第 1 章　多　项　式

多项式理论是高等代数的重要内容之一，是相对独立的一个部分. 多项式理论的核心是多项式因式分解的存在唯一性定理，本章首先由多项式的带余除法引入多项式整除的概念，进而给出因式、不可约多项式的定义，接下来讨论了一般数域 P 上多项式因式分解的存在唯一性定理 (对于复数域和实数域，因式分解定理可以进一步具体化)，最后又讨论了有理数域上多项式是否可约以及多项式的有理根等问题. 此外，本章还讨论了多项式的重因式以及与多项式函数的根相关的问题.

1.1　知识要点

1.1.1　一元多项式的因式分解

1. 数域 P 上的一元多项式

设 n 是一非负整数，形式表达式

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0, \tag{1.1}$$

其中 $a_0,a_1,\cdots,a_n$ 全属于数域 P，称为数域 P 上的一元多项式.

在 (1.1) 式中，如果 $a_n\neq 0$，则称 n 为 $f(x)$ 的次数，记做 $\partial(f(x))$. 零多项式不定义次数，零次多项式是指数域 P 中的非零常数.

关于多项式的次数，我们有如下性质:

设 $f(x)$，$g(x)$ 是数域 P 上的两个非零多项式，则

(1) $\partial(f(x)\pm g(x))\leqslant \max\{\partial(f(x)),\partial(g(x))\}$，这里 $f(x)\pm g(x)\neq 0$.

(2) $\partial(f(x)g(x))=\partial(f(x))+\partial(g(x))$.

2. 带余除法

设 $f(x)\in P[x]$，则对于 $g(x)\in P[x]$，$g(x)\neq 0$，存在 $q(x)$，$r(x)\in P[x]$，使得

$$f(x)=q(x)g(x)+r(x),$$

其中 $r(x)=0$ 或者 $\partial(r(x))<\partial(g(x))$，且这样的 $q(x)$，$r(x)$ 是由 $f(x)$ 和 $g(x)$ 唯一确定的，分别称之为商式和余式.

注　熟悉抽象代数内容的读者不难看到，数域 P 上的一元多项式环 $P[x]$ 是一个欧式环，因而是一个主理想整环. 设由多项式 $g(x)$ 生成的主理想为 $(g(x))$，

则 $(g(x))$ 将 $P[x]$ 分拆成一些彼此不交的剩余类，$f(x)$ 属于其中一个剩余类 $(g(x))+r(x)$，这就是 $q(x)$ 与 $r(x)$ 的存在性. 如果限制 $r(x)$ 满足条件 $r(x)=0$ 或者 $\partial(r(x))<\partial(g(x))$，则这里的 $q(x)$ 与 $r(x)$ 是唯一的.

在学习数学的过程中，能够从多角度理解同一个知识点，同时将新学的知识与已经熟悉的知识相互联系，这对我们加深对内容的理解是非常有益的.

3. 整除

设 $f(x),g(x)\in P[x]$，若存在 $h(x)\in P[x]$，使得 $f(x)=g(x)h(x)$，则称 $g(x)$ 整除 $f(x)$，记做 $g(x)|f(x)$.

整除的性质

(1) $g(x)|f(x)$ 且 $f(x)|g(x)$ 当且仅当存在非零常数 $c\in P$, 使得 $f(x)=cg(x)$.

(2) $f(x)|g(x)$ 且 $g(x)|h(x)$, 则 $f(x)|h(x)$.

(3) 若 $g(x)|f_i(x)(i=1,2,\cdots,s)$, 则对于任意的 $u_i(x)\in P[x]$, 有

$$g(x)\left|\sum_{i=1}^{s}u_i(x)f_i(x).\right.$$

4. 最大公因式

设 $f(x),g(x)\in P[x]$, 如果 $d(x)\in P[x]$ 满足 $d(x)|f(x),d(x)|g(x)$, 则称 $d(x)$ 为 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的一个公因式；又如果 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的任一公因式都能整除 $d(x)$，则称 $d(x)$ 为 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的一个最大公因式. 习惯上，用 $(f(x),g(x))$ 表示 $f(x),g(x)$ 的首项系数为 1 的最大公因式.

最大公因式的性质

(1) 对于 $P[x]$ 中任意两个多项式 $f(x),g(x)$，在 $P[x]$ 中存在一个最大公因式 $d(x)$，且 $d(x)$ 可以表示为 $f(x),g(x)$ 的一个组合，即有 $P[x]$ 中的多项式 $u(x)$, $v(x)$ 使

$$d(x)=u(x)f(x)+v(x)g(x).$$

(这里 $u(x),v(x)$ 并不是由 $f(x),g(x)$ 唯一确定的.)

(2) 设 $f(x)=q(x)g(x)+r(x)$，则 $(f(x),g(x))=(g(x),r(x))$.

这个性质是辗转相除法求最大公因式的依据，辗转相除法是性质 (1) 的证明中用到的一个重要结论.

(3) $d(x)$ 是 $f(x),g(x)$ 的最大公因式当且仅当 $d(x)$ 是 $f(x),g(x)$ 的公因式中次数最高的一个多项式; $d(x)$ 是 $f(x),g(x)$ 的最大公因式当且仅当 $d(x)$ 是形式为 $u(x)f(x)+v(x)g(x)$ 的多项式中次数最低的一个，这里 $u(x),v(x)$ 为 $P[x]$ 中任意多项式.

(4) $m(x)$ 是 $f(x),g(x)$ 的最小公倍式当且仅当 $m(x)$ 是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的公倍式中次数最低的一个.

(5) 若 $(f(x),g(x))=d(x)$, $f(x)=d(x)f_1(x)$, $g(x)=d(x)g_1(x)$，则

$$[f(x),g(x)]=cd(x)f_1(x)g_1(x),$$

这里 $[f(x),g(x)]$ 表示 $f(x),g(x)$ 的首项系数为 1 的最小公倍式，$c\in P$ 使得多项式 $cd(x)f_1(x)g_1(x)$ 的首项系数为 1.

注 设由多项式 $f(x)$ 生成的主理想为 $(f(x))$，则对于 $f(x),g(x)\in P[x]$，有

(1) $(d(x))=(f(x))+(g(x))$;

(2) $(m(x))=(f(x))\cap(g(x))$.

5. 多项式的互素

若 $(f(x),g(x))=1$，则称多项式 $f(x)$ 与 $g(x)$ 互素.

多项式互素的判别条件 $(f(x),g(x))=1$ 当且仅当存在 $u(x),v(x)\in P[x]$, 使得

$$u(x)f(x)+v(x)g(x)=1.$$

多项式互素的性质

(1) $(f_1(x),g(x))=1,(f_2(x),g(x))=1$ 当且仅当 $(f_1(x)f_2(x),g(x))=1$.

思路分析 利用判别条件将互素之间的关系转化为数学等式之间的关系，使问题更为具体化.

(2) 若 $(f(x),g(x))=1$，则

$$(f^m(x),g^n(x))=1,(f(x^m),g(x^m))=1.$$

思路分析 反复应用性质 (1) 可得 $(f^m(x),g^n(x))=1$; 应用多项式互素的判别条件可得 $(f(x^m),g(x^m))=1$.

(3) $(f(x),g(x))=1$ 当且仅当 $(f(x)g(x),f(x)+g(x))=1$.

(4) 若 $f(x)|g(x)h(x)$，且 $(f(x),g(x))=1$，则 $f(x)|h(x)$.

(5) 若 $f(x)|h(x),g(x)|h(x)$，且 $(f(x),g(x))=1$，则 $f(x)g(x)|h(x)$.

6. 不可约多项式

若 $p(x)\in P[x]$, $\partial(p(x))\geqslant 1$, $p(x)$ 不能表示成 $P[x]$ 中两个次数比 $\partial(p(x))$ 低的多项式的乘积，则称 $p(x)$ 在 P 上不可约.

不可约多项式的性质

(1) 数域 P 上的不可约多项式 $p(x)$ 与 $P[x]$ 中任意多项式 $f(x)$ 的关系是

$$(p(x),f(x))=1 \text{ 或 } p(x)|f(x).$$

(2) 设 $p(x)$ 是数域 P 上的不可约多项式，则对于任意 $f(x), g(x) \in P[x]$，若 $p(x)$ 整除 $f(x)g(x)$，则 $p(x)$ 整除 $f(x)$,$g(x)$ 其中之一. 更一般地，若 $p(x) \left| \prod\limits_{i=1}^{m} f_i(x) \right.$，则 $p(x)$ 至少整除某一个 $f_i(x)$.

7. 因式分解及唯一性定理

数域 P 上每个次数大于等于 1 的多项式 $f(x)$ 都可以唯一地分解为 P 上一些不可约多项式 $p_i(x)$ 的乘积，即

$$f(x) = \prod_{i=1}^{s} p_i^{r_i}(x).$$

(1) 复数域上的不可约多项式只有一次的，因此，每个次数大于等于 1 的复系数多项式都能唯一地分解为一次因式之积.

(2) 实数域上的不可约多项式只有一次多项式和二次不可约多项式，因此，每个次数大于等于 1 的实系数多项式都能唯一地分解为一次多项式和二次不可约多项式之积.

(3) 有理数域上的不可约多项式可以是任意次的. 例如，$x^n + 2$ 是有理数域上的不可约多项式，这里 n 为任意正整数.

1.1.2 重因式与多项式函数

1. 重因式

不可约多项式 $p(x)$ 称为多项式 $f(x)$ 的 $k(k \geqslant 0)$ 重因式，如果 $p^k(x)$ 整除 $f(x)$，但 $p^{k+1}(x)$ 不整除 $f(x)$.

2. 重因式的性质

(1) 如果不可约多项式 $p(x)$ 是多项式 $f(x)$ 的 $k(k \geqslant 1)$ 重因式，那么它是 $f'(x)$ 的 $k-1$ 重因式. 若不可约多项式 $p(x)|f(x)$,$p(x)$ 为 $f'(x)$ 的 $k-1$ 重因式，则 $p(x)$ 是 $f(x)$ 的 k 重因式.

(2) 不可约多项式 $p(x)$ 是多项式 $f(x)$ 的重因式的充分必要条件是 $p(x)$ 为 $f(x)$ 与 $f'(x)$ 的公因式.

(3) 多项式 $f(x)$ 没有重因式的充分必要条件是 $f(x)$ 与 $f'(x)$ 互素.

(4) 数域 P 上任意一个不可约多项式在复数域内没有重根.

3. 与多项式函数相关的结论

(1) α 是多项式 $f(x)$ 的根当且仅当 $(x-\alpha)|f(x)$.

(2) $P[x]$ 中 $n(n \geqslant 0)$ 次多项式在数域 P 中的根不可能多于 n 个，重根按重数计算.

(3) 如果多项式 $f(x), g(x)$ 的次数都不超过 n，而它们对 $n+1$ 个不同的数 $\alpha_1, \cdots, \alpha_{n+1}$ 有相同的值，即

$$f(\alpha_i) = g(\alpha_i), i = 1, 2, \cdots, n+1,$$

那么 $f(x) = g(x)$.

1.1.3 有理数域上的多项式

1. 有理系数多项式的因式分解

应用高斯引理 (本原多项式的乘积仍是本原多项式) 可以证明下面定理.

整系数多项式的因式分解定理 如果一非零的整系数多项式能够分解成两个次数较低的有理系数多项式的乘积，那么它一定能分解成两个次数较低的整系数多项式的乘积.

推论 设 $f(x), g(x)$ 是整系数多项式，且 $g(x)$ 是本原多项式. 如果 $f(x) = g(x)h(x)$，其中 $h(x)$ 是有理系数多项式，那么 $h(x)$ 一定是整系数的.

2. 求整系数多项式有理根的方法

设

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

是一个整系数多项式，而 $\dfrac{r}{s}$ 是它的一个有理根，其中 r, s 互素，那么必有 $s \big| a_n$, $r \big| a_0$. 特别地，如果 $f(x)$ 的首项系数 $a_n = 1$，那么 $f(x)$ 的有理根都是整根，而且是 a_0 的因子.

3. 有理系数多项式是否可约的一个充分条件

艾森斯坦因 (Eisenstein) 判别法 设

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

是一个整系数多项式. 如果存在素数 p 使得

(1) $p \nmid a_n$;

(2) $p | a_{n-1}, a_{n-2}, \cdots, a_0$;

(3) $p^2 \nmid a_0$,

那么 $f(x)$ 在有理数域上是不可约的.

对于一些多项式而言，不能直接应用艾森斯坦因判别法，应采用以下常见的变换：

(1) 令 $x = ay + b,\ a \neq 0,\ a, b \in \mathbf{Z}$，则整系数多项式 $f(x)$ 与 $g(y) = f(ay + b)$ 在有理数域上有相同的可约性；

(2) 令 $x = \dfrac{1}{y}$，则整系数多项式 $f(x)$ 与 $g(y) = y^n f\left(\dfrac{1}{y}\right)$ 在有理数域上有相同的可约性，这里 $n = \partial(f(x))$.

问题 在艾森斯坦因判别法中，将 a_0 和 a_n 的条件互换，$f(x)$ 是否仍为不可约多项式？

1.2 典型例题解析

例 1.1 试求所有非零复系数多项式 $f(x)$，满足

$$f(f(x)) = (f(x))^n, \tag{1.2}$$

其中 n 为正整数.

思路分析 (1) 对于一些相对复杂的题目，如何来获取解题思路呢？往往先讨论简单的情形，从中寻找一般情形的解题方法. 此题可对多项式的次数分类，先讨论低次多项式是否适合题目中的条件，由此来寻找解决问题的突破口.

设

$$f(x) = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \cdots + a_0, a_m \neq 0.$$

比较 (1.2) 式中等号两边多项式的次数可得 $m^2 = mn$.

当 $m = 0$ 时,$f(x) = a_0 \neq 0,\ a_0^{n-1} = 1$; 当 $m = n$ 时，通过比较等式中多项式的系数可得 $f(x) = x^n$.

将 $f(x)$ 的表达式假设出来，可以将抽象的条件 (1.2) 向具体转化，这是解题的一个关键所在.

(2) 对于任意复数 k, $f(f(k)) = (f(k))^n$. 若 $f(x)$ 为零次多项式，结论易得；若 $\partial(f(x)) \geqslant 1$，不妨设 $f(x) = g(x) + \mathrm{i}h(x)$，这里 $g(x), h(x)$ 均为实系数多项式，$\partial(g(x)) \geqslant 1$ 或 $\partial(h(x)) \geqslant 1$, 由实系数多项式的连续性可得 $f(x)$ 的值域是一个无限集合. 因此，$f(x)$ 与 x^n 对无穷多个复数取值相同，于是 $f(x) = x^n$.

(3) 对于 $\partial(f(x)) \geqslant 1$ 的情形，设出 $f(x)$ 的标准分解式，由此可得结论.

例 1.2 设 $f_0(x), f_1(x), \cdots, f_{n-1}(x) \in P[x]$，且

$$(x^n - a) \left| \sum_{i=0}^{n-1} x^i f_i(x^n), a \in P, a \neq 0. \right.$$

证明：$(x - a) | f_i(x), i = 0, 1, \cdots, n-1$.

思路分析 (1) 从多项式的一次因式与根之间的关系入手，将要证明的结论转化为证明 $f_i(a)=0$;

(2) 借助多项式的整除与带余除法之间的关系，将要证明的结论转化为证明 $x-a$ 除 $f_i(x)$ 的余式为零;

(3) 注意到 x^n-a 除 $f_i(x^n)$ 的余式为 $f_i(a)$，由此可得结论.

注 题目的充分性是显然成立的.

例 1.3 设 $f(x)=x^{3m}-x^{3n+1}+x^{3l+2}, g(x)=x^2-x+1$，其中 m,n,l 为非负整数，则 $g(x)|f(x)$ 的充分必要条件是 m,n,l 具有相同的奇偶性.

思路分析 借助多项式整除与互素的相关性质，可得 $g(x)|f(x)$ 当且仅当 $g(x)$ 的两个根都是 $f(x)$ 的根，由此可达到问题转化的目的.

思考 怎样将例 1.3 与例 1.2 联系起来?

例 1.4 证明：$(x^m-a^m)|(x^n-a^n)$ 当且仅当 $m|n$，这里 $a\neq 0, m,n$ 为自然数.

思路分析 充分性显然，必要性利用配项的方法即可完成证明.

注 $f(x)|g(x)$ 当且仅当 $bf(x)|cg(x), b,c$ 为非零常数，因此 $(x^m-a^m)|(x^n-a^n)$ 当且仅当 $\left(\left(\dfrac{x}{a}\right)^m-1\right)\Big|\left(\left(\dfrac{x}{a}\right)^n-1\right)$，当且仅当 $(x^m-1)\Big|(x^n-1)$. 当然，熟悉抽象代数的读者知道，x^m-1 的所有根对数的乘法做成一个 m 阶循环群，$(x^m-1)|(x^n-1)$ 意味着两个循环群之间的包含关系，从而利用子群的阶整除群的阶可得 $m|n$.

例 1.5 证明：$(x^m-1,x^n-1)=x^d-1$ 当且仅当 $(m,n)=d$, 这里 m,n,d 为正整数,(m,n) 为 m,n 的最大公因数.

思路分析 考虑多项式的根与多项式整除之间的关系，并反复应用例 1.4 的结论.

证明 必要性 (略).

充分性：利用例 1.4 的结论容易得到 x^d-1 是 x^m-1 与 x^n-1 的公因式; 对于 x^m-1 和 x^n-1 的任意公因式 $h(x)$, 要证明 $h(x)|(x^d-1)$ 只需证明 $h(x)$ 的根均为 x^d-1 的根即可，因为 $h(x)$ 没有重根.

例 1.6 设 $f(x)$ 是数域 P 上 $n(n\geqslant 2)$ 次不可约多项式，若 $f(x)$ 的一个根的倒数也是 $f(x)$ 的根，则 $f(x)$ 的每一个根的倒数都是 $f(x)$ 的根.

思路分析 设

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0,$$

$$g(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n.$$

由已知条件可知，$f(x)$ 与 $g(x)$ 有公共根.

再由不可约多项式的性质可得 $g(x)=cf(x)$. 由此可得结论.

例 1.7　设 $f_1(x),f_2(x)$ 是数域 P 上两个多项式. 证明：$f_1(x)$ 与 $f_2(x)$ 互素的充分必要条件是：对 P 上任意两个多项式 $r_1(x)$,$r_2(x)$, 存在 P 上多项式 $q_1(x)$,$q_2(x)$, 使

$$q_1(x)f_1(x)+r_1(x)=q_2(x)f_2(x)+r_2(x).$$

思路分析　利用多项式互素的判别条件可证.

注　题目中 $r_1(x)$,$r_2(x)$ 的任意性可合并为一个多项式的任意性，即 $f_1(x)$ 与 $f_2(x)$ 互素的充分必要条件可换为对于任意多项式 $h(x)$，存在 P 上多项式 $q_1(x)$,$q_2(x)$, 使

$$h(x)=q_1(x)f_1(x)+q_2(x)f_2(x).$$

从抽象代数的角度看，$f_1(x)$ 与 $f_2(x)$ 互素的充分必要条件是两个理想 $(f_1(x))$ 与 $(f_2(x))$ 的和是单位理想，即

$$(f_1(x))+(f_2(x))=P[x].$$

例 1.8　设 $f(x)$ 是次数大于零的整系数多项式，证明：若 $1+\sqrt{2}$ 是 $f(x)$ 的根，则 $1-\sqrt{2}$ 也是 $f(x)$ 的根.

思路分析　显然，若结论成立，则以 $1+\sqrt{2}$ 和 $1-\sqrt{2}$ 为根的多项式 x^2-2x-1 是 $f(x)$ 的因式. 反过来，要证明结论，只需利用带余除法证明 x^2-2x-1 整除 $f(x)$ 即可.

多项式的整除以及与之相关的公因式、多项式的根等问题是考研经常涉及的题目. 对此，除了熟练掌握相关的概念、性质以及结论之外，还要理解这些内容之间的联系. 例如，例 1.2 中用到了整除与带余除法，以及整除与多项式的根之间的关系；例 1.3，例 1.4，例 1.5，例 1.6 和例 1.8 都涉及多项式根的问题，这些问题与多项式的互素、不可约多项式的性质等内容均有联系.

从重因式的定义可以看出，与重因式相关问题的实质还是多项式的整除问题. 结合不可约多项式的性质，借助重因式以及多项式函数的相关结论是解决问题的关键.

例 1.9　证明:$x-1$ 是

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$$

的 $k+1(k\geqslant 0)$ 重因式当且仅当

$$\sum_{i=0}^{n}a_i=0,\sum_{i=1}^{n}ia_i=0,\cdots,\sum_{i=1}^{n}i^ka_i=0,\sum_{i=1}^{n}i^{k+1}a_i\neq 0. \tag{1.3}$$

思路分析　(1) $x-1$ 是 $f(x)$ 的 $k+1(k\geqslant 0)$ 重因式当且仅当

$$f(1)=f^{'}(1)=\cdots=f^{(k)}(1)=0,f^{(k+1)}(1)\neq 0. \tag{1.4}$$

将 (1.3) 式与 (1.4) 式均看作关于 $a_0,a_1,\cdots,a_n$ 的线性方程组，则只需证明 (1.3) 式与 (1.4) 式等价即可，而两式等价当且仅当它们对应的系数矩阵行等价 (但验证时的计算非常复杂).

(2) 利用数学归纳法可简化思路 (1) 的计算. $k=0$ 时结论显然. 结合重因式的性质可得 $x-1$ 是 $f(x)$ 的 $k+1(k\geqslant 0)$ 重因式当且仅当 $x-1$ 是 $f(x)$ 的因式，且 $x-1$ 是 $f'(x)$ 的 k 重因式. 利用归纳假设进一步可得当且仅当

$$\begin{array}{rrrrrr}
a_0+ & a_1+ & a_2+\cdots+ & a_{n-1} & +a_n & =0,\\
na_0+ & (n-1)a_1+ & (n-2)a_2+\cdots+ & a_{n-1} & & =0,\\
 & (n-1)a_1+ & 2(n-2)a_2+\cdots+ & (n-1)a_{n-1} & & =0,\\
 & & & \vdots & & \\
 & (n-1)a_1+ & 2^{k-1}(n-2)a_2+\cdots+ & (n-1)^{k-1}a_{n-1} & & =0,\\
 & (n-1)a_1+ & 2^{k}(n-2)a_2+\cdots+ & (n-1)^{k}a_{n-1} & & \neq 0.
\end{array} \tag{1.5}$$

容易证明：(1.5) 式与 (1.3) 式等价，结论得证.

(3) 注意到

$$\begin{aligned}
&f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n,\\
&f^{'}(x)=na_0x^{n-1}+(n-1)a_1x^{n-2}+\cdots+a_{n-1},\\
&nf(x)-xf^{'}(x)=a_1x^{n-1}+2a_2x^{n-2}+\cdots+na_n.
\end{aligned}$$

构造 $f_1(x)=nf(x)-xf'(x)$,

$$f_j(x)=nf_{j-1}(x)-xf'_{j-1}(x),j=2,3,\cdots,k+1.$$

注意到 (1.3) 式恰为 $f(1)=0,f_j(1)=0,j=1,2,\cdots,k,f_{k+1}(1)\neq 0$.

若 $x-1$ 是 $f(x)$ 的 $k+1$ 重因式，则 $x-1$ 是 $f_1(x)$ 的 k 重因式，$\cdots\cdots$，是 $f_k(x)$ 的 1 重因式，是 $f_{k+1}(x)$ 的 0 重因式，必要性得证. 反之，若 (1.3) 式成立，则由 $f_k(1)=0$, $f_{k+1}(1)\neq 0$ 可得 $x-1$ 是 $f_k(x)$ 的 1 重因式，结合 $f_{k-1}(1)=0$ 可得 $x-1$ 是 $f_k(x)$ 的 2 重因式. 以此类推，可得结论.

结合行列式和线性方程组的知识，利用反证法，可以证明下面例子.

例 1.10　证明多项式

$$f(x)=a_1x^{p_1}+a_2x^{p_2}+\cdots+a_nx^{p_n}$$

不可能有非零而重数大于 $n-1$ 的根，其中 $a_i\neq 0\ (i=1,2,\cdots,n)$，而 $p_j(j=1,2,\cdots,n)$ 是两两互不相同的非负整数.

例 1.11　设 $f_1(x),f_2(x),\cdots,f_m(x)$ 是两两互素的多项式，$a_1,a_2,\cdots,a_m$ 是数. 证明存在 $g(x)$ 满足

$$g(x)=f_i(x)q_i(x)+a_i,i=1,2,\cdots,m.$$

思路分析　仅就 $s=2$ 时给出证明. 由于 $f_1(x),f_2(x)$ 互素，存在 $u(x),v(x)$ 使得

$$u(x)f_1(x)+v(x)f_2(x)=1.$$

令 $g(x)=a_1v(x)f_2(x)+a_2u(x)f_1(x)$ 即为所求.

注　若 $f_i(x)(i=1,2)$ 均为一次因式时，题目给出的 $g(x)$ 恰为拉格朗日插值公式. 因此，此题可看做拉格朗日插值公式的一个推广.

例 1.12　设 $f(x)$ 是一个整系数多项式，若既约分数 $\dfrac{r}{s}$ 是它的一个有理根，则 $(r-ms)|f(m)$，这里 m 是一个整数. 特别地，$(r-s)|f(1)$, $(r+s)|f(-1)$.

思路分析　应用整系数多项式的因式分解定理的推论可证.

注　当 ±1 不是 $f(x)$ 的根时，可缩小有理根的试验范围.

判断一个有理系数多项式是否可约是考研中的常见题目，对于系数相对具体的题目一般应用艾森斯坦因判别法，否则一般采用反证法.

例 1.13　设

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$$

是一个整系数多项式. 如果有一个素数 p 使得

(1) $p\nmid a_n$;

(2) $p|a_{k-1},a_{k-2},\cdots,a_0$;

(3) $p^2\nmid a_0$,

这里 $k\leqslant n$. 那么 $f(x)$ 有一个次数不小于 k 的不可约因式.

思路分析　应用反证法. 与艾森斯坦因判别法的证明过程类似，也是艾森斯坦因判别法的一个推广.