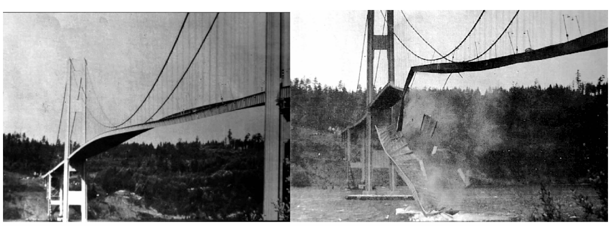
第 1 章

振动基础知识

1.1　振动研究的基本内容和方法

振动泛指物体在某一位置附近的往复运动。这里的物体既可以是飞机、车辆、船舶和建筑等大型宏观物体，也可以是微粒、分子、原子和光子之类的微观物质。本书着重研究机械或结构在静平衡位置附近微小的来回运动，这种往复运动通常称为机械振动，简称振动。机械振动是一种常见的力学现象，任何物体只要有惯性和弹性，在激励作用下就会发生振动。

引起机械或结构振动的原因是各种各样的，例如旋转机械转动质量的不平衡分布，传动装置中齿轮加工误差，轴承的缺陷和不良润滑等都会引起机器的振动；汽车在不平路面上行驶会导致车身振动，车辆通过桥梁时会使桥梁结构产生振动；飞机与空气作用、海浪与船舶作用都可以导致飞机与船舶结构的振动；大桥或高层建筑在地震波和风的作用下同样会产生振动。对于多数机器和结构来说，振动带来的是不良后果。振动会降低机器的使用性能，如机床振动会降低工件的加工精度，测量仪器在振动环境中无法正常使用，起重机振动使货物装卸或设备吊装发生困难。由于振动，机器和结构会受到反复作用的动载荷，这将降低机器和结构的使用寿命，甚至导致灾难性的破坏性事故。如大桥因共振而毁坏，烟囱因风致振动而倒塌，汽轮机轴因振动而断裂，飞机因颤振而坠落等。虽属罕见，但都有记录。1940 年美国华盛顿州 Tacoma 海峡大桥通车仅四个月就因为 8 级大风引起颤振而坍塌(图 1-1)。此外，机器和结构振动往往伴随着噪声，这是由于振动在机器或结构中传播时会辐射声音，从而形成噪声。振动和噪声对环境造成影响，严重时可以损害人体健康。振动传递给人体，除了引起不适，还会影响操作人员对机器或设备的操控，降低工作效率。人如果较长时间暴露于振动噪声环境中，会感到身心疲惫；振动噪声严重超标时将损害人的听力和运动机能。



(a) 振动初始阶段　　(b) 引起桥面共振而坍塌

图 1-1　Tacoma 海峡大桥 1940 年因气动颤振坍塌

当然振动并非全无是处，也有可以利用的方面。例如，工厂里使用的振动输送机和振动筛、道路使用的振动压路机和铁路使用的碎石道床捣固车、建筑工地使用的风镐和混凝土浇捣工具、日常使用的钟表、电子按摩装置和很多乐器都是利用振动原理工作的。

学习机械振动这门课程的目的，一是探索振动的产生原因和运动规律，二是寻求控制和消除振动的方法，以减少振动的不良后果和危害。其内容大体可以概括为以下几个方面：

(1) 确定振动系统的固有频率和振型，预防共振的发生。

(2) 计算系统的振动响应，确定机器或结构受到的动载荷以及振动能量水平。

(3) 研究平衡、隔振和减振方法，减少振动的不良影响。

(4) 进行振动测试，通过试验分析振动系统的特性和产生振动的原因，以便对振动进行有效控制。

(5) 振动技术的利用。

本书要研究的问题，除了第(5)方面的内容，其余的都覆盖了。其中第(1)和第(2)是基础，第(3)是目的，第(4)是手段之一。

在振动理论中，通常把所研究的机器和结构称为系统，把外界对系统的作用和机器运动产生的力称为激励或输入，把机器和结构在激励作用下的振动称为响应或输出。概括地说，振动理论就是研究系统、系统的输入和输出三者之间的相互关系。从系统分析的观点看，如果知道其中两者，就可以算出第三者。因此振动分析要解决的问题也可以归纳为下列几类：

(1) 响应分析。在已知系统参数和外界激励条件下求系统的响应，包括系统的位移、速度和加速度，以及系统振动的能量水平或产生的动载荷等。解决这类问题的目的是分析机器或结构的动态强度和刚度，以及它们的疲劳寿命等。

(2) 系统设计。在已知外界激励的条件下设计合理的系统参数，使系统的动态响应或输出达到要求。解决这类问题大多应用于减振、隔振设计。当原有的机器或结构振动过大或者超限，就需要对系统的动态参数进行调整，或采用隔振、减振装置，使系统的振动响应降低并达标。

(3) 系统识别。在已知系统的输入和输出条件下求出系统的参数，了解系统的特性。解决这类问题通常以振动测试技术和信号处理技术为基础，这也是解决振动问题的一个必不可少的手段。

(4) 环境预测。在已知系统的响应或输出和系统参数的条件下，预测外界对系统的输入。这类问题属于所谓的反问题，在工程实际中经常有应用。例如，有时候无法直接计算或测量外界对机器的载荷或输入，此时就可以应用环境预测方法，间接求出外界对系统的输入。

研究和解决振动问题可以通过两种途径：理论计算分析方法和振动测试分析方法。应用理论方法解决振动问题时，首先要建立振动系统的力学模型和运动方程，然后进行求解得到结果。对复杂的机器或结构，往往无法用解析方法建立其模型和方程，此时可以采用有限元方法，应用有限元软件建模和计算分析。采用振动试验方法时，通常要测量振动系统的激励和响应，并应用相关的理论知识结合信号处理技术来解决振动问题。若将理论方法与试验方法相互结合，发挥各自特点，则更加有利于研究和解决工程实际的振动问题。

1.2　振动的分类

按照不同的方法，可以对振动进行如下分类。

1. 自由振动和受迫振动

系统受到一个初始扰动后产生振动，但在后续运动过程中不受外力作用，这样的振动称为自由振动。自由振动的特点是除了初始扰动之外，系统在振动过程中没有外界能量输入。若系统在自由振动过程没有能量消耗，那么振动将一直持续下去。

系统在外力作用下所作的振动称为受迫振动。引起受迫振动的也可以是基础激励，此时外界对系统的输入用位移、速度或加速度表示。机器在正常运转过程中产生的振动就是一种受迫振动，这时的外力作用通常是周期性的。如果外力作用的频率与系统的固有频率一致，系统将产生共振，发生共振时振动幅度可以非常大，有可能导致设备损坏。因此机器或结构工作时应避免发生共振。

2. 无阻尼振动和阻尼振动

在振动理论中把消耗能量的机制或装置称为阻尼。如果系统振动过程中没有阻尼作用（无能量消耗），就称为无阻尼振动，反之则称为有阻尼振动。工程实际中阻尼总是存在的，阻尼的机理也是各种各样的，如运动副的表面摩擦、材料变形的内摩擦、流体的粘性等都会导致能量损失。阻尼对共振区的振动影响非常重要，但对远离共振区的振动影响比较小。

3. 线性振动与非线性振动

如果振动系统的所有元件即弹簧、质量和阻尼都遵循线性规律，这个系统就是线性系统，其振动称为线性振动。反之，如果系统元件中只要有一个不遵循线性规律，则这个系统就是非线性系统，其振动称为非线性振动。对于线性系统，叠加原理成立，这给系统运动微分方程的求解带来极大便利。但是叠加原理对非线性系统不成立，因此对非线性系统的计算分析远不如对线性系统那样容易。非线性振动会表现出一些线性振动所不具备的特质。

4. 自激振动与参数激励振动

在一般的受迫振动中，激励力通常与系统运动无关。自激振动的激励与受迫振动不同，与系统自身运动相关，激励力是运动参数（位移或速度）的函数。经常用来描述自激振动的典型例子是弹簧-质量块在运动皮带摩擦驱动下产生的振动，飞机机翼的颤振、汽车车轮的摆振、机床工作台在滑动导轨上的低速爬行等都是自激振动的工程实例。

参数激励振动顾名思义是因系统参数变化产生激励而引起的振动。在铁路系统中很容易找到参数激励振动的实例。例如，钢轨在轨枕间各个位置的垂向刚度是不同的，列车运行中车轮经历钢轨刚度的周期性变化，引起轮轨间的动态作用，从而导致轮轨系统发生振动。这类振动因系统参数变化而产生激励，并无外力作用，故称之为参数激励振动。

5. 确定性振动与随机振动

如果作用于振动系统的激励都是确定性的，且系统也是确定性的，则系统的振动必然是确定性的。但是在有些情况下引起振动的激励不是确定性的，如桥梁、电视塔或高层建筑在风作用下的振动，船舶或海上石油平台在海浪作用下的振动，以及车辆在不平路面上行驶产生的颠簸等。风、海浪和路面高低这类激励随时间的变化无法确定，但是服从一定的统计规律。既然激励是随机的，那么系统的振动响应也是随机的，这种由随机激励引起的振动称为随机振动。本书第 8 章专门研究随机振动。

1.3 振动的运动学分析

振动是位移、速度或加速度在平衡位置附近随时间变化的过程，通常可以归纳成三种类型：周期振动、瞬态振动和随机振动。图 1-2 给出了这三种振动随时间变化的图形。周期振动通常与机器的稳态运行有关，因为机器稳态运行时转速是一定的，所以引起的振动是周期性的。瞬态振动通常发生在机器的启停阶段，或者在结构受冲击力作用时。其特点是一旦激励力消失，振动能量将不断地被消耗，最终衰减为零。随机振动是系统在随机激励作用下产生的振动，例如在风载荷、海浪作用下工程结构产生的振动，或者车辆驶过不平路面时发生的振动。其特点是运动过程无法用确定性函数表示，但是服从一定的统计规律。

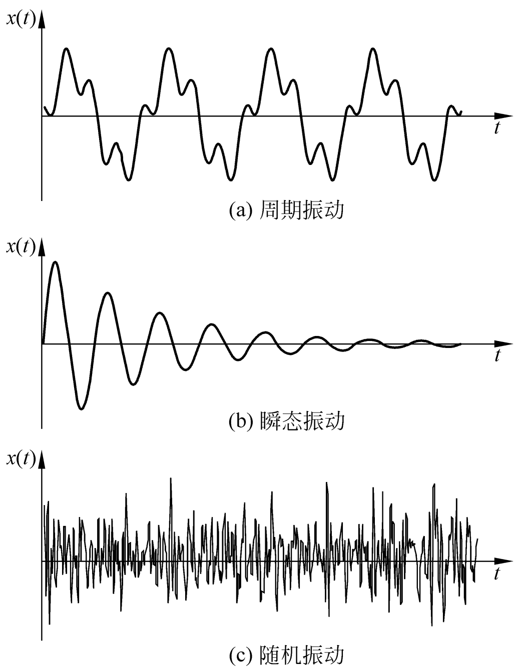


图 1-2 三种类型的振动

最基本的周期振动是简谐运动，可以用简谐函数表示

$$x(t) = A\sin(\omega t + \varphi) \tag{1-1}$$

式中，A 为振幅，ω 为圆频率，φ 为初相位，它们是简谐运动的三要素。圆频率 ω 的单位是 rad/s，表示单位时间内变化的弧度。还有一个常用的频率单位是 Hz，代表单位时间内变化的次数，用 f 表示。例如交流电的频率是 50Hz。圆频率 ω 与频率 f 的关系为 $\omega=2\pi f$。

假定式(1-1)表示的是振动位移，对其求一次导数便得到振动速度：

$$\dot{x}(t) = \omega A\cos(\omega t+\varphi) = \omega A\sin(\omega t+\varphi+\pi/2) \tag{1-2}$$

可见简谐运动的速度振幅为 ωA，是位移振幅 A 的 ω 倍，并且在相位上比位移超前 $\pi/2$。对式(1-2)求导就得到振动加速度：

$$\ddot{x}(t) = -\omega^2 A\sin(\omega t+\varphi) = -\omega^2 x(t) \tag{1-3}$$

简谐运动的加速度相位比速度超前 $\pi/2$，因而与位移反相。加速度振幅 $\omega^2 A$ 是速度振幅的 ω 倍，是位移振幅的 ω^2 倍。简谐运动位移、速度和加速度之间的关系是简谐运动的重要性质。

简谐运动也可以通过旋转矢量表示，这是一种比较直观的方法，如图 1-3 所示。图中模为 A 的矢量以角速度 ω 绕 O 点逆时针旋转，其端点在 x 轴上的投影便是式(1-1)表示的简谐运动。旋转矢量的模等于振幅 A，角速度 ω 等于圆频率，其初始位置与水平轴的夹角 φ 就是简谐运动的初相位。

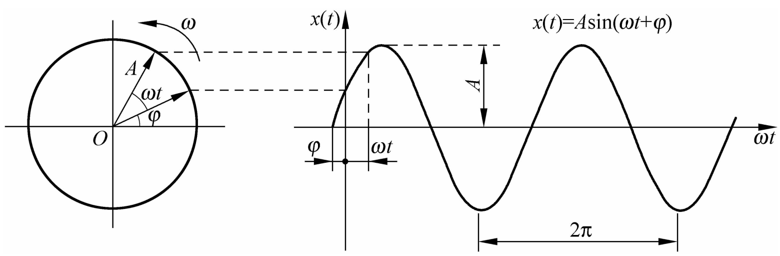


图 1-3　简谐运动的旋转矢量表示法

简谐运动还可以用指数形式的复数来表示，这将给分析计算带来很大便利，如下式

$$x(t) = A\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t+\varphi)} \tag{1-4}$$

复数表达式 $A\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t+\varphi)}=A[\cos(\omega t+\varphi)+\mathrm{i}\sin(\omega t+\varphi)]$ 在数学上由实部和虚部两部分组成，两者都代表简谐运动(相位差为 $\pi/2$)。但在应用时可以将 $A\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t+\varphi)}$ 当作整体对待，用不着区分实部和虚部。这是因为式(1-4)完整地反映了简谐运动的性质，如振幅 A，圆频率 ω 和初相位 φ，其运算规则也与式(1-1)表示的简谐运动完全相同，但更加简便。例如，对式(1-4)分别求一次和两次导数可得

$$\dot{x}(t) = \mathrm{i}\omega A\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t+\varphi)} = \mathrm{i}\omega x(t), \quad \ddot{x}(t) = -\omega^2 A\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t+\varphi)} = -\omega^2 x(t)$$

式中，i 是单位虚部。一个复数被 i 相乘一次则相位前移 $\pi/2$，但是模不会改变。可见用指数形式的复数和用三角函数表达的简谐运动性质完全相同，但指数函数的求导比三角函数简单得多，这给分析计算带来便利，在以后的章节里会看到。

两个同频率的简谐运动相加，从旋转矢量表示的简谐运动可知，它们的角速度(即圆频率)相同，所以两个旋转矢量的相对位置即它们的夹角保持不变，因此合成后仍是同频率的简谐运动。设这两个简谐运动为

$$x_1(t) = A_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t+\varphi_1)} \tag{1-5}$$

$$x_2(t) = A_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t+\varphi_2)} \tag{1-6}$$

合成后的结果为

$$x(t)=x_1(t)+x_2(t)=A\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t+\varphi)} \tag{1-7a}$$

$$A=\sqrt{A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos(\varphi_2-\varphi_1)} \tag{1-7b}$$

$$\varphi=\arctan\frac{A_1\sin\varphi_1+A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1+A_2\cos\varphi_2} \tag{1-7c}$$

两个频率不同的简谐运动相加一般不再是简谐运动，但两个频率相近的简谐运动合成以后会形成一种特殊的振动，称之为拍振动。设两个频率相近的简谐运动分别为

$$x_1=x_0\sin\omega_1 t \tag{1-8}$$

$$x_2=x_0\sin\omega_2 t \tag{1-9}$$

合成以后便得

$$x=x_1+x_2=2x_0\cos\frac{\omega_1-\omega_2}{2}t\cos\frac{\omega_1+\omega_2}{2}t$$

设 $\omega_1-\omega_2=\Delta\omega$ 和 $(\omega_1+\omega_2)/2=\omega$，上式可写成

$$x=2x_0\cos\frac{\Delta\omega}{2}t\cos\omega t \tag{1-10}$$

从式(1-10)可以看到，由于两个简谐运动的频率很接近，故频率差 $\Delta\omega$ 比平均频率 ω 小很多，因此式(1-10)可以看成是频率为 ω、振幅按 $\cos(\Delta\omega/2)$ 慢变的简谐运动。因为频率为 ω 的简谐运动的振幅受到 $\cos(\Delta\omega/2)$ 的调制，于是就形成了拍振动，拍的频率为 $\Delta\omega$。图 1-4 给出了两个频率为 $f_1=195\mathrm{Hz}$ 和 $f_2=205\mathrm{Hz}$ 的简谐运动合成实例，结果形成频率为 200Hz、拍频为 10Hz 的拍振动。

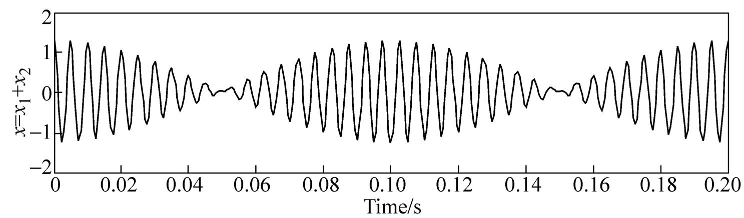


图 1-4 $f_1=195\mathrm{Hz}$ 和 $f_2=205\mathrm{Hz}$ 两个简谐运动的合成结果

1.4 周期运动的谱分析

单一频率的简谐运动是最简单周期振动，而在实际问题中同时存在一系列不同频率的振动也是很普遍的。例如，乐器琴弦的振动是由基频 f 及其倍频 $2f$、$3f$、$4f$ 等多个简谐振动组成的，多自由度系统的自由振动是由各个固有频率的简谐振动组合而成的。这种包含多种频率成分的振动形成复杂波形，并周期性重复。

法国数学家傅里叶指出，任何周期运动都可以表示为正弦和余弦的级数，称之为傅里叶级数。如果 $x(t)$ 是周期为 T 的周期函数，那么 $x(t)$ 可以展开成傅里叶级数，为

$$x(t+T)=x(t)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\omega_1 t+b_n\sin n\omega_1 t) \tag{1-11}$$

式中，$\omega_1=2\pi/T$ 为基频，T 为周期；a_0 为均值，也称为直流分量；其余各项当 $n=1$ 时称为基波，$n\geqslant 2$ 则称为谐波。各项的系数可由下式计算：

$$a_0=\frac{1}{T}\int_0^T x(t)\mathrm{d}t \tag{1-12a}$$

$$a_n=\frac{2}{T}\int_0^T x(t)\cos n\omega_1 t\mathrm{d}t \tag{1-12b}$$

$$b_n=\frac{2}{T}\int_0^T x(t)\sin n\omega_1 t\mathrm{d}t \tag{1-12c}$$

把傅里叶级数中频率相同的正弦和余弦函数合并成一项，并用余弦表示，可得

$$x(t)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos(n\omega_1 t-\varphi_n) \tag{1-13}$$

式中

$$A_n=\sqrt{a_n^2+b_n^2} \tag{1-14a}$$

$$\varphi_n=\arctan\frac{b_n}{a_n} \tag{1-14b}$$

A_n 为频率分量 $n\omega_1$ 的简谐运动的振幅，φ_n 为该频率分量简谐运动的相位。

把 A_n 与 φ_n 随 ω 的变化关系用图 1-5 表示，称为频谱，图中离散的线条则称为谱线。

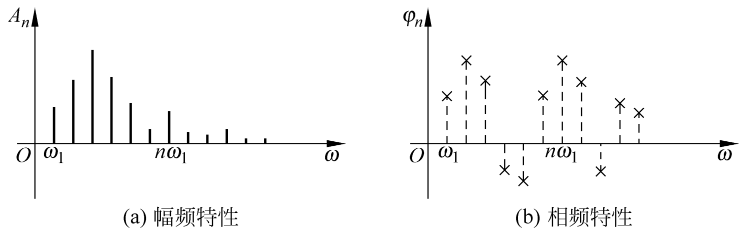


图 1-5　振动信号的频谱

例 1-1　计算图 1-6 所示周期性方波脉冲的傅里叶级数。

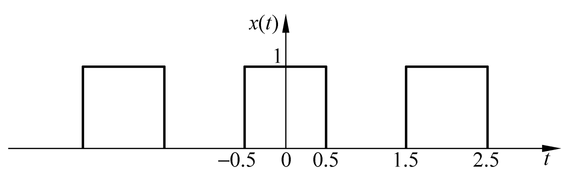


图 1-6　例 1-1 图

解：该方波脉冲的周期为 $T=2$，基频 $\omega_1=\dfrac{2\pi}{T}=\pi$。

根据式(1-12)计算傅里叶级数的各项系数：

$$a_0=\frac{1}{2}$$

$$a_n=\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2}x(t)\cos n\omega_1 t\mathrm{d}t=\int_{-0.5}^{0.5}\cos n\pi t\mathrm{d}t=\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}$$

$$b_n=0$$

可将周期性方波脉冲展开为傅里叶级数如下：

$$x(t)=\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\left(\cos\omega_1 t-\frac{1}{3}\cos3\omega_1 t+\frac{1}{5}\cos5\omega_1 t+\cdots\right)$$

在以上傅里叶级数中取前若干项,作为方波脉冲的近似表达,如图 1-7 所示。由图可见,随着项数增加,傅里叶级数越来越接近方波脉冲。

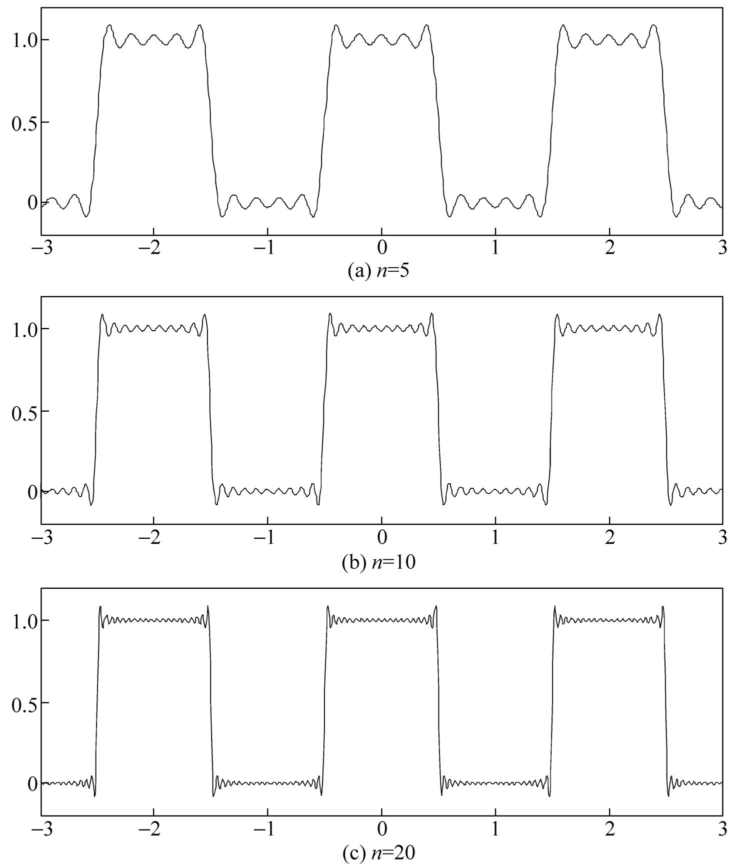


图 1-7　方波脉冲的傅里叶级数近似展开

1.5　振动分析的力学模型

一般来说,即使是一台很简单的机器,其系统也是很复杂的。因此振动分析的第一步,也是非常关键的一步,就是要把研究对象和外界对它的作用简化为一个力学模型。这个力学模型不仅在动态特性方面应该和原来的研究对象等效,而且要简单和便于分析计算。

一台机器或结构之所以会产生振动,是因为它们具有惯性(质量)和弹性。机器或结构的质量运动储存动能,而弹性变形储存势能。当外界对系统作功时,输入的能量或者转变为动能,使系统的质量产生运动;或者转变为势能,使系统产生弹性变形。在振动过程中质量的动能可以转变为弹性变形的势能,而系统的弹性变形在恢复至平衡状态过程中,势能又转化为质量的动能。从能量观点看,振动就是一个动能和势能不断相互转化的过程。在没有外界能量补充的情况下,若没有阻尼消耗能量,振动可以一直延续下去;若存在阻尼消耗能

量,振动就会逐渐停息。由此可见,质量、弹性和阻尼是振动系统力学模型的三个基本要素。

工程中机器或结构元件的质量和弹性都是连续分布的,对连续系统进行振动分析需要建立偏微分方程,而偏微分方程的求解比较困难。本书第 6 章专门研究连续系统的振动。但是可以采用离散化方法,将复杂的机器或结构简化为具有若干质量(主要是质点),并由相应的弹簧和阻尼联结在一起的振动系统。这样的系统称为离散系统,对离散系统可以采用质点动力学的方法进行分析研究。

根据研究对象的特点和对问题解决的要求,离散系统力学模型所具有的质量数目可以不同。如果所研究的机器或结构可以简化成一个质量、一个弹簧和一个阻尼器,并且质量在空间的位置只用一个坐标就能完全描述,这样的系统就称为单自由度系统。若振动系统的质量在空间的位置需要多个独立的坐标才能描述,则称为多自由度系统。振动系统的自由度等于完全描述系统各个质量的空间位置所需要的独立坐标数。

下面对组成振动模型的基本元件——质量、弹簧和阻尼器的特性进行介绍。

1. 质量

质量用来表示振动系统的惯性,在力学模型中被抽象为绝对不变形的刚体。若对质量施加一个作用力 F,质量就会在力的作用方向上产生一个加速度。对于直线的平移运动,如图 1-8 所示,力和加速度的关系为

$$F = m\ddot{x} \tag{1-15}$$

式中,$\ddot{x}$为加速度;常数 m 代表质量,它在振动过程中储存动能,是惯性大小的度量。对于扭转振动系统,上式中的力可以用扭矩 T 代替,加速度用角加速度 $\ddot{\theta}$ 代替,质量用转动惯量 J 代替,为旋转运动惯性大小的度量。

2. 弹簧

弹簧为振动系统的弹性元件,其力学性质用力与位移的关系来表示。若对弹簧施加作用力 F,弹簧就产生变形,如图 1-9 所示,力与变形的关系为

$$F = kx \tag{1-16}$$

式中,x 为弹簧的变形量;常数 k 为弹簧的刚度系数,简称刚度,是弹性大小的度量;此时的力 F 称之为弹性力。式(1-16)代表的是直线位移的弹簧,如果是扭转弹簧,应该用扭矩、角位移和扭转刚度代替式(1-16)中相应的物理量。弹簧在振动过程中储存势能。

3. 阻尼器

工程实际中的阻尼机制有很多种,线性振动系统中采用所谓的粘性阻尼器来近似代表实际阻尼,如图 1-10 所示,其特性可用以下力与速度的关系表示

$$F = c\dot{x} \tag{1-17}$$

式中,$\dot{x}$为阻尼器两端的相对速度;常数 c 称为阻尼系数,为阻尼大小的度量;此时的力 F 称之为阻尼力。阻尼器在振动系统中是耗能元件。

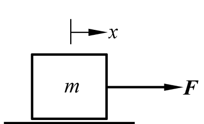


图 1-8　质量元件

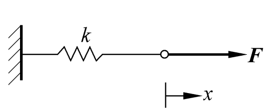


图 1-9　弹簧元件

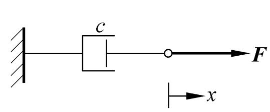


图 1-10　阻尼器

在上述质量、弹簧和阻尼器的力学关系式中，力与加速度、速度、位移的关系都是线性关系。这些线性的质量、弹簧和阻尼器组成的振动系统力学模型也是线性的，产生的振动为线性振动。如果振动系统中有某一种元件的力学性质不满足线性关系，尤其是弹簧和阻尼器，该系统就成为非线性系统，产生的振动就是非线性振动。与线性系统相比，非线性系统的分析计算要困难得多。本书第 10 章专门研究非线性振动问题。

在国际单位制中，质量的单位为千克(kg)；转动惯量的单位为千克·米^2($\mathrm{kg \cdot m^2}$)；力的单位为牛顿(N)；扭矩的单位为牛顿·米(N·m)；位移的单位为米(m)；速度的单位为米/秒(m/s)；直线弹簧刚度的单位为牛顿/米(N/m)；扭转弹簧刚度的单位为牛顿·米/弧度(N·m/rad)；阻尼系数的单位为牛顿·秒/米(N·s/m)。

图 1-11 为两个单自由度系统的力学模型，其中(a)是平动系统，(b)是扭转系统。请注意扭转系统力学模型中转动惯量、扭转弹簧和阻尼器的画法。转动惯量用圆盘表示，扭转弹簧用细轴表示，阻尼器是切向作用的。在建立力学模型的运动微分方程之前，先要设立一个坐标系，用来描述振动系统质量的空间位置。在规定了坐标轴的正方向后，各物理量如与坐标轴同方向的就取正值，反之就取负值。反过来，若各物理量的计算结果是正的，则它们与坐标轴同向，反之亦然。这些物理量包括振动系统的位移、速度、加速度以及外界对系统的作用力。

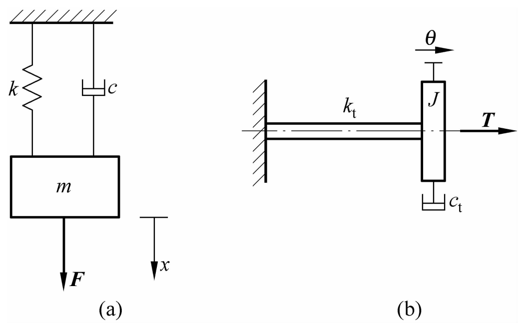


图 1-11 单自由度系统力学模型

从工程实际问题中抽象出一个简化的、能反映问题本质的力学模型并不是件容易的事情，要求对所研究的对象及所分析的问题有比较透彻的了解。这种对实际问题的建模能力需要在掌握专业知识和学习振动理论的过程中不断提高。为了使大家对振动分析的建模过程有个初步了解，图 1-12 列举了一些工程实际问题的建模例子，分别加以如下说明。

(1) 汽车车身振动。该力学模型用于研究汽车在道路行驶时车身的垂向振动。模型中车身被简化成平面刚体，具有平动和转动两个自由度，平动质量为 m，转动惯量为 J。弹簧 k 代表轮胎和悬挂系统二者刚度的串联，c 代表悬挂系统的阻尼。该模型只适合汽车前、后轮受不同激励，但两边车轮受同样激励的工况，而不适合两边车轮所受激励不同的工况。

(2) 人体受基础激励振动。该力学模型用于研究坐在车辆座椅上人体上半身的振动情况，其中 m 代表人的头部质量，k 代表人体脊柱的刚度。人体振动的激励来自因车辆颠簸而产生的座椅垂向运动，要分析的是人的头部的振动响应。

(3) 建筑结构的水平振动。该力学模型用于分析一座三层楼房在地震作用下水平方向的振动特性。模型中每一楼层的楼板和墙的质量组合在一起，分别用 m_1、m_2 和 m_3 表示，各楼层之间抵抗相对位移的横向刚度则来自混凝土框架的立柱，分别用 k_1、k_2 和 k_3 表示，于是