第1章

数学建模概论

数学是科学之母，科学技术离不开数学，它通过建立数学模型与数学产生紧密联系。数学以各种形式应用于科学技术各领域，它擅长处理各种复杂的依赖关系，精细刻画量的变化以及可能性的评估。它可以帮助人们探究原因、量化过程、控制风险、优化管理、合理预测。几十年来，由于计算机及科学技术的快速发展，求解各种数学问题的数值方法即计算数学也越来越多地应用于科学技术各领域，新的计算性交叉学科分支纷纷兴起，如计算力学、计算物理、计算化学、计算生物、计算经济学等。马克思曾指出："一门科学只有成功地应用了数学时，才算真正达到了完善的地步。"这一科学论断在后来的社会发展和科技进步中得以进一步的验证。美国专家道恩斯教授在浩瀚的书海中，选择了从文艺复兴到20世纪中期出版的16本自然科学和社会科学专著，并定名为"改变世界的书"，其中就有10本直接应用了数学。美国另一位专家在一份报告中又列举了1900—1965年世界范围内社会科学方面的62项重大成就，其中涉及数学的定量研究就占23项。对于数学的这些应用，华罗庚教授于1959年5月在《人民日报》上发表的题为《大哉，数学之为用》一文中做了精辟的阐释："宇宙之大，粒子之微，火箭之速，化工之巧，地球之变，生物之谜，日用之繁，大千世界，天上人间，无处不有数学的贡献。"

20世纪60年代以来的数学应用的范围不仅限于天文、物理、化学、生物、医学等自然科学范畴，而且也深入经济学、政治学、历史学、语言学、军事学等人文社会科学领域以及音乐、绘画、雕塑等艺术学领域；数学还广泛应用于可靠性理论、编码理论与通信、军用技术、航空航天技术、地质勘探、经济建设中的优化控制与统筹、设计与制造、质量控制、预测与管理、信息管理、大型工程资源开发与环境保护等。数学应用最为直接的是数学结论和数学理论的应用。比如，在当代经济学研究中，要用到许多数学理论，包括线性规划、非线性规划、动态规划、不动点理论、凸集理论、测度论、矩阵论、对策论、优化理论、运筹学等。在1969—1981年间颁发的13个诺贝尔经济学奖中，就有7项成果都借用了现代的数学理论。

社会实际问题往往是复杂多变的，量与量之间的关系并不一定很明显，通常不是套用某个数学公式或只用某个学科、某个领域的知识就可以圆满解决的，这就要求我们有较高的数

学素质，即能够从众多的事物和现象中找出共同的、本质的东西，善于抓住问题的主要矛盾，从大量数据和定量分析中寻找并发现规律，用数学的理论和数学思维方法以及相关知识解决实际问题，为社会服务。解决实际问题最重要的一个步骤就是建立相应的数学模型。由于社会生活的各个方面正在日益数量化，人们对解决各种问题的要求越来越精确，而计算机的发展为精确化提供了条件，很多无法实验或费用很大的实验问题，用数学模型进行研究是一个有效途径，因而数学模型在各个领域的应用越来越广泛。

尽管数学建模已有了很久的历史，数学建模课程却还是很年轻的一门课程。在 20 世纪 70 年代末和 80 年代初，英国剑桥大学专门为研究生开设了数学建模课程，几乎同时，欧美一些发达国家开始把数学建模的内容列入研究生、大学生以至中学生的教学计划中去，并于 1983 年开始举行两年一度的“数学建模教学和应用国际会议”进行定期交流。数学建模教学及其各种活动发展异常迅速，成为当代数学教育改革的主要方向之一。

1.1 数学模型与数学建模

1.1.1 原型与模型

原型是指人们需要分析和研究的现实世界中的事物，通常是指“系统”“人口”“环境”等。

模型就是描述现实世界原型的一个抽象，即为了特定的目的将原型所具有的本质属性的某一部分经过简化、提炼而构成的原型替代物，如航空模型。任何一个模型都可以看成一个真实系统在某一方面的理想化，如闪电实验。

模型可以分为具体模型和抽象模型。具体模型有直观模型、物理模型等，抽象模型有思维模型、符号模型、数学模型等。

1.1.2 数学模型

1. 数学模型的产生

数学模型很早就出现了，其在中国古代名著《九章算术》有着集中的体现。据考证，《九章算术》最迟在公元前 1 世纪已经成书了。从方法论的角度来看，《九章算术》广泛地采用了模型化方法。一般认为，近代第一个使用数学模型方法的是意大利科学家伽利略。1604 年他建立了自由落体运动的数学模型：$h=\frac{1}{2}gt^2$，从而在近代科学研究中引入了数学模型法。此后不久，德国科学家开普勒在 1609 年建立了行星运动的数学模型，即开普勒三大定律：

(1) 行星的运动轨迹是一个椭圆，太阳位于它的一个焦点。

(2) 太阳——行星的矢径所扫过的椭圆扇形面积随时间成比例增加。

(3) 所有行星运动轨道纵轴一半的立方与转动时间平方之比，具有相同的数值。

这个数学模型是一个划时代的发现，它奠定了哥白尼日心说的理论基础，并为牛顿力学的建立开辟了道路。随后，牛顿建立了经典力学体系，并且建立了这个体系的一个数学模型——微积分，他的经典力学就是用数学模型表述出来的。

微积分后来得到了很大的发展，其中的某些理论方法，如微分方程，现在仍然是许多科学技术中最常用的数学模型之一。人们逐渐实现了这样一种转变：不只是由实际问题提炼

出数学模型、运用数学模型解决原来的实际问题，而且开始对数学模型自身作深入的研究，应用研究的结果发现现实世界中的新事物。海王星、冥王星的发现就是著名的例证。随着现代数学的发展，数学模型已成为数学的一个重要分支。

2. 数学模型的概念

1）数学模型定义

数学模型是对于现实世界的一个特定对象，为了一个特定目标，根据特有的内在规律，作出一些必要的假设，运用适当的数学工具，得到一个数学结构。简单地说，数学模型就是系统的某种特征的本质的数学表达式（或是用数学术语对部分现实世界的描述），即用数学式子（如函数、图形、代数方程、微分方程、积分方程、差分方程等）来描述（表述、模拟）所研究的客观对象或系统在某一方面的存在规律。

特定对象是指所要研究或解决的实际问题。“特定对象”表明了数学模型的应用性，即它是为解决某个实际问题而提出的。特定目标是指所研究或解决的实际问题的某些特征，“特定目标”表明了数学模型的功能性，即当研究一个特定对象时，我们不能同时研究它的一切特征，而只能研究当时我们所关心的某些特征。

根据研究对象特有的内在规律，作出一些必需的简化假设，就是根据特定的目标将那些最本质的东西提炼出来，对非本质的东西进行简化。“根据特有的内在规律，作出一些必要的简化假设”表明了数学模型的抽象性。

不言而喻，数学工具是指已有的数学各分支的理论和方法，而数学结构是指数学公式、算法、表格、图示等。例如，力学中著名的牛顿第二定律，使用公式 $F=m\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}$来描述受力物体的运动规律就是一个成功的数学模型，该模型忽略了物体形状和大小，抓住了物体受力运动的主要因素。

2）航行问题

设甲乙两地相距 750km，船从甲地到乙地顺水航行需要 30h，而从乙地到甲地逆水航行需要 50h，问船速和水速各为多少？

假设船速和水速均为常数，并用 x 表示船速，用 y 表示水速（单位：km/h），则可得方程组

$$\begin{cases}30(x+y)=750\\50(x-y)=750\end{cases}\tag{1.1.1}$$

解方程组(1.1.1)得$\begin{cases}x=20\\y=5\end{cases}$，因此，船速为 20km/h，水速为 5km/h。

在这一航行问题中，研究的特定对象是船在相距 750km 的两地之间航行，特定目标是确定未知的船速和水速。必要的简化假设是船速和水速均为常数，特有的内在规律是匀速运动的距离等于时间乘以速度。数学工具是方程组理论，数学结构是两个二元一次方程式。

3. 数学模型的分类

数学模型可以按照不同的方式分类，下面介绍常用的几种。

(1) 按照模型的应用领域（或所属学科）可分为人口模型、交通模型、环境模型、生态模型、城镇规划模型、水资源模型、再生资源利用模型、污染模型等。范畴更大一些则形成许多

边缘学科，如生物数学、医学数学、地质数学、数量经济学、数学社会学等。

(2) 按照建立模型的数学方法(或所属数学分支)可分为初等数学模型、几何模型、微分方程模型、图论模型、马氏链模型、规划论模型、插值拟合模型等。

(3) 按照建模目的可分为描述模型、分析模型、预报模型、优化模型、决策模型、控制模型等。

(4) 按照对模型结构的了解程度可分为白箱模型、灰箱模型、黑箱模型。这是把研究对比喻成一只箱子里的机关，要通过建模来揭示它的奥妙。白箱主要包括用力学、热学、电学等一些机理相当清楚的学科描述的现象以及相应的工程技术问题，这方面的模型大多已经基本确定，还需深入研究的主要是优化设计和控制等问题了。灰箱主要指生态、气象、经济、交通等领域中机理尚不十分清楚的现象，在建立和改善模型方面都还不同程度地有许多工作要做。黑箱则主要指生命科学和社会科学等领域中一些机理(数量关系方面)很不清楚的现象。有些工程技术问题虽然主要基于物理、化学原理，但由于因素众多、关系复杂和观测困难等原因也常作为灰箱或黑箱模型处理。

1.1.3 数学建模

1. 数学建模的概念

数学建模是通过对实际问题进行抽象、简化，反复探索，构建一个能够刻画客观原型的本质特征的数学模型，并用来分析、研究和解决实际问题的一种创新活动过程。

数学建模完全不同于其他数学分支，它不是“学”数学，而是“学着用”数学。数学建模是把数学和客观实际问题联系起来的纽带。通过调查、收集资料和数据、观察和分析问题的固有特性及内在规律，抓住问题的主要矛盾，提出假设，经过抽象简化，建立反映实际问题的数量关系(数学模型)，然后运用数学的方法和技巧创新地分析和解决问题。

数学建模在科学技术发展方面的作用日益受到数学界和工程界的普遍重视。美国在1985年，创办了首届“美国大学生数学建模”竞赛；在我国，清华大学在1983年首开数学建模课程，1989年全国举办了地区性的大学生数学建模竞赛，1992年在中国工业与应用数学学会的倡导下举办了全国八城市九赛区的数学建模联赛，之后从1993年开始，每年9月举办一次全国大学生数学建模竞赛。

2. 数学建模的一般方法

建立数学模型的方法并没有固定的模式，但一个理想的模型则要求其具有一定的可靠性和较好的适用性。数学建模的方法主要有机理分析法、测试分析法和计算机仿真等。

1) 机理分析法

机理分析就是根据对现实对象特性的认识，分析其因果关系，找出反映内部机理的规律，所建立的模型常有明确的物理或现实意义。机理分析主要包括以下几种方法：

(1) 比例分析法——建立变量之间函数关系的最基本、最常用的方法；

(2) 代数方法——求解离散问题(离散的数据，符号，图形)的主要方法；

(3) 逻辑方法——数学理论研究的一种重要方法，针对社会学和经济学等领域的实际问题，在决策论、对策论等学科中得到广泛应用；

(4) 常微分方程——研究两个变量之间的变化规律，关键是建立“瞬时变化率”的表达式；

(5) 偏微分方程——研究因变量与两个以上自变量之间的变化规律。

2) 测试分析法

测试分析法就是将研究对象视为一个“黑箱”系统，其内部机理无法直接寻求，通过测量系统的输入输出数据，并以此为基础运用统计分析方法，按照事先确定的准则在某一类模型中选出一个数据拟合得最好的模型。主要包含回归分析法和时序分析法。

回归分析法：根据函数 $y=f(x)$ 的一组观测值 $(x_i,y_i)(i=1,2,\cdots,n)$ 来确定函数的表达式，由于处理的是静态的独立数据，故称为数理统计方法。

时序分析法：处理的是动态的相关数据，又称为过程统计方法。

将这两种方法结合起来使用，即用机理分析法建立模型的结构，用测试分析法来确定模型的参数，也是常用的建模方法，在实际过程中用那一种方法建模主要是根据对研究对象的了解程度和建模目的来决定。

3) 计算机仿真

计算机仿真(模拟)，实质上是统计估计方法，包含因子试验法和人工现实法。因子试验法就是在系统上做局部试验，再根据试验结果进行不断分析、修改，求得所需的模型结构。人工现实法就是基于对系统过去行为的了解和对未来希望达到的目标，并考虑到系统有关因素的可能变化，人为地组成一个系统。

3. 数学建模的步骤

建立数学模型要经过哪些步骤没有固定的模式，与实际问题的性质、建模的目的等有关。通常，建立数学模型主要需要以下步骤。

1) 建模准备

要建立数学模型，首先要了解问题的实际背景，明确建模的目的，搜集建模必需的各种信息，尽可能地弄清对象的特征，并由此初步确定用哪一类模型，这些都属于建模前需要做的准备工作。

2) 模型假设

根据对象的特征和建模的目的，对问题进行必要的、合理的简化，用精确的语言作出假设，这可以说是建模过程中关键的一步。一般来说，一个实际问题不经过简化假设就很难翻译成数学问题，即使可能，也很难求解。不同的简化假设会得到不同的模型，如果所作的假设不合理或过分简单，会导致模型失败或部分失败。如果所作的假设过分详细，把复杂对象的各方面因素都考虑进去，可能会很难甚至无法继续下一步的工作。通常作假设的根据，一是出于对问题内在规律的认识，二是来自对数据或现象的分析，也可以是二者的综合。作假设时既需要运用与问题相关的物理、化学、生物、经济等方面的知识，又要充分发挥想象力、洞察力和判断力，善于辨别问题的主次，果断地抓住主要因素，舍弃次要因素，尽量将问题线性化、均匀化。写出假设时，语言要精确，界限要分明，要简明扼要。

3) 模型构成

根据所作的假设，分析对象的因果关系，利用对象的内在规律和适当的数学工具，构造各个量(常量和变量)之间的等式(不等式)关系或其他数学结构。这里除需要一些相关学科的专业知识外，还常常需要较广阔的应用数学方面的知识，以开拓思路。当然不能要求对数学学科门门精通，而是要知道这些学科能解决哪一类问题以及大体上怎样解决。建立数学模型时还应遵循一个原则，那就是尽可能采用简单的数学工具，因为所建立的模型总是希望

能有更多的人了解和使用,而不是只供少数专家欣赏。

4) 模型求解

模型求解可以采用解方程、画图形、证明定理、逻辑运算及数值计算等各种传统的和近代的数学方法,特别是计算机软件来解决问题。

5) 模型分析

对模型的结果进行数学上的分析,有时要根据问题的性质分析变量间的依赖关系或稳定状况,有时是根据所得结果给出数学上的预报,有时则可能要给出数学上的最优决策或控制。不论哪种情况,常常需要进行误差分析、模型对数据的稳定性或灵敏性分析等。

6) 模型检验

用数学上分析的结果翻译回实际问题,并用实际的现象、数据与之比较,检验模型的合理性和适用性。这一步对于建模的成败是非常重要的,要以严肃认真的态度来对待。若模型检验的结果不符合或者部分不符合实际,问题通常出在模型的假设上,应该修改、补充假设,重新建模。有些模型需要经过几次反复、不断完善,才能达到某种程度的满意结果。

7) 模型应用

建模最终目的,是用模型来分析、研究和解决实际问题。因此,一个成功的数学模型必须能够在实践中得到成功的应用,甚至形成一套科学的理论。

上述数学建模的一般步骤如图 1.1 所示。但并不是所有建模过程都要经过这些步骤,有时各步骤之间的界限也不那么分明,建模时不要拘泥于形式上的按部就班。

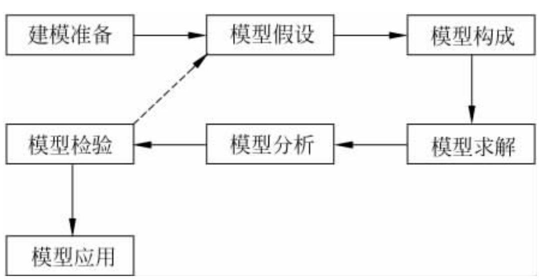

图 1.1 数学建模的基本步骤

1.2 椅子能在不平的地面上放稳吗?

本节所要讨论的问题起源于日常生活中一个普通的事实:把椅子往不平的地面上一放,通常只有三只脚着地,放不稳。然而只需稍挪动几次,就可以使四只脚同时着地,放稳了。这个看来似乎与数学无关的现象能用数学语言进行描述,并用数学工具来证实吗?让我们试试看。

1. 模型假设

(1) 椅子四条腿一样长,椅脚与地面接触处可视为一个点,四脚的连线呈正方形。

(2) 地面高度是连续变化的,沿任何方向都不会出现间断(没有像台阶那样的情况),地面可视为数学上的连续曲面。

(3) 对于椅脚的间距和椅腿的长度而言,地面是相对平坦的,使椅子在任何位置至少有

三只脚同时着地。

2. 模型构成

模型构成的中心问题是用数学语言把椅子四只脚同时着地的条件和结论表示出来。

首先要用变量表示椅子的位置。注意到椅脚连线呈正方形,以中心为对称点,正方形绕中心的旋转正好代表了椅子位置的改变,于是可以用旋转角度这一变量表示椅子的位置。在图1.2中椅脚连线为正方形 $ABCD$,对角线 AC 在 x 轴上,椅子绕中心点 O 旋转角度 θ 后,正方形 $ABCD$ 转至 $A'B'C'D'$ 的位置,故用对角线 AC 与 x 轴的夹角 θ 表示椅子的位置。

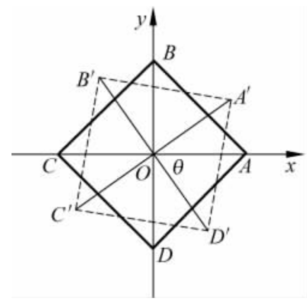

图1.2 正方形 $ABCD$ 绕 O 点旋转的位置图

其次要把椅脚着地用数学符号表示出来。如果用某个变量表示椅脚与地面的垂直距离,那么当这个距离为零时,就是椅脚着地了。椅子在不同位置时,椅脚与地面的距离不同,所以这个距离是椅子的位置变量 θ 的函数。虽然椅子有四只脚,因而有四个距离,但是由正方形的中心对称性,只要设两个距离函数就行了。

设 $f(\theta)$ 为 A,C 两脚与地面距离之和,$g(\theta)$ 为 B,D 两脚与地面距离之和,这里 $f(\theta)$ 和 $g(\theta)$ 皆大于或等于零。由假设(2)可知,$f(\theta)$ 和 $g(\theta)$ 都是连续函数。由假设(3)可知,椅子在任何位置至少有三只脚着地,所以对于任意的 θ,$f(\theta)$ 和 $g(\theta)$ 中至少有一个为零。当 $\theta=0$ 时,不妨设 A,B,C 三点着地,即 $g(0)=0$,$f(0)>0$。这样,改变椅子的位置使四脚同时着地,就归结为证明如下的数学命题:

命题 已知 $f(\theta)$,$g(\theta)$ 是 θ 的连续函数,对任意 θ,$f(\theta)g(\theta)=0$,且 $f(\theta)$,$g(\theta)\geqslant 0$ 则存在 θ_0,使 $g(\theta_0)=f(\theta_0)=0$。

证明 当 $\theta=0$ 时,设 A,B,C 三点着地,即 $f(0)=0$,$g(0)>0$,将椅子旋转 $\frac{\pi}{2}$,对角线 AC 和 BD 互换,此时 A,B,D 三点着地,即 $g\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$,$f\left(\frac{\pi}{2}\right)>0$。令 $h(\theta)=g(\theta)-f(\theta)$,则 $h(0)>0$,$h\left(\frac{\pi}{2}\right)<0$,由 $g(\theta)$,$f(\theta)$ 在闭区间 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上连续,$h(\theta)$ 在闭区间 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上连续,根据零点定理,必存在 $\theta_0\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$,使 $h(\theta_0)=0$,即 $g(\theta_0)=f(\theta_0)$,又 $g(\theta_0)f(\theta_0)=0$,所以 $g(\theta_0)=f(\theta_0)=0$。

这个模型的巧妙之处在于用一元变量 θ 表示了椅子的位置,用关于 θ 的两个函数表示了椅子的四脚与地面的距离。至于利用正方形的中心对称性以及旋转 $\frac{\pi}{2}$ 并不是本质的东西,我们可以考虑椅子的四脚连线呈长方形的情形。

1.3 生产组织问题

1. 问题的提出

某厂用甲、乙两种原料生产 A,B 两种产品,制造 A 产品 1t 需甲、乙原料分别是 1t 和

2t，制造 B 产品 1t 需甲、乙原料分别是 2t 和 1t，甲、乙原料供应能力分别是 8t 和 10t，生产 A，B 两种产品 1t 可分别获利 4 万元和 3 万元，问在现有原料供应条件下，如何组织生产，才能使利润最大？

2. 问题分析与模型建立

(1) 设该厂 A，B 两种产品的产量分别为 x_1，x_2，显然 $x_1 \geqslant 0$，$x_2 \geqslant 0$。

(2) 找出实际问题所要解决的目标是什么，并把目标列成各变量的函数，用 S 表示工厂所获得的总利润，因此利润和产量之间的函数关系式为 $S=4x_1+3x_2$。

因为要求利润的最大值，因此用 max S 表示求目标函数的最大值。

(3) 明确问题中的各限定条件，建立约束方程组或不等式组。根据已知条件，甲、乙两种原料供应能力是有限的，分别是 8t 和 10t，故有下列不等式组：

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leqslant 8 \\ 2x_1 + x_2 \leqslant 10 \\ x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

综上所述，我们需要建立的数学模型为

$$\max S = 4x_1 + 3x_2$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leqslant 8 \\ 2x_1 + x_2 \leqslant 10 \\ x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

3. 模型求解

1) 模型的约束条件分析

(1) 由于 $x_1 \geqslant 0$，$x_2 \geqslant 0$，则满足约束条件的点都会落在坐标平面的第一象限内；

(2) 不等式 $x_1+2x_2 \leqslant 8$ 表示在平面上位于直线 $x_1+2x_2=8$ 上及其下方的半平面内；

(3) 不等式 $2x_1+x_2 \leqslant 10$ 表示在平面上位于直线 $2x_1+x_2=10$ 上及其下方半平面内。如图 1.3 所示区域中的点满足约束条件，称这一区域为该问题的可行域。

2) 目标函数分析

max $S=4x_1+3x_2$ 对应的图像也是直线，其斜率为 $-\dfrac{4}{3}$，可行域里能使该直线与 x_2 轴的纵截距达到最大的点即为最优解，其对应的 S 值就为最优值。

因此，我们可以把过原点且斜率为 $-\dfrac{4}{3}$ 的直线作为参照直线，在可行域里进行平移，直至找到最优解。显然，在可行域里过 B 点的直线其纵截距最大，能使 S 达到最大，只需求 B 点坐标。

3) 求解结果

联立方程 $\begin{cases} x_1+2x_2=8 \\ 2x_1+x_2=10 \end{cases}$，解得 $\begin{cases} x_1=4 \\ x_2=2 \end{cases}$，即在点 $B(4,2)$ 时，max $S=4x_1+3x_2=22$。

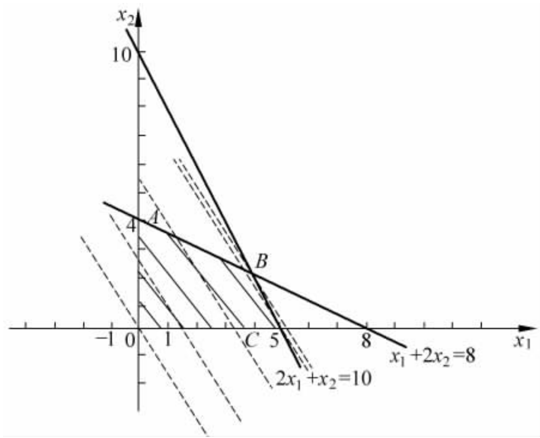

图 1.3　生产组织求解的示意图

1.4　物体冷却问题

1. 问题的提出

将物体放置于空气中，在时刻 $t=0$ 时，测量得它的温度为 $u_0=150$℃，10min 后测量得温度为 $u_1=100$℃。试求此物体的温度 u 和时间 t 的关系，并计算 20min 后物体的温度 u。这里假定空气温度保持为 $u_a=24$℃。

2. 问题分析与模型建立

为了解决上述问题，需要了解有关热力学的一些基本规律。例如，热量总是从温度高的物体向温度低的物体传导；在一定的温度范围内，一个物体的温度变化速度与这一物体的温度和其所在介质温度的差值成正比。这是已为实验证实了的牛顿冷却定律。

设物体在时刻 t 的温度为 $u=u(t)$，则温度的变化速度以 $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$ 来表示。注意到热量总是从温度高的物体向温度低的物体传导，因而 $u>u_a$。所以温度差 $u-u_a$ 恒正；又因为物体将随时间而逐渐冷却，所以温度变化速度 $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$ 恒负，故有

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=-k(u-u_a) \tag{1.4.1}$$

这里 $k>0$ 是比例常数。方程(1.4.1)就是物体冷却过程的数学模型，它含有未知函数 u 及它的一阶导数 $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$，这样的方程称为一阶微分方程。

3. 模型求解

为了解出物体的温度 u 和时间 t 的关系，我们要从方程(1.4.1)中解出 u。注意到 u_a 是常数，且 $u-u_a>0$，可将方程(1.4.1)改写成

$$\frac{\mathrm{d}(u-u_a)}{u-u_a}=-k\mathrm{d}t$$

这样 u 和 t 就被分离开了。两边积分，得到

$$\ln(u-u_a)=-kt+\tilde{c}$$

这里$\tilde{c}$是任意常数。上式可写成

$$u-u_a=e^{-kt+\tilde{c}}$$

令 $c=e^{\tilde{c}}$,则有

$$u=u_a+ce^{-kt}$$

再根据初始条件:当 $t=0$ 时,$u=u_0$,可得 $c=u_0-u_a$,于是

$$u=u_a+(u_0-u_a)e^{-kt} \tag{1.4.2}$$

如果 k 的数值确定了,方程(1.4.2)就完全决定了温度 u 和时间 t 的关系。

根据条件,当 $t=10$ 时,$u=u_1$,得到

$$u_1=u_a+(u_0-u_a)e^{-10k}$$

由此得到

$$k=\frac{1}{10}\ln\frac{u_0-u_a}{u_1-u_a}=\frac{1}{10}\ln 1.66\approx 0.051$$

从而

$$u=24+126e^{-0.051t} \tag{1.4.3}$$

故 20min 后物体的温度就是 $u_2\approx 70$℃。

由方程(1.4.3)还可得到,当 $t\to+\infty$时,$u\to 24$℃,这可以解释为:经过一段时间后物体的温度和空气的温度没有什么差别了。

图 1.4 就为对上述例子中的微分方程的解的直观描述。

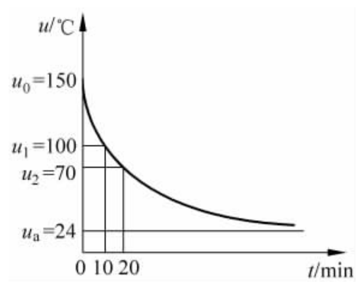

图 1.4 物体问题与实时关系图

1.5 捕鱼成本模型

1. 问题的提出

在鱼塘中捕鱼时,鱼越少捕鱼越困难,捕捞的成本也就越高,一般可以假设捕捞成本与当时池塘中的鱼量成反比。

假设当鱼塘中有 $x$kg 鱼时,捕捞成本是$\frac{2000}{10+x}$元/kg。已知鱼塘中现有鱼 10 000kg,问从鱼塘中捕捞 6000kg 鱼需花费多少成本?

2. 模型的构成与求解

根据题意,当塘中鱼量为 $x$kg 时,捕捞成本函数为

$$C(x)=\frac{2000}{10+x}\quad (x>0)$$

假设塘中现有鱼量为 Akg,需要捕捞的鱼量为 Tkg。当已经捕捞了 $x$kg 鱼之后,塘中所剩的鱼量为 $A-x$kg,此时再捕捞 Δxkg 鱼所需的成本为

$$\Delta C=C(A-x)\Delta x=\frac{2000}{10+(A-x)}\Delta x$$

$$\frac{dC}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta C}{\Delta x}=\frac{2000}{10+(A-x)}$$