|T\|\,\|g\|$, 从而 T^* 是有界算子, 并且 $\|T^*\|\leqslant\|T\|$.

定理 3.5.4 设 X,Y,Z 是同一数域 $\mathbb{K}$ 上的三个赋范数线性空间, $T,T_1,T_2\in\mathcal{L}(X,Y)$, $S\in\mathcal{L}(Y,Z)$, $\alpha,\beta\in\mathbb{K}$. 那么

(1) $T^*\in\mathcal{L}(Y^*,X^*)$, 并且 $\|T^*\|=\|T\|$;

(2) $(\alpha T_1+\beta T_2)^*=\overline{\alpha}T_1^*+\overline{\beta}T_2^*$;

(3) $(ST)^*=T^*S^*$;

(4) 若 T 可逆, 并且 $T^{-1}\in\mathcal{L}(Y,X)$, 则 T^* 也可逆, 并且 $(T^*)^{-1}\in\mathcal{L}(X^*,Y^*)$, $(T^*)^{-1}=(T^{-1})^*$.

证明 这里我们仅证 (1) 和 (4). 为证 (1), 根据上面的分析, 只需证明 $\|T\|\leqslant\|T^*\|$. 事实上, 对于 $x\in X$, 且 $Tx\neq 0$, 由推论 3.5.1, 存在 $g_0\in Y^*$, 使得 $\|g_0\|=1$, $\langle Tx,g_0\rangle=\|Tx\|$. 从而

$$\|Tx\|=\langle Tx,g_0\rangle=\langle x,T^*g_0\rangle\leqslant\|T^*\|\,\|x\|.$$

显然, 当 $Tx=0$ 时上述不等式也成立. 但上式表明 $\|T\| \leqslant \|T^*\|$.

(4) 记 I_X, I_Y, I_{X^*}, I_{Y^*} 分别表示 X, Y, X^*, Y^* 中的恒定算子. 不难验证 $(I_X)^* = I_{X^*}$, $(I_Y)^* = I_{Y^*}$. 于是由 (3) 推出

$$I_{Y^*} = (TT^{-1})^* = (T^{-1})^* T^*,$$

$$I_{X^*} = (T^{-1}T)^* = T^*(T^{-1})^*.$$

由此即得 $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$. □

现在对线性算子 T 既不作有界的假定, 也不作定义在全空间 X 上的假定. 仿照有界算子情形, 如果 T 的伴随算子 T^* 存在, 则它是 Y^* 到 X^* 的线性算子. 对于 $g \in \mathcal{D}(T^*)$, 要求 $f(x) = \langle Tx, g\rangle$ 是 $x \in \mathcal{D}(T)$ 的连续线性泛函. 根据定理 3.5.1, 若 $\mathcal{D}(T)$ 在 X 中稠, 则 f 可唯一地延拓成 X 上的有界线性泛函, 仍记作 f, 并且 $T^*g = f$. 这里为了延拓的唯一性, $\mathcal{D}(T)$ 在 X 中稠是必需的.

因此, 在讨论 T 的伴随算子时总是假定 T 是稠定的, 即 $\mathcal{D}(T)$ 在 X 中稠. 依定义, T 的伴随 T^* 由下式唯一确定

$$\langle Tx, g\rangle = \langle x, T^*g\rangle, \quad \forall\, x \in \mathcal{D}(T),\ g \in \mathcal{D}(T^*),$$

$$\mathcal{D}(T^*) = \{g \in Y^* \,|\, \langle x, T^*g\rangle \text{ 在 } \mathcal{D}(T) \text{ 上连续}\}.$$

定义 3.5.3 设 X 和 Y 是同一数域 $\mathbb{K}$ 上的两个赋范线性空间, 称线性算子 $T: \mathcal{D}(T) \subset X \to Y$ 是闭的, 指它满足: 如果 $\{x_n\} \subset \mathcal{D}(T)$, $x_n \to x_0$, 且 $Tx_n \to y_0$, 那么 $x_0 \in \mathcal{D}(T)$, 并且 $y_0 = Tx_0$.

在乘积空间 $X \times Y = \{[x, y] \,|\, x \in X, y \in Y\}$ 中引入自然的线性运算

$$\alpha[x_1, y_1] + \beta[x_2, y_2] = [\alpha x_1 + \beta x_2, \alpha y_1 + \beta y_2],$$

则 $X \times Y$ 形成一线性空间. 令

$$\|[x, y]\| = \|x\|_1 + \|y\|_2, \quad \forall\, x \in X, y \in Y,$$

其中 $\|x\|_1$ 和 $\|y\|_2$ 各表示 X 和 Y 中的范数. 容易验证, $\|[x, y]\|$ 是 $X \times Y$ 中的范数, 从而 $X \times Y$ 也是一个赋范线性空间. 如果 X 和 Y 是完备的, 则 $X \times Y$ 是 Banach 空间.

$X \times Y$ 中子集

$$G(T) = \{\,[x, Tx] \,|\, x \in \mathcal{D}(T)\},$$

$$G'(T) = \{\,[Tx, x] \,|\, x \in \mathcal{D}(T)\},$$

分别称为线性算子 T 的图像和反图像. 称线性算子 $T: \mathcal{D}(T) \subset X \to Y$ 是线性算子 $S: \mathcal{D}(S) \subset X \to Y$ 的延拓, 是指 $G(S) \subset G(T)$, 即 $\mathcal{D}(S) \subset \mathcal{D}(T)$, 并且 $x \in \mathcal{D}(S) \Longrightarrow Tx = Sx$.

容易看出, 为了线性算子 $T: \mathcal{D}(T) \subset X \to Y$ 是闭的, 必须且只需 $G(T)$ 是乘积空间 $X \times Y$ 中的闭集.

由于 Hilbert 空间是自对偶的, Hilbert 空间之间的线性算子的伴随算子不必在其对偶空间上定义, 直接在 Hilbert 空间中定义就可以了. 设 X 到 Y 为两个 Hilbert 空间, T 为 X 到 Y 的稠定线性算子. 伴随算子 T^* 由下式确定

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^*y\rangle, \quad \forall x \in \mathcal{D}(T),\ y \in \mathcal{D}(T^*).$$

因此, 伴随 T^* 是 Y 到 X 的线性算子.

设 X 和 Y 是两个内积空间. 在乘积空间 $X \times Y$ 中定义内积

$$\langle [x_1, y_1], [x_2, y_2]\rangle = \langle x_1, x_2\rangle + \langle y_1, y_2\rangle, \ \ \forall [x_1, y_1], [x_2, y_2] \in X \times Y,$$

则 $X \times Y$ 成为新的 Hilbert 空间. 在上式中, 空间 X, Y 和 $X \times Y$ 中的内积采用了同一记号而不致混淆.

引理 3.5.1 设 X, Y 是同一数域 $\mathbb{K}$ 上的两个 Hilbert 空间, T 是 X 到 Y 的稠定线性算子, 那么 $G(T^*) = G'(-T)^{\perp}$.

证明 任取 $y \in \mathcal{D}(T^*)$, 则

$$\langle [y, T^*y], [-Tx, x]\rangle = \langle T^*y, x\rangle - \langle y, Tx\rangle = 0, \ \ \forall x \in \mathcal{D}(T).$$

因此, $G(T^*) \perp G'(-T)$, 即 $G(T^*) \subset G'(-T)^{\perp}$. 为证反包含, 任取 $[y, z] \in G'(-T)^{\perp}$, 则

$$0 = \langle [-Tx, x], [y, z]\rangle = -\langle Tx, y\rangle + \langle x, z\rangle, \ \ \forall x \in \mathcal{D}(T),$$

即 $\langle Tx, y\rangle = \langle x, z\rangle$, $\forall x \in \mathcal{D}(T)$. 从而 $y \in \mathcal{D}(T^*)$, 并且 $z = T^*y$. 因此, $[y, z] \in G(T^*)$, 即 $G'(-T)^{\perp} \subset G(T^*)$, 证毕. □

一般说来, T^* 的定义域未必是稠定的, 甚至有可能 $\mathcal{D}(T^*) = \{0\}$. 但我们有

定理 3.5.5 设 X, Y 是同一数域 $\mathbb{K}$ 上的两个 Hilbert 空间, T 是 X 到 Y 的稠定线性算子, 那么

(1) T^* 是闭线性算子;

(2) 若 T 还是闭的, 则 T^* 必定是稠定的, 并且 $T^{**} = T$.

证明 (1) 是引理 3.5.1 中 $G(T^*) = G'(-T)^{\perp}$ 的直接结果. 下面证明 (2). 根据引理 3.5.1, $G'(-T) = \overline{G'(-T)} = G(T^*)^{\perp}$, 这是因为 $G(T)$ 闭等价于 $G'(-T)$ 闭. 如果 $\mathcal{D}(T^*)$ 在 Y 中不稠, 则存在一非零元 $y_0 \in Y$, 使得 $y_0 \perp \mathcal{D}(T^*)$, 即 $\langle y_0, y\rangle = 0, \forall \mathcal{D}(T^*)$. 于是

$$\langle [y_0, 0], [y, T^*y]\rangle = \langle y_0, y\rangle + \langle 0, T^*y\rangle = 0, \ \ \forall y \in \mathcal{D}(T^*),$$

即 $[y_0, 0] \in G(T^*)^{\perp} = G'(-T)$. 从而 $-T0 = y_0$, 这不可能. 因此 $\mathcal{D}(T^*)$ 在 Y 中稠.

下面证明 $T = T^{**}$. 由于 T^* 也是稠定的, 故 T^{**} 存在. 于是从伴随算子的定义

$$\langle T^*y, x\rangle = \langle y, Tx\rangle, \quad \forall y \in \mathcal{D}(T^*),\ x \in \mathcal{D}(T),$$

可以得到 $G(T^*) = G'(-T)^{\perp}$ 和 $G(T) = G'(-T^*)^{\perp}$. 于是 $G(T^{**}) = G'(-T^*)^{\perp} = G(T)$. 因此 $T = T^{**}$. □

定理 3.5.5 的结论实际上对于自反 Banach 空间也成立, 这里我们不作详细叙述.

设 T 是 Hilbert 空间 X 中的稠定线性算子. 如果 $T \subset T^*$, 则称 T 为对称算子; 而当 $T = T^*$ 时, 则称 T 为 X 中的自伴算子. 注意 Hilbert 空间中的自伴算子必定是闭的.

例 3.5.4 设 $X = \mathbb{K}^n$ 为 n 维 Hilbert 空间, $\mathbb{K}^n$ 中的元表示成列向量形式: $x = [\xi_1, \cdots, \xi_n]^{\mathrm{T}}$. 设 e_k 表示第 k 个分量为 1 而其余分量为 0 的向量. 于是 $\{e_1, \cdots, e_n\}$ 是 $\mathbb{K}^n$ 上的一组规范直交基. x 可表示成 $x = \xi_1 e_1 + \cdots + \xi_n e_n$. 设 $A \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$, $Ae_k = a_{1k}e_1 + \cdots + a_{nk}e_n$, $k = 1, \cdots, n$. 于是

$$Ax = \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{kj}\xi_j \right) e_k.$$

由此可见, A 可以表示成矩阵形式: $A = (a_{kj})$.

任取 $x = [\xi_1, \cdots, \xi_n]^{\mathrm{T}}$, $y = [\eta_1, \cdots, \eta_n]^{\mathrm{T}}$, 于是

$$\langle Ax, y \rangle = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\xi_j\overline{\eta}_i = \langle x, A^*y \rangle,$$

其中 $A^* = (a_{ij}^*)$, 而 $a_{ij}^* = \overline{a}_{ji}$. 这就是说, A 的伴随算子恰好是矩阵 A 的共轭转置. □

例 3.5.5 设 T 是 $L^2(a,b)$ 中的积分算子

$$(Tx)(t) = \int_a^b K(s,t)x(t)\,\mathrm{d}t, \quad \forall\, x \in L^2(a,b),\ s \in [a,b],$$

其中 $K(s,t)$ 是 $[a,b] \times [a,b]$ 上的连续函数. 任取 $x, y \in L^2(a,b)$, 有

$$\langle Tx, y \rangle = \int_a^b \int_a^b K(s,t)x(t)\overline{y}(s)\mathrm{d}t\mathrm{d}s = \langle x, T^*y \rangle,$$

其中

$$(T^*y)(t) = \int_a^b \overline{K(s,t)}y(s)\mathrm{d}s, \quad t \in [a,b].$$

因此 T^* 也是一积分算子. 特别地, 当 $K(s,t) = \overline{K(t,s)}$ 时, $T^* = T$, 即 T 为自伴的. □

例 3.5.6 设 $\{\lambda_n\}$ 是一严格递增的正数列, 并且 $\lambda_n \to \infty$ $(n \to \infty)$. 在 Hilbert 空间 ℓ^2 中定义线性算子 A 如下

$$Ax = \{\lambda_n\xi_n\}, \quad \forall\, x = \{\xi_n\} \in \mathcal{D}(A),$$

$$\mathcal{D}(A) = \{x = \{\xi_n\} \,|\, \{\lambda_n\xi_n\} \in \ell^2\}.$$

今证 A 是 ℓ^2 中的自伴算子. 事实上, 由于有限个分量非零而其余分量都为 0 的元属于 $\mathcal{D}(A)$, 但这样的元全体显然是稠的, 从而 A 是稠定的.

今证 A 的闭性. 设 $x=\{\xi_k^{(n)}\}\in\mathcal{D}(A)$, $x_n\to x=\{\xi_k\}$, 并且 $Ax_n\to y=\{\eta_k\}$. 于是任给 $\varepsilon>0$, 存在自然数 $N_1=N_1(\varepsilon)$, 使得当 $n\geqslant N_1$ 时

$$\sum_{k=1}^{\infty}|\lambda_k\xi_k^{(n)}-\eta_k|^2<\varepsilon,\quad \sum_{k=1}^{\infty}|\xi_k^{(n)}-\xi_k|^2<\varepsilon.$$

由此直接可得 $\xi^{(n)}\to\xi_k$, $\forall\, k\in\mathbb{N}$, 并且对于任意自然数 N_2, 有

$$\sum_{k=1}^{N_2}|\lambda_k\xi_k^{(n)}-\eta_k|^2<\varepsilon,\ \sum_{k=1}^{N_2}|\xi_k^{(n)}-\xi_k|^2<\varepsilon,\ \forall\, n\geqslant N_1.$$

上式中让 $n\to\infty$, 得到

$$\sum_{k=1}^{N_2}|\lambda_k\xi_k-\eta_k|^2\leqslant\varepsilon,\quad \forall\, N_2\in\mathbb{N}.$$

然后再令 $N_2\to\infty$, 即得 $\{\lambda_k\xi_k-\eta_k\}\in\ell^2$. 因此 $\{\lambda_k\xi_k\}\in\ell^2$. 从而 $\{\xi_k\}\in\mathcal{D}(A)$. 又上式中的 $\varepsilon>0$ 是任意的, 因此 $\{\lambda_k\xi_k=\eta_k\}$, 即 $Ax=y$. 这样就证明了 A 是闭的. 由于诸 λ_k 是实的, A 的自伴性是明显的, 读者可作为练习补足证明. □

3.6 线性算子的基本理论

本节介绍的关于线性算子的开映射定理、闭图像定理、一致有界性定理 (共鸣定理) 与 3.5 节中的关于有界线性泛函的 Hahn-Banach 延拓定理一起, 在理论上奠定了泛函分析的基础.

设 X,Y 是同一数域 $\mathbb{K}$ 上的两个赋范线性空间. 从全空间 X 到 Y 的有界线性算子全体记作 $\mathcal{L}(X,Y)$. 当 $X=Y$ 时, 简记 $\mathcal{L}(X)=\mathcal{L}(X,Y)$, 并称由 X 到 X 的线性算子为 X 中的线性算子. 在 $\mathcal{L}(X,Y)$ 中定义线性运算加法和数乘如下: $\forall\, T,S\in\mathcal{L}(X,Y)$, $\forall\,\alpha,\beta\in\mathbb{K}$,

$$(\alpha T+\beta S)(x)=\alpha Tx+\beta Sx,\quad \forall\, x\in X.$$

容易验证 $\alpha T+\beta S\in\mathcal{L}(X,Y)$, 从而 $\mathcal{L}(X,Y)$ 是 $\mathbb{K}$ 上的一个线性空间. 对于 $T\in\mathcal{L}(X,Y)$, 今证定义 3.4.2 所给出的算子范数 $\|T\|$ 确实是这个线性空间上的一个范数. 事实上, $\|T\|\geqslant 0$, 并且零算子 θ 的范数是 0; 反之, 若 $\|T\|=0$, 则 $\forall\, x\in X$, 有 $\|Tx\|\leqslant\|T\|\,\|x\|=0$, 即 $Tx=0$, $\forall\, x\in X$, 从而 T 是零算子. 这表明范数属性 (1) 成立. 此外

$$\begin{aligned}\|\alpha T\|&=\sup_{x\in X,\|x\|=1}\|\alpha Tx\|=|\alpha|\sup_{x\in X,\|x\|=1}\|Tx\|\\&=|\alpha|\,\|T\|,\ \forall\, T\in\mathcal{L}(X,Y),\ \forall\,\alpha\in\mathbb{K},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\|T+S\|&=\sup_{x\in X,\|x\|=1}\|(T+S)x\|\leqslant\sup_{x\in X,\|x\|=1}\|Tx\|+\sup_{x\in X,\|x\|=1}\|Sx\|\\&=\|T\|+\|S\|,\quad \forall\, T,S\in\mathcal{L}(X,Y).\end{aligned}$$

因此范数属性 (2) 和 (3) 也成立. 这样, $\mathcal{L}(X,Y)$ 是一赋范线性空间.

设 $\{T_n\}$ 为 $\mathcal{L}(X,Y)$ 中一序列, $T_n \to T \in \mathcal{L}(X,Y)$, 则称算子列 $\{T_n\}$ 按算子范数收敛于 T, 或称算子列 $\{T_n\}$ 一致收敛于 T. 如果对于任意 $x \in X$, $T_n x \to Tx$, 则称 $\{T_n\}$ 强收敛于 T, 有时也称 $\{T_n\}$ 点点收敛于 T.

从 $\|T_n x - Tx\| \leqslant \|T_n - T\|\,\|x\|$ 可知, 若 $\{T_n\}$ 一致收敛于 T, 则 $\{T_n\}$ 也强收敛于 T. 但反之则未必成立.

定理 3.6.1 设 X 是一赋范线性空间, Y 是一 Banach 空间, 则 $\mathcal{L}(X,Y)$ 是一 Banach 空间.

证明 设 $\{T_n\}$ 是 $\mathcal{L}(X,Y)$ 中一基本列. 于是对于任意 $x \in X$, 由于 $\|T_m x - T_n x\| \leqslant \|T_m - T_n\|\,\|x\|$, 故 $\{T_n x\}$ 是 Y 中的基本列. 但假设 Y 是完备的, 所以 $\{T_n x\}$ 在 Y 中收敛. 于是可以定义 X 到 Y 的算子 T

$$Tx = \lim_{n\to\infty} T_n x, \quad \forall\, x \in X.$$

对于任意 $x, z \in X$ 和 $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, 有

$$T(\alpha x + \beta z) = \lim_{n\to\infty} T_n(\alpha x + \beta z) = \alpha \lim_{n\to\infty} T_n x + \beta \lim_{n\to\infty} T_n z = \alpha Tx + \beta Tz.$$

因此 T 是一线性算子.

下面证明 $T \in \mathcal{L}(X,Y)$. 事实上, 从 $|\|T_n\| - \|T_m\|| \leqslant \|T_n - T_m\|$ 可知 $\{\|T_n\|\}$ 是 $\mathbb{R}$ 中的收敛数列. 从而存在 $\mu \geqslant 0$ 使得 $\|T_n\| \leqslant \mu$, $\forall\, n \geqslant 1$. 于是

$$\|T_n x\| \leqslant \|T_n\|\,\|x\|, \quad \forall\, x \in X,\ \forall\, n \geqslant 1.$$

让 $n \to \infty$, 即得 $\|Tx\| \leqslant \mu\|x\|$, $\forall\, x \in X$, 从而 T 是有界算子.

最后证明 $\|T_n - T\| \to 0$. 事实上, 由于 $\{T_n\}$ 是基本列, 故对于任给的 $\varepsilon > 0$, 存在自然数 N, 使得 $\|T_m - T_n\| < \varepsilon$, $\forall\, m, n > N$. 于是

$$\|T_m x - T_n x\| < \varepsilon, \quad \forall\, m, n > N,\ \forall\, x \in X,\ \|x\| = 1.$$

在上式中任意固定一 $n > N$, 让 $m \to \infty$, 得到

$$\|T_n x - Tx\| \leqslant \varepsilon, \quad \forall\, x \in X,\ \|x\| = 1.$$

由此即得

$$\|T_n - T\| = \sup_{x\in X, \|x\|=1} \|T_n x - Tx\| \leqslant \varepsilon, \quad \forall\, n > N.$$

这正是说 $\{T_n\}$ 一致收敛于 T. □

设 X 和 Y 为两个集合, 映射 $T : X \to Y$ 称为满射, 如果其值域 $\mathcal{R}(T) = Y$, 即对于任意 $y \in Y$, 都存在 $x \in X$ 使得 $Tx = y$; $T : X \to Y$ 称为一一映射, 是指当 $x_1, x_2 \in X$

满足 $Tx_1 = Tx_2$, 则必有 $x_1 = x_2$. 于是若 $T : X \to Y$ 是一个一一满射, 则 T 有定义在全 Y 上的逆映射 T^{-1}, 即对于每一 $y \in Y$, 有唯一元 $x = T^{-1}y \in X$, 使得 $Tx = y$.

显然, 若映射 $T : X \to Y$ 的逆存在, 并且其定义域是整个 Y, 则 $(T^{-1})^{-1} = T$. 此外, 若 $A : X \to Y$ 和 $B : Y \to X$ 分别具有定义在整个 Y 和 X 上的逆映射 A^{-1} 和 B^{-1}, 那么乘积映射 $AB : X \to X$ 有定义在全 X 上的逆映射 $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

设 X 和 Y 是同一数域 $\mathbb{K}$ 上的两个线性空间, $T : X \to Y$ 为线性算子. 若 T 是一一映射, 则 T^{-1} 也是线性算子, 其定义域是 $\mathcal{R}(T)$. 事实上, 设 $y_1, y_2 \in \mathcal{R}(T)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, 则存在 $x_1, x_2 \in X$, 使得 $Tx_1 = y_1$, $Tx_2 = y_2$. 于是

$$T^{-1}(\alpha y_1 + \beta y_2) = T^{-1}(\alpha Tx_1 + \beta Tx_2) = T^{-1}T(\alpha x_1 + \beta x_2)$$

$$= \alpha x_1 + \beta x_2 = \alpha T^{-1}y_1 + \beta T^{-1}y_2.$$

定理 3.6.2 *设 X 和 Y 是同一数域 $\mathbb{K}$ 上的两个赋范线性空间, $T \in \mathcal{L}(X, Y)$, 则 T^{-1} 存在且有界的充要条件是, 存在常数 $\mu > 0$ 使得*

$$\|Tx\| \geqslant \mu\|x\|, \quad \forall\, x \in X. \tag{3.6.1}$$

证明 先证充分性. 设式 (3.6.1) 成立. 于是若 $Tx = 0$, 则 $x = 0$, 从而 T 是一一映射, 因此 T 可逆. 对 $y \in \mathcal{R}(T)$, 令 $x = T^{-1}y$, 从式 (3.6.1) 得到

$$\|T^{-1}y\| \leqslant \mu^{-1}\|y\|, \quad \forall\, y \in \mathcal{R}(T).$$

这正是说 T^{-1} 有界. 必要性类似可证. □

定理 3.6.3 *设 X 是赋范线性空间, Y 是 Banach 空间, $T : \mathcal{D}(T) \subset X \to Y$ 是一连续线性算子. 如果 $\mathcal{D}(T)$ 在 X 中稠, 那么 T 能唯一地延拓到整个 X 上成为定义在 X 上的有界线性算子 S (这样的延拓叫做按连续性延拓), 而且 $\|S\| = \|T\|$.*

证明 任取 $x \in X$, 由于 $\mathcal{D}(T)$ 在 X 中稠, 必存在序列 $\{x_n\} \subset \mathcal{D}(T)$, 使得 $x_n \to x$. 从 T 连续可知存在常数 $\mu > 0$, 使得 $\|Tx\| \leqslant \mu\|x\|$, $\forall\, x \in \mathcal{D}(T)$. 于是 $\|Tx_m - Tx_n\| \leqslant \mu\|x_m - x_n\|$, 从而 $\{Tx_n\}$ 是 Y 中的基本列. 但假设 Y 是完备的, 故 $\{Tx_n\}$ 在 Y 中有极限 y, 而且不难看出极限 y 仅与 x 有关, 而与 $\mathcal{D}(T)$ 中收敛到 x 的特定的序列 $\{x_n\}$ 无关. 因此我们可以记 $y = Sx$. 容易验证 S 是线性的, $\mathcal{D}(S) = X$, 并且当 $x \in \mathcal{D}(T)$ 时 $Sx = Tx$. 至于 S 的有界性和保范性 $\|S\| = \|T\|$ 是直接的, 读者可作为练习. □

下面, 为强调赋范空间 X 中的开球 $B_\varepsilon(x)$ 与 X 有关, 也将其记作 $B_X(x, \varepsilon)$.

定理 3.6.4 (开映射定理) *设 X 和 Y 是两个 Banach 空间, $T : \mathcal{D}(T) \subset X \to Y$ 是一闭线性算子, 并且 T 的值域 $\mathcal{R}(T) = Y$. 那么对于任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, 使得 $B_Y(0, \delta) \subset T(\mathcal{D}(T) \cap \overline{B}(0, \varepsilon))$, 即对于每个 $y \in Y$, $\|y\| < \delta$, 必有 $x \in \mathcal{D}(T)$, $\|x\| \leqslant \varepsilon$, 使得 $y = Tx$.*

这个定理的证明要用到纲推理, 比较复杂, 这里从略, 读者可参阅相关参考书, 如文献 [18, 40].

定理 3.6.5 (Banach 逆算子定理) 设 X 和 Y 是两个 Banach 空间, 并设 $T:\mathcal{D}(T)\subset X\to Y$ 是闭的一一线性算子, 并且是满射的, 即 $\mathcal{R}(T)=Y$. 那么 T 的逆算子 T^{-1} 有界, 即 $T^{-1}\in\mathcal{L}(X,Y)$.

证明 依开映射定理, 存在常数 $\delta>0$, 使得 $B_Y(0,\delta)\subset T\left(\mathcal{D}(T)\cap\overline{B}_X(0,1)\right)$. 由此推出 $T^{-1}B_Y(0,\delta)\subset\mathcal{D}(T)\cap\overline{B}_X(0,1)$, 即

$$\|T^{-1}y\|\leqslant 1,\quad \forall\, y\in Y,\|y\|\leqslant\delta.$$

由此可见 T^{-1} 有界, 并且 $\|T^{-1}\|\leqslant\delta^{-1}$. □

定理 3.6.6 (闭图像定理) 设 X 和 Y 是两个 Banach 空间, T 是 X 到 Y 的闭线性算子, 并且 $\mathcal{D}(T)=X$, 那么 T 是有界线性算子.

证明 从 T 的闭性可知 T 的图像 $G(T)$ 是 $X\times Y$ 中闭线性子空间, 从而 $G(T)$ 本身也是一个 Banach 空间. 定义线性算子 $S:G(T)\to X$ 为

$$S[x,Tx]=x,\quad \forall\,[x,Tx]\in G(T).$$

于是

$$\|S[x,Tx]\|=\|x\|\leqslant\|x\|+\|Tx\|=\|[x,Tx]\|,\quad \forall\,[x,Tx]\in G(T).$$

因此 $S:G(T)\to X$ 是有界线性算子, 并且 $\mathcal{R}(S)=X$. 容易验证 S 还是一一的, 于是根据定理 3.6.5, S^{-1} 是有界线性算子, 从而

$$\|[x,Tx]\|=\|S^{-1}x\|\leqslant\|S^{-1}\|\,\|x\|,\quad \forall\, x\in X.$$

由此即得

$$\|Tx\|\leqslant\|S^{-1}\|\,\|x\|,\quad \forall\, x\in X,$$

即 T 是有界线性算子. □

定理 3.6.7 (一致有界性定理或共鸣定理) 设 X 和 Y 是两个 Banach 空间, $G\subset\mathcal{L}(X,Y)$. 假定 $\sup\{\|Tx\|\,|\,T\in G\}<\infty$, $\forall\, x\in X$, 则存在常数 $\mu>0$, 使得 $\sup\{\|T\|\,|\,T\in G\}\leqslant\mu$.

证明 定义

$$\|x\|_G=\|x\|+\sup\{\|Tx\|\,|\,T\in G\},\quad \forall\, x\in X.$$

容易验证, $\|\cdot\|_G$ 是 X 的一范数. 今证 $X_G=(X,\|\cdot\|_G)$ 也是一 Banach 空间. 事实上, 设 $\{x_n\}\subset X_G$ 是一基本列, 即

$$\|x_m-x_n\|_G=\|x_m-x_n\|+\sup_{T\in G}\|Tx_m-Tx_n\|\to 0\ (m,n\to\infty).$$

于是存在 $x \in X$, 使得 $\|x_n - x\| \to 0$. 另一方面, 从上式可见对于任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, 使得

$$\sup_{T \in G} \|Tx_m - Tx_n\| < \varepsilon/2, \quad \forall m, n \geqslant N,$$

由此得 $\sup\{\|Tx_n - Tx\| \,|\, T \in G\} \leqslant \varepsilon, \forall n \geqslant N$. 于是

$$\|x_n - x\|_G = \|x_n - x\| + \sup_{T \in G} \|Tx_n - Tx\| \to 0,$$

从而 X_G 是 Banach 空间.

注意 $\|x\| \leqslant \|x\|_G$. 今定义线性算子 $J : X_G \to X$ 为 $Jx = x, \forall x \in X_G$. 由于 $\|Jx\| = \|x\| \leqslant \|x\|_G, \forall x \in X_G$, 故 $J \in \mathcal{L}(X_G, X)$. 此外, 显然 J 是满射. 因此根据 Banach 逆算子定理, $J^{-1} \in \mathcal{L}(X, X_G)$. 从而存在常数 $\mu > 0$, 使得

$$\|x\|_G = \|x\| + \sup_{T \in G} \{\|Tx\| \,|\, T \in G\} \leqslant \mu \|x\|, \quad \forall x \in X.$$

由此即得所需结论. □

定理 3.6.8 (Banach-Steinhaus **定理**) 设 X 和 Y 是两个 Banach 空间, M 为 X 的稠子集. 设 $T_n, T \in \mathcal{L}(X, Y)$, $n \in \mathbb{N}$. 那么 T_n 强收敛于 T 的充分必要条件是

(1) $\|T_n\|$ 一致有界;

(2) $\lim\limits_{n \to \infty} T_n x = Tx, \forall x \in M$.

证明 必要性由共鸣定理直接推出, 今证充分性. 设 $\|T_n\| \leqslant \mu, \forall n \in \mathbb{N}$. 任意取定 $x \in X$, 对于任给 $\varepsilon > 0$, 取 $y \in M$ 使得

$$\|x - y\| < \frac{\varepsilon}{2(\mu + \|T\|)}.$$

再取 $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ 充分大, 使得

$$\|T_n y - Ty\| < \varepsilon/2, \quad \forall n \geqslant N.$$

于是当 $n \geqslant N$ 时, 有

$$\begin{aligned} \|T_n x - Tx\| &\leqslant \|T_n x - T_n y\| + \|T_n y - Ty\| + \|Ty - Tx\| \\ &\leqslant \mu \|x - y\| + \varepsilon/2 + \|T\| \, \|x - y\| < \varepsilon, \end{aligned}$$

从而 $T_n x \to Tx, \forall x \in X$. □

3.7 有界线性算子的正则集和谱集

定义 3.7.1 设 X 为复 Banach 空间, $T \in \mathcal{L}(X)$, I 是 X 中的恒等算子.

(1) 称 $\lambda \in \mathbb{C}$ 为 T 的正则点, 是指 $\lambda I - T$ 可逆, 并且 $(\lambda I - T)^{-1} \in \mathcal{L}(X)$; T 的正则点全体记作 $\rho(T)$, 叫做 T 的正则集; 而 $R(\lambda; T) = (\lambda I - T)^{-1}$ 叫做 T 的预解式.

(2) $\sigma(T) = \mathbb{C} \setminus \rho(T)$ 叫做 T 的谱集; 谱集可分解成互不相交的 3 部分:

- 点谱 $\sigma_p(T) = \{\lambda \in \sigma(T) \,|\, \lambda I - T \text{ 不可逆}\}$;
- 连续谱 $\sigma_c(T) = \{\lambda \in \sigma(T) \,|\, \lambda I - T \text{ 可逆}, \ \overline{\mathcal{R}(\lambda I - T)} = X\}$;
- 剩余谱 $\sigma_r(T) = \{\lambda \in \sigma(T) \,|\, \lambda I - T \text{ 可逆}, \ \overline{\mathcal{R}(\lambda I - T)} \neq X\}$.

从上述定义可见, 复平面可以分解成几个互不相交的集合之并

$$\mathbb{C} = \rho(T) \cup \sigma(T) = \rho(T) \cup \sigma_p(T) \cup \sigma_c(T) \cup \sigma_r(T).$$

$\lambda \in \sigma_p(T)$ 称为 T 的本征值 (也称特征值), 这时必有非零 $x \in X$ 使得 $Tx = \lambda x$, x 称为 T 的与 λ 相应的本征向量或本征元 (也称特征向量或特征元). 注意, 若 $\lambda I - T$ 可逆, 但 $\mathcal{R}(\lambda I - T) = X$, 则依据 Banach 逆算子定理 3.6.5, $(\lambda I - T)^{-1} \in \mathcal{L}(X)$, 从而 $\lambda \in \rho(T)$. 因此, 当 $\lambda \in \sigma(T)$ 时, 只可能或者 $\lambda I - T$ 不可逆, 或者 $\lambda I - T$ 可逆, 但 $\mathcal{R}(\lambda I - T) \neq X$.

引理 3.7.1 设 X 为 Banach 空间, $T \in \mathcal{L}(X)$, I 是 X 中的恒等算子. 假定 $\|T\| < 1$, 则 $1 \in \rho(T)$, 并且

$$(I - T)^{-1} = \sum_{k=1}^{\infty} T^k, \tag{3.7.1}$$

$$\|(I - T)^{-1}\| \leqslant (1 - \|T\|)^{-1}. \tag{3.7.2}$$

证明 由于 $\sum_{k=0}^{\infty} \|T^k\| \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} \|T\|^k < \infty$, 于是级数 $\sum_{n=0}^{\infty} T^n$ 也按算子范数收敛于某个 $S \in \mathcal{L}(X)$. 今证 $S = (I - T)^{-1}$. 事实上, 令 $S_n = \sum_{k=0}^{n} T^k$, 则

$$(I - T)S_n = I - T^{n+1} = S_n(I - T).$$

显然, T^{n+1} 按算子范数收敛于零算子, 从而在上式中让 $n \to \infty$, 有 $(I - T)S = I = S(I - T)$. 上式表明 $I - T$ 可逆, $S = (I - T)^{-1}$, 并且式 (3.7.1) 成立. 由此可得

$$\|(I - T)^{-1}\| \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} \|T\|^k = \frac{1}{1 - \|T\|}.$$

□

引理 3.7.2 设 X 为 Banach 空间, $T, S \in \mathcal{L}(X)$. 设 T 可逆, 并且 $T^{-1} \in \mathcal{L}(X)$. 如果 $\|S\| < \|T^{-1}\|^{-1}$, 则 $T + S$ 也可逆, $(T + S)^{-1} \in \mathcal{L}(X)$, 并且

$$(T + S)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (T^{-1}S)^n T^{-1}.$$

证明 注意到 $T+S=T(I+T^{-1}S)$, 并且 $\|T^{-1}S\| \leqslant \|T^{-1}\|\,\|S\| < 1$, 所需结论从引理 3.7.1 直接得到. □

定理 3.7.1 设 X 为 Banach 空间, $T \in \mathcal{L}(X)$. 那么

(1) 当 $|\lambda| > \|T\|$ 时, $\lambda \in \rho(T)$, 并且

$$R(\lambda;T)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{T^n}{\lambda^{n+1}},$$

$$\|R(\lambda;T)\| \leqslant (|\lambda|-\|T\|)^{-1}.$$

(2) 设 $\lambda \in \rho(T)$, 则当 $\mu \in \mathbb{C}$, $|\mu| < \|R(\lambda;T)\|^{-1}$ 时, $\lambda+\mu \in \rho(T)$, 并且 $R(\lambda+\mu;T)$ 可展开成

$$R(\lambda+\mu;T)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\mu^n R(\lambda;T)^{n+1}.$$

(3) $\rho(T)$ 是复平面中的开集, 而 $\sigma(T)$ 是有界闭集.

证明 (1) 注意当 $|\lambda| > \|T\|$ 时, $\|\lambda^{-1}T\| < 1$, 于是 (1) 是引理 3.7.1 的直接结论.

(2) 注意 $(\lambda+\mu)I-T=(\lambda I-T)+\mu I$. 由于 $R(\lambda;T) \in \mathcal{L}(X)$, 所需结论从引理 3.7.2 得到.

(3) 从 (2) 可知 $\rho(T)$ 是开集, 从而 $\sigma(T)$ 是有界闭集. □

下面列出定理 3.7.2 和定理 3.7.3, 略去证明. 有兴趣的读者可查阅文献 [18, 40] 等.

定理 3.7.2 设 X 为 Banach 空间, 则对任意 $T \in \mathcal{L}(X)$, $\sigma(T) \neq \varnothing$.

定义 3.7.2 设 X 为 Banach 空间, $T \in \mathcal{L}(X)$, 那么称 $r(T)=\sup\{|\lambda|\,|\,\lambda \in \sigma(T)\}$ 为 T 的谱半径.

定理 3.7.3 设 X 为 Banach 空间, $T \in \mathcal{L}(X)$, 那么

$$r(T)=\lim_{n\to\infty}\|T^n\|^{\frac{1}{n}}.$$

3.8 紧算子的谱理论

Banach 空间中重要的一类算子是所谓的紧算子类, 它最接近有限维空间中的线性变换, 在数学发展中它是由积分算子发展而来的. 首先给出紧算子的定义及其基本性质.

定义 3.8.1 设 X, Y 为两个 Banach 空间, $T: X \to Y$ 为线性算子, $\mathcal{D}(T)=X$. T 称为紧算子, 如果 T 把 X 中的每个有界集映成 Y 中的相对列紧子集. X 到 Y 的所有紧算子组成的集合记作 $\mathcal{K}(X,Y)$, 并且当 $X=Y$ 时, 简记 $\mathcal{K}(X)=\mathcal{K}(X,Y)$.

注意 Banach 空间中相对列紧子集是有界的, 故紧算子必定是有界的, 从而 $\mathcal{K}(X,Y)\subset\mathcal{L}(X,Y)$. 由定义看出, T 是紧算子当且仅当对于 X 中任意有界点列 $\{x_n\}$, $\{Tx_n\}$ 恒有收敛子列.

对于 $T\in\mathcal{L}(X,Y)$, 当 $\mathcal{R}(T)$ 是有限维子空间时, 称 T 为有限秩算子.

例 3.8.1 有限秩算子 $T\in\mathcal{L}(X,Y)$ 必定是紧算子. □

例 3.8.2 无限维 Banach 空间中的恒等算子不可能是紧的, 这是因为 I 把 X 中的单位球映成 X 中单位球, 但我们知道无限维 Banach 空间中的单位球不是相对紧的. □

定理 3.8.1 设 X,Y 为两个 Banach 空间, 那么

(1) 若 $T,S\in\mathcal{K}(X,Y)$, $\lambda,\mu\in\mathbb{K}$, 则 $\lambda T+\mu S\in\mathcal{K}(X,Y)$;

(2) 若 $T\in\mathcal{K}(X)$, $S\in\mathcal{L}(X)$, 则 $TS,ST\in\mathcal{K}(X)$.

证明 留作练习. □

定理 3.8.2 设 X,Y 为 Banach 空间, 则 $\mathcal{K}(X,Y)$ 是 $\mathcal{L}(X,Y)$ 中一闭子空间.

证明 注意依定理 3.1.7, 在赋范空间中集合的相对紧性与全有界性是等价的. 设 $B_1=B(0,1)$ 是 X 中的闭单位球. 为证 T 的紧性, 只需证明 $T(B_1)$ 在 Y 中是全有界的. 设 $T_n,T\in\mathcal{K}(X,Y)$, $T_n\to T$ (按算子范数收敛), 于是对于任意 $\varepsilon>0$, 存在 $n\in\mathbb{N}$, 使得 $\|T_nx-Tx\|<\frac{\varepsilon}{3}$, $\forall\,x\in M$. 因为 $T_n(B_1)$ 是全有界的, 故存在有限个点 $x_1,\cdots,x_k\in B_1$, 使得

$$T_n(B_1)\subset\bigcup_{j=1}^{k}B\left(T_nx_j,\frac{\varepsilon}{3}\right).$$

于是对于任意给定的 $x\in B_1$, 必有某个 x_j 使得 $\|T_nx_j-T_nx\|<\frac{\varepsilon}{3}$. 因此

$$\begin{aligned}\|Tx-Tx_j\|&\leqslant\|Tx-T_nx\|+\|T_nx-T_nx_j\|+\|T_nx_j-Tx_j\|\\&\leqslant\frac{2}{3}\varepsilon+\|T_nx-T_nx_j\|<\varepsilon,\end{aligned}$$

这就是说 $\{Tx_1,\cdots,Tx_k\}$ 是 $T(B_1)$ 的有限 ε-网, 从而 $T(B_1)$ 是全有界的. □

例 3.8.3 考察 $L^2(a,b)$ 中的积分算子 K

$$(Kx)(t)=\int_a^b k(s,t)x(t)\mathrm{d}t,\quad\forall\,x\in L^2(a,b).$$

假定 $k\in L^2((a,b)\times(a,b))$, 则 K 是 $L^2(a,b)$ 中的紧线性算子. □

例 3.8.4 假定上例中积分核 $k\in C[a,b]$, 则 K 可以看作 $C[a,b]$ 中的线性算子. 利用 Arzela-Ascoli 定理 3.1.8, 可以证明 K 是 $C[a,b]$ 中的紧算子. □

定理 3.8.3 设 $T\in\mathcal{K}(X,Y)$, 那么 T 把 X 中的弱收敛列映成 Y 中的强收敛列.

证明 设 $\{x_n\}\subset X$, $x_n \rightharpoonup x$, 依共鸣定理, $\{x_n\}$ 有界. 于是由 T 的紧性, 存在子列 $\{x_{n_k}\}$, 使得 $Tx_{n_k}\to y$. 由此得到

$$\langle Tx_{n_k}-Tx, g\rangle = \langle x_{n_k}-x, T^*g\rangle \to 0, \quad \forall\, g\in Y^*,$$

从而 $Tx=y$. 因此, $Tx_{n_k}\to Tx$. 注意, 实际上我们证明了 $\{x_n\}$ 的每个子列都有一子子列 $\{x_{n_k}\}$, 使得 $Tx_{n_k}\to Tx$, 因此 $Tx_n\to Tx$. □

定理 3.8.4 设 $T\in\mathcal{K}(X,Y)$, 那么 $T^*\in\mathcal{K}(Y^*,X^*)$.

证明 设 B_1 和 M_1 分别是 X 和 Y^* 中的单位球. 为证 T^* 紧, 只需证明 $T^*(M_1)$ 是 X^* 中相对紧集. 对于 $g\in M_1$, 令 $\varphi_g(y)=\langle y,g\rangle$, $\forall\, y\in\overline{T(B_1)}$. 显然 $\varphi_g\in C(\overline{T(B_1)})$, 这里 $C(\overline{T(B_1)})$ 是紧集 $\overline{T(B_1)}$ 上的连续函数空间. 此外

$$\|\varphi_g\|_C = \sup_{y\in\overline{T(B_1)}} |\langle y,g\rangle| = \sup_{x\in B_1} |\langle x, T^*g\rangle| = \|T^*g\|.$$

因此, $\{\varphi_g\,|\,g\in M_1\}$ 在 $C(\overline{T(B_1)})$ 中相对紧与集合 $T^*(M_1)$ 在 Y^* 中相对紧是等同的. 下面我们证明 $\{\varphi_g\,|\,g\in M_1\}$ 在 $C(\overline{T(B_1)})$ 中相对紧. 我们有

$$|\varphi_g(y)|\leqslant \|g\|\,\|y\|\leqslant\|T\|, \quad \forall\, g\in M_1, \forall\, y\in\overline{T(B_1)},$$

$$|\varphi_g(y)-\varphi_g(z)|\leqslant \|g\|\,\|y-z\|\leqslant\|T\|, \quad \forall\, g\in M_1, \forall\, y,z\in\overline{T(B_1)},$$

这表明 $\{\varphi_g\,|\,g\in M_1\}$ 在 $C(\overline{T(B_1)})$ 中一致有界且等度连续, 由 Arzela-Acsoli 定理的推广形式, 可知 $\{\varphi_g\,|\,g\in M_1\}$ 在 $C(\overline{T(B_1)})$ 相对紧. □

定理 3.8.5 设 $T\in\mathcal{K}(X)$, $\lambda\in\mathbb{K}$, $\lambda\neq 0$, 那么值域 $\mathcal{R}(\lambda I-T)$ 和 $\mathcal{R}(\lambda I-T^*)$ 都是闭子空间.

证明 由于 T^* 也是紧算子, 故只需证明 $\mathcal{R}(\lambda I-T)$ 闭就够了. 令 $S=\lambda I-T$. 设 $\{y_n\}\subset\mathcal{R}(S)$, $y_n\to y$. 我们要证 $y\in\mathcal{R}(S)$. 如果能证明存在一有界列 $\{x_n\}\subset X$, 使得 $y_n=Sx_n=(\lambda I-T)x_n$, 则存在子列 $\{x_{n_k}\}$, $\{Tx_{n_k}\}$ 收敛, 从而 $\{x_{n_k}\}$ 也收敛. 设 $x_{n_k}\to x$, 于是 $y=\lambda x-Tx\in\mathcal{R}(\lambda I-T)$.

因此只需证明存在一有界列 $\{x_n\}\subset X$, 使得 $y_n=Sx_n=(\lambda I-T)x_n$. 由于 $\{y_n\}\subset\mathcal{R}(S)$, 故存在 $\{z_n\}\subset X$, 使得 $y_n=Sz_n$, 但 $\{z_n\}$ 未必有界. 若 $\{u_n\}\subset\mathcal{N}(S)$, 则 $y_n=Sx_n$, 其中 $x_n=z_n-u_n$. 下面我们设法选择一列 $\{u_n\}\subset\mathcal{N}(S)$, 使得 $\{z_n-u_n\}$ 有界. 为此, 只需证明 $d(z_n)=\inf\{\|z_n-v\|\,|\,v\in\mathcal{N}(S)\}$ 对于 $n\in\mathbb{N}$ 有界就可以了. 设不然, $d(z_n)$ 无界, 不妨假定 $d(z_n)\to\infty$. 令 $\widetilde{z}_n=z_n/d(z_n)$, 则易见 $d(\widetilde{z}_n)=1$, $\forall\, n\in\mathbb{N}$, 这里对于任意 $u\in X$, $d(u)=\inf\{\|u-v\|\,|\,v\in\mathcal{N}(S)\}$. 从而存在一列 $\{u_n\}\subset\mathcal{N}(S)$, 使得 $\|\widetilde{z}_n-u_n\|\leqslant 2$, $\forall\, n\in\mathbb{N}$. 令 $v_n=\widetilde{z}_n-u_n$, 则 $\{v_n\}$ 有界. 由于 T 紧, 不妨设 $\{Tv_n\}$ 收敛 (否则用子列代替). 又

$$\lambda v_n-Sv_n=S\widetilde{z}_n=Sz_n/d(z_n)=y_n/d(z_n)\to 0.$$

因此 $\{v_n\}$ 收敛于某个极限 v. 于是 $\lambda v - Tv = 0$, 即 $v \in \mathcal{N}(S)$. 由此得出矛盾

$$0 = d(v) = \lim_{n\to\infty} d(v_n) = \lim_{n\to\infty} d(\widetilde{z}_n) = 1.$$

□

类似于 Hilbert 空间的直交补, 对于 Banach 空间 X, 设 $M \subset X$, $N \subset X^*$, 集合

$$M^{\perp} = \{f \in X^* \mid \langle x, f\rangle = 0, \forall\, x \in M\},$$

$$^{\perp}N = \{x \in X \mid \langle x, f\rangle = 0, \forall\, f \in N\}$$

分别称为 M 和 N 的直交补. 显然 $M^{\perp}$ 和 $^{\perp}N$ 分别是 X^* 和 X 中的闭线性子空间, 并且 $(\operatorname{span} M)^{\perp} = M^{\perp}$, $^{\perp}(\operatorname{span} N) = {}^{\perp} N$.

定理 3.8.6 设 $T \in \mathcal{K}(X)$, $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda \neq 0$, 那么

(1) $\mathcal{R}(\lambda I - T) = {}^{\perp} \mathcal{N}(\overline{\lambda} I - T^*)$;

(2) $\mathcal{R}(\overline{\lambda} I - T^*) = \mathcal{N}(\lambda I - T)^{\perp}$.

证明 为记号简单起见, 记 $A = \lambda I - T$, 于是 $A^* = \overline{\lambda} I - T^*$.

(1) 我们有

$$\langle Ax, f\rangle = \langle x, A^* f\rangle = 0, \quad \forall\, x \in X,\ \forall\, f \in \mathcal{N}(A^*).$$

这表明 $\overline{\mathcal{R}(A)} \subset {}^{\perp} \mathcal{N}(A^*)$. 今若有 $y \in {}^{\perp} \mathcal{N}(A^*) \setminus \overline{\mathcal{R}(A)}$, 则从推论 3.5.3, 存在 $f \in X^*$, $f(y) = \langle y, f\rangle \neq 0$, 并且 $0 = \langle Ax, f\rangle = \langle x, A^* f\rangle$, $\forall\, x \in X$. 这表明 $f \in \mathcal{N}(A^*)$, 于是从 $y \in {}^{\perp} \mathcal{N}(A^*)$ 可知 $\langle y, f\rangle = 0$, 矛盾. 因此, 只能是 $\mathcal{R}(A) = {}^{\perp} \mathcal{N}(A^*)$.

(2) $\mathcal{R}(A^*) = \mathcal{N}(A)^{\perp}$ 是明显的. 现在任取 $f \in \mathcal{N}(A)^{\perp}$. 注意若 $Ax_1 = Ax_2$, 则 $x_1 - x_2 \in \mathcal{N}(A)$, 因此 $f(x_1) = f(x_2)$. 于是可以定义线性泛函 $g : \mathcal{R}(A) \to \mathbb{K}$

$$g(y) = f(x), \quad \forall\, y = Ax \in \mathcal{R}(A).$$

今证 g 在 $\mathcal{R}(A)$ 上是有界的. 实际上, 由于 $\mathcal{R}(A)$ 是闭的, 利用开映射定理, 可以证明存在常数 $\mu > 0$, 使得对于任意 $y \in \mathcal{R}(A)$, 有一元 $x \in X$ 满足 $y = Ax$, 并且 $\|x\| \leqslant \mu \|y\|$. 于是

$$|\langle y, g\rangle| = |f(x)| \leqslant \|f\|\, \|x\| \leqslant \mu \|f\|\, \|y\|, \quad \forall\, y \in \mathcal{R}(A).$$

上式表明 g 在 $\mathcal{R}(A)$ 上有界, 从而依据 Hahn-Banach 定理, g 可以延拓至全 X 上的有界线性泛函, 仍记作 g. 于是

$$\langle Ax, g\rangle = \langle x, f\rangle, \quad \forall\, x \in X.$$

依定义, $f = A^* g$. 因此 $\mathcal{R}(A^*) = \mathcal{N}(A)^{\perp}$. □

引理 3.8.1 设 $T \in \mathcal{K}(X)$, $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda \neq 0$, 那么必存在自然数 $k \geqslant 1$, 使得 $\mathcal{N}((\lambda I - T)^k) = \mathcal{N}((\lambda I - T)^{k+1})$.

证明 令 $\mathcal{N}_n=\mathcal{N}((\lambda I-T)^{n+1})$, $\forall n\geqslant 1$. 用反证法, 假定 $\mathcal{N}_n\neq\mathcal{N}_{n+1}$, $\forall n\geqslant 1$. 那么 $\mathcal{N}_n$ 是 $\mathcal{N}_{n+1}$ 的真子空间. 一般地, 若 M 是 X 的真子空间, 则不难证明, 对于任意 $\varepsilon\in(0,1)$, 存在 $x\in X$, $\|x\|=1$, 使得 $d(x,M)=\inf\{\|x-u\|\,|\,u\in M\}>\varepsilon$. 由此可知存在一列元 $\{x_n\}\subset X$, 使得 $x_n\in\mathcal{N}_{n+1}$, $\|x_n\|=1$, $\|x_n-x\|>1/2$, $\forall x\in\mathcal{N}_n$. 设 $m>n$, 则有

$$(\lambda I-T)^m[(\lambda I-T)x_m+Tx_n]=(\lambda I-T)^{m+1}x_m+T(\lambda I-T)^m x_n=0,$$

即 $(\lambda I-T)x_m+Tx_n\in\mathcal{N}_m$. 因此

$$|\lambda|^{-1}\|Tx_m-Tx_n\|=\|x_m-\lambda^{-1}[(\lambda I-T)x_m+Tx_n]\|>1/2,$$

从而 $\{Tx_n\}$ 不收敛, 这与 T 的紧性矛盾. □

引理 3.8.2 设 $T\in\mathcal{K}(X)$, $\lambda\in\mathbb{K}$, $\lambda\neq 0$, 那么 $\mathcal{R}(\lambda I-T)=X$, 当且仅当 $\mathcal{N}(\lambda I-T)=\{0\}$.

证明 首先假定 $\mathcal{R}(\lambda I-T)=X$. 若 $\mathcal{N}(\lambda I-T)\neq\{0\}$, 则存在非零 $x_1\in\mathcal{N}(\lambda I-T)$. 由于 $\mathcal{R}(\lambda I-T)=X$, 存在一列元 $\{x_n\}$, 使得 $(\lambda I-T)x_{n+1}=x_n$, $\forall n\geqslant 1$, 并且

$$(\lambda I-T)^n x_{n+1}=x_1\neq 0,$$

$$(\lambda I-T)^{n+1}x_{n+1}=(\lambda I-T)x_1=0.$$

于是 $\mathcal{N}((\lambda I-T)^{n+1})\neq\mathcal{N}((\lambda I-T)^n)$, $\forall n\geqslant 1$, 这与引理 3.8.1 矛盾, 从而必有 $\mathcal{N}(\lambda I-T)=\{0\}$.

现在设 $\mathcal{N}(\lambda I-T)=\{0\}$, 于是依据定理 3.8.6 (2), $\mathcal{R}(\overline{\lambda}I-T^*)=X^*$. 但 T^* 也是紧算子, 因此依据上面证明了的结论, $\mathcal{N}(\overline{\lambda}I-T^*)=\{0\}$. 再从定理 3.8.6 (1), 可知 $\mathcal{R}(\lambda I-T)=X$. □

这个引理具有重要的理论和实际意义, 它是说, 当 $\lambda\neq 0$ 时, $\lambda I-T$ 可逆当且仅当 $\lambda\in\rho(T)$, 即 $(\lambda I-T)^{-1}\in\mathcal{L}(X)$. 这是有限维空间中线性代数有关结论在无限维情形下的最令人满意的推广. 利用齐次方程 $(\lambda I-T)x=0$ 和非齐次方程 $(\lambda I-T)x=y$ 解的语言, 可表达成经典积分方程理论中 Fredholm 二择一原理的形式.

定理 3.8.7 设 $T\in\mathcal{K}(X)$, $\lambda\in\mathbb{K}$, $\lambda\neq 0$, 那么下面两个结论之一成立:

(1) 齐次方程 $(\lambda I-T)x=0$ 仅有零解, 这时 $\lambda\in\rho(T)$, 而非齐次方程 $(\lambda I-T)x=y$ 对任意 $y\in X$ 有唯一解 $x=(\lambda I-T)^{-1}y$;

(2) 齐次方程 $(\lambda I-T)x=0$ 有非零解, 这时非齐次方程 $(\lambda I-T)x=y$ 有解, 当且仅当 $\langle y,f\rangle=0$, $\forall f\in\mathcal{N}(\overline{\lambda}I-T^*)$.

定理 3.8.8 (Riesz-Schauder **定理)** 设 X 为无限维 Banach 空间, $T\in\mathcal{K}(X)$, 那么

(1) $\sigma(T)$ 由原点和非零本征值组成, 并且对应于非零本征值的本征子空间是有限维的;

(2) $\sigma(T)$ 或者有限, 或者可数无限, 而在后者情形下零点是其唯一可能的极限点.

证明 (1) 若 $0 \notin \sigma(T)$, 则 $\mathcal{R}(T) = X$. 依据开映射定理, 对于 X 中的单位球 $B_1(0)$, 其像集 $TB_1(0)$ 是开集, 从而存在 $r > 0$, 使得 $\overline{B_r(0)} \subset TB_1(0)$. 但 $TB_1(0)$ 是相对紧的, 因此 $\overline{B_r(0)}$ 是紧集, 从而 X 本身是有限维的, 得出矛盾. 于是 $0 \in \sigma(T)$. 由定理 3.8.7 可知 T 的每个非零谱点是本征值. 由于 T 紧, $\mathcal{N}(\lambda I - T)$ 中每个有界集 $\{x_n\}$ 都有收敛子列 $\{x_{n_k}\}$, 使得 $\{Tx_{n_k}\}$ 收敛. 但 $\lambda x_n = Tx_n$, 从而 $\{x_{n_k}\}$ 本身收敛. 这就是说, $\mathcal{N}(\lambda I - T)$ 的每个有界列必有收敛子列, 从而 $\mathcal{N}(\lambda I - T)$ 只可能是有限维子空间.

(2) 用反证法, 假定对某个常数 $\varepsilon > 0$, 存在 T 的不同本征值组成的无限数列 $\{\lambda_n\}$, 使得 $|\lambda_n| \geqslant \varepsilon$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$. 设 x_n 是对应于 λ_n 的本征元, 并记 $M_n = \operatorname{span}\{x_1, \cdots, x_n\}$. 注意诸 x_k 是线性无关的, 从而 M_n 是 M_{n+1} 的真子空间. 于是利用引理 3.8.1 中的证明, 存在一列 $\{y_n\}$, $y_n \in M_n$, $\|y_n\| = 1$, $\forall\, n > 1$, 使得

$$\|y_n - y\| \geqslant \frac{1}{2}, \quad \forall\, y \in M_{n-1}.$$

由于 $y_n \in M_n$, 故存在 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{K}$, 使得 $y_n = \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n$. 由此 $Ty_n \in M_n$, 并且

$$(\lambda_n I - T)y_n = \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k(\lambda_n - \lambda_k)x_k \in M_{n-1}.$$

对于任意自然数 m, $1 \leqslant m < n$, 令 $x = (\lambda_n I - T)y_n + Ty_m$. 显然从上述可见 $x \in M_{n-1}$. 通过计算有

$$Ty_n - Ty_m = \lambda_n(y_n - \lambda_n^{-1}x),$$

从而 $\|Ty_n - Ty_m\| \geqslant \frac{1}{2}|\lambda_n| \geqslant \frac{1}{2}\varepsilon$. 因此, $\{y_n\}$ 为有界列, 但 $\{Ty_n\}$ 无收敛子列, 与 T 的紧性相矛盾. □

在 Hilbert 空间中紧的自伴算子具有简单的谱结构, 一个重要结论是说, 其本征元全体构成 Hilbert 空间的基. 这个结论在带有 Hermite 核的积分方程以及某些微分方程中有重要的应用.

定理 3.8.9 *设 H 为 Hilbert 空间, $T \in \mathcal{L}(H)$ 是自伴算子, 那么 T 的每个本征值都是实的, 并且对应于不同本征值的本征元相互直交.*

证明 设 $Tx = \lambda x$, $x \neq 0$. 于是 $\langle Tx, x\rangle = \lambda\|x\|^2 = \langle x, Tx\rangle = \overline{\lambda}\|x\|^2$, 从而 $\lambda = \overline{\lambda}$, 即 $\lambda \in \mathbb{R}$.

现在设 $\lambda, \mu \in \sigma_p(T)$, $\lambda \neq \mu$, $Tx = \lambda x$, $Ty = \mu y$, $x \neq 0$, $y \neq 0$. 于是 $\langle Tx, y\rangle = \lambda\langle x, y\rangle = \langle x, Ty\rangle = \mu\langle x, y\rangle$, 从而 $(\lambda - \mu)\langle x, y\rangle = 0$. 由于 $\lambda \neq \mu$, 故 $\langle x, y\rangle = 0$. □

设 H 是 Hilbert 空间, $T \in \mathcal{K}(H)$ 为自伴算子. 设 $\{\lambda_n\} = \sigma_p(T)$. 对应于本征值 λ_n 的本征子空间的维数 r_n 称为 λ_n 的重数. 为了方便起见, 对于重数为 r_n 的本征值 λ_n, 在序列 $\{\lambda_n\}$ 中将重复出现 r_n 次. 序列 $\{\lambda_n\}$ 的排序满足 $|\lambda_1| \geqslant |\lambda_2| \geqslant \cdots$. 设 φ_n 是对应于 λ_n 的本征元, 满足 $\|\varphi_n\| = 1$, 并且诸 φ_n 彼此直交. 上述最后一点总能做到, 因为当 λ_n 为重本征值时, 可在其本征子空间 M_n 中取 r_n 个元构成 M_n 的直交规范基. 本小段中将采用上述这些记号而不再特别说明.

定理 3.8.10 设 H 为 Hilbert 空间, $T \in \mathcal{L}(H)$ 是自伴算子, 那么

(1) $\sigma(T) \subset [m_1, m_2]$, 其中

$$m_1 = \inf_{x\in H, \|x\|=1} \langle Tx, x\rangle, \quad m_2 = \max_{x\in H, \|x\|=1} \langle Tx, x\rangle;$$

(2) T 的谱半径 $r(T) = \|T\| = \max\{m_1, m_2\}$, 并且 $m_1, m_2 \in \sigma(T)$.

证明 (1) 若 $\lambda > m_2$, 则

$$(\lambda - m_2)\|x\|^2 \leqslant |\langle(\lambda I - T)x, x\rangle| \leqslant \|(\lambda I - T)x\|\,\|x\|, \quad \forall\, x \in H.$$

因此, $\|(\lambda I - T)x\| \geqslant (\lambda - m_2)\|x\|$, $\forall\, x \in H$, 故 $\lambda \in \rho(T)$. 同理可证, 当 $\lambda < m_1$ 时, $\lambda \in \rho(T)$.

依 m_1 的定义, 存在一列 $\{x_n\} \subset H$, $\|x_n\| = 1$, 使得 $\langle(m_1 I - T)x_n, x_n\rangle \to 0$. 一般地, 对于任意自伴算子 $A \in \mathcal{L}(H)$, 若 $\langle Ax, x\rangle \geqslant 0$, $\forall\, x \in H$, 则易证

$$|\langle Ax, y\rangle|^2 \leqslant |\langle Ax, x\rangle|\,|\langle Ay, y\rangle|, \quad \forall\, x, y \in H.$$

于是若取 $x = x_n$, $y = (m_1 I - T)x_n$, $A = m_1 I - T$, 则得

$$\begin{aligned}\|(m_1 I - T)x_n\|^2 &\leqslant |\langle(m_1 I - T)x_n, x_n\rangle|\,|\langle(m_1 I - T)^2 x_n, (m_1 I - T)x_n\rangle| \\ &\leqslant \|m_1 I - T\|^2 \|(m_1 I - T)x_n\|\,\|x_n\|.\end{aligned}$$

因此 $\|(m_1 I - T)x_n\| \leqslant \|m_1 I - T\|^2 \|x\| \to 0$, 从而 $m_1 \in \sigma(T)$. 类似地可以证明 $m_2 \in \sigma(T)$.

(2) 只需证 $r(T) = \|T\|$. 根据定理 3.7.3, $r(T) = \lim\limits_{n\to\infty} \|T^n\|^{\frac{1}{n}}$. 注意到

$$\|Tx\|^2 = \langle Tx, Tx\rangle = \langle T^2 x, x\rangle \leqslant \|T^2\|\,\|x\|^2, \quad \forall\, x \in H,$$

我们有 $\|T\|^2 \leqslant \|T^2\|$. 另一方面, $\|T^2 x\| \leqslant \|T\|\,\|Tx\| \leqslant \|T\|^2 \|x\|$. 因此, $\|T\|^2 = \|T^2\|$. 同理 $\|T^{2^k}\| = \|T\|^{2^k}$, $\forall\, k \geqslant 1$. 于是

$$r(T) = \lim_{k\to\infty} \|T^{2^k}\|^{\frac{1}{2^k}} = \left(\|T\|^{2^k}\right)^{\frac{1}{2^k}} = \|T\|.$$

□

定理 3.8.11 (Hilbert-Schmidt 定理) 设 $T \in \mathcal{K}(H)$ 为自伴算子, 那么 T 的本征元全体 $\{\varphi_n\}$ 构成 H 的直交基. 进而假定每个 φ_n 都是单位元, 即 $\|\varphi_n\| = 1$, 从而 $\{\varphi_n\}$ 是 H 的直交规范基. 那么对于任意 $x \in H$, 有展开式

$$Tx = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle x, \varphi_n\rangle \varphi_n.$$

证明 设 $M=\overline{\operatorname{span}\{\varphi_n\}}$. 根据 Hilbert 空间中的投影定理, $H=M\oplus M^{\perp}$, 并且容易验证 $TM\subset M$, $TM^{\perp}\subset M^{\perp}$. 设 T 在 $M^{\perp}$ 上的限制记作 T_0, 那么 $T_0: M^{\perp}\to M^{\perp}$ 也是紧自伴算子. 若 T_0 有非零本征值 λ, 则 $\lambda\in\sigma_p(T)$, 从而其本征元属于 M, 这不可能, 因为 M 和 $M^{\perp}$ 是直交的. 因此, $\sigma(T_0)=\{0\}$, 依定理 3.8.10, $T_0=0$. 因此 $TM^{\perp}=\{0\}$, 从而 $M^{\perp}$ 中的元必是 T 的本征元, 这只能是 $M^{\perp}=\{0\}$, 即 $M=H$.

现在设 $\|\varphi_n\|=1$, 从而 $\{\varphi_n\}$ 是 H 的直交规范基. 于是 Tx 在直交基 $\{\varphi_n\}$ 下可展开成

$$\begin{aligned}Tx&=\sum_{n=1}^{\infty}\langle Tx,\varphi_n\rangle\varphi_n=\sum_{n=1}^{\infty}\langle x,T\varphi_n\rangle\varphi_n\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n\langle x,\varphi_n\rangle\varphi_n.\end{aligned}$$

□

3.9 Sobolev 空间*

Sobolev 空间理论在现代偏微分方程中已成为不可或缺的工具. 历史上, Sobolev 空间理论的建立要比 Shwartz 广义函数 (或分布) 理论早一些. 但广义函数理论能使我们更简洁地叙述 Sobolev 空间理论. 这里我们仅简单地介绍 Sobolev 空间理论的主要概念和一些常用的基本结果, 一般情况下我们不一一列举出处, 详细请参阅文献 [46, 92].

设 Ω 为 $\mathbb{R}^N$ 中带充分光滑边界 Γ 的开集. $\mathcal{D}(\Omega)=C_0^{\infty}(\Omega)$ 表示定义在 Ω 上取值在 $\mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C}$ 中无穷次可微且具紧支集的函数空间. 这里对于 Ω 上一个连续函数 φ, 将 $\varphi(x)\neq 0$ 的点全体的闭包称为 φ 的支集, 即

$$\operatorname{supp}\varphi=\overline{\{x\in\Omega\,|\,\varphi(x)\neq 0\}}.$$

$\mathcal{D}(\Omega)$ 上定义如下拓扑: 序列 $\{\varphi_n\}\subset\mathcal{D}(\Omega)$ 收敛于 0 是指它满足

(1) 诸 φ_n 的支集位于 Ω 的一固定紧集中;

(2) φ_n 及其各阶导数均一致收敛于 0.

(参见下一章关于邻域基的说明.)

$\mathcal{D}'(\Omega)$ 表示 $\mathcal{D}(\Omega)$ 上的连续线性泛函空间, $\mathcal{D}'(\Omega)$ 中的元叫做 Ω 上的广义函数或分布.

对于 $\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_N)$, α_k 为任意非负整数, 记 $|\alpha|=\alpha_1+\cdots+\alpha_N$,

$$D^{\alpha}=D_1^{\alpha_1}\cdots D_N^{\alpha_N},\quad D_k=\frac{\partial}{\partial x_k}.$$

我们定义 $f\in\mathcal{D}'(\Omega)$ 的任意阶导数 $D^{\alpha}f$

$$\langle D^{\alpha}f,\varphi\rangle=(-1)^{|\alpha|}\langle f,D^{\alpha}\varphi\rangle,\quad\forall\varphi\in\mathcal{D}(\Omega),$$

这里 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 表示 $\mathcal{D}'(\Omega)$ 与 $\mathcal{D}(\Omega)$ 之间的标量积, 即 $\langle f,\varphi\rangle = f(\varphi)$ 为 f 在 φ 处的取值. 对于定义在 Ω 上的局部可积函数 f, 由

$$\langle \widetilde{f},\varphi\rangle = \int_\Omega f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x, \quad \forall\,\varphi\in\mathcal{D}(\Omega)$$

定义的 $\widetilde{f}$ 是 Ω 上的分布, 通常我们把 $\widetilde{f}$ 等同于 f.

例 3.9.1 对于 $x_0\in\Omega$, $\delta_{x_0}(x)=\delta(x-x_0)$ 表示 Dirac δ-函数, 定义为

$$\langle \delta_{x_0},\varphi\rangle = \int_\Omega \delta(x-x_0)\varphi(x)\mathrm{d}x = \varphi(x_0).$$

不难看出, $\delta_{x_0}\in\mathcal{D}'(\Omega)$. □

例 3.9.2 设单位阶跃函数 $H(x)$ 定义为

$$H(x)=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0.\end{cases}$$

函数 $H(x)$ 当 $x\neq 0$ 时是可微的, 并且 $H'(x)=0$; 但在 $x=0$ 处是间断的, 从而在常义下在 $x=0$ 处不可微. 但是, 显然 $h\in\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, 从而在广义下 H 的导数存在, 并且 $H'(x)=\delta(x)$, 这是因为对于任意 $\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R})$, 依据广义函数导数的定义

$$\langle H',\varphi\rangle = -\langle H,\varphi'\rangle = -\int_0^\infty \varphi'(x)\mathrm{d}x = \varphi(0).$$

□

广义函数序列 $\{f_n\}\subset\mathcal{D}'(\Omega)$ 称为 (弱) 收敛于 $f\in\mathcal{D}'(\Omega)$, 如果它满足

$$\lim_{n\to\infty}\langle f_n,\varphi\rangle = \langle f,\varphi\rangle, \quad \forall\,\varphi\in\mathcal{D}(\Omega).$$

例 3.9.3 函数序列 $f_n(x)=\frac{1}{\pi}\frac{\sin nx}{x}$ 当 $n\to\infty$ 时收敛于 $\delta(x)=\delta_0(x)$, 这是因为对于任意 $\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R})$, 我们有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin nx}{x}\varphi(x)=\varphi(0).$$

□

对于正整数 m 和实数 $p\geqslant 1$, 我们定义

$$H^{m,p}(\Omega)=\left\{f\in L^p(\Omega)\,|\,D^\alpha f\in L^p(\Omega),\ \forall\,\alpha,\ |\alpha|\leqslant m\right\},$$

在 $H^{m,p}(\Omega)$ 中赋以范数

$$\|f\|_{H^{m,p}(\Omega)}=\left(\sum_{|\alpha|\leqslant m}\|D^\alpha f\|^p_{L^p(\Omega)}\right)^{\frac{1}{p}},$$

则 $H^{m,p}(\Omega)$ 是一 Banach 空间, 叫做 ($L^p(\Omega)$ 上的 m 阶) Sobolev 空间. 当 $p=2$ 时, 记 $H^m(\Omega)=H^{m,2}(\Omega)$. 我们在 $H^m(\Omega)$ 中定义内积

$$\langle f,g\rangle_{H^m(\Omega)}=\sum_{|\alpha|\leqslant m}\langle D^\alpha f,D^\alpha g\rangle_{L^2(\Omega)},$$

则 $H^m(\Omega)$ 是一 Hilbert 空间.

类似地, 我们可以在边界流形 Γ 上定义 $\mathcal{D}(\Gamma)$, $\mathcal{D}'(\Gamma)$, $L^p(\Gamma)$, $W^{m,p}(\Gamma)$ 和 $H^m(\Gamma)$ 等.

特别当 $n=1$, $\Omega=(a,b)$ 时, 我们有

$$H^m(a,b)=\Big\{f\in L^2(a,b)\,|\,f,f',\cdots,f^{(m-1)}\text{ 绝对连续},\\ \text{并且 }f',\cdots,f^{(m-1)}\in L^2(a,b)\Big\}.$$

通过傅里叶展开或插值等方法, 对于任意实数 s, 可以定义非整数阶 Sobolev 空间 $H^s(\Omega)$ (可以参见文献 [9]).

定理 3.9.1 (迹定理) 对于任意 $f\in H^m(\Omega)$, 我们可以定义 f 在边界 Γ 上的迹为

$$\gamma(f)=\left[f\big|_\Gamma,\left.\frac{\partial f}{\partial\nu}\right|_\Gamma,\cdots,\left.\frac{\partial^{m-1}f}{\partial\nu^{m-1}}\right|_\Gamma\right].$$

我们有

$$\left.\frac{\partial^k f}{\partial\nu^k}\right|_\Gamma\in H^{m-k-\frac{1}{2}}(\Gamma),\quad 0\leqslant k\leqslant m-1,$$

(这里 ν 为边界的法向量) 并且

(1) 迹映射 $\gamma:H^m(\Omega)\to\prod_{k=0}^{m-1}H^{m-k-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ 是线性连续满射;

(2) γ 的零空间

$$\mathcal{N}(\gamma)=\left\{f\in H^m(\Omega)\,\middle|\,\left.\frac{\partial^k f}{\partial\nu^k}\right|_\Gamma=0,\ 0\leqslant k\leqslant m-1\right\}$$

恰好是 $\mathcal{D}(\Omega)$ 在 $H^m(\Omega)$ 中的闭包 $H_0^m(\Omega)$, 从而

$$H_0^m(\Omega)=\left\{f\in H^m(\Omega)\,\middle|\,\left.\frac{\partial^k f}{\partial\nu^k}\right|_\Gamma=0,\ 0\leqslant k\leqslant m-1\right\}.$$

由于 $\mathcal{D}(\Omega)$ 在 $H_0^m(\Omega)$ 中稠, 从而可以把 $H_0^m(\Omega)$ 的对偶等同于 $\mathcal{D}'(\Omega)$ 的一个子空间. 于是定义

$$H^{-m}(\Omega)=(H_0^m(\Omega))'.$$

显然我们有

$$H_0^m(\Omega)\subset L^2(\Omega)\subset H^{-m}(\Omega).$$

对于 $f \in H^{-m}(\Omega)$, 必定存在 $f_\alpha \in L^2(\Omega)$, $0 \leqslant |\alpha| \leqslant m$, 使得

$$f = \sum_{|\alpha| \leqslant m} D^\alpha f_\alpha.$$

上述迹定理对于非整数 $s > 0$ 也成立: 这时对于 $f \in H^s(\Omega)$, 我们有

$$\gamma(f) \in \prod_{k=0}^{m-1} H^{s-k-\frac{1}{2}}(\Gamma),$$

其中

$$\gamma(f) = \left[f\big|_\Gamma, \frac{\partial f}{\partial \nu}\bigg|_\Gamma, \cdots, \frac{\partial^{m-1} f}{\partial \nu^{m-1}}\bigg|_\Gamma \right], \quad s - m + \frac{1}{2} > 0.$$

对于非负整数 m 和 ε, $0 \leqslant \varepsilon < 1$, $C^{m,\varepsilon}(\Omega)$ 表示 Ω 上直到 m 次连续可微, 并且 m 次导数为 ε-Hölder 连续的函数空间: $f \in C^{m,\varepsilon}(\Omega)$,

$$\|f\|_{C^{m,\varepsilon}} = \sum_{|\alpha| \leqslant m} \sup_{x \in \Omega} |D^\alpha f(x)| + \sum_{|\alpha| = m} \inf_{\substack{x,y \in \Omega \\ x \neq y}} \frac{|D^\alpha f(x) - D^\alpha f(y)|}{|x - y|^\varepsilon} < \infty.$$

定理 3.9.2 (Sobolev 嵌入定理) 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ 为有界开区域, 边界 $\partial\Omega$ 充分光滑, 设 $s = m + N/2 + \varepsilon$, $0 < \varepsilon < 1$, m 为非负整数, 则嵌入

$$H^s(\Omega) \hookrightarrow C^{m,\varepsilon}(\Omega)$$

是连续的.

根据定理 3.9.2, 若空间维数 $N = 1$, $\Omega = (a,b)$, 则 $H^1(a,b) \hookrightarrow C^{0,\frac{1}{2}}(a,b)$, 故 $f \in H^1(a,b)$ 至少在 (a,b) 上是连续的. 但当 $N = 2$ 时, $H^1(\Omega)$ 中的元未必是连续的. 例如, 取 Ω 为 $\mathbb{R}^2$ 中半径为 $\frac{1}{2}$ 中心在原点的开圆盘, $y(x) = \ln\ln(|x|^{-1})$, 则 $y \in H^1(\Omega)$, 但 y 显然在 $x = 0$ 处是不连续的.

定理 3.9.3 (Sobolev 紧嵌入定理) 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ 为有界开区域, 边界 $\partial\Omega$ 充分光滑, 设 $s_1, s_2 \in \mathbb{R}$, $s_2 > s_1$, 则嵌入 $H^{s_2}(\Omega) \hookrightarrow H^{s_1}(\Omega)$ 是紧的, 即对于 $H^{s_2}(\Omega)$ 中的有界序列 $\{y_k\}$, 必有 $\{y_k\}$ 的子序列 $\{y_{k_i}\}$ 使得 $\|y_{k_i} - y\|_{H^{s_1}(\Omega)} \to 0$ $(i \to \infty)$, 其中 $y \in H^s(\Omega)$.

对于一般的 Sobolev 空间 $H^{m,p}$ 有如下结论[9].

定理 3.9.4 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ 为有界开集, 边界 $\partial\Omega$ 充分光滑.

(1) 如果

$$1 \geqslant \frac{1}{p} > \frac{k}{N}, \quad k \leqslant m, \quad \frac{1}{q_0} = \frac{1}{p} - \frac{k}{N}, \quad q < q_0,$$

那么从 $H^{m,p}(\Omega)$ 到 $H^{m-k,q}(\Omega)$ 的嵌入映射为紧映射.

(2) 如果

$$\frac{1}{p} \leqslant \frac{k}{N}, \quad k \leqslant m,$$

那么对任何实数 q, 从 $H^{m,p}(\Omega)$ 到 $H^{m-k,q}(\Omega)$ 的嵌入映射为紧映射.

上述定理实际上包括了许多紧嵌入的结论. 例如, $L^p(\Omega)$ 可看作 $H^{0,p}(\Omega)$. 于是, 容易得到下面的推论.

推论 3.9.1 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ 为有界开集, 边界 $\partial\Omega$ 充分光滑.

(1) 嵌入映射

$$H^s(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega), \quad \text{当 } \frac{1}{p} > \frac{1}{2} - \frac{s}{N} > 0$$

和

$$H^s(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega), \ \ \forall\, p \in [1, \infty), \quad \text{当 } \frac{1}{2} - \frac{s}{N} = 0$$

是紧映射.

(2) 设 $m_1 > m_2 \geqslant 0$, 那么 $H^{m_1,p}(\Omega)$ 到 $H^{m_2,p}(\Omega)$ 的嵌入映射为紧映射.

定理 3.9.5 (插值不等式) 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ 为有界开区域, 具有充分光滑边界, m 为自然数, 那么对于任意 $\varepsilon > 0$, 存在常数 $C(\varepsilon) > 0$, 使得

$$\|f\|_{H^m(\Omega)} \leqslant \varepsilon \sum_{|\alpha| \leqslant m} \|D^\alpha f\|^2_{L^2(\Omega)} + C(\varepsilon)\|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

设 Ω 是 $\mathbb{R}^N$ 中的单连通有界开区域, 具有充分光滑边界. 一般说来, 对于 $f \in H^m(\Omega)$, 若令

$$|f|_{m,2} = \sum_{|\alpha| = m} \|D^\alpha f\|_{L^2(\Omega)},$$

则 $|\cdot|_{m,2}$ 仅仅是 $H_m(\Omega)$ 中一个拟范数, 就是说, 范数中条件 $|f|_{m,2} = 0 \Longrightarrow f = 0$ 不满足. 下面要说明, 如果对 f 加上适当的边条件, 则使用 f 的最高阶导数就可以定义出 $H^m(\Omega)$ 的一较小闭子空间中的范数.

在 $H_0^1(\Omega)$ 中, 我们有

$$\|f\|_{H^1(\Omega)} \leqslant C \left(\int_\Omega |\nabla f|^2 \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \forall\, f \in H_0^1(\Omega),$$

这就是熟知的 Poincaré 不等式. 类似于这样的不等式在求得偏微分方程解的先验估计中是非常有用的. 下面的 Deny-Lions 引理是这一类 Poincaré 不等式的基础.

引理 3.9.1 (Deny-Lions 引理**)** 设 $P_{k-1}(\Omega)$ 表示 Ω 上所有阶 $\leqslant k-1$ 的 N 变量多项式空间. 假定 $\{\ell_1, \ell_2, \cdots, \ell_m\}$ 是 $H^k(\Omega)$ 上 m 个连续线性泛函, 使得 $\{\ell_1, \ell_2, \cdots, \ell_m\}$ 在 $P_{k-1}(\Omega)$ 上是线性无关的. 对于 $f \in H^k(\Omega)$, 令

$$\|f\|' = \left(\sum_{j=1}^m |\ell_j(f)|^2 + |f|_{k,2} \right)^{\frac{1}{2}},$$

那么 $\|\cdot\|'$ 定义为 $H^k(\Omega)$ 上一等价范数, 即存在常数 $C_1, C_2 > 0$, 使得

$$C_1\|f\|' \leqslant \|f\|_{H^k(\Omega)} \leqslant C_1\|f\|', \quad \forall\, f \in H^k(\Omega).$$

例 3.9.4 设 $\Gamma_0 \subset \partial\Omega$ 使得 $\operatorname{meas}(\Gamma_0) > 0$, 这里 $\operatorname{meas}(\Gamma_0)$ 为 Γ_0 的测度. 定义

$$H^1_{\Gamma_0}(\Omega) = \left\{ f \in H^1(\Omega) \,|\, f|_{\Gamma_0} = 0 \right\}.$$

注意根据迹定理 3.9.1, 当 $f \in H^1(\Omega)$ 时, $f|_{\Gamma_0} \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0)$. 定义线性泛函 $\ell : H^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ 为

$$\ell(f) = \int_{\Gamma_0} f(s)\mathrm{d}s.$$

那么根据 Cauchy 不等式、紧嵌入定理 3.9.3 和迹定理 3.9.1, 存在正常数 C' 和 C, 使得

$$\begin{aligned} |\ell(f)| &\leqslant \operatorname{meas}(\Gamma_0)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Gamma_0} |f(s)|^2 \mathrm{d}s \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leqslant C' \|f\|_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} \leqslant C \|f\|_{H^1(\Omega)}. \end{aligned}$$

从而 ℓ 是 $H^1(\Omega)$ 上的连续线性泛函. 于是从引理 3.9.1 可知存在正常数 C_1 和 C_2, 使得

$$\begin{aligned} & C_1 \left(\ell(f)^2 + \int_\Omega |\nabla f|^2 \mathrm{d}x \right) \leqslant \int_\Omega \left(|f|^2 + |\nabla f|^2 \right) \mathrm{d}x \\ & \leqslant C_2 \left(\ell(f)^2 + \int_\Omega |\nabla f|^2 \mathrm{d}x \right), \qquad \forall\, f \in H^1_{\Gamma_0}(\Omega). \end{aligned}$$

现在对于 $f \in H^1_{\Gamma_0}(\Omega)$, 有 $\ell(f) = 0$, 因此我们得到

$$\begin{aligned} C_1 \int_\Omega |\nabla f|^2 \mathrm{d}x &\leqslant \int_\Omega \left(|f|^2 + |\nabla f|^2 \right) \mathrm{d}x \\ &\leqslant C_2 \int_\Omega |\nabla f|^2 \mathrm{d}x, \quad \forall\, f \in H^1_{\Gamma_0}(\Omega). \end{aligned}$$

这表明双线性泛函

$$a(\varphi, \psi) = \int_\Omega \nabla f \cdot \overline{\nabla g} \mathrm{d}x, \quad \forall\, \varphi, \psi \in H^1_{\Gamma_0}(\Omega)$$

是 $H^1_{\Gamma_0}(\Omega)$ 上一等价内积, 并给出等价的诱导范数. □

定理 3.9.6 (Poincaré 不等式) 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ 为有界开区域, m 为一正整数, 则存在正常数 $C = C(m, N, \Omega)$ 使得

$$\|\varphi\|_{H^m(\Omega)} \leqslant C \left(\sum_{|\alpha|=m} \|D^\alpha \varphi\|^2_{L^2(\Omega)} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \forall\, \varphi \in H^m_0(\Omega).$$

证明 定义 $H^m(\Omega)$ 上线性泛函

$$\ell_k(f) = \int_{\Gamma_0} \frac{\partial f}{\partial \nu^k} \mathrm{d}s, \quad \forall\, f \in H^m(\Omega),\ k = 0, 1, \cdots, m-1.$$

容易验证 $\ell_0,\ \ell_1,\cdots,\ell_{m-1}$ 是 $P_{m-1}(\Omega)$ 上 m 个线性无关的连续线性泛函. 由于

$$\ell_k(f)=0,\quad \forall\, f\in H_0^m(\Omega),\ k=0,1,\cdots,m-1,$$

故根据 Deney-Lions 引理, 可知定理结论成立. □

3.10 注释与参考

在第 1 章最速落径问题中已涉及到泛函, 实际上, 变分法的研究是泛函分析的一个重要起源. 泛函分析的另一个重要来源是对积分方程的研究. 著名的希尔伯特空间就是希尔伯特 (Hilbert, 1862–1943) 在研究积分方程时提出的.

波兰数学家 Banach 利用范数代替希尔伯特空间的内积概念, 极大地拓广了泛函分析的疆域, 他并证明了一批泛函分析的重要结果, 成为现代泛函分析的奠基人.

粗略地说, 泛函分析是 20 世纪初在集合论的影响下函数概念与空间概念相结合的产物. 与线性代数研究的有穷维空间不同, 泛函分析研究的对象是无穷维空间. 在这类空间上的动态系统通常称为无穷维系统或分布参数系统. 分布参数系统的控制问题是现代控制理论的一个重要组成部分. 由于泛函分析是分布参数控制系统研究的理论基础, 它在控制界也很受重视.

泛函分析在我国比较普及. 我国有许多优秀的泛函分析专家, 如关肇直、张恭庆等. 关肇直先生的文献 [18], 张恭庆教授等的文献 [40] 都是泛函分析很好的参考书. 文献 [69] 也较简明易懂.

3.11 习题

3.1 证明一个 Banach 空间是一个 T_4 空间, 即设 C_1,C_2 为两个不相交闭集, 则存在不相交的开集 U_1, U_2 使 $C_1\subset U_1$, $C_2\subset U_2$.

3.2 设 X 为一距离空间, $W\subset X$ 为一紧子集. $f:W\to\mathbb{R}$ 为一连续函数. 证明 f 有界, 且它可以达到上、下界.

3.3 在 $C[0,1]$ 上定义两个范数

$$\|f\|_1=\sqrt{\int_0^1|f(x)|^2\mathrm{d}x};\quad \|f\|_2=\sqrt{\int_0^1(2+3x)|f(x)|^2\mathrm{d}x}.$$

证明 $\|\cdot\|_1$ 和 $\|\cdot\|_2$ 是 $C[0,1]$ 中的两个等价范数.

3.4 设 $C_B[0,\infty)$ 为 $[0,\infty)$ 上连续有界函数集. $a>0$, 定义范数

$$\|f\|_a=\sqrt{\int_0^\infty|\mathrm{e}^{ax}f(x)|^2\mathrm{d}x}.$$

(1) 证明 $\|\cdot\|_a$ 是 $C_B[0,\infty)$ 上的范数.

(2) 设 $b>0$, $b\neq a$, $\|\cdot\|_b$ 与 $\|\cdot\|_a$ 等价吗?

3.5 设 H 为一 Hilbert 空间, $A \subset H$, $\mathrm{span}\{A\}$ 为由 A 张成的子空间, 证明

(1)

$$A^{\perp} = (\overline{\mathrm{span}\{A\}})^{\perp};$$

(2)

$$A^{\perp\perp} = \overline{\mathrm{span}\{A\}}.$$

3.6 在 $L^2[-a,a]$ 中, 问偶函数集合的正交补是什么? 证明你的结论.

3.7 设 X 为一 Hilbert 空间, $x_0 \in X$, $r > 0$. 令

$$B = \{x \in X \,|\, \|x - x_0\| \leqslant r\}.$$

(1) 证明: B 为 X 中闭凸集.

(2) 设 $x \in B^c$, 定义 $y = x_0 + r(x - x_0)/\|x - x_0\|$. 证明: y 是 x 在 B 中的最佳逼近 (距离最小).

3.8 设 A, B 为 Hilbert 空间 H 的闭线性子空间, P_A, P_B 为 H 到 A, B 的投影算子. 证明:

(1) $A \perp B \Longleftrightarrow P_A P_B = 0$;

(2) $A = B^{\perp} \Longleftrightarrow P_A + P_B = id_H$.

3.9 设

$$C_0(\mathbb{R}) = \left\{ x \in C(\mathbb{R}) \,\middle|\, \lim_{|t|\to\infty} x(t) = 0 \right\}$$

定义 $\|x\| = \sup_{t\in\mathbb{R}} |x(t)|$, 则 $C_0(\mathbb{R})$ 是一个可分 Banach 空间, 试证之.

3.10 设 S 为序列集合, $s = \{x_i\} \in S$, 定义

$$\|s\| = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{|x_n|}{1 + |x_n|},$$

证明 S 依距离 $d(x,y) = \|x - y\|$ 是一个完备距离空间. S 是否是一个 Banach 空间?

3.11 设 $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 为线性算子: $x \mapsto Ax$, 这里 A 为一 $n \times n$ 矩阵. 证明 $\|A\| = \sqrt{\sigma_{\max}}$, 这里 $\sigma_{\max}$ 为 $A^{\mathrm{T}}A$ 的最大特征值.

提示: 利用以下结论: 设 P 为对称矩阵, 其最大、最小特征值分别为 $\sigma_{\max}$、$\sigma_{\min}$. 那么

$$\sigma_{\min} x^{\mathrm{T}} x \leqslant x^{\mathrm{T}} P x \leqslant \sigma_{\max} x^{\mathrm{T}} x.$$

3.12 设 X 为一 Banach 空间, $x \in X$, 又设 $T \in \mathcal{L}(X)$ 为 X 上的有界线性算子. 定义 $\varphi(T) = Tx$, 则 $\varphi \in L(L(X), X)$. 求 $\|\varphi\|$.

3.13 设 X 为一 Banach 空间, $X_0 \subset X$ 为 X 的闭子空间. $\varphi : X \to X/X_0$ 定义为

$$\varphi(x) = [x], \quad x \in X$$

上的有界线性算子. 证明: 如果存在 $m > 0$, 使得

$$|\langle Ax, x\rangle| \geqslant m\|x\|^2, \quad \forall\, x \in H,$$

则存在 $A^{-1} \in \mathcal{L}(H)$.

3.14 设 $\mathcal{B}$ 为赋范线性空间, $\{x_i\} \subset \mathcal{B}$ 为 $\mathcal{B}$ 中的点. 如果 $\forall f \in \mathcal{B}^*$ 数列 $\{f(x_i)\}$ 有界, 证明 $\{x_i\}$ 在 $\mathcal{B}$ 内有界.

3.15 设 $\mathcal{B}$ 为赋范线性空间, $x_1, \cdots, x_n \in \mathcal{B}$ 线性无关. 证明: 存在 n 个 $f_1, \cdots, f_n \in \mathcal{B}^*$, 使得

$$f_i(x_j) = \delta_{i,j} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

3.16 设 X 为 Banach 空间, $A \in \mathcal{L}(X)$, $\lambda \in \mathbb{C}$, 求证当 $|\lambda| > \|A\|$ 时, 算子 A 的 Neuman 级数 $\sum_{k=0}^{\infty} A^k/\lambda^{k+1}$ 按算子范数收敛于 $(\lambda I - A)^{-1} \in \mathcal{L}(X)$, 其中 I 为 X 中的恒等算子.

3.17 试证 $L^2(-\pi, \pi)$ 中的泛函序列

$$f_n(\varphi) = \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t) \cos nt \, \mathrm{d}t, \quad \varphi \in L^2(-\pi, \pi)$$

弱收敛于零.

3.18 设 X 是 Banach 空间. 序列 $\{x_n\} \subset X$ 满足

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| = \mu < \infty.$$

试证级数 $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ 收敛, 即存在 $x \in X$ 使得 $x = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} x_k$. 此外, 有 $\|x\| \leqslant \mu$.

3.19 定义线性算子 $A : C[0,1] \to C[0,1]$ 如下

$$(Af)(t) = \int_0^1 K(t,s) f(s) \mathrm{d}s, \quad \forall f \in C[0,1],$$

其中核函数 $K(t,s)$ 在 $[0,1] \times [0,1]$ 上连续. 试证 A 是有界的.

3.20 A 仍由上题给出, 但 $A : L^2(0,1) \to L^2(0,1)$, 而 $K(t,s)$ 是 $L^2((0,1) \times (0,1))$ 中的函数. 试问 A 有界吗?

3.21 设 X 是 Hilbert 空间, 证明: X 是局部序列紧的, 即 X 中任意强有界序列必含有一弱收敛的子序列. (该命题对自反 Banach 空间均成立.)

3.22 设 X, Y 为 Banach 空间, $A \in \mathcal{L}(X, Y)$. 试证:

(1) 若 A 为紧算子, 则 A 把 X 中的弱收敛序列变成 Y 中的强收敛序列;

(2) 当 X 为自反时, (1) 的逆命题也成立, 这就是说, 若 A 把 X 中的弱收敛序列变成 Y 中的强收敛序列, 则 A 是紧算子.

3.23 在 ℓ^2 中定义线性算子 A $Ax = (\alpha_1\xi_1, \cdots, \alpha_k, \cdots)$, $\forall x = (\xi_k) \in \ell^2$, 其中 α_k 为已知常数. 试指出对于什么样的 α_k, A 是有界的, 或是紧的.

3.24 设 A 是 Banach 空间 X 中的紧线性算子. 试证存在一单位元 $x \in X$, 使得 $\|Ax\| = \|A\|$.

3.25 在 Hilbert 空间 $L^2(0,1)$ 中定义线性算子 A:

$$(Af)(t) = \int_0^t f(s)\mathrm{d}s, \quad \forall\, f \in L^2(0,1).$$

试找出 A 的谱 $\sigma(A)$、点谱 $\sigma_p(A)$、连续谱 $\sigma_c(A)$ 和剩余谱 $\sigma_r(A)$, 并证明 $\|A\| = \frac{2}{\pi}$.