第一章

基本性质与轨迹

【导读】

- 基本性质与轨迹
  - 焦点三角形
    - 焦点三角形的周长
    - 焦点三角形的面积
    - 焦点三角形的角平分线
    - 焦点三角形的中位线
  - 离心率
    - 一般求值和取值范围
    - 利用顶角建立不等式求离心率范围
    - 利用焦半径的取值范围求离心率的取值范围
    - 利用渐近线求离心率的取值范围
  - 转换
    - 焦点间的相互转换
    - 焦点与相应准线的转换
    - 点线距离与线线距离的转换
  - 轨迹
    - 定义法
    - 直译法
    - 相关点法
    - 参数法
    - 交轨法
    - 空间点的轨迹

本章从圆锥曲线的基本概念及性质出发，探索并总结出一些重要结论，具体涉及焦点三角形、离心率，极其重要的转换思想在这部分内容中体现得淋漓尽致. 章末对轨迹的常见求法进行了清晰而详尽的归类，希望读者能够用心理解并熟练掌握和应用.

第一节　焦点三角形

首先回顾一下圆锥曲线的定义：

【知识点 1.1】 椭圆

平面内，到两个定点 F_1，F_2 的距离之和为常数 $2a(2a>|F_1F_2|)$ 的点的轨迹叫做椭圆，即 $\left\{P\,\middle|\,|PF_1|+|PF_2|=2a(2a>|F_1F_2|)\right\}$. 这两个定点叫做椭圆的焦点（$F_1$ 为左焦点，F_2 为右焦点），两焦点的距离叫做椭圆的焦距，记作 $2c$.

【注】 (1) 当 $2a=2c$ 时，点的轨迹为线段.

(2) 当 $2a<2c$ 时，点的轨迹不存在.

【知识点 1.2】 双曲线

平面内，到两个定点 F_1，F_2 的距离的差的绝对值为常数 $2a(2a<|F_1F_2|)$ 的点的轨迹叫做双曲线，即 $\left\{P\,\middle|\,\big||PF_1|-|PF_2|\big|=2a(2a<|F_1F_2|)\right\}$. 这两个定点叫做双曲线的焦点（$F_1$ 为左焦点，F_2 为右焦点），两焦点的距离叫做双曲线的焦距，记作 $2c$.

【注】 (1) 若在定义式中去掉绝对值，则曲线仅为双曲线的一支，若 $|PF_1|-|PF_2|=2a$，则点的轨迹仅为双曲线的右支，若 $|PF_2|-|PF_1|=2a$，则点的轨迹仅为双曲线的左支.

(2) 当 $2a=2c$ 时，点的轨迹是以 F_1 和 F_2 为端点的两条射线.

(3) 当 $2a>2c$ 时，点的轨迹不存在.

【知识点 1.3】 抛物线

平面内，到一个定点 F 和一条直线 $l(F\notin l)$ 的距离相等的点的轨迹叫做抛物线，定点 F 叫做抛物线的焦点，定直线 l 叫做抛物线的准线.

由椭圆或者双曲线上的一点及其两个焦点构成的三角形称为“焦点三角形”，因为圆锥曲线的焦点是一个非常重要的概念，这也就决定了焦点三角形的某些特别之处. 下面将从焦点三角形的周长、面积、角平分线以及中位线这几个角度对其进行细致而深入的探索与剖析.

一、焦点三角形的周长

【例 1.1】(2010・新课标理，20)　如图 1-1 所示，F_1，F_2 分别是椭圆 E：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右焦点，过 F_1 斜率为 1 的直线 l 与 E 相交于 A，B 两点，且 $|AF_2|$，$|AB|$，$|BF_2|$ 成等差数列，求 E 的离心率.

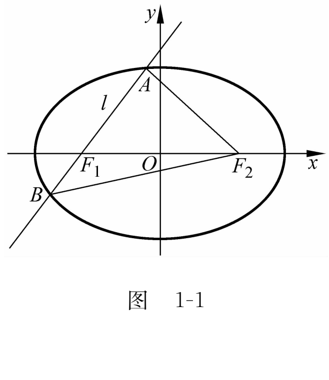

图 1-1

【解析】 易知 $|AF_2|+|BF_2|+|AB|=4a$，又 $2|AB|=$

$|AF_2|+|BF_2|$，得$|AB|=\frac{4}{3}a$.

设直线 AB 的方程为 $y=x+c$，A，B 两点的坐标分别为(x_1,y_1)，(x_2,y_2)，坐标满足方程组$\begin{cases}y=x+c,\\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\end{cases}$整理得$(a^2+b^2)x^2+2a^2cx+a^2(c^2-b^2)=0$，则 $x_1+x_2=\frac{-2a^2c}{a^2+b^2}$，$x_1x_2=\frac{a^2(c^2-b^2)}{a^2+b^2}$，于是$|AB|=\sqrt{2}|x_2-x_1|=\sqrt{2[(x_1+x_2)^2-4x_1x_2]}=\frac{4ab^2}{a^2+b^2}$，所以$\frac{4}{3}a=\frac{4ab^2}{a^2+b^2}$，得 $a^2=2b^2$，故 E 的离心率为 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

对于焦点三角形的周长，有以下结论：

【结论 1.1】（1）已知 F_1，F_2 分别为椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 的左、右焦点，P 是椭圆上的动点，则$\triangle PF_1F_2$ 的周长恒为定值 $2a+2c$.

（2）已知 F_1，F_2 分别为椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 的左、右焦点，l 过焦点 F_1 且与椭圆交于 A，B 两点，则$\triangle F_2AB$ 的周长恒为定值 $4a$.

【变式 1】（2008·浙江理，12）　已知 F_1，F_2 为椭圆$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ 的两个焦点，过 F_1 的直线交椭圆于 A，B 两点，若$|F_2A|+|F_2B|=12$，则$|AB|=$________.

【变式 2】（2006·全国Ⅱ理，5）　已知$\triangle ABC$ 的顶点 B，C 在椭圆$\frac{x^2}{3}+y^2=1$ 上，顶点 A 是椭圆的一个焦点，且椭圆另外一个焦点在 BC 边上，则$\triangle ABC$ 的周长是（　　）.

A. $2\sqrt{3}$　　B. 6　　C. $4\sqrt{3}$　　D. 12

【变式 3】(2011・新课标理,14)　在平面直角坐标系 xOy 中,椭圆 C 的中心为原点,焦点 F_1,F_2 在 x 轴上,离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$. 过点 F_1 的直线 l 交 C 于 A,B 两点,且 $\triangle ABF_2$ 的周长为 16,那么 C 的方程为________.

【变式 4】(2007・湖北文,12)　如图 1-2 所示,过双曲线 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{3}=1$ 左焦点 F_1 的直线交曲线的左支于 M,N 两点,F_2 为其右焦点,则 $|MF_2|+|NF_2|-|MN|$ 的值为________.

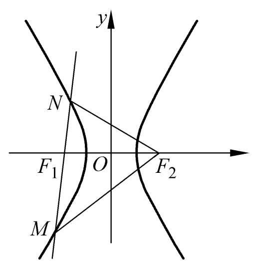

图　1-2

二、焦点三角形的面积

【例 1.2】(2004・湖北理,6)　已知椭圆 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ 的左、右焦点为 F_1,F_2,P 在椭圆上,若 P,F_1,F_2 是一个直角三角形的三个顶点,则点 P 到 x 轴的距离为(　　).

A. $\frac{9}{5}$　　B. 3　　C. $\frac{9\sqrt{7}}{7}$　　D. $\frac{9}{4}$

【解析】　若直角顶点为 F_1,则点 P 到 x 轴的距离为 $d=|PF_1|=\frac{b^2}{a}=\frac{9}{4}$;若直角顶点为 F_2,则点 P 到 x 轴的距离为 $d=|PF_2|=\frac{b^2}{a}=\frac{9}{4}$;若直角顶点为 P,记 $\theta=\angle F_1PF_2$ 则 $\triangle PF_1F_2$ 的面积 $S_{\triangle PF_1F_2}=b^2\tan\frac{\theta}{2}=9\times\tan 45^\circ=9$,此时 $d=\frac{2S_{\triangle PF_1F_2}}{2c}=\frac{9}{\sqrt{7}}>3=b$,此情况不存在. 故选 D.

对于焦点三角形的面积,有以下结论:

【结论 1.2】 (1) 已知 F_1,F_2 为椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 的两个焦点,M 是椭圆上的动点,则 $\triangle MF_1F_2$ 的面积为 $S=c|y_M|=b^2\tan\dfrac{\theta}{2}(\theta=\angle F_1MF_2)$.

(2) 已知 F_1,F_2 为双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 的两个焦点,M 是双曲线上的动点,则 $\triangle MF_1F_2$ 的面积为 $S=c|y_M|=\dfrac{b^2}{\tan\dfrac{\theta}{2}}(\theta=\angle F_1MF_2)$.

【证明】 只证(2),类似可证(1). 由余弦定理可知 $|F_1F_2|^2=|MF_1|^2+|MF_2|^2-2|MF_1|\cdot|MF_2|\cos\theta$.

假设 M 在双曲线的左支上,F_1,F_2 分别为其左、右焦点,由双曲线定义有 $|MF_2|-|MF_1|=2a$,可得 $|MF_2|^2+|MF_1|^2-2|MF_2|\cdot|MF_1|=4a^2$,故 $4c^2=2|MF_2|\cdot|MF_1|+4a^2-2|MF_1|\cdot|MF_2|\cos\theta\Rightarrow|MF_1|\cdot|MF_2|=\dfrac{2b^2}{1-\cos\theta}$,则

$$S_{\triangle MF_1F_2}=\frac{1}{2}|MF_1|\cdot|MF_2|\cdot\sin\theta=\frac{1}{2}\cdot\frac{2b^2\sin\theta}{1-\cos\theta}=\frac{b^2\cdot 2\sin\dfrac{\theta}{2}\cos\dfrac{\theta}{2}}{2\sin^2\dfrac{\theta}{2}}=\frac{b^2}{\tan\dfrac{\theta}{2}}.$$

【注】 虽然结论 1.2 针对的是已知焦点三角形顶角的情形,但若知道两个底角时,根据三角形内角和为 $180°$ 也可转化为已知顶角的情形,故不再单独列出.

【变式 1】(2005·全国理,9) 已知双曲线 $x^2-\dfrac{y^2}{2}=1$ 的焦点为 F_1,F_2,点 M 在双曲线上且 $\overrightarrow{MF_1}\cdot\overrightarrow{MF_2}=0$,则点 M 到 x 轴的距离为( ).

A. $\dfrac{4}{3}$ B. $\dfrac{5}{3}$ C. $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ D. $\sqrt{3}$

【变式 2】(2010・全国Ⅰ理,9) 已知 F_1,F_2 为双曲线 $C:x^2-y^2=1$ 的左、右焦点,点 P 在 C 上,$\angle F_1PF_2=60^\circ$,则点 P 到 x 轴的距离为(　　).

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　B. $\frac{\sqrt{6}}{2}$　　C. $\sqrt{3}$　　D. $\sqrt{6}$

【变式 3】(2009・上海理,9) 已知 F_1,F_2 是椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的两个焦点,P 为椭圆 C 上一点,且 $PF_1\perp PF_2$.若 $\triangle PF_1F_2$ 的面积为 9,则 $b=$________.

【变式 4】(2010・全国Ⅰ文,8) 已知 F_1,F_2 为双曲线 $C:x^2-y^2=1$ 的左、右焦点,点 P 在 C 上,$\angle F_1PF_2=60^\circ$,则 $|PF_1|\cdot|PF_2|=$(　　).

A. 2　　B. 4　　C. 6　　D. 8

【变式 5】(2007·辽宁理,11)　设 P 为双曲线 $x^2-\frac{y^2}{12}=1$ 上的一点,F_1,F_2 是该双曲线的两个焦点,若 $|PF_1|:|PF_2|=3:2$,则$\triangle PF_1F_2$ 的面积为(　　).

A. $6\sqrt{3}$　　B. 12　　C. $12\sqrt{3}$　　D. 24

【变式 6】(2005·全国Ⅱ理,6)　已知双曲线$\frac{x^2}{6}-\frac{y^2}{3}=1$ 的焦点为 F_1,F_2,点 M 在双曲线上且 MF_1 垂直于 x 轴,则 F_1 到直线 F_2M 的距离为(　　).

A. $\frac{3\sqrt{6}}{5}$　　B. $\frac{5\sqrt{6}}{6}$　　C. $\frac{6}{5}$　　D. $\frac{5}{6}$

三、焦点三角形的角平分线

【例 1.3】(2010·安徽理,17)　已知 F_1,F_2 为椭圆$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$ 的左、右焦点,点 $A(2,3)$在椭圆上,求$\angle F_1AF_2$ 的角平分线所在直线 l 的方程.

【解析】　由题意知 $F_1(-2,0)$,$F_2(2,0)$,$A(2,3)$,所以 $|AF_1|=5$,$|AF_2|=3$,设 l 与 x 轴的交点为 $B(x,0)$,则$\frac{AF_1}{AF_2}=\frac{BF_1}{BF_2}$,因此$\frac{5}{3}=\frac{x+2}{2-x}$,解得 $x=\frac{1}{2}$,则 $k_{AB}=2$,故直线 l 的方程为 $2x-y-1=0$.

对于焦点三角形的角平分线,有以下结论:

【结论 1.3】 (1) 如图 1-3 所示,$\triangle ABC$ 中,AD 为$\angle BAC$ 的角平分线,则$\frac{|AB|}{|AC|}=\frac{|BD|}{|CD|}$.

(2) 如图 1-4 所示,P 是椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 上的动点,F_1,F_2 为椭圆的两个焦点,$\triangle PF_1F_2$ 的内切圆半径为 r,则 $S_{\triangle PF_1F_2}=r(a+c)$.

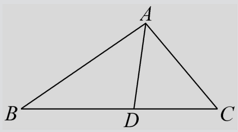

图 1-3

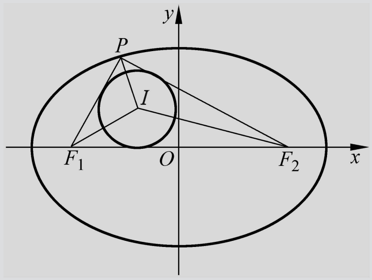

图 1-4

【证明】 (1) 如图 1-5 所示,过点 A 作 $AE\perp BC$,过 D 分别作 AB,AC 的高 h_1,h_2,由于 AD 为角平分线,所以 $h_1=h_2$,故

$$\frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ACD}}=\frac{\frac{1}{2}\cdot|BD|\cdot|AE|}{\frac{1}{2}\cdot|CD|\cdot|AE|}=\frac{\frac{1}{2}\cdot h_1\cdot|AB|}{\frac{1}{2}\cdot h_2\cdot|AC|},\text{于是}\frac{|AB|}{|BD|}=\frac{|AC|}{|CD|}.$$

(2) 如图 1-4 所示,$S_{\triangle PF_1F_2}=S_{\triangle PIF_1}+S_{\triangle PIF_2}+S_{\triangle F_2IF_1}=\frac{1}{2}\cdot|PF_1|\cdot r+\frac{1}{2}\cdot|PF_2|\cdot r+\frac{1}{2}\cdot|F_2F_1|\cdot r=\frac{1}{2}\cdot r(|PF_1|+|PF_2|+|F_1F_2|)=r(a+c)$.

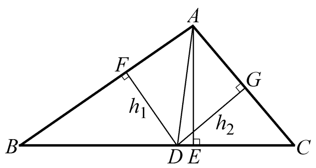

图 1-5

【变式 1】(2011 · 全国理,15 改编) 已知 F_1,F_2 分别为双曲线 C: $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{27}=1$ 的左、右焦点,A 为 C 上一点,点 M 的坐标为$(-2,0)$,AM 为$\angle F_1AF_2$ 的角平分线.则$|AF_2|=$________.

【变式 2】　已知椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$的左、右焦点分别为$F_1$,$F_2$,$O$为椭圆的中心,$P$是椭圆上的点,$\triangle PF_1F_2$的内切圆的圆心为$I$,延长直线$PI$交$x$轴于点$B$,若$e$为椭圆的离心率,则$\frac{|PI|}{|IB|}=$(　　).

A. e　　　B. 1　　　C. $\frac{1}{e}$　　　D. 不确定

【变式 3】　P是椭圆C:$\frac{x^2}{4}+y^2=1$上除长轴端点外的任一点,连接PF_1,PF_2,设$\angle F_1PF_2$的角平分线PM交C的长轴于点$M(m,0)$,求m的取值范围.

【例 1.4】(2009・成都一诊理,12)　已知P是椭圆$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$上的一点,$F_1$,$F_2$是椭圆的左、右焦点,$\triangle PF_1F_2$的内切圆的半径为$\frac{1}{2}$,则$\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}$的值为(　　).

A. $\frac{3}{2}$　　　B. $-\frac{9}{4}$　　　C. $\frac{9}{4}$　　　D. 0

【解析】　如图 1-6 所示,不妨设P在第一象限(其他象限类似),$S_{\triangle PF_1F_2}=S_{\triangle PIF_2}+S_{\triangle PF_1I}+S_{\triangle IF_1F_2}=\frac{1}{2}|PF_2|\cdot r+\frac{1}{2}|PF_1|\cdot r+\frac{1}{2}|F_1F_2|\cdot r=\frac{1}{2}(|PF_2|+|PF_1|+|F_1F_2|)\cdot r=\frac{1}{2}\times(4+2)\times\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$,又$S_{\triangle PF_1F_2}=\frac{1}{2}|F_1F_2|y_P$($y_P$为点$P$的纵坐标),所以$y_P=\frac{3}{2}$,即$P\left(1,\frac{3}{2}\right)$,于是$\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}=\frac{9}{4}$,故选 C.

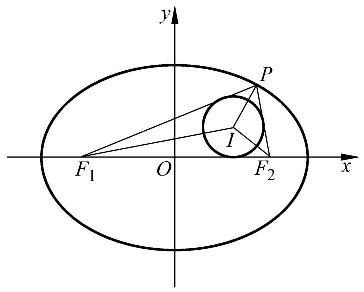

图　1-6

【变式 1】 已知点 $P(12,6\sqrt{2})$，点 F_1，F_2 分别是双曲线$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$的左、右焦点，点 I 是 $\triangle PF_1F_2$ 的内心，且 $S_{\triangle IPF_2}=S_{\triangle IPF_1}-\lambda S_{\triangle IF_1F_2}$，则 $\lambda=$(　　).

A. $\frac{4}{5}$　　B. $-\frac{4}{5}$　　C. $\frac{3}{5}$　　D. $-\frac{3}{5}$

四、焦点三角形的中位线

【例 1.5】(2010·成都二诊,10)　如图 1-7 所示，已知椭圆的左焦点为 F_1，若椭圆上存在一点 P，满足以椭圆短轴为直径的圆与线段 PF_1 相切于线段 PF_1 的中点 E，则椭圆的离心率为(　　).

A. $\frac{\sqrt{5}}{3}$　　B. $\frac{2}{3}$　　C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　D. $\frac{5}{9}$

【解析】 如图 1-7 所示，连接 P 和右焦点 F_2，则 OE 是 $\triangle PF_1F_2$ 的中位线，得到 $|PF_2|=2b$，且 $PF_1\perp PF_2$，得到 $|PF_1|=2a-2b$，且 $(2a-2b)^2+(2b)^2=(2c)^2$，即 $3b^2=2ab$，解得 $a=\frac{3}{2}b$，所以 $e=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}=\frac{\sqrt{5}}{3}$. 故选 A.

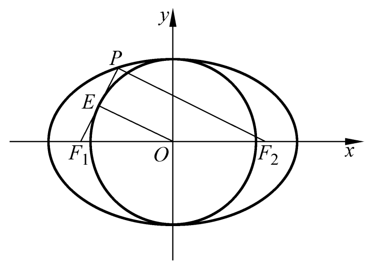

图 1-7

【方法总结 1.1】 在圆锥曲线的选择题与填空题中，若有中点这样的信息出现，就要联想到中位线，因为原点是椭圆和双曲线的中心，是两焦点的天然中点.