第 3 章
集合论

集合论是现代数学的一个独立分支，被视为各个数学分支的共同语言和基础。自 Cantor 在 19 世纪 70 年代创建集合论以来，它不断促进着许多数学分支的发展，其基本概念已经渗透到数学的所有领域。按照现代数学的观点，数学各分支的研究对象或者本身是带有某种特定结构的集合，或者是可以通过集合来定义的（如实数、函数）。离散数学的许多内容主要研究离散结构，许多重要的离散结构也是用集合来构建的，如后面章节将会讲到的二元关系（有序对的集合）和图（结点和连接结点的边的集合）等。本章从“集合”和“元素”两个概念出发，介绍朴素集合论的一些基本知识，包括集合运算、运算律以及集合恒等式及其证明。关于集合基数的定义由于用到函数的相关内容，留到第 4 章介绍。

3.1 集合的基本概念

3.1.1 集合的表示

集合是不能精确定义的基本概念，一般地说，把一些事物汇集到一起组成一个整体就叫做集合。而这些汇集在一起的事物就是集合的元素或者成员。集合通常用大写的英文字母表示。例如，**Z** 表示全体整数构成的集合，称为整数集；**Q** 表示全体有理数构成的集合，称为有理数集；**R** 表示全体实数构成的集合，称为实数集；**C** 表示全体复数构成的集合，称为复数集。

集合有两种常见的表示方法：列举法和谓词表达法。

(1) 列举法：把集合中的元素一一列举出来，例如：

字母集 $\mathbf{A}=\{a,b,c,\cdots,z\}$

自然数集 $\mathbf{N}=\{0,1,2,3,\cdots\}$

(2) 谓词表达法：用谓词来描述集合中元素所具有的属性，即为通常所说的谓词法。例如，上述集合可以表示为

字母集 $\mathbf{A}=\{x\mid x$ 是英文字母$\}$

自然数集 $\mathbf{N}=\{x\mid x$ 是自然数$\}$

一般来说，集合的元素可以是任何类型的事物，但集合的元素构成具有如下共性：互异性（即各不相同）、无序性（即不考虑顺序）、确定性（即元素是明确的，不是模棱两可的）。集合也可以没有元素，例如，平方等于 2 的有理数的集合，既大于 1 又小于 2 的整数的集合。这种没有元素的集合称为**空集**，记作 $\varnothing$。此外，由一个元素构成的集合通常称为**单点集**。当

集合 A 中元素个数有限时，称 A 为**有限集**，否则称为**无限集**。

3.1.2　常用符号

以下是一些常用的符号。

$\in$：表示元素与集合的关系，如 $a\in A$，读作 a 属于 A，表示 a 是集合 A 的元素。

$\subseteq$：表示集合与集合的关系，如 $A\subseteq B$（等价于 $\forall x(x\in A\rightarrow x\in B)$），读作 A 包含于 B，表示 A 是 B 的子集。

$\supseteq$：表示集合与集合的关系，与$\subseteq$表示的含义相反，如 $A\supseteq B$，读作 A 包含 B，表示 B 是 A 的子集。

$=$：表示两个集合相等，如 $A=B$（等价于 $A\subseteq B\wedge A\supseteq B$），读作 A 等于 B。

$\subset$：设 A 和 B 为集合，$A\subseteq B$，但 $A\neq B$，则 $A\subset B$，读作 A 真包含于 B，表示 A 是 B 的真子集。

$\supset$：与$\subset$表示的含义相反，如 $A\supset B$，读作 A 真包含 B，表示 B 是 A 的真子集。

注意：

(1) $\notin$、$\nsubseteq$、$\neq$和$\not\subset$分别读作“不属于”“不包含于”“不等于”和“不真包含于”，分别表示与上述对应符号相反的含义。

(2) 空集是一切集合的子集。

定义 3.1　设 A 为集合，A 的全体子集构成的集合称为 A 的**幂集**，记作 $P(A)$，符号化为

$$P(A)=\{x\mid x\subseteq A\}$$

例 3.1　设 $A=\{1,2,3\}$，求 $P(A)$。

解：$P(A)=\{\varnothing,\{1\},\{2\},\{3\},\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},\{1,2,3\}\}$。

例 3.2　设 M 是由一切不属于自身的集合所构成的集合，证明 M 不存在。

证明：用反证法证明。假设存在这样的集合，即

$$M=\{x\mid x\text{ 是一个集合 }\wedge\ x\notin x\}$$

下面考虑集合 M 本身：

(1) 若集合 $M\in M$，则由集合 M 的定义，则有 $M\notin M$，矛盾。

(2) 若集合 $M\notin M$，则由集合 M 的定义知，$M\in M$，矛盾。

由(1)和(2)可知，集合 M 是不存在的。

为了体系上的严谨性，一般规定：对任何集合 A 都有 $A\notin A$。

定义 3.2　在一个具体问题中，如果所涉及的集合都是某个集合的子集，则称这个集合为**全集**，记作 **E**。

全集的选择具有相对性，可根据需要选择不同的集合，但在同一系统中要保证其前后统一，不能前后出现两个全集。

3.2　集合的基本运算

3.2.1　集合的二元运算

给定集合 A 和 B，通过集合间的下列运算可以生成新的集合。

定义 3.3　设 A 和 B 为集合，构造下列运算：

A 与 B 的**并集**　　$A\cup B=\{x\mid x\in A\vee x\in B\}$

A 与 B 的**交集** $A\cap B=\{x|\ x\in A\wedge x\in B\}$

A 与 B 的**差集**(也称**相对补集**) $A-B=\{x|\ x\in A\wedge x\notin B\}$

A 与 B 的**对称差集** $A\oplus B=(A-B)\cup(B-A)$或者 $A\oplus B=(A\cup B)-(A\cap B)$

说明:

(1) 两个集合的交或并可以推广成 n 个集合或无穷多个集合的交或并,n 个集合的交或并可以简单记作 $\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i$,$\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$,无穷多个集合的交或并可以简单记作 $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}A_i$,$\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i$。

(2) A 与 B 的交集为空集,通常称它们不交或相交为空。

(3) $A\oplus\varnothing=A$,$A\oplus A=\varnothing$。

例 3.3 设 $A=\{a,b,c\}$,$B=\{b,c\}$,求下列集合 $A\cup B$,$A\cap B$,$A-B$,$A\oplus B$。

解: $A\cup B=\{a,b,c\}$

$A\cap B=\{b,c\}$

$A-B=\{a\}$

$A\oplus B=\{a\}$

3.2.2 集合的一元运算

以上运算是多个集合间的运算,下面介绍建立在一个集合上的几类运算。

定义 3.4 设 $\mathbf{E}$ 为全集,$A\subseteq E$,则称 $\overline{A}$ 为 A 的**补集**,其中

$$\overline{A}=\{x\mid x\in \mathbf{E}\wedge x\notin A\}\quad 或\quad \overline{A}=\{x\mid x\notin A\}$$

定义 3.5 设 S 为集合,S 的元素的元素构成的集合称为 S 的**广义并**,记为$\cup S$,其中:

$$\cup S=\{x\mid \exists z(z\in S\wedge x\in z)\}$$

定义 3.6 设 S 为非空集合,S 的元素的公共元素构成的集合称为 S 的**广义交**,记为$\cap S$,其中:

$$\cap S=\{x\mid \forall z(z\in S\rightarrow x\in z)\}$$

说明:

(1) 规定$\cup\varnothing=\varnothing$,$\cap\varnothing$无意义。

(2) 若 $S=\{S_1,S_2,S_3,\cdots,S_n\}$,则由定义不难证明如下等式成立:

$$\cup S=S_1\cup S_2\cup S_3\cup\cdots\cup S_n$$

$$\cap S=S_1\cap S_2\cap S_3\cap\cdots\cap S_n$$

(3) 集合二元运算中的交和并运算也称为初级交和初级并。由于运算需两个或两个以上集合参与,因此可以与广义交和广义并区别开来。

例 3.4 设集合 $A=\{\{a,b,c\},\{a,c,d\},\{a,c,e\}\}$,求$\cup A$,$\cap A$,$\cup\cup A$,$\cap\cap A$,$\cup\cap A$,$\cap\cup A$。

解: $\cup A=\{a,b,c,d,e\}$

$\cap A=\{a,c\}$

$\cup\cup A=a\cup b\cup c\cup d\cup e$

$\cap\cap A=a\cap c$

$\cup\cap A=a\cup c$

$\cap\cup A=a\cap b\cap c\cap d\cap e$

3.2.3　文氏图

集合之间的相互关系和有关的运算结果可以用文氏图给予形象的描述。文氏图的构造如下：首先画一个大矩形表示全集 **E**；然后在矩形内画一些圆，用圆的内部表示某个集合。图 3-1 是集合间的某种关系和运算的具体实例。

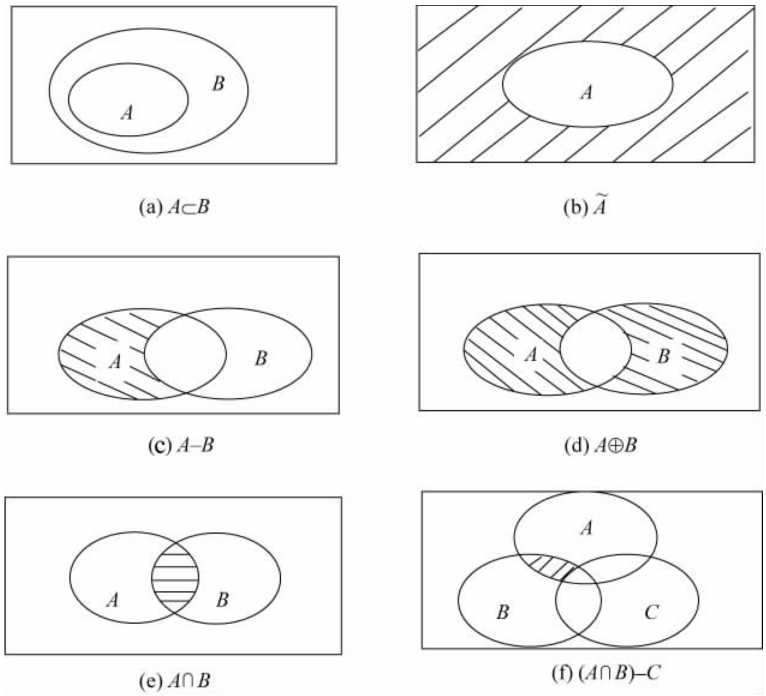

图 3-1　文氏图示例

3.2.4　集合运算的优先级

许多集合运算过程中含有逻辑关系以及符号，为了在运算过程中不产生运算先后顺序的矛盾，在此做以下规定：

(1) 集合运算优先于逻辑运算。

(2) 括号内的运算优先于括号外的运算。

为了简单、确定地表达各类集合表达式，规定集合运算的优先级如下：

(1) 一元运算符(补集、幂集、广义并、广义交)之间由右向左运算。

(2) 一元运算符优先于二元运算符(差集、并集、交集、对称差、笛卡儿积)。

(3) 二元运算之间按从左至右运算。

3.3　集合恒等式

3.3.1　运算律

任何代数运算都要遵从一定的运算规律，集合间的运算也满足许多运算规律。下面给

出的集合恒等式是集合运算的主要运算律。

幂等律：$A\cup A=A \qquad A\cap A=A$

同一律：$A\cup\varnothing=A \qquad A\cap \mathbf{E}=A$

零律：$A\cup \mathbf{E}=\mathbf{E} \qquad A\cap\varnothing=\varnothing$

结合律：$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$

$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$

交换律：$A\cup B=B\cup A \quad A\cap B=B\cap A$

分配律：$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$

$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

排中律：$A\cup\overline{A}=E$

矛盾律：$A\cap\overline{A}=\varnothing$

吸收律：$A\cap(A\cup B)=A$

$A\cup(A\cap B)=A$

德·摩根律：$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$

$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$

$A-(B\cap C)=(A-B)\cup(A-C)$

$A-(B\cup C)=(A-B)\cap(A-C)$

双重否定律：$\overline{\overline{A}}=A$

3.3.2 集合恒等式的证明

集合恒等式的证明一般有两种方法。其中一种方法是逻辑演算法，其基本思想是：欲证 $A=B$，即证

$$A\subseteq B \wedge B\subseteq A$$

即证对任意的 x，有

$$x\in A\Rightarrow x\in B,\quad x\in B\Rightarrow x\in A$$

当上述过程可逆时，过程可以简化，即证对任意的 x，有

$$x\in A\Leftrightarrow x\in B$$

例 3.5 证明下列集合恒等式。

(1) $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$

(2) $A-B=A\cap\overline{B}$

(3) $A-(B\cap C)=(A-B)\cup(A-C)$

证明：

(1) 对任意的 x，

$$\begin{aligned}x\in A\cup(B\cap C)&\Leftrightarrow x\in A\vee x\in(B\cap C)\\&\Leftrightarrow x\in A\vee(x\in B\wedge x\in C)\\&\Leftrightarrow(x\in A\vee x\in B)\wedge(x\in A\vee x\in C)\\&\Leftrightarrow(x\in A\cup B)\wedge(x\in A\cup C)\\&\Leftrightarrow x\in(A\cup B)\cap(A\cup C)\end{aligned}$$

(2) 对任意的 x，有

$x\in A-B\Leftrightarrow x\in A\wedge x\notin B\Leftrightarrow x\in A\wedge x\in\overline{B}\Leftrightarrow x\in(A\cap\overline{B})$

(3) 对任意的 x，

$$
\begin{aligned}
x\in A-(B\cap C) &\Leftrightarrow x\in A\wedge x\notin B\cap C\\
&\Leftrightarrow x\in A\wedge \neg x\in B\cap C\\
&\Leftrightarrow x\in A\wedge \neg(x\in B\wedge x\in C)\\
&\Leftrightarrow x\in A\wedge(\neg x\in B\vee \neg x\in C)\\
&\Leftrightarrow (x\in A\wedge \neg x\in B)\vee(x\in A\wedge \neg x\in C)\\
&\Leftrightarrow (x\in A-B)\vee(x\in A-C)\\
&\Leftrightarrow x\in(A-B)\cup(A-C)
\end{aligned}
$$

集合恒等式的证明除了以上介绍的逻辑演算法，也可以直接利用集合恒等式来证明，这种方法也称为集合演算法，如下例所示。

例 3.6 证明下列集合恒等式。

(1) $A-(B\cup C)=(A-B)\cap(A-C)$

(2) $A\oplus B=(A\cup B)-(A\cap B)$

证明：

(1) $A-(B\cup C)=A\cap\overline{B\cup C}=A\cap(\bar{B}\cap\bar{C})=(A\cap\bar{B})\cap(A\cap\bar{C})=(A-B)\cap(A-C)$

(2)
$$
\begin{aligned}
A\oplus B &= (A-B)\cup(B-A)=(A\cap\bar{B})\cup(B\cap\bar{A})\\
&= (A\cup B)\cap(A\cup\bar{A})\cap(\bar{B}\cup B)\cap(\bar{B}\cup\bar{A})\\
&= (A\cup B)\cap(\bar{B}\cup\bar{A})=(A\cup B)\cap(\overline{A\cap B})=(A\cup B)-(A\cap B)
\end{aligned}
$$

例 3.7 证明 $A\subseteq B\Leftrightarrow P(A)\subseteq P(B)$。

证明：

(1) 必要性：对任意的 x，有

$$x\in P(A)\Rightarrow x\subseteq A\Rightarrow x\subseteq B\Rightarrow x\in P(B)$$

因此，$P(A)\subseteq P(B)$。

(2) 充分性：对任意的 x，有

$$x\in A\Rightarrow\{x\}\subseteq A\Rightarrow\{x\}\in P(A)\Rightarrow\{x\}\in P(B)\Rightarrow\{x\}\subseteq B\Rightarrow x\in B$$

因此，$A\subseteq B$。

结论得证。

例 3.8 证明：对任意的集合 A，有 $\bigcup P(A)=A$。

证明：对任意的 x，有

$$x\in\bigcup P(A)\Leftrightarrow\exists y(x\in y\wedge y\in P(A))\Leftrightarrow\exists y(x\in y\wedge y\subseteq A)\Leftrightarrow x\in A$$

所以，有 $\bigcup P(A)=A$ 成立。

除了以上关于集合运算的关系式外，还有许多集合运算性质的重要结果，以下列出部分表达式，请读者自己完成证明。

(1) $A-B=A-(A\cap B)$

(2) $A\cup B=A\cup(B-A)$

(3) $A\cap(B-C)=(A\cap B)-C$

(4) $A\oplus(A\oplus B)=B$

(5) $(A\subseteq B)\wedge(C\subseteq D)\Rightarrow(A-D)\subseteq(B-C)$

(6) $A=B\Leftrightarrow P(A)=P(B)$

(7) $P(A)\cap P(B)=P(A\cap B)$

(8) $P(A)\cup P(B)\subseteq P(A\cup B)$

习题

1. 用谓词表达法表示下列集合。

(1) 整数 2 和 3 的平方根的集合。

(2) 无理数的集合。

(3) 小于 100 的平方数的集合。

(4) 使得 $x^2=1$ 的实数 x 的集合。

(5) 1 到 20 之间整数的平方的集合。

2. 用列元素法表示下列集合。

(1) $S_1=\{x|x$ 是大于 0 小于 20 的素数$\}$

(2) $S_2=\{x|x=2\vee x=5\}$

(3) $S_3=\{x|x\in\mathbf{Z}\wedge 3<x<12\}$

(4) $S_4=\{x|x\in\mathbf{R}\wedge x\,\hat{}\,2-1=0\wedge x>3\}$

(5) $S_5=\{<x,y>|x,y\in\mathbf{Z}\wedge x=y\wedge 0\leqslant x,y\leqslant 5\}$

3. 列出下列集合的元素。

(1) $\{x|x\in\mathbf{N}\wedge\exists t(t\in\{2,3\}\wedge x=2t)\}$

(2) $\{x|x\in\mathbf{N}\wedge\exists t\exists s(t\in\{0,1\}\wedge s\in\{3,4\}\wedge t<x<s)\}$

(3) $\{x|x\in\mathbf{N}\wedge\forall t(t$ 整除 $2\rightarrow x\neq t)\}$

4. 设 F 表示一年级大学生的集合，S 表示二年级大学生的集合，M 表示数学专业学生的集合，R 表示计算机专业的集合，T 表示听离散数学课的学生的集合，G 表示星期一晚上参加音乐会的学生的集合，H 表示星期一晚上很迟才睡觉的学生的集合。问下列各句子所对应的集合表达式分别是什么？请从备选的答案中选择。

(1) 所有计算机专业二年级的学生在学离散数学课。

(2) 这些且只有这些学离散数学课的学生或者星期一晚上去听音乐课的学生在星期一晚上很晚才睡觉。

(3) 听离散数学课的学生都没参加星期一晚上的音乐会。

(4) 这个音乐会只有大学一、二年级的学生参加。

(5) 除去数学专业和计算机专业以外的二年级学生都去参加了音乐会。

备选答案如下。

① $T\subseteq G\cup H$	② $G\cup H\subseteq T$	③ $S\cap R\subseteq T$
④ $HG\cup T$	⑤ $T\cap G=\varnothing$	⑥ $F\cup S\subseteq G$
⑦ $G\subseteq F\cup S$	⑧ $S-(R\cup M)\subseteq G$	⑨ $G\subseteq S-(R\cap M)$

5. 确定下列命题是否为真。

(1) $\varnothing\subseteq\varnothing$

(2) $\varnothing \in \varnothing$

(3) $\varnothing \subseteq \{\varnothing\}$

(4) $\varnothing \in \{\varnothing\}$

(5) $\{a,b\} \subseteq \{a,b,c,\{a,b,c\}\}$

(6) $\{a,b\} \in \{a,b,c,\{a,b\}\}$

(7) $\{a,b\} \subseteq \{a,b,\{\{a,b\}\}\}$

(8) $\{a,b\} \in \{a,b,\{\{a,b\}\}\}$

6. 设 a、b、c 各不相同，判断下列等式中哪个等式为真。

(1) $\{\{a,b\},c,\varnothing\}=\{\{a,b\},c\}$

(2) $\{a,b,a\}=\{a,b\}$

(3) $\{\{a\},\{b\}\}=\{a,b\}$

(4) $\{\varnothing,\{\varnothing\},a,b\}=\{\{\varnothing,\{\varnothing\}\},a,b\}$

7. 求下列等式的幂集。

(1) $\{a,b,c\}$

(2) $\{1,2,\{2,3\}\}$

(3) $\{\varnothing\}$

(4) $\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$

(5) $\{\{\varnothing,a\},\{a\}\}$

8. 设 $E=\{1,2,3,4,5\}$，$A=\{2,4\}$，$B=\{1,3,4\}$，$C=\{2,5\}$，求下列集合。

(1) $(A\cap B)-C$

(2) $(A\cap B)\cup \sim C$

(3) $A\cap \sim B$

(4) $P(A)\cap P(B)$

(5) $A\oplus B-C$

9. 设 A、B、C、D 是 $\mathbf{Z}$ 的子集，其中

$A=\{0,3,6,8\}$

$B=\{x \mid x\ \hat{}\ 2\leqslant 64 \wedge x\in \mathbf{Z}\}$

$C=\{x \mid x\in \mathbf{Z} \wedge 0\leqslant x\leqslant 30 \wedge x$ 可以被 3 整除$\}$

$D=\{x \mid x=k\ \hat{}\ 2 \wedge k\in \mathbf{Z} \wedge 0<k<5\}$

用列元素法表示下列集合。

(1) $A\cup B\cup C$

(2) $B\cap C\cap D$

(3) $B-(A\cup C)$

(4) $(\sim A\cap B)\cup D$

10. (1) 设 $\mathbf{R}$ 为实数集，

$$X=\{x \mid x\in \mathbf{R} \text{ 且 } -3\leqslant x<0\}$$
$$Y=\{x \mid x\in \mathbf{R} \text{ 且 } -1\leqslant x<5\}$$
$$W=\{x \mid x\in \mathbf{R} \text{ 且 } x<1\}$$

求$(X\cap Y)-W$。

(2) 设 $X=\{1,2,3\}$，$Y=\{2,3,4,5\}$，$W=\{2,3\}$，求 $(X\cup Y)\oplus W$。

11. (1) 设 A 是 $n(n\geqslant 1)$ 元集，其元素为英文字母，B 为 m 元集，其元素为自然数，求 $P(A)\cap P(B)$。

(2) 设 $A=\{1,2,3,4,5,6\}$，$B=\{x \mid x=x^2+1, n\in \mathbf{N}, x<20\}$，求 $A\cup B$。

(3) 设 $A=\{\{a,\{a\}\},a\}$，$B=\{a,\{a\}\}$，求 $A\oplus B$。

12. 设 $\mathbf{Z}$ 为全集，A、B、C 为 $\mathbf{Z}$ 的子集

$$A=\{x \mid \exists t(t\in \mathbf{Z} \wedge t\geqslant 4 \wedge x=3t)\}$$
$$B=\{x \mid \exists t(t\in \mathbf{Z} \wedge x=2t)\}$$
$$C=\{x \mid x\in \mathbf{Z} \wedge |x|\leqslant 10\}$$

试用 A、B、C 以及集合运用分别给出以下集合的表达式：

(1) 所有奇数的集合

(2) $\{-10,-8,-6,-4,-2,0,2,4,6,8,10\}$

(3) $\{x \mid \exists t(t\in \mathbf{Z} \wedge t\geqslant 2 \wedge x=6t)\}$

(4) $\{x \mid \exists t(t\in \mathbf{Z} \wedge t\geqslant 5 \wedge x=2t-1)\}\cup\{x \mid \exists t(t\in \mathbf{Z} \wedge t\leqslant -5 \wedge x=2t-1)\}$

13. 化简下列集合表达式。

(1) $((A\cup B)\cap B)-(A\cup B)$

(2) $((A\cup B\cup C)-(B\cup C))\cup A$

(3) $(B-(A\cap C))\cup(A\cap B\cap C)$

14. 画出下列集合的文氏图。

(1) $\sim A\cap \sim B$

(2) $(A-(B\cup C))\cup((B\cup C)-A)$

(3) $A\cap(\sim B\cup C)$

15. 设集合 $A=\{\{1,2\},\{2,3\},\{1,3\},\{\varnothing\}\}$，计算下列表达式。

(1) $\bigcup A$

(2) $\bigcap A$

(3) $\bigcap\bigcup A$

(4) $\bigcup\bigcap A$

16. 判断以下命题的真假。

(1) $a\in\{\{a\}\}$

(2) $\{a\}\in\{\{a\}\}$

(3) $x\in\{x\}-\{\{x\}\}$

(4) $\{x\}\subseteq\{x\}-\{\{x\}\}$

(5) $A-B=A\Leftrightarrow B=\varnothing$

(6) $A-B=\varnothing\Leftrightarrow A=B$

(7) $A\oplus A=A$

(8) $A-(B\cup C)=(A-B)\cap(A-C)$

(9) 如果 $A\cap B=B$，则 $A=E$

(10) $A=\{x\}\cup x$，则 $x\in A$ 且 $x\subseteq A$

17. 对 60 个人的调查表明，有 25 人阅读《每周新闻》杂志，26 人阅读《时代》杂志，26 人

阅读《财富》杂志，9 人阅读《每周新闻》和《财富》杂志，11 人阅读《每周新闻》和《时代》杂志，8 人阅读《时代》和《财富》杂志，还有 8 人什么杂志也不读。

(1) 求阅读全部 3 种杂志的人数。

(2) 分别求只阅读《每周新闻》、《时代》和《财富》杂志的人数。

18. 某班有 25 个学生，其中 14 人会打篮球，12 人会打排球，6 人会打篮球和排球，5 人会打篮球和网球，还有 2 人会打这 3 种球。已知 6 个会打网球的人都会打篮球和排球。求不会打球的人数。

19. 在 1～300 的整数中(1 和 300 包含在内)，分别求满足以下条件的整数个数。

(1) 同时能被 3、5 和 7 整除。

(2) 不能被 3 和 5 整除，也不能被 7 整除。

(3) 能被 3 整除，但不能被 5 和 7 整除。

(4) 能被 3 或 5 整除，但不能被 7 整除。

(5) 只能被 3、5 和 7 之中的一个数整除。

20. 使用包含排斥原理求不超过 120 的素数个数。

21. 在 1～10 000 之间(包括 1 和 10 000 在内)不能被 4、5 和 6 整除的数有多少个？

22. 在 1～10 000 之间(包括 1 和 10 000 在内)既不是某个整数的平方，也不是某个整数的立方的数有多少个？

23. 在 1～1 000 000 之间(包括 1 和 1 000 000 在内)有多少个整数包含了数字 1、2、3 和 4？

24. 化简下列集合表达式。

(1) $(A\cap B)\cup(A-B)$

(2) $(A\cup(B-A))-B$

(3) $((A-B)-C)\cup((A-B)\cap C)\cup((A\cap B)-C)\cup(A\cap B\cap C)$

(4) $(A\cap B\cap C)\cup(A\cap \sim B\cap C)\cup(\sim A\cap B\cap C)$

25. 若 $P-Q=R$，判断下述条件中哪个为真，并说明理由。

(1) $P\cap Q=\varnothing$

(2) $Q=P$

(3) $P\subseteq Q$

(4) $Q\subseteq P$

26. 设 A、B、C 代表任意集合，试判断下面命题的真假。如果为真，给出证明；如果为假，给出反例。

(1) $A\subset B\wedge B\subseteq C\Rightarrow A\subset C$

(2) $A\neq B\wedge B\neq C\Rightarrow A\neq C$

(3) $A\in B\wedge B\nsubseteq C\Rightarrow A\notin C$

(4) $(A-B)\cup(B-C)=A-C$

(5) $(A-B)\cup B=A$

(6) $(A\cup B)-A=B$

(7) $(A\cap B)-A=\varnothing$

(8) $A\cup B=A\cup C\Rightarrow B=C$

27. 设 A、B 为任意集合，证明：

$$(A-B)\cup(B-A)=(A\cup B)-(A\cap B)$$

28. 设 A,B,C 是任意集合，证明：

(1) $(A-B)-C=A-(B\cup C)$

(2) $(A-B)-C=(A-C)-(B-C)$

(3) $(A-B)-C=(A-C)-B$

29. 证明下列集合恒等式。

(1) $A\cap(B\cup A)=B\cap A$

(2) $\sim((\sim A\cup\sim B)\cap\sim A)=A$

30. 设 A、B 为集合，证明如果$(A-B)\cup(B-A)=A\cup B$，则 $A\cap B=\varnothing$。

31. 证明以下命题是等价的：

$$A\subseteq B,\ \sim B\subseteq\sim A,\ \sim A\cup B=E, A-B\subseteq B$$

32. 证明 $P(A)\subseteq P(B)\Rightarrow A\subseteq B$。

33. 设 A、B、C 是任意集合，证明：

$$C\subseteq A\wedge C\subseteq B\Leftrightarrow C\subseteq A\cap B$$

34. 设 P、Q 为任意集合，证明：

$$P\subseteq Q\Leftrightarrow P-Q\subseteq\sim P$$

35. 证明：如果对一切集合 X 有 $X\cup Y=X$，则 $Y=\varnothing$。

36. 设 A、B 为集合，若 $A\subseteq B$，证明：$B\cup\sim A=E$。

37. 设 A、B、C 是任意集合，证明：

$$A\cup B=A\cup C\wedge A\cap B=A\cap C\Rightarrow B=C$$

38. 设 A、B、C、D 为集合，判断下列命题是否为真，如果恒真请给出证明，否则请举一个反例。

(1) $A\subseteq B\wedge C\subseteq D\Rightarrow A\cup C\subseteq B\cup D$

(2) $A\subset B\wedge C\subset D\Rightarrow A\cup C\subset B\cup D$

39. 设 A、B 为任意集合，证明：

$$A\subseteq B\Rightarrow P(A)\subseteq P(B)$$

40. 设 A、B 为任意集合，证明：

(1) $P(A)\cap P(B)=P(A\cap B)$

(2) $P(A)\cup P(B)\subseteq P(A\cup B)$

(3) 针对(2)举一反例，说明 $P(A)\cup P(B)=P(A\cup B)$对某些集合 A 和 B 是不成立的。

41. 设 A、B 为集合，分别求下列等式成立的充分必要条件，例如 $A\cap B=A$ 的充分必要条件是 $A\subseteq B$。

(1) $A\cup B=A$

(2) $A-B=A$

(3) $A-B=B$

(4) $A-B=B-A$

(5) $A\oplus B=A$

(6) $A\oplus B=\varnothing$