第3章 关系

我们已经十分熟悉一些应用所研究的对象被描述成集合。但是,当我们建立这些对象集合的时候,却是为了研究这些集合之间以及集合元素之间的关系,比如运算、顺序、映射等。那么,什么是关系呢?本章将给出答案。

3.1 序偶和笛卡儿积

1. 序偶

在日常生活中,有许多事物是成对出现的,而且具有一定的顺序。例如,$1<2$;中国地处亚洲;平面上点的坐标等。一般的说,两个具有固定次序的个体组成一个**序偶**,记作$\langle x,y\rangle$。上述各例可分别表示为$\langle 1,2\rangle$、〈中国,亚洲〉、$\langle a,b\rangle$等。

序偶可以看作是具有两个元素的集合,与一般集合不同的是序偶具有确定的次序。在集合中,$\{a,b\}=\{b,a\}$;但对序偶而言,当$a\neq b$时,$\langle a,b\rangle\neq\langle b,a\rangle$。

定义 3.1(序偶相等) $\langle x,y\rangle=\langle u,v\rangle$,当且仅当$x=u,y=v$。

序偶$\langle a,b\rangle$中两个元素不一定来自同一个集合,它们可以代表不同类型的事物。例如,a代表操作码,b代表地址码,则序偶$\langle a,b\rangle$就代表一条单地址指令。在序偶$\langle a,b\rangle$中,a称为第一坐标,b称为第二坐标。

序偶的概念可以推广到有序三元组的情况。有序三元组,其第一坐标本身是一个序偶,可形式化表示为$\langle\langle x,y\rangle,z\rangle$。我们约定$\langle\langle x,y\rangle,z\rangle=\langle x,y,z\rangle$。同理,有序$n$元组定义为$\langle x_1,x_2,\cdots,x_n\rangle$,且:

$$\langle x_1,x_2,\cdots,x_n\rangle=\langle y_1,y_2,\cdots,y_n\rangle\Leftrightarrow x_1=y_1\wedge x_2=y_2\wedge\cdots\wedge x_n=y_n$$

一般地,有序n元组$\langle x_1,x_2,\cdots,x_n\rangle$中的$x_i$称为有序$n$元组的第$i$个坐标。

2. 笛卡儿积

定义 3.2(笛卡儿积) A和B是集合,序偶集合$A\times B=\{\langle x,y\rangle\mid x\in A\wedge y\in B\}$称为$A$与$B$的**笛卡儿积**。

【例 3.1】 若$A=\{1,2\}$,$B=\{a,b,c\}$,求$A\times B$,$B\times B$以及$(A\times B)\cap(B\times A)$。

解:

$$A\times B=\{\langle 1,a\rangle,\langle 1,b\rangle,\langle 1,c\rangle,\langle 2,a\rangle,\langle 2,b\rangle,\langle 2,c\rangle\}$$

$$B\times B=\{\langle a,a\rangle,\langle a,b\rangle,\langle a,c\rangle,\langle b,a\rangle,\langle b,b\rangle,\langle b,c\rangle,\langle c,a\rangle,\langle c,b\rangle,\langle c,c\rangle\}$$

$$B \times A = \{\langle a,1\rangle,\langle a,2\rangle,\langle b,1\rangle,\langle b,2\rangle,\langle c,1\rangle,\langle c,2\rangle\}$$
$$(A \times B) \cap (B \times A) = \varnothing$$

显然,我们有:

(1) $A\times B\neq B\times A$。

(2) 如果$|A|=m,|B|=n$,则$|A\times B|=|B\times A|=|A||B|=mn$。

我们约定:若$A=\varnothing$或$B=\varnothing$,则$A\times B=\varnothing$。

由笛卡儿积定义可知:

$$(A \times B) \times C = \{\langle\langle x,y\rangle,z\rangle \mid \langle x,y\rangle \in A \times B \wedge z \in C\}$$
$$\{\langle x,y,z\rangle \mid x \in A \wedge y \in B \wedge z \in C\}$$
$$A \times (B \times C) = \{\langle x,\langle y,z\rangle\rangle \mid x \in A \wedge \langle y,z\rangle \in B \times C\}$$

由于$\langle x,\langle y,z\rangle\rangle$不是三元组,所以:

$$(A \times B) \times C \neq A \times (B \times C)$$

算法 3.1 计算笛卡儿积算法如图 3.1 所示。

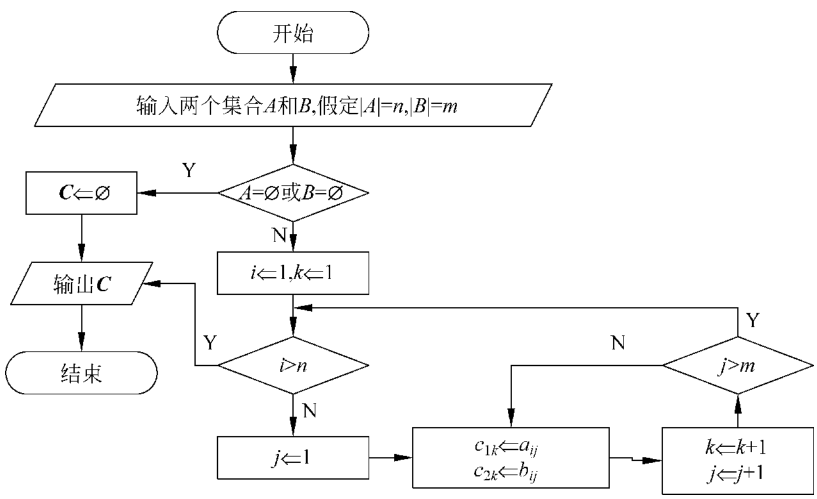

图 3.1 笛卡儿积计算算法流程

输入:两个集合A和B。

输出:$2\times(nm)$矩阵$\boldsymbol{C}$。

思路:对A中每一个元素,与B中所有元素组成序偶,直到A遍历完。$\boldsymbol{C}$中第一行为序偶第一坐标(A中元素),$\boldsymbol{C}$中第二行为序偶第二坐标(B中元素)。

定理 3.1 设A、B和C为任意三个集合,则有:

(1) $A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$。

(2) $A\times(B\cap C)=(A\times B)\cap(A\times C)$。

(3) $(A\cup B)\times C=(A\times C)\cup(B\times C)$。

(4) $(A\cap B)\times C=(A\times C)\cap(B\times C)$。

证明:

(1) 设$\langle x,y\rangle\in A\times(B\cup C)\Leftrightarrow x\in A\wedge y\in B\cup C$

$\Leftrightarrow x\in A\wedge(y\in B\vee y\in C)\Leftrightarrow(x\in A\wedge y\in B)\vee(x\in A\wedge y\in C)$

$\Leftrightarrow\langle x,y\rangle\in A\times B\vee\langle x,y\rangle\in A\times C\Leftrightarrow\langle x,y\rangle\in(A\times B)\cup(A\times C)$

因此，$A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$。

(4) 设$\langle x,y\rangle\in(A\cap B)\times C\Leftrightarrow x\in A\cap B\wedge y\in C$

$\Leftrightarrow(x\in A\wedge x\in B)\wedge y\in C\Leftrightarrow(x\in A\wedge y\in C)\wedge(x\in B\wedge y\in C)$

$\Leftrightarrow\langle x,y\rangle\in A\times C\wedge\langle x,y\rangle\in B\times C\Leftrightarrow\langle x,y\rangle\in(A\times C)\cap(B\times C)$

因此，$(A\cap B)\times C=(A\times C)\cap(B\times C)$。 ■

定理 3.2 设 A、B 和 C 为三个非空集合,则有：

$$A\subseteq B\Leftrightarrow A\times C\subseteq B\times C\Leftrightarrow C\times A\subseteq C\times B$$

证明：设 $A\subseteq B$,对任意的$\langle x,y\rangle$：

$$\begin{aligned}\langle x,y\rangle\in A\times C&\Leftrightarrow x\in A\wedge y\in C\\&\Rightarrow x\in B\wedge y\in C\Leftrightarrow\langle x,y\rangle\in B\times C\end{aligned}$$

因此,$A\times C\subseteq B\times C$。

反之,若 $A\times C\subseteq B\times C$,取 $y\in C$,则对 $\forall x$,有：

$$\begin{aligned}x\in A&\Leftrightarrow x\in A\wedge y\in C\Leftrightarrow\langle x,y\rangle\in A\times C\\&\Rightarrow\langle x,y\rangle\in B\times C\Leftrightarrow x\in B\wedge y\in C\Leftrightarrow x\in B\end{aligned}$$

因此,$A\subseteq B$。

定理的第二部分 $A\subseteq B\Leftrightarrow C\times A\subseteq C\times B$,证明类似。 ■

定理 3.3 设 A、B、C、D 为四个非空集合,则 $A\times B\subseteq C\times D$ 的充要条件为 $A\subseteq C$ 且 $B\subseteq D$。

证明：若 $A\times B\subseteq C\times D$,对任意的 $x\in A$,$y\in B$,有：

$$\begin{aligned}(x\in A)\wedge(y\in B)&\Leftrightarrow\langle x,y\rangle\in A\times B\Rightarrow\langle x,y\rangle\in C\times D\\&\Leftrightarrow(x\in C)\wedge(y\in D)\end{aligned}$$

即 $A\subseteq C$,$B\subseteq D$。

反之,若 $A\subseteq C$ 且 $B\subseteq D$,设任意 $x\in A$,$y\in B$,有：

$$\begin{aligned}\langle x,y\rangle\in A\times B&\Leftrightarrow(x\in A)\wedge(y\in B)\\&\Rightarrow(x\in C)\wedge(y\in D)\\&\Rightarrow\langle x,y\rangle\in C\times D\end{aligned}$$

因此,$A\times B\subseteq C\times D$。 ■

对于有限个集合可以进行多次笛卡儿积运算。我们约定：

$$A_1\times A_2\times A_3=(A_1\times A_2)\times A_3$$

$$A_1\times A_2\times A_3\times A_4=(A_1\times A_2\times A_3)\times A_4=((A_1\times A_2)\times A_3)\times A_4$$

一般地，

$$\begin{aligned}A_1\times A_2\times\cdots\times A_n&=(A_1\times A_2\times\cdots\times A_{n-1})\times A_n\\&=\{\langle x_1,x_2,\cdots,x_n\rangle\mid x_1\in A_1\wedge x_2\in A_2\wedge\cdots\wedge x_n\in A_n\}\end{aligned}$$

故 $A_1\times A_2\times\cdots\times A_n$ 是有序 n 元组构成的集合。

特别地,同一集合的 n 次笛卡儿积$\underbrace{A\times A\times\cdots\times A}_{n}$,记为 A^n，这里 $A^n=A^{n-1}\times A$。

例如,$A=\{1,2\}$,则：

$$
\begin{aligned}
\{1,2\}^3 &= \{1,2\}^2 \times \{1,2\} = \{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 2,2\rangle\} \times \{1,2\} \\
&= \{\langle\langle 1,1\rangle,1\rangle,\langle\langle 1,1\rangle,2\rangle,\langle\langle 1,2\rangle,1\rangle,\langle\langle 1,2\rangle,2\rangle,\langle\langle 2,1\rangle,1\rangle, \\
&\quad \langle\langle 2,1\rangle,2\rangle,\langle\langle 2,2\rangle,1\rangle,\langle\langle 2,2\rangle,2\rangle\} \\
&= \{\langle 1,1,1\rangle,\langle 1,1,2\rangle,\langle 1,2,1\rangle,\langle 1,2,2\rangle,\langle 2,1,1\rangle,\langle 2,1,2\rangle,\langle 2,2,1\rangle,\langle 2,2,2\rangle\}
\end{aligned}
$$

如果$|A|$表示集合 A 的个数。若$|A|=2$,则$|A^3|=2^3=8$。一般地,若 $|A|=m$,则$|A^n|=m^n$。

习题 3.1

1. 设 $A=\{1,2,3\}$,$B=\{a,b\}$求:

(1) $A\times B$　　(2) $B\times A$　　(3) $B\times B$　　(4) $2^B\times B$

2. 使 $A\subseteq A\times A$ 成立的集合 A 存在吗?请阐明理由。

3. 证明 $A\times B=B\times A \Leftrightarrow A=\varnothing \vee B=\varnothing \vee A=B$。

4. 证明$(A\cap B)\times(C\cap D)=(A\times C)\cap(B\times D)$。

5. 下列各式中哪些成立,哪些不成立?对成立的式子给出证明,对不成立的式子给出反例。

(1) $(A\cup B)\times(C\cup D)=(A\times C)\cup(B\times D)$。

(2) $(A-B)\times(C-D)=(A\times C)-(B\times D)$。

(3) $(A\oplus B)\times(C\oplus D)=(A\times C)\oplus(B\times D)$。

(4) $(A-B)\times C=(A\times C)-(B\times C)$。

(5) $(A\oplus B)\times C=(A\times C)\oplus(B\times C)$。

6. 列出关系$\{\langle a,b,c,d\rangle \mid a,b,c,d\in \mathbf{Z}^+$ 且 $a\cdot b\cdot c\cdot d=6\}$中所有有序四元组。

7. 确定下列二元关系:

(1) $A=\{1,2,3\}$,$B=\{1,3,5\}$,$R=\{x,y \mid x,y\in A\cap B\}\subseteq A\times B$。

(2) $A=\{0,1,2,3,4,5,6,8\}$,$R=\{\langle x,y\rangle \mid x=2^y\}\subseteq A\times A$。

3.2 关系及其表示

3.2.1 关系的概念

我们知道,有序 n 元组可以表达 n 个个体之间的联系,因此可以用有序 n 元组表达关系概念。

定义 3.3(关系)　设 X、Y 是任意两个集合,则称笛卡儿积 $X\times Y$ 的任一子集为从 $\boldsymbol{X}$ **到** $\boldsymbol{Y}$ **的一个二元关系**。记为 R,$R\subseteq X\times Y$。

X 到 Y 的二元关系 R,如图 3.2 所示。

集合 X 到 Y 的二元关系是第一坐标取自 X、第二坐标取自 Y 的序偶集合。如果序偶$\langle x,y\rangle\in R$,也说 x 与 y 有关系 R,记为 xRy;如果序偶$\langle x,y\rangle\notin R$,则说 x 与 y 没有关系 R,记为 $x\bar{R}y$。X 为 R 的**前域**,Y 为 R 的**陪域**。

当 $X=Y$ 时,关系 R 是 $X\times X$ 的子集,这时称 R 为集合 $\boldsymbol{X}$ **上的二元关系**。

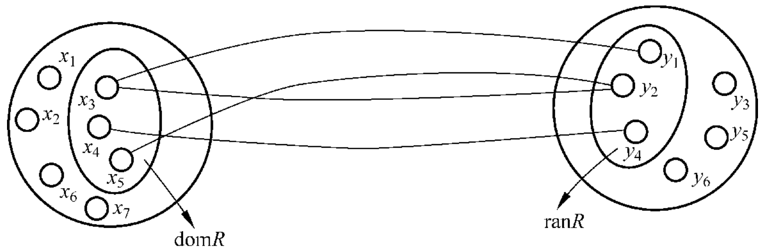

图 3.2　关系示意图

【例 3.2】　(1) 设 $A=\{a,b\}$，$B=\{2,5,8\}$，则：

$$A\times B=\{\langle a,2\rangle,\langle a,5\rangle,\langle a,8\rangle,\langle b,2\rangle,\langle b,5\rangle,\langle b,8\rangle\}$$

令 $R_1=\{\langle a,2\rangle,\langle a,8\rangle,\langle b,2\rangle\}$，$R_2=\{\langle a,5\rangle,\langle b,2\rangle,\langle b,5\rangle\}$，$R_3=\{\langle a,2\rangle\}$。

因为 $R_1\subseteq A\times B$，$R_2\subseteq A\times B$，$R_3\subseteq A\times B$，所以 R_1、R_2 和 R_3 均是由 A 到 B 的关系。

(2) $>=\{\langle x,y\rangle\mid x,y$ 是实数且 $x>y\}$是实数集上的大于关系。

定义 3.4(定义域和值域)　设 R 为 X 到 Y 的二元关系，由 $\langle x,y\rangle\in R$ 的所有 x 组成的集合称为 R 的**定义域**，记作 $\mathrm{dom}\ R$ 或 $D(R)$，即：

$$\mathrm{dom}\ R=\{x\mid(\exists y)(\langle x,y\rangle\in R)\}$$

使 $\langle x,y\rangle\in R$ 的所有 y 组成的集合称为 R 的**值域**，记作 $\mathrm{ran}\ R$，即：

$$\mathrm{ran}\ R=\{y\mid(\exists x)(\langle x,y\rangle\in R)\}$$

记为 $\mathrm{FLD}\ R=\mathrm{dom}\ R\cup\mathrm{ran}\ R$。

显然，$\mathrm{dom}\ R\subseteq X$，$\mathrm{ran}\ R\subseteq Y$，$\mathrm{FLD}\ R=\mathrm{dom}\ R\cup\mathrm{ran}\ R\subseteq X\cup Y$。

【例 3.3】　设 $A=\{1,3,7\}$，$B=\{1,2,6\}$，$H=\{\langle 1,2\rangle,\langle 1,6\rangle,\langle 7,2\rangle\}$，求 $\mathrm{dom}\ H$、$\mathrm{ran}\ H$ 和 $\mathrm{FLD}\ H$。

解：$\mathrm{dom}\ H=\{1,7\}$，$\mathrm{ran}\ H=\{2,6\}$，$\mathrm{FLD}\ H=\{1,2,6,7\}$。

【例 3.4】　设 $X=\{2,3,4,5\}$，求集合 X 上的关系“$<$”、$\mathrm{dom}<$ 及 $\mathrm{ran}<$。

解：$<=\{\langle 2,3\rangle,\langle 2,4\rangle,\langle 2,5\rangle,\langle 3,4\rangle,\langle 3,5\rangle,\langle 4,5\rangle\}$

$\mathrm{dom}<=\{2,3,4\}$，$\mathrm{ran}<=\{3,4,5\}$。

3.2.2　几种特殊的关系

1. 空关系

对任意集合 X 和 Y，$\varnothing\subseteq X\times Y$，所以 $\varnothing$ 是由 X 到 Y 的关系，称为**空关系**。

2. 全关系

因为 $X\times Y\subseteq X\times Y$，所以 $X\times Y$ 是一个由 X 到 Y 的关系，称为由 X 到 Y 的**全关系**。

【例 3.5】　若 $H=\{f,m,s,d\}$表示家庭中父、母、子、女四个人的集合，确定 H 上的全关系和空关系，另外再确定 H 上的一个关系，并指出该关系的定义域和值域。

解：设 H 上同一家庭的成员的关系为 H_1：

$$\begin{aligned}H_1=\{&\langle f,f\rangle,\langle f,m\rangle,\langle f,s\rangle,\langle f,d\rangle,\langle m,f\rangle,\langle m,m\rangle,\langle m,s\rangle,\langle m,d\rangle,\\&\langle s,f\rangle,\langle s,m\rangle,\langle s,s\rangle,\langle s,d\rangle,\langle d,f\rangle,\langle d,m\rangle,\langle d,s\rangle,\langle d,d\rangle\}\end{aligned}$$

设 H 上的互不相识的关系为 H_2，$H_2=\varnothing$，则 H_1 为全关系，H_2 为空关系。

设 H 上的长幼关系为 H_3：

$$H_3=\{\langle f,s\rangle,\langle f,d\rangle,\langle m,s\rangle,\langle m,d\rangle\}$$
$$\mathrm{dom}\ H_3=\{f,m\}$$
$$\mathrm{ran}\ H_3=\{s,d\}$$

3. 恒等关系

定义 3.5（**恒等关系**） 设 I_X 是 X 上的二元关系且满足 $I_X=\{\langle x,x\rangle \mid x\in X\}$，则称 I_X 是 X 上的**恒等关系**。

例如，$A=\{1,2,3\}$，则 $I_A=\{\langle 1,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,3\rangle\}$。

因为关系是有序元组的集合，因此，关系可以进行集合的所有运算。

定理 3.4 若 Q 和 S 是从集合 X 到集合 Y 的两个关系，则 Q 和 S 的并、交、补、差仍是 X 到 Y 的关系。

证明：因为 $Q\subseteq X\times Y$，$S\subseteq X\times Y$

故

$$Q\cup S\subseteq X\times Y,\quad Q\cap S\subseteq X\times Y$$
$$\overline{S}=(X\times Y-S)\subseteq X\times Y$$
$$Q-S=(Q\cap\overline{S})\subseteq X\times Y$$

【例 3.6】 若 $A=\{1,2,3,4\}$，$R_1=\{\langle x,y\rangle \mid (x-y)/2\in A,x,y\in A\}$，$R_2=\{\langle x,y\rangle \mid (x-y)/3\in A,x,y\in A\}$，求 $R_1\cap R_2$、$R_1\cup R_2$、R_1-R_2 和 $\overline{R}_1$。

解：

$$R_1=\{\langle 3,1\rangle,\langle 4,2\rangle\},R_2=\{\langle 4,1\rangle\}$$
$$R_1\cap R_2=\varnothing$$
$$R_1\cup R_2=\{\langle 3,1\rangle,\langle 4,2\rangle,\langle 4,1\rangle\}$$
$$R_1-R_2=R_1$$
$$\begin{aligned}\overline{R}_1&=A\times A-R_1\\&=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 1,4\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 2,4\rangle,\\&\quad\ \langle 3,2\rangle,\langle 3,3\rangle,\langle 3,4\rangle,\langle 4,1\rangle,\langle 4,3\rangle,\langle 4,4\rangle\}\end{aligned}$$

3.2.3 关系的表示

1. 集合表示法

因为关系是有序元组的集合，因此可用表示集合的列举法或描述法来表示关系。例 3.2 的(1)中的关系 R_1、R_2 和 R_3 及例 3.3 中的关系 H，均是用列举法表示的关系；而例 3.2 的(2)中的关系$>$和例 3.6 中的关系 R_1 和 R_2 都是用描述法表示的关系。

有限集合间的二元关系 R 除了可以用集合的形式表达以外，还可用矩阵和图形表示。

2. 矩阵表示法

设给定两个有限集合 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_m\}$，$Y=\{y_1,y_2,\cdots,y_n\}$，则对应于从 X 到 Y 的二

元关系 R 有一个关系矩阵 $\boldsymbol{M}_R=[r_{ij}]_{m\times n}$，其中：

$$r_{ij}=\begin{cases}1 & \langle x_i,y_j\rangle\in R\\ 0 & \langle x_i,y_j\rangle\notin R\end{cases}\quad(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$$

如果 R 是有限集合 X 上的二元关系或 X 和 Y 含有相同数量的有限个元素，则 $\boldsymbol{M}_R$ 是方阵。

【例 3.7】 若 $A=\{a_1,a_2,a_3,a_4,a_5\}$，$B=\{b_1,b_2,b_3\}$，$R=\{\langle a_1,b_1\rangle,\langle a_1,b_3\rangle,\langle a_2,b_2\rangle,\langle a_2,b_3\rangle,\langle a_3,b_1\rangle,\langle a_4,b_2\rangle,\langle a_5,b_2\rangle\}$，写出关系矩阵 $\boldsymbol{M}_R$。

解：

$$\boldsymbol{M}_R=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&1\\1&0&0\\0&1&0\\0&1&0\end{bmatrix}_{5\times 3}$$

【例 3.8】 设 $X=\{1,2,3,4\}$，写出集合 X 上的大于关系 $>$ 的关系矩阵。

解： $>=\{\langle 2,1\rangle,\langle 3,1\rangle,\langle 3,2\rangle,\langle 4,1\rangle,\langle 4,2\rangle,\langle 4,3\rangle\}$

$$\boldsymbol{M}_>=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\1&0&0&0\\1&1&0&0\\1&1&1&0\end{bmatrix}$$

3. 关系图表示法

有限集合的二元关系也可用图形来表示。设集合 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_m\}$ 到 $Y=\{y_1,y_2,\cdots,y_n\}$ 上的一个二元关系为 R，首先我们在平面上做出 m 个结点分别记作 $x_1,x_2,\cdots,x_m$，另外做 n 个结点分别记作 $y_1,y_2,\cdots,y_n$。如果 x_iRy_j，则从结点 x_i 至结点 y_j 做一有向弧，其箭头指向 y_i；如果 $x_i\overline{R}y_j$，则 x_i、y_i 之间没有线段连接。用这种方法连接起来的图称为 R 的关系图。

【例 3.9】 画出例 3.7 的关系图。

解： 关系图如图 3.3 所示。

【例 3.10】 设 $A=\{1,2,3,4,5\}$，$R=\{\langle 1,2\rangle,\langle 1,5\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,2\rangle,\langle 3,1\rangle,\langle 4,3\rangle\}$，画出 R 的关系图。

解： 关系图如图 3.4 所示。

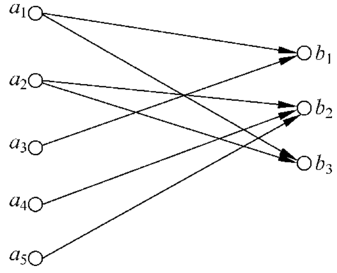

图 3.3 例 3.9 的关系图

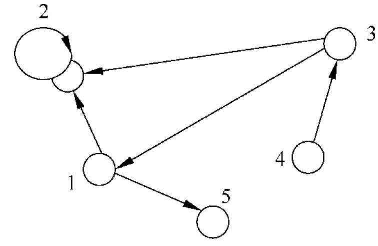

图 3.4 例 3.10 的关系图

关系图主要表达结点与结点之间的邻接关系，故关系图与结点位置和线段的长短无关。今后通常限于讨论同一集合上的关系。

习题 3.2

1. 设 $A=\{1,2,3\}$，$B=\{a\}$，求出所有由 A 到 B 的关系。

2. 设 $A=\{1,2,3,4\}$，$R_1=\{\langle 1,3\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,4\rangle\}$，$R_2=\{\langle 1,4\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 3,4\rangle\}$。求：$R_1\cup R_2$、$R_1\cap R_2$、$R_1-R_2$、$\bar{R}_1$、$\mathrm{dom}(R_1)$、$\mathrm{dom}(R_2)$、$\mathrm{ran}(R_1)$、$\mathrm{ran}(R_2)$、$\mathrm{dom}(R_1\cup R_2)$、$\mathrm{ran}(R_1\cap R_2)$。

3. 对任意集合 A 及上的关系 R_1 和 R_2，证明：

(1) $\mathrm{ran}(R_1\cup R_2)=\mathrm{ran}(R_1)\cup\mathrm{ran}(R_2)$。

(2) $\mathrm{ran}(R_1\cap R_2)\subseteq\mathrm{ran}(R_1)\cap\mathrm{ran}(R_2)$。

4. 设 A 有 n 个元素的有限集合，请指出 A 上有多少个二元关系？并阐明理由。

3.3 关系的性质及其判定算法

3.3.1 关系的性质

定义 3.6（关系的性质） 设 R 是定义在集合 X 上的二元关系，如果：

(1) 对于每一个 $x\in X$，都有 xRx，则称 R 是**自反**的。

R 在 X 上自反 $\Leftrightarrow(\forall x)(x\in X\rightarrow xRx)$。

(2) 对于每一个 $x\in X$，都有 $x\bar{R}x$，则称 R 是**反自反**的。

R 在 X 上反自反 $\Leftrightarrow(\forall x)(x\in X\rightarrow x\bar{R}x)$。

(3) 对于任意 $x,y\in X$，若 xRy，就有 yRx，则称 R 是**对称**的。

R 在 X 上对称 $\Leftrightarrow(\forall x)(\forall y)((x\in X)\wedge(y\in X)\wedge(xRy)\rightarrow(yRx))$。

(4) 对于任意 $x,y\in X$，若 xRy，yRx，必有 $x=y$，则称 R 在 X 上是**反对称**的。

R 在 X 上反对称 $\Leftrightarrow(\forall x)(\forall y)((x\in X)\wedge(y\in X)\wedge(xRy)\wedge(yRx)\rightarrow(x=y))$。

(5) 对于任意 $x,y,z\in X$，若 xRy，yRz，就有 xRz，则称 R 在 X 上是**传递**的。

R 在 X 上传递 $\Leftrightarrow(\forall x)(\forall y)(\forall z)((x\in X)\wedge(y\in X)\wedge(z\in X)\wedge(xRy)\wedge(yRz)\rightarrow(xRz))$。

【例 3.11】 设 $A=\{1,2,3\}$，则集合 A 上的关系：

$R_1=\{\langle 1,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 3,3\rangle\}$ 是自反而不是反自反的关系。

$R_2=\{\langle 1,2\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 2,3\rangle\}$ 是反自反而不是自反的关系。

$R_3=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 2,3\rangle\}$ 既不是自反的也不是反自反的关系。

$R_4=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 3,1\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 3,2\rangle\}$ 是对称的而不是反对称的关系。

$R_5=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 2,3\rangle\}$ 是反对称的而不是对称的关系。

$R_6=\{\langle 1,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,3\rangle\}$ 是既对称也反对称的关系。

$R_7=\{\langle 1,2\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 3,2\rangle\}$ 是既不对称也不反对称关系。

$R_8=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 2,2\rangle\}$，$R_9=\{\langle 1,2\rangle,\langle 3,2\rangle\}$ 是可传递的关系。

$R_{10}=\{\langle 1,2\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 2,1\rangle\}$ 是不可传递的关系，因为 $\langle 1,2\rangle\in R_{10}$，$\langle 2,1\rangle\in R_{10}$，

但$\langle 1,1\rangle \notin R_{10}$。

由定义3.9及例3.10可知：

(1) 对任意一个关系R，若R自反则它一定不反自反，若R反自反则它也一定不自反；但R不自反，它未必反自反，若R不反自反，也未必自反。

(2) 存在着既对称也反对称的关系。

图3.5表明了自反与反自反、对称与反对称性之间的关系。

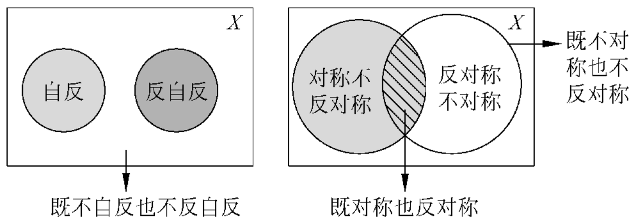

图3.5　自反与反自反、对称与反对称性之间的关系

【例3.12】　设整数集Z上的二元关系R定义如下：

$$R = \{\langle x,y\rangle \mid x,y \in Z,(x-y)/2 \text{ 是整数}\}$$

验证R在Z上是自反和对称的。

证明：$\forall x \in Z$，$(x-x)/2=0$，即$\langle x,x\rangle \in R$，故R是自反的。

又设$\forall x,y \in Z$，如果xRy，即$(x-y)/2$是整数，则$(y-x)/2$也必是整数，即yRx，因此R是对称的。

3.3.2　关系性质判定算法

1. 关系性质判定

从R的关系矩阵和关系图得出：

(1) 若关系R是自反的，当且仅当其关系矩阵的主对角线上的所有元素都是1；其关系图上每个结点都有自环。

(2) 若关系R是对称的，当且仅当其关系矩阵是对称矩阵；其关系图上任意两个结点间若有定向弧，必是成对出现的。

(3) 若关系R是反自反的，当且仅当其关系矩阵的主对角线上的元素皆为0；关系图上每个结点都没有自环。

(4) 若关系R是反对称的，当且仅当其关系矩阵中关于主对角线对称的元素不能同时为1；其关系图上任意两个不同结点间至多出现一条定向弧。

(5) 若关系R是可传递的，当且仅当其关系矩阵满足：对$\forall i,j,k,i \neq j,j \neq k$，若$r_{ij}=1$且$r_{jk}=1$，则$r_{ik}=1$；其关系图满足：对$\forall i,j,k,i \neq j,j \neq k$，若有弧由$a_i$指向$a_j$，且又有弧由$a_j$指向$a_k$，则必有一条弧由$a_i$指向$a_k$。

【例3.13】　图3.6是由关系图所表示的$A=\{a,b,c\}$上的5个二元关系。

请判断它们的性质。

解：

(1) 是反对称、传递但不是对称的关系，而且是既不自反也不反自反的关系。

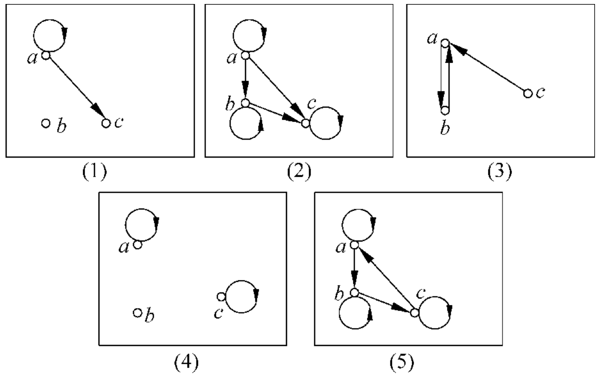

图 3.6 例 3.13 的关系图

(2) 是自反、传递、反对称的关系,但不是对称也不是反自反的关系。
(3) 是反自反但不是对称、不是反对称、不是自反也不是传递的关系。
(4) 是不自反、不反自反但是传递的关系,而且既是对称也是反对称的关系。
(5) 是自反、反对称但不是传递、不是对称也不是反自反的关系。

2. 关系性质判别算法

算法 3.2 判断关系是否具有自反性的算法(见图 3.7)。

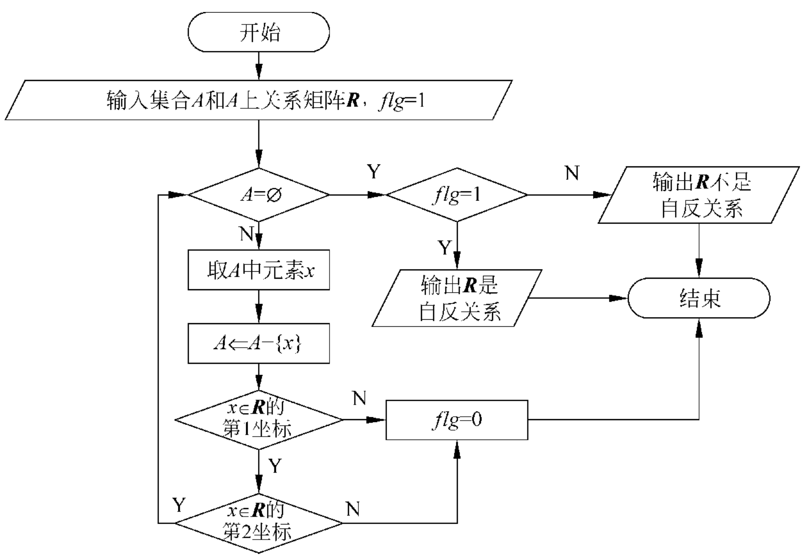

图 3.7 自反关系判定算法流程图

输入:集合 A、A 上关系 R、标志位 flg,假设 R 是自反的($flg=1$)。
输出:flg。
思路:对 A 中每个元素 x,判断是否存在序偶(x,x),如果不存在,设置标志为 0。
对称关系、传递关系判别算法设计留作练习。

习题 3.3

1. 设 $A=\{1,2,3,4\}$，定义 A 上的下列关系。

$R_1=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 3,3\rangle,\langle 3,4\rangle\}$，$R_2=\{\langle 1,2\rangle,\langle 2,1\rangle\}$

$R_3=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 3,3\rangle,\langle 3,4\rangle,\langle 4,3\rangle,\langle 4,4\rangle\}$

$R_4=\{\langle 1,2\rangle,\langle 2,4\rangle,\langle 3,3\rangle,\langle 4,1\rangle\}$

$R_5=\{\langle 1,2\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 1,4\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 2,4\rangle,\langle 3,4\rangle\}$

$R_6=A\times A$，$R_7=\varnothing$

请给出上述每一个关系的关系图与关系矩阵，并指出它具有的性质。

2. 定义在整数集合 I 上的相等关系、"$\leqslant$"关系、"$<$"关系，全关系，空关系，是否具有表中所指的性质，请用 Y(有)或 N(无)将结果填在表 3.1 中。

表 3.1　关系的性质

关系 \ 性质	自反的	反自反的	对称的	反对称的	传递的
相等关系					
$\leqslant$关系					
$<$关系					
全关系					
空关系					

3. 设 A 和 B 为有穷集合，$R,S\subseteq A\times B$，$M_R=(x_{ij})_{m\times n}$，$M_S=(y_{ij})_{m\times n}$。

(1) 为了 $R\subseteq S$，必须且只需 $\forall_i\forall_j(x_{ij}\leqslant y_{ij})$。

(2) 设 $M_{R\cup S}=(z_{ij})_{m\times n}$，那么 $z_{ij}=x_{ij}\vee y_{ij}$，$i=1,2,\cdots,m$，$j=1,2,\cdots,n$。

(3) 设 $M_{R\cap S}=(t_{ij})_{m\times n}$，那么 $t_{ij}=x_{ij}\wedge y_{ij}$，$i=1,2,\cdots,m$；$j=1,2,\cdots,n$。

4. 设 A 是一个非空集合，$R\subseteq A\times A$。如果 R 在 A 上是对称的、传递的，下面的推导说明 R 在 A 上是自反的：

对任意的 $a,b\in A$，由于 R 是对称的，有：

$$aRb\Rightarrow bRa$$

于是 $aRb\Rightarrow aRb\wedge bRa$，又利用 R 是传递的，得：

$$aRb\wedge bRa\Rightarrow aRa$$

从而说明 R 是自反的。

上述推导正确吗？请阐明理由。

5. 确定下列整数集合上的关系 R 是否是自反的、反自反的、对称的、反对称的和传递的，其中 $\langle x,y\rangle\in R$，当且仅当：

(1) $x\neq y$

(2) $xy\geqslant 1$

(3) $x=y+1$ 或 $x=y-1$

(4) $x\equiv y\pmod 7$

(5) $x=y^2$

(6) $x \geqslant y^2$

(7) x 是 y 的倍数

(8) x 与 y 都是负的或都是非负的

6. 设 A 是一个 n 元集合,问 A 上有多少个关系?这其中又有多少个关系是:

(1) 对称的?

(2) 反对称的?

(3) 非对称的?

(4) 反自反的?

(5) 自反的和对称的?

(6) 既不是自反的也不是反自反的?

7. 设计对称关系判别算法。

8. 设计传递关系判别算法。

9. 请分别给出满足下列要求的二元关系的例子。

(1) 既是自反的,又是反自反的。

(2) 既不是自反的,又不是反自反的。

(3) 既是对称的,又是反对称的。

(4) 既不是对称的,又不是反对称的。

10. 请分别描述自反关系、反自反关系、对称关系和反对称关系的关系矩阵以及关系图的特征。

11. 设 R 是集合 A 上的自反关系. 试证明 R 是等价关系当且仅当若 $\langle x,y\rangle,\langle x,z\rangle \in R$,则 $\langle y,z\rangle \in R$。

12. 设 R_1 和 R_2 都是集合 A 上的等价关系,试证明 $R_1=R_2$ 当且仅当 $A/R_1=A/R_2$。

3.4 复合关系

3.4.1 复合关系的定义

定义 3.7 设 R 是从 X 到 Y 的关系,S 是从 Y 到 Z 的关系,则 $R\circ S$ 称为 R 和 S 的**复合关系**,表示为:$R\circ S=\{\langle x,z\rangle \mid x\in X \wedge z\in Z \wedge (\exists y)(y\in Y \wedge xRy \wedge ySz)\}$。从 R 和 S 求 $R\circ S$,称为关系的复合运算。

复合运算是关系的二元运算,它能够由两个关系生成一个新的关系,以此类推。例如,R 是从 X 到 Y 的关系,S 是从 Y 到 Z 的关系,P 是从 Z 到 W 的关系,则$(R\circ S)\circ P$ 是从 X 到 W 的关系。

【例 3.14】 设 R 是由 $A=\{1,2,3,4\}$ 到 $B=\{2,3,4\}$ 的关系,S 是由 B 到 $C=\{3,5,6\}$ 的关系,分别定义为:

$$R=\{\langle a,b\rangle \mid a+b=6\}=\{\langle 2,4\rangle,\langle 3,3\rangle,\langle 4,2\rangle\}$$

$$S=\{\langle b,c\rangle \mid b\text{ 整除 }c\}=\{\langle 2,6\rangle,\langle 3,3\rangle,\langle 3,6\rangle\}$$

于是复合关系:$R\circ S=\{\langle 3,3\rangle,\langle 3,6\rangle,\langle 4,6\rangle\}$。

例 3.14 中的两个关系 R 与 S 的复合 $R\circ S$ 很容易通过图 3.8 得到。

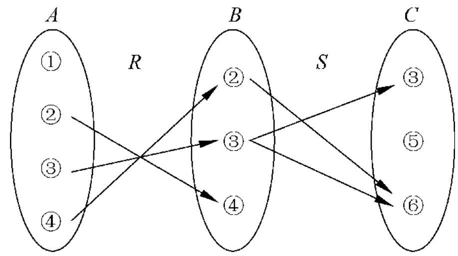

图 3.8 $R\circ S$示意图

由图 3.8 立即可得 $R\circ S=\{\langle 3,3\rangle,\langle 3,6\rangle,\langle 4,6\rangle\}$。

【例 3.15】 设 A 是所有人的集合。

$$R_1=\{\langle a,b\rangle \mid a,b\in A, a\text{ 是 } b\text{ 的兄弟}\}$$

$$R_2=\{\langle b,c\rangle \mid b,c\in A, b\text{ 是 } c\text{ 的父亲}\}$$

那么 $R_1\circ R_2=\{\langle a,c\rangle \mid a,c\in A, a$ 是 c 的叔伯$\}$；

而 $R_2\circ R_2=\{\langle a,c\rangle \mid a,c\in A, a$ 是 c 的祖父$\}$。

3.4.2 关系的复合运算的性质

定理 3.5 设 R 是由集合 X 到 Y 的关系，则 $I_X\circ R=R\circ I_Y=R$。

定理 3.6 设 R 是从 X 到 Y 的关系，S 是从 Y 到 Z 的关系，则有：

(1) $\mathrm{dom}(R\circ S)\subseteq \mathrm{dom}\,R$。

(2) $\mathrm{ran}(R\circ S)\subseteq \mathrm{ran}\,S$。

(3) 若 $\mathrm{ran}\,R\cap \mathrm{dom}\,S=\varnothing$，则 $R\circ S=\varnothing$。

证明：(1)和(2)是显然成立的，下面我们用反证法证明(3)。

反设 $R\circ S\neq\varnothing$，则必存在 $x\in X, z\in Z$，使$\langle x,z\rangle\in R\circ S$，从而 $\exists y\in Y$，使$\langle x,y\rangle\in R$，$\langle y,z\rangle\in S$，故 $y\in \mathrm{ran}\,R$ 且 $y\in \mathrm{dom}\,S$，所以 $y\in \mathrm{ran}\,R\cap \mathrm{dom}\,S$，这就与 $\mathrm{ran}\,R\cap\mathrm{dom}\,S=\varnothing$ 矛盾，因此，$R\circ S=\varnothing$。 ■

定理 3.7 (1) 设 R_1、R_2 和 R_3 分别是从 X 到 Y、Y 到 Z 和 Z 到 W 的关系，则：

$$(R_1\circ R_2)\circ R_3=R_1\circ(R_2\circ R_3)$$

即关系的复合运算满足结合律。

(2) 设 R_1 和 R_2 都是从 X 到 Y 的关系，S 是从 Y 到 Z 的关系，则：

① $(R_1\cup R_2)\circ S=(R_1\circ S)\cup(R_2\circ S)$

② $(R_1\cap R_2)\circ S\subseteq(R_1\circ S)\cap(R_2\circ S)$

(3) 设 S 是从 X 到 Y 的关系，R_1 和 R_2 都是从 Y 到 Z 的关系，则：

① $S\circ(R_1\cup R_2)=(S\circ R_1)\cup(S\circ R_2)$

② $S\circ(R_1\cap R_2)\subseteq(S\circ R_1)\cap(S\circ R_2)$

证明：我们只证明(2)，其他证明类似。

① $\forall\langle x,z\rangle\in(R_1\cup R_2)\circ S$

$\Leftrightarrow(\exists y)(y\in Y\wedge\langle x,y\rangle\in R_1\cup R_2\wedge\langle y,z\rangle\in S)$

$\Leftrightarrow(\exists y)(y\in Y\wedge(\langle x,y\rangle\in R_1\vee\langle x,y\rangle\in R_2)\wedge\langle y,z\rangle\in S)$

$\Leftrightarrow(\exists y)(y\in Y\wedge\langle x,y\rangle\in R_1\wedge\langle y,z\rangle\in S)\vee(\exists y)(y\in Y\wedge\langle x,y\rangle\in R_2)\wedge\langle y,z\rangle\in S)$

$\Leftrightarrow\langle x,z\rangle\in R_1\circ S\vee\langle x,z\rangle\in R_2\circ S$

$\Leftrightarrow\langle x,z\rangle\in(R_1\circ S)\cup(R_2\circ S)$

所以$(R_1\cup R_2)\circ S=(R_1\circ S)\cup(R_2\circ S)$

② $\forall\langle x,z\rangle\in(R_1\cap R_2)\circ S$

$\Leftrightarrow(\exists y)(y\in Y\wedge\langle x,y\rangle\in R_1\cap R_2\wedge\langle y,z\rangle\in S)$

$\Leftrightarrow(\exists y)(y\in Y\wedge\langle x,y\rangle\in R_1\wedge\langle x,y\rangle\in R_2\wedge\langle y,z\rangle\in S)$

$\Leftrightarrow\langle x,z\rangle\in R_1\circ S\wedge\langle x,z\rangle\in R_2\circ S$

$\Leftrightarrow\langle x,z\rangle\in(R_1\circ S)\cap(R_2\circ S)$

所以$(R_1\cap R_2)\circ S\subseteq(R_1\circ S)\cap(R_2\circ S)$。 ■

注意：一般来说：

(1) $(R_1\cap R_2)\circ S\neq(R_1\circ S)\cap(R_2\circ S)$。

如：设$A=\{a,b,c\}$，$B=\{x,y,z\}$，R_1和R_2都是从A到B的关系，S是从B到A的关系，$R_1=\{\langle a,x\rangle,\langle a,y\rangle\}$，$R_2=\{\langle a,x\rangle,\langle a,z\rangle\}$，$S=\{\langle x,b\rangle,\langle y,c\rangle,\langle z,c\rangle\}$，则：

$$(R_1\cap R_2)\circ S=\{\langle a,b\rangle\},\quad (R_1\circ S)\cap(R_2\circ S)=\{\langle a,b\rangle,\langle a,c\rangle\}$$

可见，$(R_1\cap R_2)\circ S\subseteq(R_1\circ S)\cap(R_2\circ S)$，但$(R_1\cap R_2)\circ S\neq(R_1\circ S)\cap(R_2\circ S)$。

(2) 关系的复合运算不满足交换律。

如：设$A=\{a,b,c\}$，R_1和R_2都是集合A上的关系，$R_1=\{\langle a,b\rangle\}$，$R_2=\{\langle b,a\rangle\}$，则$R_1\circ R_2=\{\langle a,a\rangle\}$，而$R_2\circ R_1=\{\langle b,b\rangle\}$，所以$R_1\circ R_2\neq R_2\circ R_1$。

由于关系的复合运算满足结合律，所以$(R_1\circ R_2)\circ R_3=R_1\circ(R_2\circ R_3)$可以写成$R_1\circ R_2\circ R_3$。一般地，若$R_1$是一由$A_1$到$A_2$的关系，$R_2$是由$A_2$到$A_3$的关系，……，$R_n$是一由$A_n$到$A_{n+1}$的关系，则不加括号的表达式$R_1\circ R_2\circ\cdots\circ R_n$唯一地表示一由$A_1$到$A_{n+1}$的关系，在计算这一关系时，可以运用结合律将其中任意两个相邻的关系先结合。特别地，当$A_1=A_2=\cdots=A_{n+1}=A$，$R_1=R_2=\cdots=R_n=R$，即R是集合A上的关系时，复合关系$R_1\circ R_2\circ\cdots\circ R_n=\underbrace{R\circ R\circ\cdots\circ R}_{n}$简记作$R^n$，它也是集合$A$上的一个关系。

3.4.3 复合关系的矩阵表示及图形表示

已知从集合$X=\{x_1,x_2,\cdots,x_m\}$到集合$Y=\{y_1,y_2,\cdots,y_n\}$上的关系为R，关系矩阵$\boldsymbol{M}_R=[u_{ij}]_{m\times n}$，从集合$Y=\{y_1,y_2,\cdots,y_n\}$到集合$Z=\{z_1,z_2,\cdots,z_p\}$的关系$S$，关系矩阵$\boldsymbol{M}_S=[v_{ij}]_{n\times p}$，表示复合关系$R\circ S$的矩阵$\boldsymbol{M}_{R\circ S}$可构造如下。

若$\exists y_j\in Y$，使得$\langle x_i,y_j\rangle\in R$且$\langle y_j,z_k\rangle\in S$，则$\langle x_i,z_k\rangle\in R\circ S$。在集合$Y$中能够满足这样条件的元素可能不止$y_j$一个，例如另有$y_{j'}$也满足$\langle x_i,y_{j'}\rangle\in R$且$\langle y_{j'},z_k\rangle\in S$。在所有这样的情况下，$\langle x_i,z_k\rangle\in R\circ S$都是成立的。这样，当我们扫描$\boldsymbol{M}_R$的第$i$行和$\boldsymbol{M}_S$的第$k$列时，若发现至少有一个这样的$j$，使得第$i$行的第$j$个位置上的记入值和第$k$列的第$j$个位置上的记入值都是1时，则$\boldsymbol{M}_{R\circ S}$的第$i$行和第$k$列上的记入值为1；否则为0。因此$\boldsymbol{M}_{R\circ S}$可以用类似于矩阵乘法的方法得到：

$$\boldsymbol{M}_{R\circ S}=\boldsymbol{M}_R\circ\boldsymbol{M}_S=[w_{ik}]_{m\times p}\quad 其中\quad w_{ik}=\bigvee_{j=1}^{n}(u_{ij}\wedge v_{jk})$$

式中∨代表逻辑加，满足 $0\vee0=0,0\vee1=1,1\vee0=1,1\vee1=1$。

式中∧代表逻辑乘，满足 $0\wedge0=0,0\wedge1=0,1\wedge0=0,1\wedge1=1$。

【例 3.16】 给定集合 $A=\{1,2,3,4,5\}$，在集合 A 上定义两种关系：

$$R=\{\langle1,2\rangle,\langle3,4\rangle,\langle2,2\rangle\},S=\{\langle4,2\rangle,\langle2,5\rangle,\langle3,1\rangle,\langle1,3\rangle\}$$

求 $R\circ S$ 和 $S\circ R$ 的矩阵。

解：

$$\boldsymbol{M}_{R\circ S}=\begin{bmatrix}0&1&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}\circ\begin{bmatrix}0&0&1&0&0\\0&0&0&0&1\\1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&0&0&1\\0&0&0&0&1\\0&1&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{M}_{S\circ R}=\begin{bmatrix}0&0&1&0&0\\0&0&0&0&1\\1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}\circ\begin{bmatrix}0&1&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

3.4.4 复合关系生成算法

1. 基于集合的复合关系生成算法

算法 3.3 基于集合的复合关系生成算法(见图 3.9)。

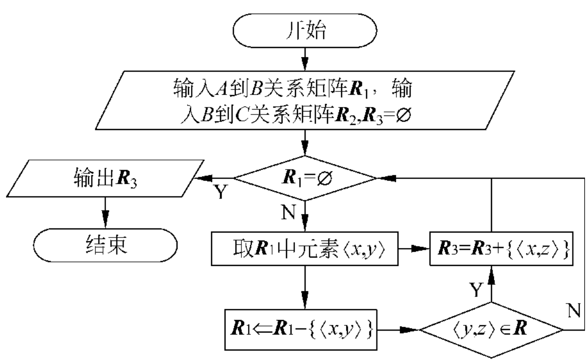

图 3.9 基于集合的复合关系生成算法流程图

输入：输入 A 到 B 关系矩阵 $\boldsymbol{R}_1$，输入 B 到 C 关系矩阵 $\boldsymbol{R}_2$。

输出：复合关系 $\boldsymbol{R}_3=\boldsymbol{R}_2\circ\boldsymbol{R}_1$。

思路：对 $\boldsymbol{R}_1$ 中每对元素 $\langle x,y\rangle$，在 $\boldsymbol{R}_2$ 中检查是否存在序偶 $\langle y,z\rangle$，如果存在则将序偶 $\langle x,z\rangle$ 写入 $\boldsymbol{R}_3$ 中。

2. 基于矩阵的复合关系生成算法

算法 3.4 基于矩阵的复合关系生成算法(见图 3.10)。

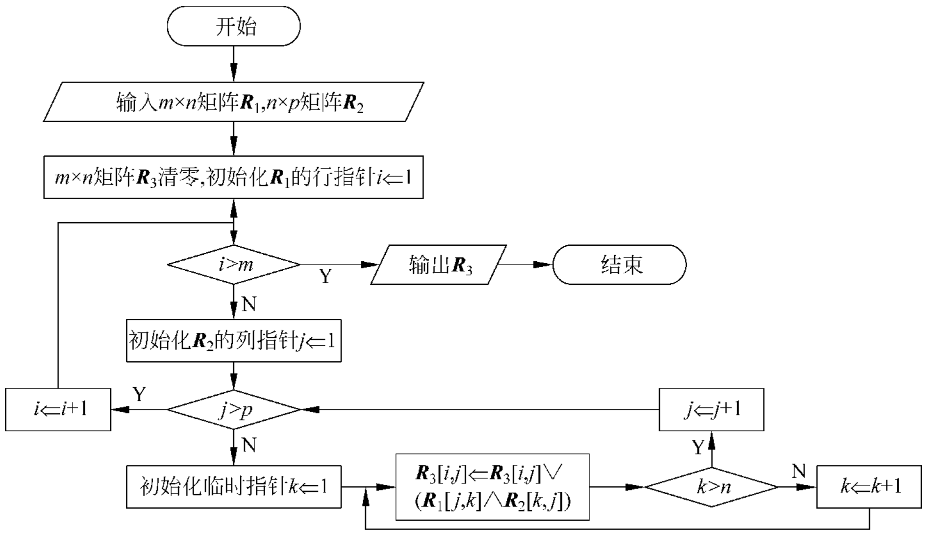

图 3.10 基于矩阵的复合关系生成算法流程图

输入:输入 A 到 B 关系矩阵 $\boldsymbol{R}_1$,B 到 C 关系矩阵 $\boldsymbol{R}_2$。

输出:复合关系 $\boldsymbol{R}_3=\boldsymbol{R}_2\circ\boldsymbol{R}_1$。

思路:对 $\boldsymbol{R}_1$ 中每对元素$\langle x,y\rangle$,在 $\boldsymbol{R}_2$ 中检查是否存在序偶$\langle y,z\rangle$,如果存在则将序偶$\langle x,z\rangle$写入 $\boldsymbol{R}_3$ 中。

习题 3.4

1. 设 $A=\{1,2,3,4\}$,R_1 和 R_2 为 A 上的关系,$R_1=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,4\rangle\}$,$R_2=\{\langle 1,4\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 2,4\rangle,\langle 3,2\rangle\}$,求 $R_1\circ R_2$,$R_2\circ R_1$,$R_1\circ R_2\circ R_1$,R_1^3。

2. 设 R_1、R_2、R_3是 A 上的二元关系,如果 $R_1\subseteq R_2$,证明:

(1) $R_1\circ R_3\subseteq R_2\circ R_3$

(2) $R_3\circ R_1\subseteq R_3\circ R_2$

3. 设 R_1 和 R_2 是集合 A 上的关系,判断下列命题的真假性,并阐明理由。

(1) 如果 R_1 和 R_2 都是自反的,那么 $R_1\circ R_2$ 是自反的。

(2) 如果 R_1 和 R_2 都是反自反的,那么 $R_1\circ R_2$ 是反自反的。

(3) 如果 R_1 和 R_2 都是对称的,那么 $R_1\circ R_2$ 是对称的。

(4) 如果 R_1 和 R_2 都是反对称的,那么 $R_1\circ R_2$ 是反对称的。

(5) 如果 R_1 和 R_2 都是传递的,那么 $R_1\circ R_2$ 是传递的。

4. 设 R 是从集合 A 到集合 B 的关系,S_1 和 S_2 是从集合 B 到集合 C 的一个关系,证明:

$$R\circ(S_1\cap S_2)\subseteq(R\circ S_1)\cap(R\circ S_2)$$

3.5 逆关系

3.5.1 逆关系的概念及性质

关系是序偶的集合，由于序偶的有序性，关系还有一些特殊的运算。

定义 3.8 设 R 是从 X 到 Y 的二元关系，若将 R 中每一序偶的元素顺序互换，得到的集合称为 R 的**逆关系**，记为 R^{-1}。即：

$$R^{-1}=\{\langle y,x\rangle \mid \langle x,y\rangle \in R\}$$

例如，在实数集上，关系"$<$"的逆关系是"$>$"。

从逆关系的定义，我们容易看出 $(R^{-1})^{-1}=R$。

定理 3.8 设 R、R_1 和 R_2 都是从 X 到 Y 的二元关系，则下列各式成立。

(1) $(R_1 \cup R_2)^{-1}=R_1^{-1} \cup R_2^{-1}$。

(2) $(R_1 \cap R_2)^{-1}=R_1^{-1} \cap R_2^{-1}$。

(3) $(X \times Y)^{-1}=Y \times X$。

(4) $(\bar{R})^{-1}=\overline{R^{-1}}$这里 $\bar{R}=X \times Y-R$。

(5) $(R_1-R_2)^{-1}=R_1^{-1}-R_2^{-1}$。

证明：

(1) $\langle x,y\rangle \in (R_1 \cup R_2)^{-1} \Leftrightarrow \langle y,x\rangle \in R_1 \cup R_2$

$\Leftrightarrow \langle y,x\rangle \in R_1 \vee \langle y,x\rangle \in R_2$

$\Leftrightarrow \langle x,y\rangle \in R_1^{-1} \vee \langle x,y\rangle \in R_2^{-1}$

$\Leftrightarrow \langle x,y\rangle \in R_1^{-1} \cup R_2^{-1}$

(4) $\langle x,y\rangle \in (\bar{R})^{-1} \Leftrightarrow \langle y,x\rangle \in \bar{R} \Leftrightarrow \langle y,x\rangle \notin R$

$\Leftrightarrow \langle x,y\rangle \notin R^{-1} \Leftrightarrow \langle x,y\rangle \in \overline{R^{-1}}$

(5) 因为 $R_1-R_2=R_1 \cap \overline{R_2}$，故有：

$$(R_1-R_2)^{-1}=(R_1 \cap \overline{R_2})^{-1}=R_1^{-1} \cap (\overline{R_2})^{-1}=R_1^{-1} \cap \overline{R_2^{-1}}=R_1^{-1}-R_2^{-1}$$

其他自证。 ■

定理 3.9 设 R 为从 X 到 Y 的关系，S 是从 Y 到 Z 的关系，则：

(1) $(R \circ S)^{-1}=S^{-1} \circ R^{-1}$

(2) $R_1 \subseteq R_2 \Leftrightarrow R_1^{-1} \subseteq R_2^{-1}$

证明：

(1) $\langle z,x\rangle \in (R \circ S)^{-1} \Leftrightarrow \langle x,z\rangle \in R \circ S$

$\Leftrightarrow (\exists y)(y \in Y \wedge \langle x,y\rangle \in R \wedge \langle y,z\rangle \in S)$

$\Leftrightarrow (\exists y)(y \in Y \wedge \langle y,x\rangle \in R^{-1} \wedge \langle z,y\rangle \in S^{-1})$

$\Leftrightarrow \langle z,x\rangle \in S^{-1} \circ R^{-1}$

所以，$(R \circ S)^{-1}=S^{-1} \circ R^{-1}$ ■

(2) 自证。

定理 3.10 设 R 是 X 上的二元关系，则：

(1) R 是对称的，当且仅当 $R=R^{-1}$。

(2) R 是反对称的，当且仅当 $R\cap R^{-1}\subseteq I_X$。

(3) R 是传递的，当且仅当 $R^2\subseteq R$。

(4) R 是自反的，当且仅当 $I_X\subseteq R$。

(5) R 是反自反的，当且仅当 $I_X\cap R=\varnothing$。

证明：

(1) 若 R 是对称的，则对 $\forall x,y\in X$：

$$\langle x,y\rangle \in R\Leftrightarrow\langle y,x\rangle \in R\Leftrightarrow\langle x,y\rangle \in R^{-1}$$

所以，$R=R^{-1}$；

若 $R=R^{-1}$，则对 $\forall x,y\in X$：

$$\langle x,y\rangle \in R\Leftrightarrow\langle y,x\rangle \in R^{-1}\Leftrightarrow\langle y,x\rangle \in R$$

所以，R 是对称的。

(3) 若 $R^2\subseteq R$，则对 $\forall x,y,z\in X$：

$$\langle x,y\rangle \in R \land \langle y,z\rangle \in R\Leftrightarrow\langle x,z\rangle \in R^2\Rightarrow\langle x,z\rangle \in R$$

所以，R 是传递的；

若 R 是传递的：

$$\forall\langle x,z\rangle \in R^2\Leftrightarrow(\exists y)(y \in X \land \langle x,y\rangle \in R \land \langle y,z\rangle \in R)\Rightarrow\langle x,z\rangle \in R$$

所以，$R^2\subseteq R$。

其他证明留为作业。 ■

关系 R^{-1} 的图形，是关系 R 图形中将其弧的箭头方向反置。R^{-1} 的关系矩阵 $\boldsymbol{M}_{R^{-1}}$ 是 $\boldsymbol{M}_R$ 的转置矩阵。

【例 3.17】 设 $R=\{\langle 1,a\rangle,\langle 2,b\rangle,\langle 3,a\rangle\}$是 $A=\{1,2,3\}$到 $B=\{a,b,c\}$的二元关系，S 是 B 到 $C=\{x,y,z\}$的二元关系，且 $S=\{\langle a,x\rangle,\langle b,x\rangle,\langle a,y\rangle\}$，求 $R\circ S$ 和 R^{-1}。

解：

$$R\circ S=\{\langle 1,x\rangle,\langle 1,y\rangle,\langle 2,x\rangle,\langle 3,x\rangle,\langle 3,y\rangle\}$$
$$R^{-1}=\{\langle a,1\rangle,\langle b,2\rangle,\langle a,3\rangle\}$$

或从

$$\boldsymbol{M}_R=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{M}_S=\begin{bmatrix}1&1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

得

$$\boldsymbol{M}_{R\circ S}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}\circ\begin{bmatrix}1&1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&0\\1&0&0\\1&1&0\end{bmatrix}$$

故取到 $R\circ S$ 同样的序元素；

而

$$\boldsymbol{M}_{R^{-1}}=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

故取到 R^{-1} 同样的序元素。

【例 3.18】 给定集合 $X=\{a,b,c\}$，R 是 X 上的二元关系，R 的关系矩阵：

$$\boldsymbol{M}_R=\begin{bmatrix}1&0&1\\1&1&0\\1&1&1\end{bmatrix}$$

求 R^{-1} 和 $R\circ R^{-1}$ 的关系矩阵。

解：

$$\boldsymbol{M}_{R^{-1}}=\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&1\\1&0&1\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{M}_{R\circ R^{-1}}=\begin{bmatrix}1&0&1\\1&1&0\\1&1&1\end{bmatrix}\circ\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&1\\1&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{bmatrix}$$

3.5.2　逆关系生成算法

算法 3.5　逆关系生成算法(见图 3.11)。

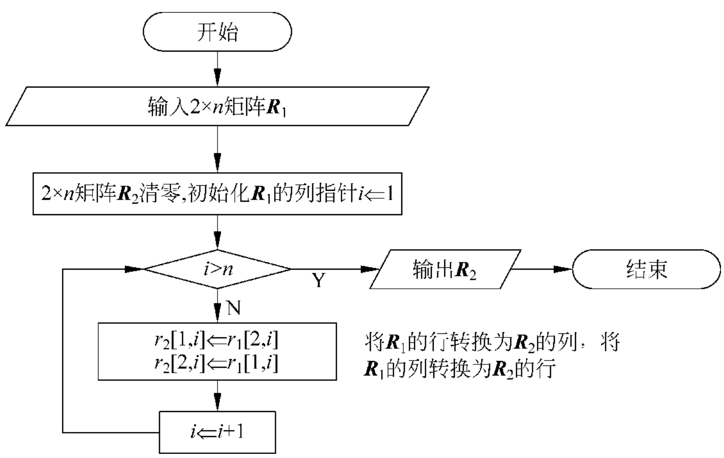

图 3.11　逆修改生成算法流程图

输入：两行 n 列矩阵 $\boldsymbol{R}_1$。

输出：两行 n 列矩阵 $\boldsymbol{R}_2$。

思路：逐列遍历 $\boldsymbol{R}_1$，将 $\boldsymbol{R}_1$ 的行转换为 $\boldsymbol{R}_2$ 的列，$\boldsymbol{R}_1$ 的列转换为 $\boldsymbol{R}_2$ 的行。

习题 3.5

1. 设 R 是 A 上的关系，证明：

(1) R 是自反的当且仅当 $I_A\subseteq R$。

(2) R 是反自反的当且仅当 $I_A\cap R=\varnothing$。

(3) R 是对称的当且仅当 $R=R^{-1}$。

(4) R 是反对称的当且仅当 $R\cap R^{-1}\subseteq I_A$。

(5) R 是传递的当且仅当 $R\circ R\subseteq R$。

2. 设 R 是集合 A 上的反对称关系，$|A|=h$，指了在 $R\cap R^{-1}$ 的关系矩阵中有多少个非零值？

3. 设 R 和 S 是集合 A 上的二元关系，试证：

(1) 当 R 和 S 是自反的，则 $R\cup S$、$R\cap S$、$R\circ S$ 和 R^{-1} 也是自反的；而 $\bar{R}$ 和 $R-S$ 则不一定。

(2) 当 R 和 S 是对称的，则 $R\cup S$、$R\cap S$、$\bar{R}$、$R-S$ 和 R^{-1} 也是对称的；而 $R\circ S$ 则不一定。

3.6 关系的闭包运算

3.6.1 关系传递闭包

关系的闭包运算是由已知关系，通过增加最少的序偶生成满足某种指定性质的关系的运算。

例如，设 $A=\{a,b,c\}$，A 上的二元关系 $R=\{\langle a,a\rangle,\langle a,b\rangle,\langle b,c\rangle,\langle c,c\rangle\}$，则 A 上含 R 且最小的自反关系是：$r(R)=R\cup\{\langle b,b\rangle\}$。

A 上含 R 且最小的对称关系是：$s(R)=R\cup\{\langle b,a\rangle,\langle c,b\rangle\}$。

A 上含 R 且最小的传递关系是：$t(R)=R\cup\{\langle a,c\rangle\}$。

定义 3.9 设 R 是 X 上的二元关系，如果有另一个 X 上的关系 R' 满足：

(1) R' 是自反的(对称的、传递的)。

(2) $R'\supseteq R$。

(3) 对于任何 X 上的自反的(对称的、传递的)关系 R''，若 $R''\supseteq R$，就有 $R''\supseteq R'$。则称关系 R' 为 R 的自反(对称、传递)**闭包**，记作 $r(R)$($s(R)$，$t(R)$)。

显然，自反(对称、传递)闭包是包含 R 的最小自反(对称、传递)关系。

定理 3.11 设 R 是 X 上的二元关系，那么：

(1) R 是自反的，当且仅当 $r(R)=R$。

(2) R 是对称的，当且仅当 $s(R)=R$。

(3) R 是传递的，当且仅当 $t(R)=R$。

证明：(1) 若 R 是自反的。

$R\supseteq R$，对任何包含 R 的自反关系 R''，有 $R''\supseteq R$，故 $r(R)=R$；

若 $r(R)=R$，根据闭包定义，R 必是自反的。

(2)、(3)的证明完全类似。 ■

下面讨论由给定关系 R，求取 R' 的方法。

定理 3.12 设 R 是集合 X 上的二元关系，则：

(1) $r(R)=R\cup I_X$。

(2) $s(R)=R\cup R^{-1}$。

(3) $t(R)=\bigcup_{i=1}^{\infty}R^i$，$t(R)$通常也记作 R^+。

(证明略) ■

【例 3.19】 设 $X=\{x,y,z\}$，R 是 X 上的二元关系，$R=\{\langle x,y\rangle,\langle y,z\rangle,\langle z,x\rangle\}$，求 $r(R)$、$s(R)$、$t(R)$。

解：

$$r(R)=R\cup I_X=\{\langle x,y\rangle,\langle y,z\rangle,\langle z,x\rangle,\langle x,x\rangle,\langle y,y\rangle,\langle z,z\rangle\}$$

$$s(R)=R\cup R^{-1}=\{\langle x,y\rangle,\langle y,z\rangle,\langle z,x\rangle,\langle y,x\rangle,\langle z,y\rangle,\langle x,z\rangle\}$$

为了求得 $t(R)$，先写出：

$$\boldsymbol{M}_R=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{M}_{R^2}=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{bmatrix}^2=\begin{bmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}$$

即：

$$R^2=\{\langle x,z\rangle,\langle y,x\rangle,\langle z,y\rangle\}$$

$$\boldsymbol{M}_{R^3}=\boldsymbol{M}_R^2\circ\boldsymbol{M}_R=\begin{bmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}\circ\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

$$R^3=\{\langle x,x\rangle,\langle y,y\rangle,\langle z,z\rangle\}$$

$$\boldsymbol{M}_{R^4}=\boldsymbol{M}_{R^3}\circ\boldsymbol{M}_R=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\circ\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{bmatrix}$$

$$R^4=\{\langle x,y\rangle,\langle y,z\rangle,\langle z,x\rangle\}=R$$

$$R^5=R^4\circ R=R^2$$

继续这个运算有：

$$R=R^4=\cdots=R^{3n+1}$$

$$R^2=R^5=\cdots=R^{3n+2}$$

$$R^3=R^6=\cdots=R^{3n+3}\quad(n=1,2,\cdots)$$

$$t(R)=\bigcup_{i=1}^{\infty}R^i=R\cup R^2\cup R^3\cup\cdots=R\cup R^2\cup R^3$$

$$=\{\langle x,y\rangle,\langle y,z\rangle,\langle z,x\rangle,\langle x,z\rangle,\langle y,x\rangle,\langle z,y\rangle,\langle x,x\rangle,\langle y,y\rangle,\langle z,z\rangle\}$$

从以上例题中看到，若 X 有限，比如含有 n 个元素，那么求取 X 上二元关系 R 的传递闭包 $t(R)$不必计算到对 R 的无限大次复合，而最多不超过 n 次复合。

定理 3.13 设 X 是含有 n 个元素的集合，R 是 X 上的二元关系，则存在一个正整数 $k\leqslant n$，使得 $t(R)=\bigcup_{i=1}^{k}R^i$。

证明：设 $x_i,x_j\in X$，记 $t(R)=R^+$。

若 $x_iR^+x_j$，则存在整数 $p>0$，使得 $x_iR^Px_j$ 成立，既存在序列 $a_1,a_2,\cdots,a_{p-1},a_i\in X(i=1,2,\cdots,m-1)$，有 $x_iRa_1,a_1Ra_2,\cdots,a_{p-1}Rx_j$。

设满足上述条件的最小 p 大于 n，不妨设 $x_i=a_0,x_j=a_p$，则序列中必有 $0\leqslant t<q<s\leqslant p$，使

得 $a_t=a_q$ 或 $a_q=a_s$。不妨设 $a_t=a_q$，此时序列就成为：

$$\underbrace{x_iRa_1, a_1Ra_2, \cdots, a_{t-1}Ra_t}_{t个},\quad \underbrace{a_tRa_{q+1}, \cdots, a_{p-1}Rx_j}_{(p-q)个}$$

这表明 $x_iR^kx_j$ 存在，其中 $k=t+p-q=p-(q-t)<p$，这与 p 是最小的假设矛盾，所以，$p>n$ 不成立，即 $p\leqslant n$。

所以 $t(R)=\bigcup\limits_{i=1}^{k}R^i(k\leqslant n)$。

一般地，取 $t(R)=\bigcup\limits_{i=1}^{n}R^i$，式中的 n 给出了复合次数的上限。

【例 3.20】 设 $A=\{a,b,c\}$，给定 A 上的关系 $R=\{\langle a,a\rangle,\langle a,b\rangle,\langle b,c\rangle,\langle c,c\rangle\}$，求 $t(R)$。

解：

$$t(R)=\bigcup_{i=1}^{3}R^i$$

$$\boldsymbol{M}_R=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&0&1\\0&0&1\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{M}_{R^2}=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&0&1\\0&0&1\end{bmatrix}^2=\begin{bmatrix}1&1&1\\0&0&1\\0&0&1\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{M}_{R^3}=\begin{bmatrix}1&1&1\\0&0&1\\0&0&1\end{bmatrix}\circ\begin{bmatrix}1&1&0\\0&0&1\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&1\\0&0&1\\0&0&1\end{bmatrix}$$

所以

$$\boldsymbol{M}_{t(R)}=\begin{bmatrix}1&1&1\\0&0&1\\0&0&1\end{bmatrix}$$

即 $t(R)=\{\langle a,a\rangle,\langle a,b\rangle,\langle a,c\rangle,\langle b,c\rangle,\langle c,c\rangle\}$。

3.6.2 关系传递闭包计算的 Warshall 算法

为计算元素较多的有限集合 X 上二元关系 R 的传递闭包，Warshall 提出了一个有效的算法(假定集合 X 含有 n 个元素)。

算法 3.6 Warshall 算法。

(1) 置新矩阵 $\boldsymbol{M}:=\boldsymbol{M}_R$。

(2) 置 $i:=1$。

(3) 对 $j=1,2,\cdots,n$，若 $r_{ji}=1(\boldsymbol{M}_R=[r_{ij}]_{m\times n})$，则置 $r_{jk}:=r_{jk}\vee r_{ik}$，$k=1,2,\cdots,n$。

(4) $i:=i+1$。

(5) 如果 $i\leqslant n$，则转到步骤(3)，否则停止。

【例 3.21】

已知 $\boldsymbol{M}_R=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&0&1\\0&0&1\end{bmatrix}$,求 R^+。

解：按照 Warshall 算法,从 $\boldsymbol{M}_R$ 出发,只要遵循 i 列、j 行均为 1,则置(j,i)为原矩阵的元素 1 保持不变。

对集合上关系 R,首先将其关系矩阵 $\boldsymbol{M}_{R^+}$ 赋予 $\boldsymbol{M}$：

$$\boldsymbol{M}=\boldsymbol{M}_R=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&0&1\\0&0&1\end{bmatrix}$$

而后的每后一次循环重复操作,均在前一次操作结果的矩阵 $\boldsymbol{M}$ 上进行。

置当前行为第 1 行,查看第 1 列中 1,对有 1 的行进行改写,改写方法是：将当前行的元素与列中有 1 的行的元素分别做析取。对本例,$i=1$ 时,第 1 列中只有 $r_{11}=1$,将第 1 行与第 1 行各对应元素进行逻辑加,仍记于第 1 行：

$$\begin{bmatrix}1&1&0\\0&0&1\\0&0&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&0\\0&0&1\\0&0&1\end{bmatrix}$$

置当前行为第 2 行,查看第 2 列中 1,对有 1 的行进行改写。对本例,$i=2$ 时,第 2 列中 $r_{12}=1$,将第 2 行与第 1 行各对应元素进行逻辑加,仍记于第 1 行：

$$\to\begin{bmatrix}1&1&1\\0&0&1\\0&0&1\end{bmatrix}$$

置当前行为第 3 行,重复上述操作并结束。对本例,$i=3$ 时,第 3 列中 $r_{13}=1,r_{23}=1$, $r_{33}=1$,将第 3 行分别与第 1 行、第 2 行、第 3 行各对应元素进行逻辑加,仍分别记于第 1 行、第 2 行、第 3 行：

$$\to\begin{bmatrix}1&1&1\\0&0&1\\0&0&1\end{bmatrix}$$

得 $R^+=\{\langle a,a\rangle,\langle a,b\rangle,\langle a,c\rangle,\langle b,c\rangle,\langle c,c\rangle\}$。

结果与例 3.20 一致。

从一种性质的闭包关系出发,求取另一种性质的闭包关系,具有以下运算律。

定理 3.14 设 R 是集合 X 上的二元关系,则：

(1) $rs(R)=sr(R)$。

(2) $rt(R)=tr(R)$。

(3) $ts(R)\supseteq st(R)$。

证明：(1) $sr(R)=s(r(R))=s(I_X\cup R)=(I_X\cup R)\cup(I_X\cup R)^{-1}$

$=(I_X\cup R)\cup(I_X^{-1}\cup R^{-1})=I_X\cup R\cup R^{-1}=I_X\cup s(R)=r(s(R))=rs(R)$

这里,$I_X^{-1}=I_X$。

(2) $tr(R)=t(I_X\cup R)=\bigcup_{i=1}^{\infty}(I_X\cup R)^i=\bigcup_{i=1}^{\infty}\left(I_X\cup\bigcup_{j=1}^{i}R^j\right)$

$$=I_X\cup\bigcup_{i=1}^{\infty}\bigcup_{j=1}^{i}R^j=I_X\cup\bigcup_{i=1}^{\infty}R^i=I_X\cup t(R)=r(t(R))=rt(R)$$

这里,$I_X\circ R=R\circ I_X=R$,$I_X^k=I_X(k=1,2,\cdots)$。

(3) 留作练习请读者自证。 ■

习题 3.6

1. 设 $A=\{1,2,3,4,5\}$,$R\subseteq A\times A$,$R=\{\langle 1,2\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 2,5\rangle,\langle 3,4\rangle,\langle 4,3\rangle,\langle 5,5\rangle\}$用作图方法矩阵运算的方法求 $r(R)$、$s(R)$、$t(R)$。

2. 设 $A=\{1,2,3,4\}$,$R\subseteq A\times A$,$R=\{\langle 1,2\rangle,\langle 2,4\rangle,\langle 3,4\rangle,\langle 4,3\rangle,\langle 3,3\rangle\}$。

(1) 证明 R 不是传递的。

(2) 求 R_1,使 $R_1\supseteq R$ 并且 R_1 是传递的。

(3) 是否存在 R_2,使 $R_2\supseteq R$,$R_2\neq R_1$ 并且 R_2 是传递的。

3. 设 R_1 和 R_2 是集合 A 上的二元关系,试证明:

(1) $r(R_1\cup R_2)=r(R_1)\cup r(R_2)$。

(2) $s(R_1\cup R_2)=s(R_1)\cup s(R_2)$。

(3) $t(R_1\cup R_2)\supseteq t(R_1)\cup t(R_2)$。

并举出使$|A|>1$ 时使 $t(R_1\cup R_2)\supset t(R_1)\cup t(R_2)$的实例。

4. 设 R_1 和 R_2 是集合 A 上的二元关系,试证明:

(1) $r(R_1\cap R_2)=r(R_1)\cap r(R_2)$。

(2) $s(R_1\cap R_2)\subseteq s(R_1)\cap s(R_2)$。

(3) $t(R_1\cap R_2)\subseteq t(R_1)\cap t(R_2)$。

并请给出$|A|>1$ 时,使 $s(R_1\cap R_2)\subset s(R_1)\cap s(R_2)$和 $t(R_1\cap R_2)\subset t(R_1)\cap t(R_2$ 成立)的示例。

3.7 等价关系

当 $A\times B$ 有很多元素时,A 与 B 之间的关系也会有很多的。因为 $R\subseteq A\times B$ 当且仅当 $R\in P(A\times B)$,不难看出,当 $R,H\subseteq A\times B$ 时 $R\cup H$、$R\cap H$、$R-H$ 等也都是 A 与 B 之间的关系。在数学中,有许多关系是令人感兴趣的。

3.7.1 集合的划分和覆盖

设 A 是某一所综合性大学本科学生全体组成的集合,S_i 是对 A 的某种分类的集合($i=1,2,3$)。若按文理科分类,则有 $S_1=\{S_{11},S_{12}\}$,其中 S_{11} 表示理科学生全体的集合、S_{12} 表示文科学生全体的集合;若按年级分类,则有 $S_2=\{S_{21},S_{22},S_{23},S_{24}\}$,其中 $S_{2j}(j=1,2,3,4)$表示该大学 j 年级学生全体的集合;若按系分类,则有 $S_3=\{S_{31},S_{32},S_{33},S_{34},S_{35},S_{36}\}$,这说明这所大学有六个系。分类法尽管给出了三种,但是它们拥有共同的特点:(1)S_i 的元素

都是 A 的非空子集；(2)S_i 的元素求交是空集、求并就是 A。此时，我们就说 S_i 是集合 A 的一个划分。

定义 3.10　设 A 是非空集合，A 的子集的集合 $S=\{A_1,A_2,\cdots,A_m\}$，如果满足：

(1) $A_1,A_2,\cdots,A_m$ 都是非空集合。

(2) $\bigcup\limits_{i=1}^{m} A_i=A$。

(3) $A_i\cap A_j=\varnothing,(i\neq j)$。

则称集合 S 是集合 A 的**划分**，称 A_i 是 S 的**分块**。

若 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$，则 A 有两个简单的划分：一是 $\{\{a_1\},\{a_2\},\cdots,\{a_n\}\}$，称为 A 的**最大划分**(分块最多)；二是 $A=\{\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}\}$，称为 A 的**最小划分**(分块最少)。

例如，$A=\{a,b,c,d\}$，考虑下列子集：

$$D=\{\{a,d\},\{b,c\}\},\quad G=\{\{a,b,c,d\}\}$$
$$E=\{\{a\},\{b\},\{c\},\{d\}\},\quad F=\{\{a,b\},\{a,c\}\}$$

则 D、G、E 是 A 的划分，其中 G 是最小划分，E 是最大划分；F 不是 A 的划分。

3.7.2　等价关系与等价类

1. 等价关系

定义 3.11　设 R 为定义在集合 A 上的一个关系，若 R 是自反的、对称的和传递的，则 R 称为**等价关系**。

【例 3.22】

(1) 平面上三角形集合中，三角形的相似关系是等价关系。

(2) 数的相等关系是任何数集上的等价关系。

(3) 一群人的集合中姓氏相同的关系也是等价关系。

(4) 设 A 是任意非空集合，则 A 上的恒等关系 I_A 和全域关系 E_A 均是 A 上的等价关系。

【例 3.23】　设集合 $A=\{a,b,c,d,e\}$，

$$R=\{\langle a,a\rangle,\langle a,b\rangle,\langle b,a\rangle,\langle b,b\rangle,\langle c,c\rangle,\langle c,d\rangle,\langle c,e\rangle,$$
$$\langle d,c\rangle,\langle d,d\rangle,\langle d,e\rangle,\langle e,c\rangle,\langle e,d\rangle,\langle e,e\rangle\}$$

验证 R 是 A 上的等价关系。

证明：R 的关系矩阵如下所示，关系图如图 3.12 所示。

$$\boldsymbol{M}_R=\begin{bmatrix}1&1&0&0&0\\1&1&0&0&0\\0&0&1&1&1\\0&0&1&1&1\\0&0&1&1&1\end{bmatrix}$$

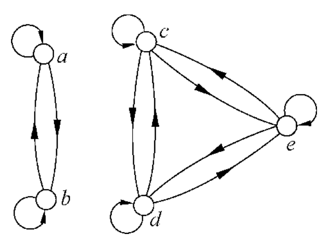

图 3.12　例 3.23 的关系图

在关系矩阵中，对角线上的所有元素都是 1，关系图上每个结点都有自环，说明 R 是自反的。关系矩阵是对称的，关系图上任意两结点间或没有弧线连接，或有成对弧出现，故 R 是对称的。从 R 的序偶表示式中，可以看出 R 是传递的。故 R 是 A 上的等价关系。　■

【例 3.24】 设 Z 为整数集，$R=\{\langle x,y\rangle \mid x\in Z, y\in Z, x\equiv y \pmod k\}$，其中 $x\equiv y \pmod k$ 当且仅当 $\exists m\in Z$，使得 $x-y=km$，证明 R 是等价关系。

证明：设任意 $a,b,c\in Z$。

(1) $a-a=k\cdot 0$，所以，$\langle a,a\rangle\in R$，R 是自反的。

(2) 若 $a\equiv b\pmod k$，$a-b=kt$（t 为整数），则 $b-a=-kt$，所以，$b\equiv a\pmod k$，R 是对称的。

(3) 若 $a\equiv b\pmod k$，$b\equiv c\pmod k$，则 $a-b=kt$，$b-c=ks$（t,s 为整数），$a-c=a-b+b-c=k(t+s)$，所以，$a\equiv c\pmod k$，R 是传递的。

因此，R 是等价关系。我们称之为整数集 Z 上的模 k 同余关系。 ■

2. 等价类

定义 3.12 设 R 是集合 A 上的等价关系，对任何 $a,b\in A$，若 aRb，则称 a 与 b 等价。对任何 $a\in A$，集合 A 中等价于 a 的所有元素组成的集合称为以 a 为代表元的（A 关于等价关系 R 的）**等价类**，记作 $[a]_R$。即：

$$[a]_R=\{x \mid x\in A, aRx\}$$

由等价类的定义可知 $[a]_R$ 是非空的，因为 aRa，$a\in[a]_R$。因此，任给集合 A 及其上的等价关系 R，必可写出 A 上各个元素的等价类。在例 3.26 中，A 的各个元素的等价类为：

$$[a]_R=\{x \mid x\in A, aRx\}=\{a,b\}=\{x \mid x\in A, bRx\}=[b]_R$$

$$[c]_R=\{x \mid x\in A, cRx\}=\{c,d,e\}=\{x \mid x\in A, dRx\}$$

$$=[d]_R=\{x \mid x\in A, eRx\}=[e]_R$$

可见，A 上的等价关系 R 的不同的等价类有两个。

【例 3.25】 设 Z 是整数集合，R 是模 3 同余关系，即：

$$R=\{\langle x,y\rangle \mid x\in Z, y\in Z, x\equiv y \pmod 3\}$$

确定由 Z 的元素所产生的等价类。

解：例 3.24 已证明整数集合上的模 k 同余的关系是等价关系，故本例中由 Z 的元素所产生的等价类是：

$[0]_R=\{\cdots,-6,-3,0,3,6,\cdots\}$

$[1]_R=\{\cdots,-5,-2,1,4,7,\cdots\}$

$[2]_R=\{\cdots,-4,-1,2,5,8,\cdots\}$

从本例可以看到，在集合 Z 上模 3 同余等价关系 R 所构成的等价类有：

$[0]_R=[3]_R=[-3]_R=\cdots=[3k]_R$

$[1]_R=[4]_R=[-2]_R=\cdots=[3k+1]_R$

$[2]_R=[5]_R=[-1]_R=\cdots=[3k+2]_R$

$$k=\cdots-2,-1,0,1,2,\cdots$$

定理 3.15 设给定集合 A 上的等价关系 R，对于 $a,b\in A$ 有 aRb 当且仅当 $[a]_R=[b]_R$。

证明：若 $[a]_R=[b]_R$，因为 $a\in[a]_R$，故 $a\in[b]_R$，即 bRa，则 aRb。

若 aRb，则 $\forall c\in[a]_R\Rightarrow aRc\Rightarrow cRa\Rightarrow cRb\Rightarrow bRc\Rightarrow c\in[b]_R$，即 $[a]_R\subseteq[b]_R$；$\forall c\in[b]_R\Rightarrow bRc\Rightarrow aRc\Rightarrow c\in[a]_R$，即 $[b]_R\subseteq[a]_R$。所以，$[a]_R=[b]_R$。 ■

定义 3.13(商集) 集合 A 上的等价关系 R,其所有等价类的集合称作 A 关于 R 的**商集**,记作:

$$\frac{A}{R}=\{[a]_R \mid a\in A\}$$

例 3.24 中商集:

$$\frac{A}{R}=\{\{a,b\},\{c,d,e\}\}$$

例 3.25 中商集:

$$\frac{Z}{R}=\{[0]_R,[1]_R,[2]_R\}$$

我们注意到商集$\dfrac{Z}{R}$中,$[0]_R\cup[1]_R\cup[2]_R=Z$,且任意两个等价类的交为$\varnothing$,于是我们可得出下述重要定理。

定理 3.16 集合 A 上的等价关系 R,决定了 A 的一个划分,该划分就是商集$\dfrac{A}{R}$。

我们需要证明非空集合 A 在其上的等价关系 R 下形成的等价类的全体的集合——商集——满足:

(1) 每一等价类都是 A 的子集,A 中任一元素均属于某一等价类,即等价类全体的并集是 A。

(2) 不同的等价类之间交是空集。

证明:$\forall a\in A$,因为 $[a]_R=\{x\mid x\in A,aRx\}$,所以,$[a]_R\subseteq A$,从而$\bigcup\limits_{a\in A}[a]_R\subseteq A$;因为 R 自反,即 aRa,所以,$a\in[a]_R$,则 $A\subseteq\bigcup\limits_{a\in A}[a]_R$;故 $\bigcup\limits_{a\in A}[a]_R=A$。(1)得证。

为证明(2),可用反证法。

设$\exists a,b\in A$,$[a]_R\neq[b]_R$,且$[a]_R\cap[b]_R\neq\varnothing$;

则$\exists c\in[a]_R\cap[b]_R\subseteq A$,使 aRc,bRc 成立。

由对称性得 cRb,再由传递性得 aRb,据定理 3.17,必有 $[a]_R=[b]_R$,这与题设矛盾,(2)得证。所以,$\dfrac{A}{R}$是 A 的对应于 R 的一个划分。 ■

定理 3.17 设 $S=\{S_1,S_2,\cdots,S_m\}$是集合 A 的一个划分,则存在 A 上的一个等价关系 R,使得 S 是 A 关于 R 的商集。

证明:在集合 A 上定义关系 R,对任意 $a,b\in A$,aRb 当且仅当 a,b 在同一分块中。可以证明这样定义的关系 R 是一个等价关系。因为:

(1) a 与 a 在同一分块中,故必有 aRa,即 R 是自反的。

(2) 若 a 与 b 在同一分块中,b 与 a 也必在同一分块中,即 $aRb\Rightarrow bRa$,故 R 是对称的。

(3) 若 a 与 b 在同一分块中,b 与 c 在同一分块中,因为 $S_i\cap S_j=\varnothing$,即 b 属于且仅属于一个分块,故 a 与 c 必在同一分块中,即$(aRb)\wedge(bRc)\Rightarrow aRc$,故 R 是传递的。

所以,R 是等价关系。

由 R 的定义可知:$S=\dfrac{A}{R}$。

由定理 3.17 可知：由集合 A 的划分 $S=\{S_1,S_2,\cdots,S_m\}$ 所确定的 A 上的等价关系 R 为：

$$R = S_1 \times S_1 \cup S_2 \times S_2 \cup \cdots \cup S_m \times S_m \qquad \blacksquare$$

定理 3.16 和定理 3.17 说明：非空集合 A 上的等价关系与 A 的划分一一对应。

【例 3.26】 设 $A=\{a,b,c,d,e\}$ 的划分 $S=\{\{a,b\},\{c\},\{d,e\}\}$，试由划分 S 确定 A 上的一个等价关系 R。

解：$R_1=\{a,b\}\times\{a,b\}=\{\langle a,a\rangle,\langle a,b\rangle,\langle b,a\rangle,\langle b,b\rangle\}$

$R_2=\{c\}\times\{c\}=\{\langle c,c\rangle\}$

$R_3=\{d,e\}\times\{d,e\}=\{\langle d,d\rangle,\langle d,e\rangle,\langle e,d\rangle,\langle e,e\rangle\}$

$R=R_1\cup R_2\cup R_3=\{\langle a,a\rangle,\langle a,b\rangle,\langle b,a\rangle,\langle b,b\rangle,\langle c,c\rangle,\langle d,d\rangle,\langle d,e\rangle,\langle e,d\rangle,\langle e,e\rangle\}$

显然，$S=\dfrac{A}{R}$。

定理 3.18 设 R_1 和 R_2 为非空集合 A 上的等价关系，则：

$$R_1 = R_2 \Leftrightarrow \frac{A}{R_1} = \frac{A}{R_2}$$

证明：$\dfrac{A}{R_1}=\{[a]_{R_1}\mid a\in A\}$，$\dfrac{A}{R_2}=\{[a]_{R_2}\mid a\in A\}$。

若 $R_1=R_2$，$\forall a\in A$，$[a]_{R_1}=\{x\mid x\in A,aR_1x\}=\{x\mid x\in A,aR_2x\}=[a]_{R_2}$，故：

$$\{[a]_{R_1}\mid a\in A\}=\{[a]_{R_2}\mid a\in A\}\text{，即}\frac{A}{R_1}=\frac{A}{R_2}$$

若 $\dfrac{A}{R_1}=\dfrac{A}{R_2}$，即 $\{[a]_{R_1}\mid a\in A\}=\{[a]_{R_2}\mid a\in A\}$，则对 $\forall[a]_{R_1}\in\dfrac{A}{R_1}$，必有 $[c]_{R_2}\in\dfrac{A}{R_2}$，使得 $[a]_{R_1}=[c]_{R_2}$，故：

$$\langle a,b\rangle\in R_1\Leftrightarrow a\in[a]_{R_1}\wedge b\in[a]_{R_1}\Leftrightarrow a\in[c]_{R_2}\wedge b\in[c]_{R_2}$$
$$\Leftrightarrow\langle a,c\rangle\in R_2\wedge\langle c,b\rangle\in R_2\Rightarrow\langle a,b\rangle\in R_2$$

所以，$R_1\subseteq R_2$；类似地有 $R_2\subseteq R_1$，因此，$R_1=R_2$。 $\blacksquare$

3.7.3 等价关系相关算法

1. 给定划分生成等价关系算法

算法 3.7 由划分生成等价关系(见图 3.13)。

输入：输入划分 $A=\{A_1,A_2,\cdots,A_k\}$。

输出：关系 R。

思路：对每一个块 A_i 计算笛卡儿积，并写入到 R。

2. 给定等价关系生成等价类算法

算法 3.8 由等价关系生成等价类(见图 3.14)。

输入：输入等价关系 R。

输出：等价类 Rx。

思路：首先构造 R 的第一坐标集合 A，然后对 A 中任意元素 x，在 R 中寻找(x,y)，如果找到，将 y 写入到 Rx，直到 A 遍历完。

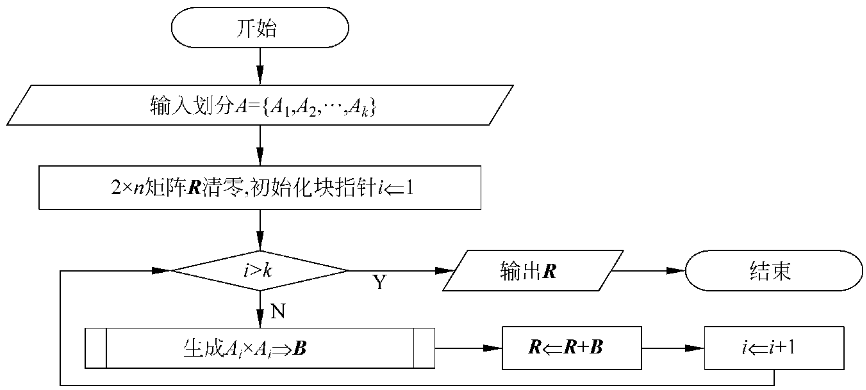

图 3.13 给定划分生成等价关系算法流程图

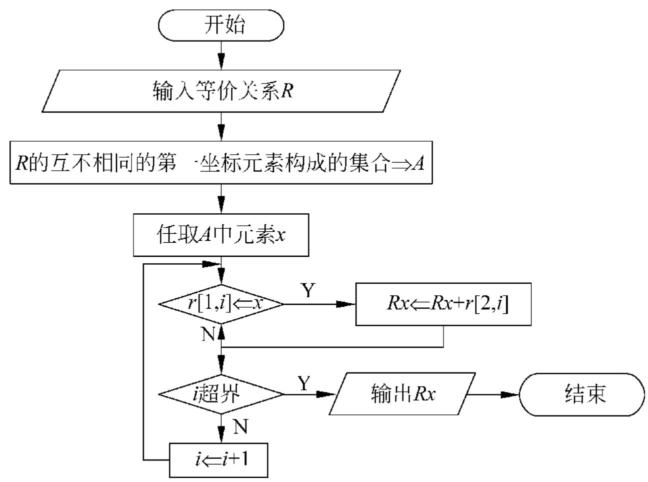

图 3.14 给定等价关系生成等价类算法流程图

习题 3.7

1. 设 $A=\{1,2,3,4,\cdots,9\}$,定义 $A\times A$ 上的关系如下:

$\langle a,b\rangle R\langle c,d\rangle$ 当且仅当 $a+d=b+c$

(1) 证明 R 是 $A\times A$ 上的等价关系。

(2) 求$[\langle 2,5\rangle]_R$。

(3) $R\subseteq A\times A$ 对吗？请阐明理由。

2. 设 R 是集合 A 上的等价关系,证明 R^{-1} 也是集合 A 上的等价关系。

3. 设 R_1 和 R_2 都是集合 A 上的等价关系。

(1) 证明 $R_1\cap R_2$ 也是 A 上的等价关系。

(2) 用例子证明 $R_1\cup R_2$ 不一定是 A 上的等价关系(要尽可能小地选取集合 A)。

4. 设 R 是 A 上的等价关系,将 A 的元素按 R 的等价类顺序排列,请指出此等价关系 R 的关系矩阵 $\boldsymbol{M}_R$ 有何特征？

5. 设 R_1 和 R_2 是非空集合 A 上的等价关系，对下列各种情况，指出哪些是 A 上的等价关系；若不是，请用例子说明。

(1) $A\times A-R_1$

(2) R_1-R_2

(3) R_1^2

(4) $r(R_1-R_2)$ （R_1-R_2 的自反闭包）

(5) $R_1\circ R_2$

6. 设 $A=\{1,2,3,4\}$，请指出 A 上所有等价关系是多少？并阐明理由。

7. 设 $A=\{1,2,3,4,5,6\}$，确定 A 上的等价关系 R，使此 R 能产生划分 $\{\{1,2,3\},\{4\},\{5,6\}\}$。

8. 设 R 是集合 A 上的关系。

R 是循环当且仅当 $(\forall a\in A)(\forall b\in A)(\forall c\in A)(aRb\wedge bRc\Rightarrow cRa)$

证明：R 是自反的和循环的，当且仅当 R 是等价关系。

9. 设 Π_1 和 Π_2 是非空集合 A 的划分，说明下面各种情况哪些是 A 的划分？哪些不是 A 的划分？哪些可能是 A 的划分？并阐明理由。

(1) $\Pi_1\cup\Pi_2$

(2) $\Pi_1\cap\Pi_2$

(3) $\Pi_1-\Pi_2$

(4) $(\Pi_1\cap(\Pi_2-\Pi_1))\cup\Pi_1$

10. 设 R 是集合 A 上的二元关系，定义 $S=\{\langle a,b\rangle\mid\exists c\in A$，使 $\langle a,c\rangle\in R$ 且 $\langle c,b\rangle\in R\}$。证明：若 R 是 A 上的等价关系，则 $S=R$。

11. $A=\{1,2,3,4\}$ 在幂集 $\rho(A)$ 上定义的二元关系如下：$R=\{(S,T)\mid S,T\in\rho(A),|S|=|T|\}$，写出商集 $\rho(A)/R$。

12. 设 R 和 S 为 A 上的两个等价关系，且 $R\subseteq S$。定义 A/R 上的关系 R/S：

$$\langle[x],[y]\rangle\in R/S\quad 当且仅当\langle x,y\rangle\in S$$

证明：R/S 为 A/R 上的等价关系。

3.8 相容关系

定义 3.14 给定集合 A 上的关系 R，若 R 是自反的、对称的，则称 R 是 A 上的**相容关系**。

相容关系 R 只要求满足自反性与对称性，因此，等价关系必定是相容关系，但反之不真。

【例 3.27】 设 A 是由下列英文单词组成的集合：

$$A=\{cat,teacher,cold,desk,knife,by\}$$

定义关系：$R=\{\langle x,y\rangle\mid x,y\in A$，且 x 和 y 有相同的字母$\}$。显然，R 是一个相容关系。

令 $x_1=cat,x_2=teacher,x_3=cold,x_4=desk,x_5=knife,x_6=by$。

R 的关系图如图 3.15 所示。

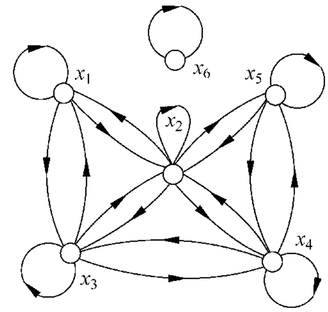

图 3.15　例 3.27 的关系图

R 的关系矩阵为 $\boldsymbol{M}_R=\begin{bmatrix}1&1&1&0&0&0\\1&1&1&1&1&0\\1&1&1&1&0&0\\0&1&1&1&1&0\\0&1&0&1&1&0\\0&0&0&0&0&1\end{bmatrix}$。

由于相容关系是自反和对称的，因此，其关系矩阵的对角线元素都是 1，且矩阵是对称的。为此我们可将矩阵用梯形表示。

同理，在相容关系的关系图中，每个结点处都有自环且每两个相关联的结点间的弧线都是成对出现的，为了简化图形，我们今后对相容关系图，不画自环，并用单线代替双向弧线，因此，例 3.27 的关系矩阵和关系图可简化为图 3.16 和图 3.17。

x_2	1				
x_3	1	1			
x_4	0	1	1		
x_5	0	1	0	1	
x_6	0	0	0	0	0
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5

图 3.16　例 3.27 的简化关系矩阵

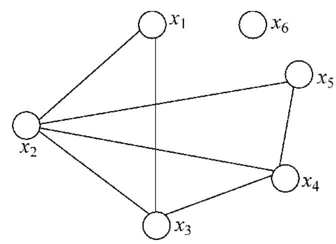

图 3.17　图 3.16 的关系图

定义 3.15　设 R 是集合 A 上的相容关系，$C\subseteq A$，如果对于 C 中任意两个元素 a_1 和 a_2 有 a_1Ra_2，就称 C 是由相容关系 R 产生的**相容类**。

例如，上例中相容关系 R 可产生相容类 $\{x_1,x_2\}$、$\{x_1,x_3\}$、$\{x_2,x_3\}$、$\{x_6\}$、$\{x_2,x_4,x_5\}$ 等。

对于前三个相容类，都能加进新的元素组成新的相容类，而后两个相容类，加入任一新元素，就不再组成相容类，称它们为**最大相容类**。

定义 3.16　设 R 是集合 A 上的相容关系，不能真包含在任何其他相容类中的相容类，称作最大相容类，记作 C_R。

若 C_R 为最大相容类，显然它是 A 的子集，对于任意 $x\in C_R$，x 必与 C_R 中的所有元素有相容关系。而在 $A-C_R$ 中没有任何元素与 C_R 所有元素有相容关系。

根据最大相容类的定义，它可以从相容关系 R 的简化关系图求得，具体方法如下所示。

(1) 在相容关系 R 的简化关系图中，每一个最大完全多边形的顶点集合，就是一个最大相容类。所谓完全多边形，就是其每个顶点都与其他顶点连接的多边形。例如一个三角形是完全多边形，一个四边形加上两条对角线就是完全多边形。

(2) 在 R 的简化关系图中，每一个孤立结点的单点集合，是一个最大相容类。

(3) 在 R 的简化关系图中，不在完全多边形中的边的两个端点的集合，是一个最大相容类。

【例 3.28】 在例 3.27 中，由相容关系 R 的简化关系图（见图 3.15）可得其全部最大相容类为：

$$\{x_1,x_2,x_3\},\{x_2,x_3,x_4\},\{x_2,x_4,x_5\},\{x_6\}$$

定理 3.19 设 R 是集合 A 上的相容关系，C 是一个相容类，那么必存在一个最大相容类 C_R，使得 $C\subseteq C_R$。

证明：设 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$，构造相容类序列 $C_0\subset C_1\subset C_2\subset\cdots$，其中 $C_0=C$，且 $C_{i+1}=C_i\cup\{a_j\}$，其中 j 是满足 $a_j\notin C_i$ 而 a_j 与 C_i 中各元素都有相容关系的最小下标。

由于 A 的元素个数 $|A|=n$，所以至多经过 $n-|C|$ 步，就使这个过程终止，而此序列的最后一个相容类，就是所要找的最大相容类。 ■

从定理 3.19 中可以看到，A 的任一元素 a，它可以组成相容类 $\{a\}$，因此必包含在一个最大相容类 C_R 中，因此，如由所有最大相容类作出一个集合，则 A 中每一个元素至少属于该集合的一个成员之中，所以最大相容类集合必覆盖集合 A。

定义 3.17 在集合 A 上给定相容关系 R，其最大相容类的集合称作集合 A 的**完全覆盖**，记作 $C_R(A)$。

【例 3.29】 设集合 $A=\{a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6,a_7\}$，$A$ 上二元关系：

$$\begin{aligned}R=\{&\langle a_1,a_1\rangle,\langle a_2,a_2\rangle,\langle a_2,a_3\rangle,\langle a_3,a_2\rangle,\langle a_3,a_3\rangle,\langle a_3,a_4\rangle,\langle a_3,a_5\rangle,\langle a_3,a_6\rangle,\\&\langle a_3,a_7\rangle,\langle a_4,a_3\rangle,\langle a_4,a_4\rangle,\langle a_4,a_5\rangle,\langle a_5,a_3\rangle,\langle a_5,a_4\rangle,\langle a_5,a_5\rangle,\langle a_5,a_6\rangle,\\&\langle a_5,a_7\rangle,\langle a_6,a_3\rangle,\langle a_6,a_5\rangle,\langle a_6,a_6\rangle,\langle a_6,a_7\rangle,\langle a_7,a_3\rangle,\langle a_7,a_5\rangle,\langle a_7,a_6\rangle,\\&\langle a_7,a_7\rangle\}\end{aligned}$$

求 A 的完全覆盖 $C_R(A)$。

解：R 是 A 上的相容关系（自反、对称）。

R 的简化关系图如图 3.18 所示：

R 的最大相容类是确定的，即 $\{a_1\}$，$\{a_2,a_3\}$，$\{a_3,a_4,a_5\}$，$\{a_3,a_5,a_6,a_7\}$。因此，集合 $\{\{a_1\},\{a_2,a_3\},\{a_3,a_4,a_5\},\{a_3,a_5,a_6,a_7\}\}$ 是 A 的完全覆盖 $C_R(A)$。

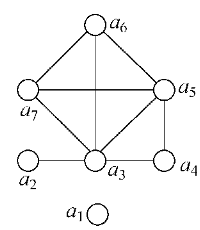

图 3.18 例 3.29 对应的图

定理 3.20 给定集合 A 的覆盖 $\{A_1,A_2,\cdots,A_n\}$，由它确定的关系：

$$R=A_1\times A_1\cup A_2\times A_2\cup\cdots\cup A_n\times A_n$$

是 A 上的相容关系。

证明：因为 $A=\bigcup\limits_{i-1}^{n}A_i$，对于任意 $x\in A$，必存在某个 $j>0$，使得 $x\in A_j$，所以，$\langle x,x\rangle\in A_j\times A_j$，即 $\langle x,x\rangle\in R$，因此，R 是自反的。

其次，若有任意 $x,y\in A$，且 $\langle x,y\rangle\in R$，则必存在某个 $h>0$，使 $\langle x,y\rangle\in A_h\times A_h$，故必有 $\langle y,x\rangle\in A_h\times A_h$，即 $\langle y,x\rangle\in R$，所以 R 是对称的。

因此，R 是 A 上的相容关系。 ■

从定理 3.20 可以看到，给定集合 A 上的任意一个覆盖，必可在 A 上构造对应于此覆盖的一个相容关系，但是不同的覆盖却能构造相同的相容关系。

例如，设 $A=\{1,2,3,4\}$，集合 $\{\{1,2,3\},\{3,4\}\}$ 和 $\{\{1,2\},\{2,3\},\{1,3\},\{3,4\}\}$ 都是 A 的覆盖，但它们可以产生相同的相容关系：

$R=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 3,1\rangle,\langle 3,2\rangle,\langle 3,3\rangle,\langle 3,4\rangle,\langle 4,3\rangle,\langle 4,4\rangle\}$

因此，相容关系与覆盖之间不是一一对应的。于是我们可得出定理 3.21。

定理 3.21 集合 A 上相容关系 R 与完全覆盖 $C_R(A)$ 一一对应。

习题 3.8

1. 举出两个相容关系的例子。

2. 设 R_1 和 R_2 是 A 上的相容关系，那么 $R_1\cap R_2$ 和 $R_1\cup R_2$ 是 A 上的相容关系吗？请阐明理由。

3. 设集合 $X=\{2166,243,375,648,455\}$，$X$ 中的关系 R 为：$R=\{\langle x,y\rangle \mid x,y\in X$，并且 x 和 y 中有相同数字$\}$。问：R 是不是相容关系？

4. 以下关系矩阵所代表的关系是什么关系？

$$\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix}1 & & & \\ 0 & 1 & & \\ 1 & 1 & 0 & \\ 0 & 1 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

3.9 偏序关系

3.9.1 偏序关系的定义

在一个集合上，我们常常要考虑元素的次序关系，其中很重要的一类关系称作偏序关系。

定义 3.18 设 A 是一个集合，如果 A 上的一个关系 R，满足自反性、反对称性和传递性，则称 R 是 A 上的一个**偏序关系**，并把它记为“$\preccurlyeq$”。序偶 $\langle A,\preccurlyeq\rangle$ 称作**偏序集**。

在实数集 R 上，小于等于关系“$\leqslant$”是偏序关系。因为：

(1) 对于任何实数 $a\in R$，有 $a\leqslant a$ 成立，故 $\leqslant$ 是自反的。

(2) 对任何实数 $a,b\in R$，如果 $a\leqslant b$ 且 $b\leqslant a$，则必有 $a=b$，故 $\leqslant$ 是反对称的。

(3) 对任何实数 $a,b,c\in R$，如果 $a\leqslant b,b\leqslant c$，那么必有 $a\leqslant c$，故 $\leqslant$ 是传递的。

【例 3.30】 设 S 为任意非空集合，S 上的包含关系 $\subseteq=\{\langle A,B\rangle \mid A,B\in P(S),A\subseteq B\}$ 是偏序关系。

解：因为：

(1) 对于任意 $A\in P(S)$，有 $A\subseteq A$，所以“$\subseteq$”是自反的。

(2) 对任意 $A,B\in P(S)$，若 $A\subseteq B$ 且 $B\subseteq A$，则 $A=B$ 所以“$\subseteq$”是反对称的。

(3) 对任意 $A,B,C\in P(S)$，若 $A\subseteq B$ 且 $B\subseteq C$，则 $A\subseteq C$，所以“$\subseteq$”是可传递的。

【例 3.31】 正整数集 Z_+ 上的整除关系 $\mid=\{\langle a,b\rangle \mid a,b\in Z_+,a$ 整除 $b\}$ 是偏序关系。

解：因为：

(1) 对于任何正整数 $m\in Z_+$，有 $m\mid m$ 成立，故“$\mid$”是自反的。

(2) 对任何正整数 $m,n\in Z_+$，如果 $m\mid n$ 且 $n\mid m$，则必有 $m=n$，故“$\mid$”是反对称的。

(3) 对任何正整数 $m,n,k\in Z_+$，如果 $m|n$ 且 $n|k$，那么必有 $m|k$，故“|”是传递的。

【例 3.32】 列举两个不是偏序关系的关系。

解：

(1) 实数集 R 上的小于关系“<”不是偏序关系。

(2) 任意非空集合 S 的幂集 $\rho(S)$上的真包含关系“$\subset$”不是偏序关系。

3.9.2 哈斯图及其构造算法

1. 哈斯图概念

图中的每个结点表示集合 A 中的一个元素，结点的位置按它们在偏序中的次序从底向上排列。即对任意 a,b 属于 A，若 $a\leqslant b$ 且 $a\neq b$，则 a 排在 b 的下边。如果 $a\leqslant b$ 且 $a\neq b$，且不存在 $c\in A$ 满足 $a\leqslant c$ 且 $c\leqslant b$，则在 a 和 b 之间连一条线。这样画出的图叫**哈斯图**。

【例 3.33】 设 $A=\{1,2,3,4,6,8,12\}$，并设“|”为整除关系，画出“|”的偏序集的一步关系图和对应哈斯图。

解：“|”$=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 1,4\rangle,\langle 1,6\rangle,\langle 1,8\rangle,\langle 1,12\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 2,4\rangle,\langle 2,6\rangle,\langle 2,8\rangle,\langle 2,12\rangle,\langle 3,3\rangle,\langle 3,6\rangle,\langle 3,12\rangle,\langle 4,4\rangle,\langle 4,8\rangle,\langle 4,12\rangle,\langle 6,6\rangle,\langle 6,12\rangle,\langle 8,8\rangle,\langle 12,12\rangle\}$

偏序集的一般关系图和哈斯图如图 3.19 所示。

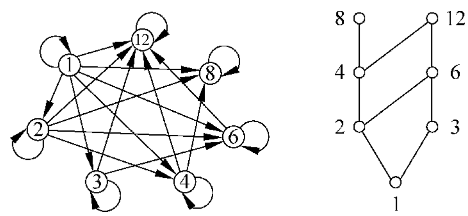

图 3.19 例 3.33 中偏序集的一般关系图和哈斯图

【例 3.34】 设 $S_1=\{a\},S_2=\{a,b\},S_3=\{a,b,c\},S_4=\{a,b,c,d\}$，则“$\subseteq$”关系是 $P(S_i)(i=1,2,3,4)$上的偏序关系，它们的哈斯图分别如图 3.20 中的(a)、(b)、(c)、(d)所示。

【例 3.35】 设 $A=\{2,3,6,12,24,36\}$，A 上的整除关系“|”是一偏序关系，其哈斯图如图 3.21 所示。

2. 哈斯图构造算法

算法 3.9 画出给定偏序集 $\langle A,R\rangle$的哈斯图。

输入：偏序集$\langle A,R\rangle$的关系构造出其对应的关系矩阵 P。

输出：哈斯图。

思路：构造 P 的副本 Q，对 P 中任一元素 $P_{i,j}$ 重复以下过程：

(1) 将 P 与 Q 主对角线元素全部置零。

(2) 若 $P_{i,j}=0$，直接跳过该元素，不做任何处理。

(3) 若 $P_{i,j}\neq 0$，则扫描 P 中第 j 行所有元素，对第 j 行所有不为 0 的元素 $P_{j,k}$，执行 $Q_{i,k}=Q_{i,k}-Q_{i,k}*P_{j,k}$。对 Q 中任一元素 $Q_{i,j}$，若 $Q_{i,j}\neq 0$，将点 j 置于点 i 上方，连接点 i 与点 j，构图完成。

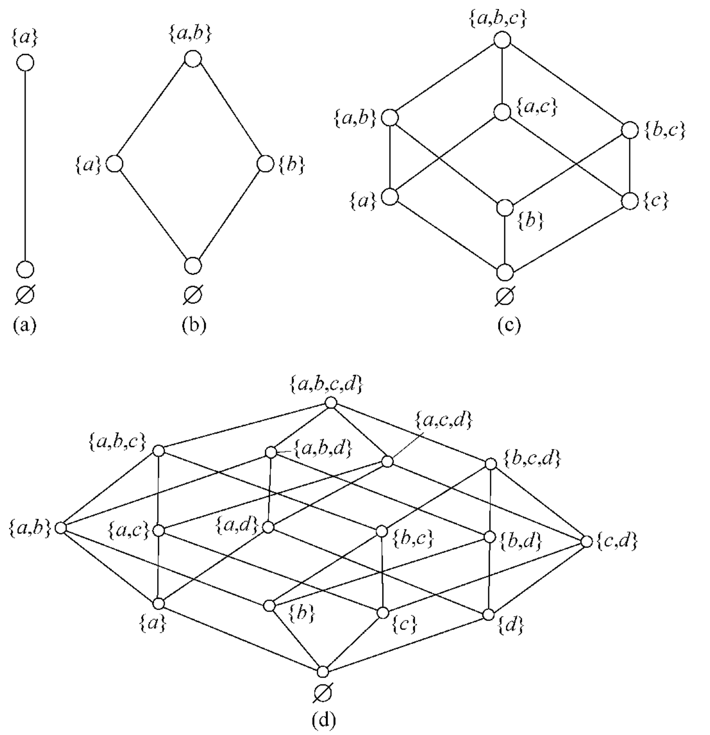

图 3.20 例 3.34 中的哈斯图

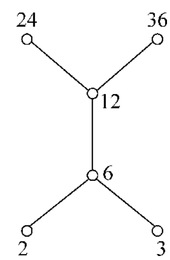

图 3.21 例 3.35 中的哈斯图

该算法的关键点在于构造 P 的副本 Q，并用在 P 中的运算结果来修正矩阵 Q。可以将 P 看成是“只读的”输入数据，将修正后的 Q 看成是输出数据。

3.9.3 偏序集中特殊位置的元素

从偏序集的哈斯图可以看到偏序集中各个元素之间具有分明的层次关系，则其中必有一些处于特殊位置的元素。下面讨论偏序集中具有特殊位置的元素。

定义 3.19 设 $\langle A,\leqslant\rangle$ 是一个偏序集合，且 B 是 A 的子集，若有某个元素 $b\in B$，使得：

(1) 不存在 $x\in B$，满足 $b\neq x$ 且 $b\leqslant x$，则称 b 为 B 的**极大元**。

(2) 不存在 $x\in B$，满足 $b\neq x$ 且 $x\leqslant b$，则称 b 为 B 的**极小元**。

(3) 对每一个 $x\in B$ 有 $x\leqslant b$，则称 b 为 B 的**最大元**。

(4) 对每一个 $x\in B$ 有 $b\leqslant x$，则称 b 为 B 的**最小元**。

【例 3.36】 设 $A=\{2,3,5,7,14,15,21\}$，其偏序关系：

$$R=\{\langle 2,14\rangle,\langle 3,15\rangle,\langle 3,21\rangle,\langle 5,15\rangle,\langle 7,14\rangle,\langle 7,21\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,3\rangle,\langle 5,5\rangle,\langle 7,7\rangle,\langle 14,14\rangle,\langle 15,15\rangle,\langle 21,21\rangle\}$$

求 $B=\{2,7,3,21,14\}$ 的极大元、极小元、最大元和最小元。

解：哈斯图如图 3.22 所示。

故 B 的极小元集合是 $\{2,7,3\}$；B 的极大元集合为 $\{14,21\}$；B 无最大元；B 也无最小元。

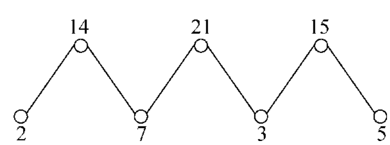

图 3.22 例 3.36 中的哈斯图

在例 3.35 中取 B 分别为 A、$\{6,12\}$和$\{2,3,6\}$，则得表 3.2。

表 3.2 例 3.42 的结果

集合	极大元	极小元	最大元	最小元
A	24,36	2,3	无	无
$\{6,12\}$	12	6	12	6
$\{2,3,6\}$	6	2,3	6	无

在图 3.20(c)所示的偏序集中，取 B 分别为 $P(S_3)$、$\{\{a\},\{b\},\{c\}\}$和$\{\{a\},\{a,b\}\}$，则得表 3.3。

表 3.3 例 3.43 的结果

集合	极大元	极小元	最大元	最小元
$P(S_3)$	$\{a,b,c\}$	$\varnothing$	$\{a,b,c\}$	$\varnothing$
$\{\{a\},\{b\},\{c\}\}$	$\{a\},\{b\},\{c\}$	$\{a\},\{b\},\{c\}$	无	无
$\{\{a\},\{a,b\}\}$	$\{a,b\}$	$\{a\}$	$\{a,b\}$	$\{a\}$

从上面的例子可以看出，最大(小)元和极大(小)元有如下性质。

定理 3.22 设$\langle A,\leqslant\rangle$为一偏序集且 $B\subseteq A$，则：

(1) B 的最大(小)元必是 B 的极大(小)元，反之不然。

(2) B 的最大(小)元不一定存在，若 B 有最大(最小)元，则必是唯一的。

(3) B 的极大(小)元不一定是唯一的。当 $B=A$ 时，则偏序集$\langle A,\leqslant\rangle$的极大元即是哈斯图中最顶层的元素，其极小元是哈斯图中最底层的元素，不同的极小元或不同的极大元之间是不可比较的。

证明：我们证明最大(小)元的唯一性。假定 a 和 b 都是 B 的最大元，则 $a\leqslant b$ 且 $b\leqslant a$，由$\leqslant$的反对称性，得到 $a=b$。B 的最小元情况与此类似。 ■

定义 3.20 设$\langle A,\leqslant\rangle$为一偏序集，对于 $B\subseteq A$，如有 $a\in A$，对 B 的任意元素 x，都满足：

(1) $x\leqslant a$，则称 a 为 B 的**上界**。

(2) $a\leqslant x$，则称 a 为 B 的**下界**。

(3) a 为 B 的上界，且对 B 的任一上界 a' 均有 $a\leqslant a'$，则称 a 为 B 的最小上界(**上确界**)，记作 $\inf(B)$。

(4) a 为 B 的下界，且对 B 的任一下界 a'，均有 $a'\leqslant a$，则称 a 为 B 的最大下界(**下确界**)，记为 $\sup(B)$。

在例 3.35 中取 B 分别为 A、$\{6,12\}$和$\{2,3,6\}$、$\{12,24,36\}$和$\{24,36\}$，则得表 3.4。

表 3.4 例 3.37 的结果

集合	上界	下界	上确界	下确界
A	无	无	无	无
$\{6,12\}$	12,24,36	2,3,6	12	6
$\{2,3,6\}$	6,12,24,36	无	6	无
$\{12,24,36\}$	无	2,3,6,12	无	12
$\{24,36\}$	无	2,3,6,12	无	12

图 3.19(c)所示的偏序集中，取 B 分别为 $P(S_3)$、$\{\{a\},\{b\},\{c\}\}$ 和 $\{\{a\},\{a,b\}\}$，则得表 3.5。

表 3.5 例 3.35 的结果

集　合	上　界	下　界	上 确 界	下 确 界
$P(S_3)$	$\{a,b,c\}$	$\varnothing$	$\{a,b,c\}$	$\varnothing$
$\{\{a\},\{b\},\{c\}\}$	$\{a,b,c\}$	$\varnothing$	$\{a,b,c\}$	$\varnothing$
$\{\{a\},\{a,b\}\}$	$\{a,b\},\{a,b,c\}$	$P(S_3),\{a\}$	$\{a,b\}$	$\{a\}$

从上面的两个例子可以看出，上(下)界和上(下)确界有如下性质。

定理 3.23 设 $\langle A,\leqslant\rangle$ 为一偏序集且 $B\subseteq A$，则：

(1) B 的上(下)界不一定存在，若存在，则不一定唯一，并且它们可能在 B 中，也可能在 B 外。

(2) B 的上(下)确界不一定存在，若存在，必定是唯一的，并且若 B 有最大(小)元，则它必是 B 的上(下)确界。

3.9.4 拓扑排序算法

1. 拓扑排序

定义 3.21 设 $\langle A,\leqslant\rangle$ 为一个偏序集，若对于任意 $a,b\in A$，必有 $a\leqslant b$ 或 $b\leqslant a$，则称 $\langle A,\leqslant\rangle$ 为全序集合或线序集合(有时也称为拓扑排序)，二元关系 $\leqslant$ 称为全序关系。

(1) 定义在自然数集合 N 上的小于等于关系"$\leqslant$"是偏序关系，且对任意 $i,j\in N$，必有：$i\leqslant j$ 或 $j\leqslant i$ 成立，故"$\leqslant$"是全序关系。

(2) 实数集 R 上的小于等于关系"$\leqslant$"也是 R 上的一个全序关系。

(3) 设 $A=\{1,2,4,8,24,48\}$，则 A 上的整除关系是一个全序关系，其哈斯图如图 3.23 所示。

(4) 自然数集合 N 上的整除关系就仅是一个偏序而不是全序。

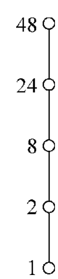

图 3.23 定义 3.21 中(3)的哈斯图

2. 拓扑排序算法

算法 3.10 拓扑排序。

(1) 从有向图中选择一个没有前驱(即入度为 0)的顶点并且输出它。

(2) 从网中删去该顶点，并且删除从该顶点发出的全部有向边。

(3) 重复上述两步，直到剩余的网中不再存在没有前趋的顶点为止。

3.9.5 良序

定义 3.22 设 $\langle A,\leqslant\rangle$ 为一个偏序集，若 A 的任意非空子集 B 均有最小元素，则称 $\leqslant$ 为 A 上的一个良序，$\langle A,\leqslant\rangle$ 称为**良序集**。

例如,(1) 正整数集 $N_+=\{1,2,3,\cdots\}$上的小于等于关系是良序,即$\langle N,\leqslant\rangle$是良序集。

(2) $Z_n=\{1,2,\cdots,n\}$上的小于等于关系是良序,即$\langle Z_n,\leqslant\rangle$是良序集。

(3) 整数集 Z 和实数集 R 上的小于等于关系“$\leqslant$”不是良序关系(因为 Z 或 R 本身无最小元)。

定理 3.24 每一个良序集合,一定是全序集合。

证明:设$\langle A,\leqslant\rangle$为良序集合,则对任意两个元素 $x,y\in A$ 可构成子集$\{x,y\}$,必存在最小元素,这个最小元素不是 x 就是 y,因此一定有 $x\leqslant y$ 或 $y\leqslant x$。所以$\langle A,\leqslant\rangle$为全序集。 ■

注意:定理 3.24 的逆不成立。例如,整数集 Z 和实数集 R 上的小于等于关系“$\leqslant$”是全序,但不是良序。

定理 3.25 每一个有限的全序集合,一定是良序集合。

证明:设 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$,且$\langle A,\leqslant\rangle$是全序集合,现在假定$\langle A,\leqslant\rangle$不是良序集合,那么必存在一个非空子集 $B\subseteq A$,在 B 中不存在最小元素,由于 B 是一个有限集合,故一定可以找出两个元素 x 与 y 是无关的,由于$\langle A,\leqslant\rangle$是全序集 $x,y\in A$,所以 x 与 y 必有关系,得出矛盾,故$\langle A,\leqslant\rangle$必是良序集合。 ■

习题 3.9

1. 下面哪些集合是偏序集?

(1) $\langle Z,=\rangle$ (2) $\langle Z,\neq\rangle$

(3) $\langle Z,\geqslant\rangle$ (4) $\langle Z,\ \rangle$

2. $\langle\{3,5,9,15,24,45\},|\rangle$是偏序集。

(1) 求极大元素和极小元素。

(2) 存在最大元素吗?存在最小元素吗?如果存在,请求出。

(3) 找出子集$\{3,5\}$的所有上界。如果它的上确界存在的话,求出上确界。

(4) 找出子集$\{15,45\}$的所有下界。如果它的下确界存在的话,求出下确界。

3. 对下列集合上的整除关系画出哈斯图,并对(3)中的子集$\{2,3,6\}$,$\{2,4,6\}$,$\{4,8,12\}$找出最大元素、最小元素、极大元素、极小元素、上确界、下确界。

(1) $\{1,2,3,4\}$。

(2) $\{2,3,6,12,24,36\}$。

(3) $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$。

4. 对偏序集合$(A,\leqslant)$的哈斯图 3.24,写出集合 A 及偏序关系$\leqslant$的所有元素。

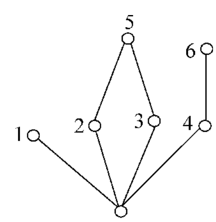

图 3.24 第 4 题对应的哈斯图

5. 设 R 是集合 X 上的偏序关系,$A\subseteq X$,证明 $R\cap(A\times A)$是 A 上的偏序关系。

6. 设$(A,\leqslant_1)$和$(A,\leqslant_2)$是两个偏序集合,定义 $A\times B$ 上的关系$\leqslant_3$如下:对于 $a_1,a_2\in A,b_2\in B$

$$\langle a_1,b_1\rangle,\langle a_2,b_2\rangle\in\leqslant_3\Leftrightarrow\langle a_1,a_2\rangle\in\leqslant_1\wedge\langle b_1,b_2\rangle\in\leqslant_2$$

证明$\leqslant_3$是 $A\times B$ 上的偏序关系。

7. 对于非空集合 A,是否存在这样的关系 R,它即是等价关系又是偏序关系?若存在,

请举出例子。

8. 指出下面的集合中，哪些是偏序集合、全序集合或良序集合？

(1) $(2^{\mathrm{N}},\subseteq)$。

(2) $(2^{\{a\}},\subseteq)$。

(3) $(2^{\varnothing},\subseteq)$。

9. $A=\{a,b,c,d,e\}$，$R=\{\langle a,a\rangle,\langle b,b\rangle,\langle c,c\rangle,\langle a,c\rangle,\langle c,d\rangle,\langle c,e\rangle,\langle c,d\rangle,\langle d,d\rangle,\langle a,e\rangle,\langle b,c\rangle,\langle b,d\rangle,\langle b,e\rangle,\langle e,e\rangle\}$，确定关系 R 的哈斯图。

10. 已知 $A=\{1,2,3,4,5\}$ 上的关系矩阵：

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

请确定它的哈斯图。

11. 证明：如果 R 是集合 A 上的全序，那么 R^{-1} 也是集合 A 上的全序。

12. $A=\{2,3,4,6,8,24,48\}$是整除偏序集，确定其所有极大元和极小元。

13. 证明：如果$(A,\leqslant)$有一个最大元，那么唯一。

14. 求图 3.25 上界、下界、上确界、下确界，$B=\{3,4,6\}$。

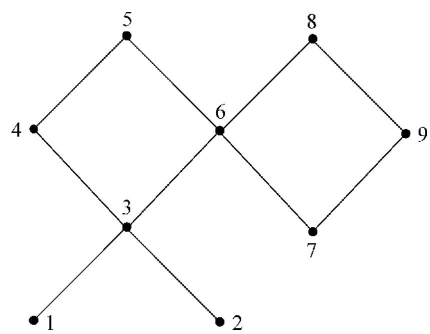

图 3.25 第 14 题对应的图

15. 设 $A_1=\{3,5,15\}$，$A_2=\{1,2,3,6,12\}$，$A_3=\{3,9,27,54\}$，偏序关系$\leqslant$为整除。试分别画出$\langle A_1,\leqslant\rangle$、$\langle A_2,\leqslant\rangle$，以及$\langle A_3,\leqslant\rangle$的哈斯图。

16. 试证明：每一个有限的全序集必是良序集。

17. 设$\langle A,\leqslant\rangle$为偏序集. 试证明 A 的每个非空有限子集至少有一个极小元和极大元。

18. 设$\langle A,\leqslant\rangle$为全序集. 试证明 A 的每个非空有限子集必存在最大元、最小元。

3.10 格

对于给定的偏序集，它的子集不一定有最小上界或最大下界。例如，在由图 3.26 所示的偏序集中，b,c 的最大下界是 a，但没有最小上界。d,e 的最小上界是 f，但没有最大下界。

然而，图 3.27 所示的那些偏序集却都拥有一个共同的特性，那就是在这些偏序集中，任

何两个元素都有最小上界和最大下界。这就是我们将要讨论的被称作格的偏序集。

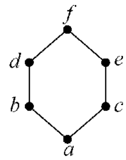

图 3.26 非格偏序集

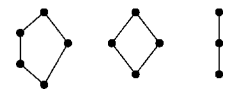

图 3.27 特殊的偏序

定义 3.23(格) 设$\langle X,\leqslant\rangle$是一个偏序集,如果 X 中任意两个有最小上界和最大下界,则称$\langle X,\leqslant\rangle$为格。

S 是一个集合,$\rho(S)$是 S 的幂集,则$\langle\rho(S),\subseteq\rangle$是一个格。因为对于任何的 $A,B\subseteq S$,A,B 的最小上界为 $A\cup B$,A、B 的最大下界为 $A\cap B$。

设 N 是所有正整数集合,在 N 上定义一个二元关系$|$,$x,y\in N$,$x|y$ 当且仅当 x 整除 y。容易验证 $|$ 是 N^+ 上的一个偏序关系,故$\langle N^+,|\rangle$是偏序集。由于该偏序集中任意两个元素的最小公倍数、最大公约数分别是这两个元素的最小上界和最大下界,因此$\langle N,|\rangle$是格。

设集合 $A=\{a,b,c\}$,考虑恒等关系$=$,$=$是一种特殊的偏序关系,所以$\langle A,=\rangle$是一个偏序集,但它不是格,因为 A 中任意两个元素都是既无最小上界又无最大下界,如图 3.28 所示。

定义 3.24 设$\langle X,\leqslant\rangle$是一个格,如果在 X 上定义两个二元运算$\vee$和$\wedge$,使得对于任意的 $x,y\in X$,$x\vee y$ 等于 x 和 y 的最小上界,$x\wedge y$ 等于 x 和 y 的最大下界。则称$\langle X,\vee,\wedge\rangle$为由格$\langle X,\leqslant\rangle$所诱导的代数系统。二元运算$\vee$和$\wedge$分别称为并运算和交运算。

对给定的集合 S,$\langle\rho(S),\subseteq\rangle$是一个格,现设 $S=\{x,y\}$,则 $\rho(S)=\{\varnothing,\{x\},\{y\},\{x,y\}\}$,格$\langle\rho(S),\subseteq\rangle$如图 3.29 所示。而由格$\langle\rho(S),\subseteq\rangle$所诱导的代数系统$\langle\rho(S),\vee,\wedge\rangle$,其中运算$\vee$是集合的并,运算$\wedge$是集合的交。故$\vee$和$\wedge$的运算表可由表 3.6 给出。

表 3.6 $\vee$和$\wedge$的运算定义

$\vee$	$\varnothing$	$\{x\}$	$\{y\}$	$\{x,y\}$	$\wedge$	$\varnothing$	$\{x\}$	$\{y\}$	$\{x,y\}$
$\varnothing$	$\varnothing$	$\{x\}$	$\{y\}$	$\{x,y\}$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$
$\{x\}$	$\{x\}$	$\{x\}$	$\{x,y\}$	$\{x,y\}$	$\{x\}$	$\varnothing$	$\{x\}$	$\varnothing$	$\{x\}$
$\{y\}$	$\{y\}$	$\{x,y\}$	$\{y\}$	$\{x,y\}$	$\{y\}$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\{y\}$	$\{y\}$
$\{x,y\}$	$\{x,y\}$	$\{x,y\}$	$\{x,y\}$	$\{x,y\}$	$\{x,y\}$	$\varnothing$	$\{x\}$	$\{y\}$	$\{x,y\}$

图 3.28 特殊偏序

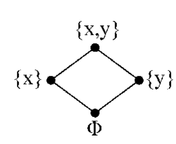

图 3.29 格的例子

【例 3.37】 设 D_{36}是 36 的全部正因子的集合,$D_{36}=\{1,2,3,4,6,9,12,18,36\}$,“$|$”表示数的整除关系,则$\langle D_{36},|\rangle$是格。

解: 如图 3.30 所示,对 $m,n\in D_{36}$,$m\vee n$ 是 m,n 的最小公倍数,$m\wedge n$ 是 m,n 的最大公

约数。

定义 3.25 设$\langle X, \leqslant\rangle$是一格，由$\langle X, \leqslant\rangle$诱导的代数系统为$\langle X, \vee, \wedge\rangle$，设$Y\subseteq Z$且$Y\subseteq\varnothing$，如果$Y$关于$X$中的运算$\vee$和$\wedge$都是封闭的，则称$\langle Y, \leqslant\rangle$是格$\langle X, \leqslant\rangle$的**子格**。

容易证明，若$\langle Y, \leqslant\rangle$是格$\langle X, \leqslant\rangle$的子格，则$\langle Y, \leqslant\rangle$也是格。

例 3.37 给出了一个具体的格$\langle N, |\rangle$，由它诱导的代数系统为$\langle N, \vee, \wedge\rangle$，其中，对$x$，$y\in N$，$x\vee y$是$x$，$y$的最小公倍数，$x\wedge y$是$x$，$y$的最大公因数。例 3.37 中的$D_{36}$关于$N$中的运算$\vee$和$\wedge$都是封闭的，所以$\langle D_{36}, |\rangle$是格$\langle N, |\rangle$的子格。另外若$E^+$表示全体正偶数集，则任何两个偶数的最大公因数和最小公倍数都是偶数，所以E^+关于N的运算$\vee$和$\wedge$封闭，因此，$\langle E^+, |\rangle$也是$\langle N, |\rangle$的子格。

设$\langle L, \leqslant\rangle$是格，其中，$L=\{a,b,c,d,e,f,g,h\}$如图 3.31 所示。取：

$$L_1 = \{a,b,d,f\}$$
$$L_2 = \{c,e,g,h\}$$
$$L_3 = \{a,b,c,d,e,g,h\}$$

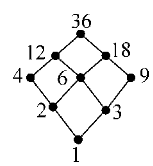

图 3.30 例 3.37 对应的图

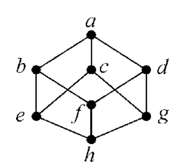

图 3.31 格的例子

【例 3.38】 设$\langle X, \leqslant\rangle$是一格，任取$a,b\in X$使$a\leqslant b$，构造$X$的子集。

$$L_1 = \{x \mid x \in X,且\ x \leqslant a\}$$
$$L_2 = \{x \mid x \in X\ 且\ a \leqslant x\}$$
$$L_3 = \{x \mid x \in X\ 且\ a \leqslant x \leqslant b\}$$

则$\langle L_i, \leqslant\rangle$都是$\langle X, \leqslant\rangle$的子格，$i = 1,2,3$。

解：对任意x，$y\in L_1$，必有$x\leqslant a$，$y\leqslant a$，所以：

$$x \vee y \leqslant a, \quad x \wedge y \leqslant a$$

故$x\vee y\in L_1$，$x\wedge y\in L_1$；因此，$\langle L_1, \leqslant\rangle$是$\langle X, \leqslant\rangle$的子格。

同理可得$\langle L_2, \leqslant\rangle$和$\langle L_3, \leqslant\rangle$也是$\langle X, \leqslant\rangle$的子格。

在讨论格以及格诱导的代数系统的一些性质之前，先介绍对偶的概念和对偶原理。

设$\langle X, \leqslant\rangle$是一个偏序集，在$X$上定义一个二元关系$\leqslant_R$，使得对于$X$中的两个元素$x$和$y$有关系$x\leqslant_R y$当且仅当$y\leqslant x$，可以证明这样定义的$X$上的关系$\leqslant_R$是一偏序关系，从而$\langle X, \leqslant_R\rangle$也是一个偏序集。我们把偏序集$\langle X, \leqslant\rangle$和$\langle X, \leqslant_R\rangle$称为是彼此对偶的(互为对偶)，它们所对应的哈斯图是互为颠倒的。

可以证明，若$\langle Z, \leqslant\rangle$是一个格，则$\langle Z, \leqslant_R\rangle$也是一个格。我们把二元关系$\leqslant_R$称为二元关系$\leqslant$的逆关系，为简单起见，用记号$\geqslant$表示$\leqslant_R$。

对格$\langle X, \leqslant\rangle$，由$\langle X, \geqslant\rangle$的定义可知，由格$\langle X, \leqslant\rangle$所诱导的代数系统的并(交)运算正好是由格$\langle X, \geqslant\rangle$所诱导的代数系统的交(并)运算，从而有如下表述的格的对偶原理：

设P是对任意格都为真的命题，如果在命题P中把$\leqslant$换成$\geqslant$，$\vee$换成$\wedge$，$\wedge$换成$\vee$，就得到另一命题P'，我们把P'称为P的对偶命题，则P'对任意格也是真的命题。

下面，讨论格的一些基本性质。

定理 3.26 在一个格$\langle L, \preccurlyeq\rangle$中，对 L 中任意元 a、b、c、d 都有：

(1) $a \preccurlyeq a\vee b, b \preccurlyeq a\vee b, a\wedge b \preccurlyeq a, a\wedge b \preccurlyeq b$。

(2) 若 $a \preccurlyeq b$ 且 $c \preccurlyeq d$，则 $a\vee c \preccurlyeq b\vee d, a\wedge c \preccurlyeq b\wedge d$。

证明：

(1) 因为 a 和 b 的并是 a 和 b 的一个上界，所以 $a\preccurlyeq a\vee b$ 且 $b \preccurlyeq a\vee b$，由对偶原理，即得 $a\wedge b \preccurlyeq a$ 且 $a\wedge b\preccurlyeq b$。

(2) 因为 $b\preccurlyeq b\vee d, d\preccurlyeq b\vee d$，所以，由传递性可得 $a\preccurlyeq b\vee d, c\preccurlyeq b\vee d$，这就表明 $b\vee d$ 是 a 和 c 的一个上界，而 $a\vee c$ 是 a 和 c 得最小上界，所以，必有 $a\vee c\preccurlyeq b\vee d$。

类似地可以证明 $a\wedge c\preccurlyeq b\wedge d$。 ■

推论 3.1 在一格$\langle L, \preccurlyeq\rangle$中，对于 $a,b,c\in L$ 若 $a\preccurlyeq b$ 则：

$$a \vee c \preccurlyeq b \vee c, \quad a \wedge c \preccurlyeq b \wedge c$$

证明：定理 3.26 的(2)中取 $d = c$ 即得。 ■

定理 3.27 设$\langle L, \preccurlyeq\rangle$是一个格，由格$\langle L, \preccurlyeq\rangle$所诱导的代数系统为$\langle L, \vee, \wedge\rangle$，则对 L 中的任意元素 a、b、c 有：

(1) 幂等律：$a\vee a=a \quad a\wedge a=a$

(2) 交换律：$a\vee b=b\vee a \quad a\wedge b=b\wedge a$

(3) 结合律：$a\vee(b\vee c)=(a\vee b)\vee c \quad a\wedge(b\wedge c)=(a\wedge b)\wedge c$

(4) 吸收律：$a\vee(a\wedge b)=a \quad a\wedge(a\vee b)=a$

证明：

(1) 由定理 3.26 可得 $a\preccurlyeq a\vee a$，由自反性可得 $a\preccurlyeq a$，由此可得 $a\vee a\preccurlyeq a$，因此 $a\vee a=a$。利用对偶原理，即得 $a\wedge a=a$。

(2) 格中任意两个元素 a,b 的最小上界(最大下界)当然等于 b,a 的最小上界(最大下界)，所以 $a\vee b=b\vee a(a\wedge b=b\wedge a)$。

(3) 由定理 3.26 中的(1)可知 $a\preccurlyeq a\vee(b\vee c), b\preccurlyeq b\vee c\preccurlyeq a\vee(b\vee c)$。

由定理 3.26 中(2)可知 $a\vee b\preccurlyeq a\vee(b\vee c)$。

又因 $c\preccurlyeq b\vee c\preccurlyeq a\vee(b\vee c)$，所以，$(a\vee b)\vee c\preccurlyeq a\vee(b\vee c)$。

类似地可以证明 $a\vee(b\vee c)\preccurlyeq a\vee(b\vee c)$。

因此 $a\vee(b\vee c)=(a\vee b)\vee c$。

利用对偶原理，即得：$a\wedge(b\wedge c)=(a\wedge b)\wedge c$。

(4) 由定理 3.26 得：$a\preccurlyeq a\vee(a\wedge b)$。

又因为 $a\preccurlyeq a$ 和 $a\wedge b\preccurlyeq a$，所以 $a\vee(a\wedge b)\preccurlyeq a$，

因此 $a\vee(a\wedge b)=a$。利用对偶原理，即得：$a\wedge(a\vee b)=a$。 ■

在例 3.37 中给出的格$\langle N,|\rangle$中，若$\langle N^+, \vee, \wedge\rangle$是格$\langle N,|\rangle$所诱导的代数系统，则对 $a, b\in N$，有 $a\vee b$ 是 a,b 的最小公倍数，记为 $\mathrm{lcm}(a,b)$，$a\wedge b$ 是 a,b 的最大公约数记为 $\gcd(a,b)$。

在代数系统$\langle N, \vee, \wedge\rangle$中，对 N 中任意数 a、b、c，由于 $\mathrm{lcm}(a,a)= \gcd(a,a) = a$，所以等幂性成立；因为两个数 a 和 b 的最小公倍数(最大公因数)与 b 和 a 的最小公倍数(最大公约数)是相等的，因此，并运算和交运算都是可交换的；又因为 $\mathrm{lcm}(a,\mathrm{lcm}(b,c))$ 和 $\mathrm{lcm}(\mathrm{lcm}(a,b),c)$都是三个数 a、b、c 的最小公倍数，所以在$\langle N, \vee, \wedge\rangle$中并运算是可结合的，同理，有 $\gcd(a,(\gcd(b,c)) = \gcd(\gcd(a,b),c)$，从而交运算也是可结合的；又由于

lcm(a,gcd(a,b))＝ a 和 gcd(a,lcm(a,b))＝ a,因而,吸收性也是成立的。

定理 3.28　若$\langle L,\leqslant\rangle$是一个格,则对 L 中的任意 a、b、c 都有:

$$a \vee (b \wedge c) \leqslant (a \vee b) \wedge (a \vee c) \tag{3.1}$$

$$(a \wedge b) \vee (a \wedge c) \leqslant a \wedge (b \vee c) \tag{3.2}$$

证明:由定理 3.26 可知 $a\leqslant a\vee b$ 和 $a\leqslant a\vee c$,由定理 3.27 等幂性可得

$$a = a \wedge a \leqslant (a \vee b) \wedge (a \vee c) \tag{3.3}$$

又因为 $b\vee c\leqslant b\leqslant a\vee b$ 且 $b\wedge c\leqslant c\leqslant a\vee c$

所以,

$$b \wedge c = (b \wedge c) \wedge (b \wedge c) \leqslant (a \vee b) \wedge (a \vee c) \tag{3.4}$$

由式(3.1)、式(3.2)和定理 3.28 得:

$$a \vee (b \wedge c) \leqslant (a \vee b) \wedge (a \vee c)$$

利用对偶原理,即得:

$$(a \wedge b) \vee (a \wedge c) \leqslant a \wedge (b \vee c)$$ ■

定理 3.28 中的式(3.1)和式(3.2)被称为分配不等式。

定理 3.29　设$\langle L,\leqslant\rangle$是一个格,那么,对于 L 中任意元 a 和 b 有:

$$a \leqslant b \Leftrightarrow a \wedge b = a \Leftrightarrow a \vee b = b$$

证明:先证 $a\leqslant b\Leftrightarrow a\wedge b=a$。

若 $a\leqslant b$,则 $a\leqslant a$,所以 $a\leqslant a\wedge b$,但根据 $a\wedge b$ 的定义应有 $a\wedge b\leqslant a$,由反对称性得,$a\wedge b=a$。这就证明了 $a\leqslant b\Rightarrow a\wedge b=a$。

反之,若 $a\wedge b=a$,则 $a=a\wedge b\leqslant b$,这就证明了 $a\wedge b=a\Rightarrow a\leqslant b$,因此 $a\leqslant b\Leftrightarrow a\wedge b=a$。

用同样的方法,可以证明 $a\leqslant b\Leftrightarrow a\vee b=b$。

因而 $a\leqslant b\Leftrightarrow a\wedge b=a\Leftrightarrow a\vee b=b$。 ■

定理 3.30　设$\langle L,\leqslant\rangle$是格,则 L 中的任意元 a、b、c 有:

$$a \leqslant c \Leftrightarrow a \vee (b \wedge c) \leqslant (a \vee b) \wedge c$$

证明:由定理 3.29 知 $a\leqslant c\Leftrightarrow a\vee c=c$。

由定理 3.28 可知 $a\vee(b\wedge c)\leqslant(a\vee b)\wedge(a\vee c)$。

用 c 代替上式中的 $a\vee c$,即得:

$$a \vee (b \wedge c) \leqslant (a \vee b) \vee c$$

所以 $a\leqslant c\Rightarrow a\vee(b\wedge c)\leqslant(a\vee b)\wedge c$。

另外,若 $a\vee(b\wedge c)\leqslant(a\vee b)\wedge c$,则由运算$\vee$、$\wedge$的定义可知:

$a\leqslant a\vee(b\wedge c)\leqslant(a\vee b)\wedge c\leqslant c$,即有,$a\leqslant c$。

所以 $a\leqslant c\Leftrightarrow a\vee(b\wedge c)\leqslant(a\vee b)\wedge c$。 ■

推论 3.2　在一个格$\langle L,\leqslant\rangle$中,对 L 中任意 a、b、c,必有:

$$(a \wedge b) \vee (a \wedge c) \leqslant a \wedge (b \vee (a \wedge c)) \text{ 和 } a \vee (b \wedge (a \vee c)) \leqslant (a \vee b) \wedge (a \vee c)$$

证明:利用定理 3.26 和 $a\wedge c\leqslant a$ 及 $a\leqslant a\vee c$,便可分别获证。

由定理 3.25 知,若$\langle X,\vee,\wedge\rangle$是$\langle X,\leqslant\rangle$诱导的代数系统,则 X 上的$\vee$和$\wedge$两种运算都满足交换律、结合律和吸收律。下面我们将说明,若代数$\langle L,\vee,\wedge\rangle$的两种运算都满足交换律、结合律和吸收律,那么可以在 L 上定义一个偏序,使得 L 中任何两个元素关于这个偏序都有最小上界和最大下界,也就是说,偏序集$\langle L,\leqslant\rangle$是格,而且$\langle L,\leqslant\rangle$诱导的代数系统恰是

$\langle L, \wedge, \vee \rangle$。 ■

引理 3.1 设$\langle L, \wedge, \vee \rangle$是一个代数系统，若$\vee$和$\wedge$都是二元运算且满足吸收律，则$\vee$和$\wedge$都满足幂等律。

证明：因为运算$\vee$和$\wedge$满足吸收律，即对 L 中任意元素 a 和 b 有：

$$a \vee (a \wedge b) = a \tag{3.5}$$

$$a \wedge (a \vee b) = a \tag{3.6}$$

将式(3.5)中的 b 取为 $a \vee b$，便得：

$$a \vee (a \wedge (a \vee b)) = a$$

再由式(3.6)，即得 $a \vee a = a$，同理可证 $a \wedge a = a$。 ■

定理 3.31 设$\langle L, \vee, \wedge \rangle$是一个代数系统，其中$\vee$和$\wedge$都是二元运算且满足交换律、结合律和吸收律，则存在偏序关系，使$\langle L, \leqslant \rangle$是格，且这个所诱导的代数系统就是$\langle L, \vee, \wedge \rangle$。

证明：设在 L 定义二元关系$\leqslant$为：对于任意 $a,b \in L$，$a \leqslant b$。

当且仅当 $a \wedge b = a$。

下面分三步证明定理成立。

先证 L 上的二元关系$\leqslant$是一个偏序关系。

由引理 3.1 可知$\wedge$满足幂等律，即对任一 $a \in L$ 有 $a \wedge a = a$，所以 $a \leqslant a$，故$\leqslant$是自反的。

对任意 $a,b \in L$ 若 $a \leqslant b$ 且 $b \leqslant a$，由$\leqslant$的定义知 $a = a \wedge b$ 且 $b = b \wedge a$。

因为$\wedge$满足交换律，所以 $a = b$，故$\leqslant$是反对称的。

对任意的 $a,b,c \in L$，若 $a \leqslant b$ 且 $b \leqslant c$，则 $a = a \wedge b$ 且 $b = b \wedge c$。

因为 $a \wedge c = (a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c) = a \wedge b = a$。

所以，$a \leqslant c$，故$\leqslant$是传递的。因此，$\leqslant$是偏序关系。

再证 对任意 $a,b \in L$，$a \wedge b$ 是 a 和 b 的最大下界。

由于$(a \wedge b) \wedge a = (a \wedge a) \wedge b = a \wedge b$，$(a \wedge b) \wedge b = a \wedge (b \wedge b) = a \wedge b$。

所以，$a \wedge b \leqslant a$，$a \wedge b \leqslant b$，即 $a \wedge b$ 是 a 和 b 的下界。

设 c 是 a 和 b 的任一下界，即 $c \leqslant a$，$c \leqslant b$，则有 $c \wedge a = c$，$c \wedge b = c$，而 $c \wedge (a \wedge b) = (c \wedge a) \wedge b = c \wedge b = c$，所以，$c \leqslant a \wedge b$。故 $a \wedge b$ 是 a 和 b 的最大下界。

最后，根据交换性和吸收性，对 L 中的任意 a 和 b，若 $a \wedge b = a$ 则：

$$(a \wedge b) \vee b = a \vee b\text{，即 } b = a \vee b$$

反之，若 $a \vee b = b$ 则 $a \wedge (a \vee b) = a \wedge b$，即 $a = a \wedge b$。因此 $a \wedge b = a \Leftrightarrow a \vee b = b$。

由此可知，L 上的偏序关系即为：对任意的 $a,b \in L$，$a \leqslant b$ 当且仅当 $a \vee b = b$，从而可用与上面类似的方法证明 $a \vee b$ 是 a 和 b 的最小上界。 ■

因此，$\langle L, \leqslant \rangle$是一个格，且这个格所诱导的代数系统就是$\langle L, \vee, \wedge \rangle$。

定义 3.26 设$\langle L_1, \leqslant_1 \rangle$和$\langle L_2, \leqslant_2 \rangle$都是格，由它们分别诱导的代数系统为$\langle L_1, \vee_1, \wedge_1 \rangle$和$\langle L_2, \vee_2, \wedge_2 \rangle$，如果有一个从 L_1 到 L_2 的映射 φ，使得对任意的 $x,y \in L_1$，有：

$$\varphi(x \vee_1 y) = \varphi(x) \vee_2 \varphi(y)$$

$$\varphi(x \wedge_1 y) = \varphi(x) \wedge_2 \varphi(y)$$

则称 φ 为从$\langle L_1, \vee_1, \wedge_1 \rangle$到$\langle L_2, \vee_2, \wedge_2 \rangle$的**格同态**，也称$\langle \varphi(A_1), \leqslant_2 \rangle$是$\langle A, \leqslant_1 \rangle$的格同态

像。另外，若 φ 还是双射，则称 φ 是从 $\langle L_1,\vee_1,\wedge_1\rangle$ 到 $\langle L_2,\vee_2,\wedge_2\rangle$ 的格同构，并称 $\langle L_1,\leqslant_1\rangle$ 和 $\langle L_2,\leqslant_2\rangle$ 是**格同构**的。

定理 3.32 设 φ 是格 $\langle L_1,\leqslant_1\rangle$ 到 $\langle L_2,\leqslant_2\rangle$ 的格同态，则对任意的 $a,b\in L_1$，当 $a\leqslant_1 b$ 时，$\varphi(a)\leqslant\varphi(b)$。

证明：因为 $a\leqslant_1 b$，所以 $a\wedge_1 b=a$，$\varphi(a\wedge_1 b)=\varphi(a)$，$\varphi(a)\wedge_2\varphi(b)=\varphi(a)$，故 $\varphi(a)\leqslant_2\varphi(b)$。 ■

由定理 3.32 知，格同态是保序的。但是定理 3.32 的逆命题不一定成立。

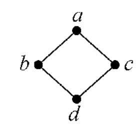

图 3.32 同态格示例

设 $\langle S,\leqslant\rangle$ 是一个格，其中 $S=\{a,b,c,d\}$，如图 3.32 所示。

我们知道，$\langle\rho(S),\subseteq\rangle$ 也是一个格，作映射 $\varphi:S\to\rho(S)$，对任一 $x\in S$，$\varphi(x)=\{y\mid y\in S$ 且 $y\leqslant x\}$，则有，当 $x,y\in S$ 且 $x\leqslant y$ 时，有 $\varphi(x)\subseteq\varphi(y)$，所以 φ 是保序的。

但是，对于 $b,c\in S$，有 $b\vee c=a$，$\varphi(b\vee c)=\varphi(a)=S$，而 $\varphi(b)\cup\varphi(c)=\{b,c,d\}$，所以 $\varphi(b\vee c)\neq\varphi(b)\cup\varphi(c)$。从而 φ 不是从 $\langle S,\leqslant\rangle$ 到 $\langle\rho(S),\subseteq\rangle$ 的格同态。

定理 3.33 设 $\langle L_1,\leqslant_1\rangle$ 和 $\langle L_2,\leqslant_2\rangle$ 都是格，φ 是从 L_1 到 L_2 的双射，则 φ 是从 $\langle L_1,\leqslant_1\rangle$ 到 $\langle L_2,\leqslant_2\rangle$ 的格同构当且仅当对任意的 $x,y\in L_1$：

$$x\leqslant_1 y\Leftrightarrow\varphi(x)\leqslant_2\varphi(y)$$

证明：设 φ 是从 $\langle L_1,\leqslant_1\rangle$ 到 $\langle L_2,\leqslant_2\rangle$ 的格同构。由定理 3.32 知，对任意 $x,y\in L_1$ 若 $x\leqslant_1 y$，则 $\varphi(x)\leqslant_2\varphi(y)$。

反之，若 $\varphi(x)\leqslant_2\varphi(y)$，则 $\varphi(x)\wedge_2\varphi(y)=\varphi(x\wedge_1 y)=\varphi(x)$，由于 φ 是双射，所以 $x\wedge_1 y=x$，故 $x\leqslant_1 y$。

设对任意的 $x,y\in L_1$，$x\leqslant_1 y\Leftrightarrow\varphi(x)\leqslant_2\varphi(y)$，设 $x\wedge_1 y=u$，则 $u\leqslant_1 x$，$u\leqslant_1 y$，于是 $\varphi(x\wedge_1 y)=\varphi(u)$，$\varphi(u)\leqslant_2\varphi(x)$，$\varphi(u)\leqslant_2\varphi(y)$。

所以 $\varphi(u)\leqslant_2\varphi(x)\wedge_2\varphi(y)$ 设 $\varphi(x)\wedge_2\varphi(y)=\varphi(v)$，则：

$$\varphi(u)\leqslant_2\varphi(v),\varphi(v)\leqslant_2\varphi(x),\varphi(v)\leqslant_2\varphi(y)$$

从而 $v\leqslant_1 x$，$v\leqslant_1 y$，$v\leqslant_1 x\wedge_1 y$ 即 $v\leqslant_1 u$。

所以 $f(v)\leqslant_2 f(u)$，故 $f(u)=f(v)$，即 $f(x\wedge_1 y)=f(x)\wedge_2 f(y)$。

类似地可以证明 $f(x\vee_1 y)=f(x)\vee_2 f(y)$，

因此，φ 是 $\langle L_1,\leqslant_1\rangle$ 到 $\langle L_2,\leqslant_2\rangle$ 的格同构。 ■

习题 3.10

1. 设 $\langle L,\leqslant\rangle$ 是偏序集，$\leqslant$ 是 L 上的整除关系。问当 L 取下列集合时，$\langle L,\leqslant\rangle$ 是否是格。

(1) $L=\{1,2,3,4,6,12\}$

(2) $L=\{1,2,3,4,6,8,12\}$

(3) $L=\{1,2,3,4,5,6,8,9,10\}$

2. 设 A 和 B 是两个集合，f 是从 A 到 B 的映射。证明：$\langle S,\subseteq\rangle$ 是 $\langle 2^B,\subseteq\rangle$ 的子格。其中 $S=\{y\mid y=f(x),x\in 2^A\}$。

3. 设$\langle L,\preccurlyeq\rangle$是格，任取$a,b\in L$且$a\preccurlyeq b$。证明$\langle B,\preccurlyeq\rangle$是格。其中$B=\{x|x\in L$且$a\preccurlyeq x\preccurlyeq b\}$。

4. 设$\langle L,\preccurlyeq,*,\oplus\rangle$是格。证明：

(1) $(a*b)\oplus(c*d)\preccurlyeq(a\oplus c)*(b\oplus d)$

(2) $(a*b)\oplus(b*c)\preccurlyeq(c\oplus a)\preccurlyeq(a\oplus b)*(b\oplus c)*(c\oplus a)$

5. 设I是整数集合。证明：$\langle I,\min,\max\rangle$是分配格。

6. 设$\langle A,*,\oplus,\max\rangle$是分配格，$a,b\in A$且$a\preccurlyeq b$。证明：

$$f(x)=(x\oplus a)*b$$

是从A到B的同态函数。其中，$B=\{x|x\in A$且$a\preccurlyeq x\preccurlyeq b\}$。

7. 证明：一个格是分配格的充分必要条件是$\forall a,b,c\in L$，有$(a*b)\oplus(b*c)\oplus(c*a)=(a\oplus b)*(b\oplus c)*(c\oplus a)$。

8. 证明：一个格是分配格的充分必要条件是$\forall a,b,c\in L$，有：

$$(a*b)\oplus(b*c)\oplus(c*a)=(a\oplus b)*(b\oplus c)*(c\oplus a)$$

9. 设$\langle L,\preccurlyeq,*,\oplus\rangle$是有界格。$x,y\in L$，证明：

(1) 若$x\oplus y=0$，则$x=0$且$y=0$。

(2) 若$x*y=1$，则$x=1$且$y=1$。

10. 求$\langle D_{12},|\rangle$的所有子格，其中，D_{12}是12的所有因子的集合$|$是D_{12}上的整除关系。

11. 证明：一个格$\langle L,\preccurlyeq\rangle$分配格的充分必要条件是$\forall a,b,c\in L$，有：

$$(a\oplus b)*c\preccurlyeq a\oplus(b*c)$$

12. 设$\langle L_1,R_1\rangle$和$\langle L_2,R_2\rangle$是两个格，φ：$L_1\to L_2$是从$\langle L_1,R_1\rangle$到$\langle L_2,R_2\rangle$的同态函数。证明：φ的同态像是$\langle L_2,R_2\rangle$的子格。

13. 设$B=\{1,2,5,10,11,22,55,110\}$。证明：$\langle B,\text{GCD},\text{LCM}\rangle$是布尔代数。其中，GCD是求最大公约数，LCM是求最小公倍数，$x'=110/x$。

3.11 关系在计算机科学中的应用

3.11.1 关系在关系数据库中的应用

我们在这里以目前应用最广泛的关系数据库为例，来介绍关系的应用。

在关系数据库中数据按二维表的形式存放，包括行和列。一张二维表可有m行n列，二维表的每一行叫元组(记录)，它代表一个完整的数据。二维表的每一列表示数据的分量(字段)。所以，一张二维表就是一个关系。

若$D_1=$SUPERVISOR $=\{$程实，刘逸$\}$

$D_2=$SPECIALITY$=\{$计算机专业，信息专业$\}$

$D_3=$POSTGRADUATE$=\{$李勇，刘晨，王敏$\}$

则$D_1\times D_2\times D_3=$

$\{$(程实，计算机专业，李勇)，(程实，计算机专业，刘晨)，

(程实，计算机专业，王敏)，(程实，信息专业，李勇)，

(程实,信息专业,刘晨),(程实,信息专业,王敏),
(刘逸,计算机专业,李勇),(刘逸,计算机专业,刘晨),
(刘逸,计算机专业,王敏),(刘逸,信息专业,李勇),
(刘逸,信息专业,刘晨),(刘逸,信息专业,王敏)}

这个集合可以表示为如表3.7所示的二维表。

表3.7 D_1、D_2、D_3 的笛卡儿积

SUPERVISOR	SPECIALITY	POSTGRADUATE
程实	计算机专业	李勇
程实	计算机专业	刘晨
程实	计算机专业	王敏
程实	信息专业	李勇
程实	信息专业	刘晨
程实	信息专业	王敏
刘逸	计算机专业	李勇
刘逸	计算机专业	刘晨
刘逸	计算机专业	王敏
刘逸	信息专业	李勇
刘逸	信息专业	刘晨
刘逸	信息专业	王敏

关系数据库是从笛卡儿积中取出有实际意义的元组来构造的关系。例如,在表3.7中,如果限定“导师—专业:1∶1,导师—研究生:1∶n,学生—专业:1∶1”,于是得到SAP关系只包含三个元组(见表3.8)。

表3.8 SAP关系

SUPERVISOR	SPECIALITY	POSTGRADUATE
程实	信息专业	李勇
程实	信息专业	刘晨
刘逸	信息专业	王敏

3.11.2 关系传递闭包在语法分析中的应用

1. 文法与语言相关概念

(1) **文法**:是描述语言的语法结构的形式规则。Chomsky把文法 G 定义为:$G=(V_N, \Sigma, P, S)$。

其中,V_N 表示非终结符——出现在规则左部、表示一定语法单位的词。

Σ 表示终结符集合(字母表)——语言中不可再分割的字符。

S 表示开始符号(识别符号)——$S \in V_N$。

P 表示产生式——形式 $A \to B$。

(2) **推导**:从开始符号开始,通过使用产生式的右部取代左部,最终能产生语言的一个

句子的过程。

(3) **规约**：推导的逆过程，从源语言的句子开始，通过规则的左部取代右部，最终达到识别符号的过程。

(4) **句型**：从文法的识别符号，每步推导(包括0步推导)得到的字符串 α。

(5) **句子**：是仅含终结符的句型。

(6) **语言**：是由 S 开始通过1步或1步以上推导所得句子的集合。记为：$L(G)$。

根据对文法产生式的限制分为四类：0、1、2、3型文法。**0型文法**：P中产生的左边至少有一个符号，且至少有一个非终结符。识别0型语言的文法称为图灵机。0型文法是对产生式限制最少的文法。任何0型都是递归可枚举的，有关1、2、3型文法这里就不介绍了，在编译原理中将有更详细的介绍。

正规文法是左线性文法和右线性文法的统称，它们都是Chomsky分类下的**3型文法**。由正规文法产生的语言称为**正规集**。下面我们将会看到，这里之所以用“正规”两字为一种语言命名，是因为这种语言的结构可以用所谓正规式来描述。

2. 上下文无关文法与算数表达式生成

文法的另一种分类是：正规文法、上下文无关文法、上下文有关文法和短文文法。

在计算机科学中，若一个形式文法 $G=(V_N, \Sigma, P, S)$ 的产生式规则都取如下的形式：$V\to w$，则称之为**上下文无关**的，其中 $V\in V_N$，$w\in(V_N\cup\Sigma)^*$。上下文无关文法取名为“上下文无关”的原因就是因为字符 V 总可以被字串 w 规约，而无须考虑字符 V 出现的上下文。如果一个形式语言是由上下文无关文法生成的，则它是上下文无关的。

上下文无关文法重要的原因在于它们拥有足够强的表达力来表示大多数程序设计语言的语法；实际上，几乎所有程序设计语言都是通过上下文无关文法来定义的。另一方面，上下文无关文法又足够简单，使得我们可以构造有效的分析算法来检验一个给定字串是否是由某个上下文无关文法产生的。

正规文法是右左线性文法($V\to aB$ 或 $V\to a$，$V,B\in V_N$，$a\in\Sigma$)和左线性文法($V\to Ba$ 或 $V\to a$，$V,B\in V_N$，$a\in\Sigma$)的统称。它们都是Chomsky分类下的3型文法。由正规文法产生的语言称为正规集。识别3型语言的文法称为有限状态自动机。

一个简单的上下文无关文法是 $G=\{\{S\},\{a,b\},S\to aSb|\varepsilon,S\}$，这个文法产生了语言 $\{a^nb^n:n\geqslant 0\}$。不难证明这个语言不是正规的。

设 $G=\{\{S,T\},\{+,-,/,*,x,y,z\},\{S\to T+S|T-S|T,T\to T*T|T/T|(S)|x|y|z\},S\}$，这个文法可以产生变量 x,y,z 的算术表达式：例如字串“$(x+y)*x-z*y/(x+x)$”就可以用这个文法来产生。

字母表 $\{a,b\}$ 上 a 和 b 数目不相等的所有字串可以由下述文法产生：

$S\to U|V$

$U\to TaU|TaT$

$V\to TbV|TbT$

$T\to aTbT|bTaT|\varepsilon$

这里 T 可以产生 a 和 b 数目相等的所有字串，U 可以产生 a 的数目多于 b 的数目的所有字串，V 可以产生 a 的数目少于 b 的数目的所有字串。

3. 关系传递闭包在语法分析中的应用

【例 3.39】 设有一字母表$\{A,B,C,D,e,d,f\}$并给定下面六条产生式：

$$A \quad Af,\quad B \quad Dde,\quad C \quad e$$

$$A\rightarrow B,\quad B\rightarrow De,\quad D\rightarrow Bf$$

R 为定义在 V 上的二元关系且 x_iRx_j，即是从 x_i 出发用一条产生式推出一串字符，使其第一个字符恰为 x_j。说明每个字母连续应用上述规则可能推出的头字符。

解：

$$\boldsymbol{M}_R=\begin{bmatrix}1&1&0&0&0&0&0\\0&0&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&1&0&0\\0&1&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

则 $x_iR^+x_j$ 表示从 x_i 出发，经过多次连续推导而得的字符串，其第一个字符恰为 x_j 的关系，此关系即是 R^+。按照 Warshall 算法计算的过程中，$i=5$ 时，由于第五行的元素都等于零，$\boldsymbol{M}$ 的赋值不变。$i=3$，$i=6$，$i=7$ 时，由于第 3、6、7 列各元素均为零，$\boldsymbol{M}$ 的赋值不变。经计算得：

$$\boldsymbol{M}_{R^+}=\begin{bmatrix}1&1&0&1&0&0&0\\0&1&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&1&0&0\\0&1&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

因此 $R^+=\{\langle A,A\rangle,\langle A,B\rangle,\langle A,D\rangle,\langle B,B\rangle,\langle B,D\rangle,\langle C,e\rangle,\langle D,B\rangle,\langle D,D\rangle\}$。

这说明应用给定的产生式，从 A 出发推导的头字符有 A、B、D 三种可能，而从 B 出发推导的头字符有 B 和 D 两种可能，而从 D 推出的头字符有 B 和 D 两种可能，从 C 出发推导的头字符只可能为 e。

3.12　本章小结

1. 关系

关系示意图如图 3.33 所示。

2. 关系性质

关系的性质如图 3.34 所示。

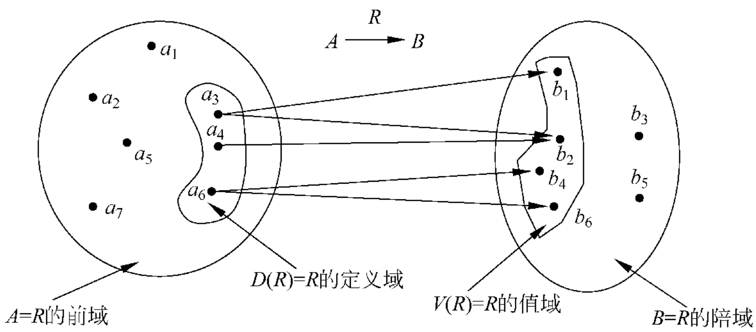

图 3.33 关系示意图

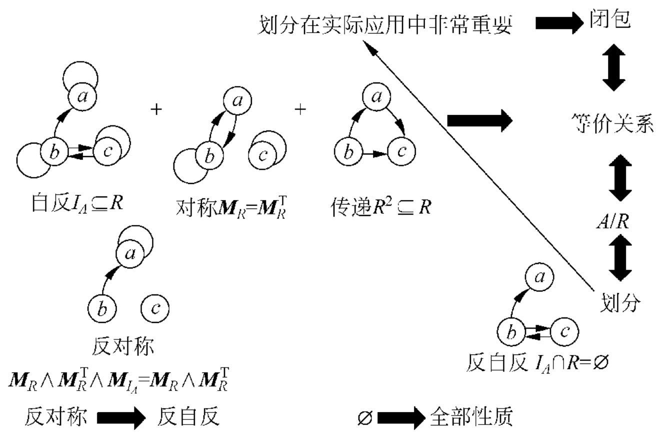

图 3.34 关系的性质

3. 关系的性质与关系运算之间的关系(见表 3.9)

表 3.9 关系的性质与关系运算之间的关系

	自　反	反 自 反	对　称	反 对 称	传　递
$R\cap S$					
$R\cup S$				×	×
$R-S$	×				×
R^{-1}					
$R\circ S$		×	×	×	×

4. 关系的性质与闭包运算的联系(见表 3.10)

表 3.10 关系的性质与闭包运算的联系

	自　反	反 自 反	对　称	反 对 称	传　递
$r(R)$		×			
$s(R)$				×	×
$t(R)$		×		×	

5. 其他特殊关系(见表 3.11)

表 3.11 其他特殊关系

	自反	反自反	对称	反对称	传递
等价关系	√		√		√
相容关系	√		√		
偏序关系	√	×		√	√

6. 关系的知识体系(见图 3.35)

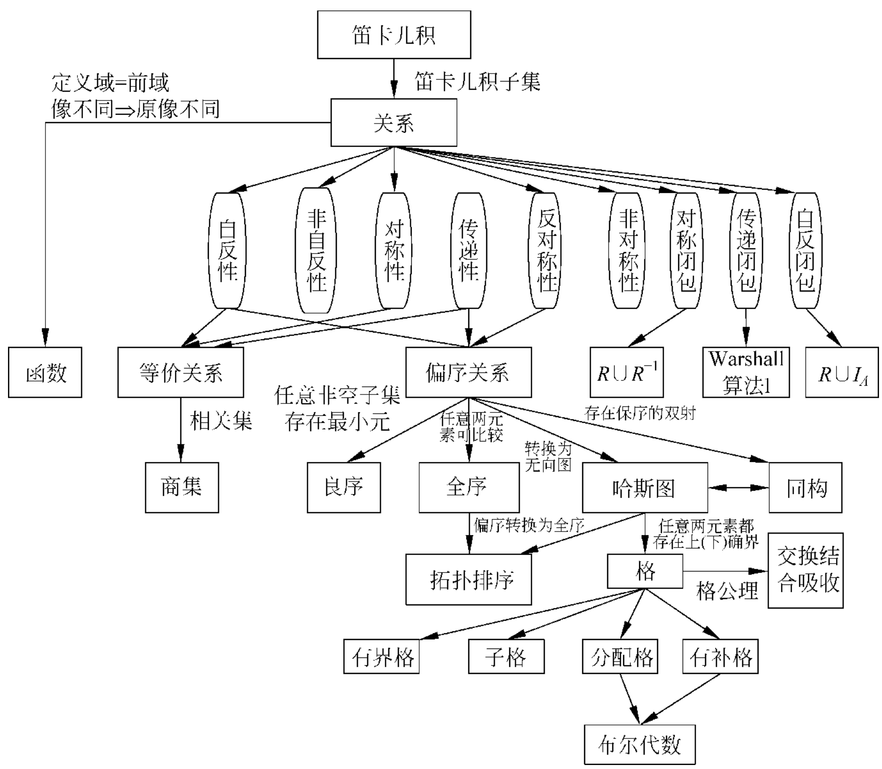

图 3.35 关系的知识体系

自测题 3

一、选择题

1. 设集合 $A=\{1,2,3,4,5,6\}$ 上的二元关系 $R=\{\langle a,b\rangle \mid a,b\in A,且\ a+b=8\}$,则 R 具有的性质为( )。

A. 自反的　　B. 对称的

C. 对称和传递的　　D. 反自反和传递的

2. 设集合 $A=\{1,2,3,4\}$上的二元关系 $R=\{\langle 1,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 4,4\rangle\}$，$S=\{\langle 1,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 3,2\rangle,\langle 4,4\rangle\}$，则 S 是 R 的(　　)闭包。

A. 自反　　B. 传递
C. 对称　　D. 以上都不对

3. 非空集合 A 上的二元关系 R，满足(　　)，则称 R 是等价关系。

A. 自反性、对称性和传递性
B. 反自反性、对称性和传递性
C. 反自反性、反对称性和传递性
D. 自反性、反对称性和传递性

4. 设 R 和 S 是集合 A 上的关系，则下列说法正确的是(　　)。

A. 若 R 和 S 是自反的，则 $R\circ S$ 是自反的
B. 若 R 和 S 是反自反的，则 $R\circ S$ 是反自反的
C. 若 R 和 S 是对称的，则 $R\circ S$ 是对称的
D. 若 R 和 S 是传递的，则 $R\circ S$ 是传递的

5. 设 $A=\{1,2,3,4\}$，$P(A)$(A 的幂集)上规定二元关系如下：

$R=\{\langle s,t\rangle \mid s,t\in P(A)\ \wedge(|s|=|t|)\}$，则 $P(A)/R=$(　　)。

A. A
B. $P(A)$
C. $\{\{\{1\}\},\{\{1,2\}\},\{\{1,2,3\}\},\{\{1,2,3,4\}\}\}$
D. $\{\{\Phi\},\{2\},\{2,3\},\{\{2,3,4\}\},\{A\}\}$

6. 如图 3.36 所示，设 $A=\{\Phi,\{1\},\{1,3\},\{1,2,3\}\}$，则 A 上包含关系"$\subseteq$"的哈斯图为(　　)。

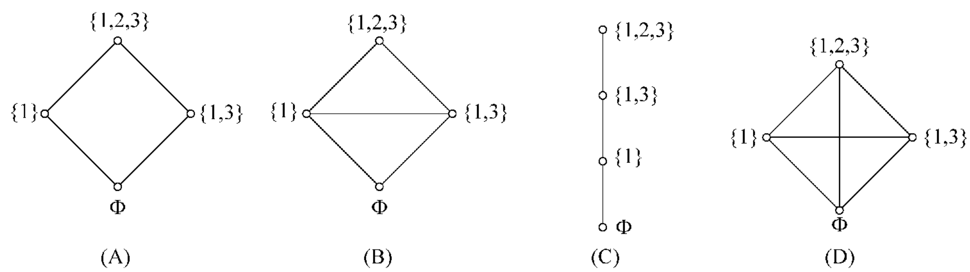

图 3.36　第 6 题对应的图

7. 设 $S=\{1,2,3\}$，定义 $S\times S$ 上的等价关系：

$R=\{\langle\langle a,b\rangle,\langle c,d\rangle\rangle \mid \langle a,b\rangle\in S\times S,\langle c,d\rangle\in S\times S,a+d=b+c\}$则由 R 产生的 $S\times S$ 上一个划分共有(　　)个分块。

A. 4　　B. 5　　C. 6　　D. 9

8. 设集合 $A=\{a,b,c,d,e,f,g\}$，A 的一个划分 $\pi=\{\{a,b\},\{c,d,e\},\{f,g\}\}$，则 π 所对应的等价关系有(　　)个二元组。

A. 14　　B. 15　　C. 16　　D. 17

9. 在由三个元素组成的集合上，可以有（　　）种不同的关系。
A. 4　　B. 8　　C. 16　　D. 512

二、填空题

1. 设 $A=\{1,2,3,4\}$上的关系 $R=\{\langle 1,2\rangle,\langle 2,4\rangle,\langle 3,3\rangle,\langle 1,3\rangle\}$，则 $r(R)=$________，$s(R)=$________，$t(R)=$________。

2. 设 $A=\{1,2,3\}$，则在 A 上有________个不同的分划。

3. 不同的二元关系共有________个。

4. 证明有界分配格，如果存在补，则补唯一。
设 a'和a''是 a 的补，那么 $a'=a'\wedge 1=$________，同理 $a''=a''\wedge 1=$________，因此 $a'=a''$。

5. 设 $A=\{1,2,3,4\}$，A 上关系图如图 3.37 所示，则 $R^2=$________。

6. 设 $A=\{a,b,c,d\}$，其上偏序关系 R 的哈斯图如图 3.38 所示，则 $R=$________。

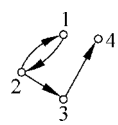

图 3.37　第 5 题对应的图

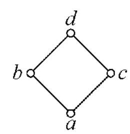

图 3.38　第 6 题对应的图

7. 设 $A=\{2,3,4,5,6\}$上的二元关系 $R=\{\langle x,y\rangle \mid x<y \vee x$ 是质数$\}$，则 $R=$________（列举法）。R 的关系矩阵 $\boldsymbol{M}_R=$________。

8. 设 $A=\{1,2,3\}$，则 A 上既不是对称的又不是反对称的关系 $R=$________；A 上既是对称的又是反对称的关系 $R=$________。

9. 设 R 和 S 都是集合 A 上的等价关系，则对称闭包 $s(R\cap S)=$________。

三、简答题

1. 设 $L=\{1,2,3,4,6,12\}$，L 上的关系$\preccurlyeq$定义为：$\forall x,y\in L$，$x\preccurlyeq y$ 当且仅当 x 是 y 的因子，问：(1) $\preccurlyeq$是一个偏序关系吗？若是，画出其哈斯图。
(2) 判断$\langle L;\preccurlyeq\rangle$是否为格。

2. 集合 $X=\{\langle 1,2\rangle,\langle 3,4\rangle,\langle 5,6\rangle,\cdots\}$，$R=\{\langle\langle x_1,y_1\rangle,\langle x_2,y_2\rangle\rangle \mid x_1+y_2=x_2+y_1\}$。
(1) 证明 R 是 X 上的等价关系。
(2) 求出 X 关于 R 的商集。

3. 证明定义在实数集 R 上的关系 $S=\left\{\langle x,y\rangle \mid x,y\in R,\dfrac{x-y}{3}\text{是整数}\right\}$是一个等价关系。

4. 设 N 是自然数集合，定义 N 上的二元关系 ρ：$\rho=\{\langle x,y\rangle \mid x\in N,y\in N,x+y$ 是偶数$\}$，证明 ρ 是一个等价关系。

5. 证明：一个有界格的子格也是有界格。

6. R 是集合 X 上的一个自反关系，求证：R 是对称和传递的，当且仅当$\langle a,b\rangle$和$\langle a,c\rangle$在 R 中有$\langle b,c\rangle$在 R 中。