



前面已经讲过如何用数学表达式描述系统。只要知道了系统的结构和参数,我们就能计算出它的各个物理量的变化规律。但从工程角度看,这还是不够的。一方面,系统愈复杂,微分方程阶次就愈高,求解也就愈困难。许多复杂系统的微分方程阶次高达十几阶甚至几十阶,即使使用计算机求解也是很麻烦的。另一方面,实际工程问题并不是简单地求解一个既定系统的运动方程,而往往是要选择系统中某些参数,甚至要改变系统的结构,以求获得较好的动态性能。如果都靠直接求解微分方程来研究这些问题,势必要解大量的微分方程,从而大大增加计算量。同时,从微分方程也不容易区分影响系统运动规律的主要因素和次要因素。因此,就需要研究一些比较方便的工程分析方法。这些工程方法的计算量应当不太大,并且不因方程阶次的升高而增加太多。用这些方法不仅比较容易分析各主要参数对系统运动规律的影响,而且还可以借助一些图表和曲线直观地把运动特征表示出来。这些都是直接求解微分方程所做不到的。而且从工程实用的角度来看,准确地求解微分方程往往也是不必要的。我们举一个例子来说明这一点。图 3-1 中,曲线 1 是四阶微分方程

$$0.5x^{(4)} + 10x''' + 10x'' + 10x' + x = 1 \quad (3-1)$$

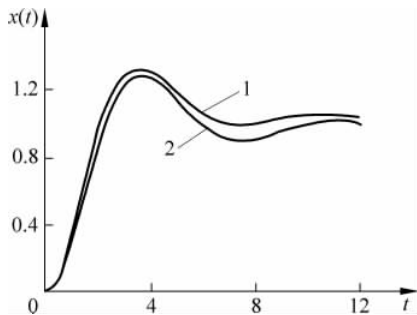


图 3-1

在初始条件 $x(0)=x'(0)=x''(0)=0, x'''(0)=20$ 时的解; 而曲线 2 是二阶微分方程

$$1.21x'' + 0.792x' + x = 1 \quad (3-2)$$

在初始条件 $x(0)=x'(0)=0$ 时的解。容易看出, 尽管式(3-1)和式(3-2)这两个方程差别很大, 但它们各自代表的系统的运动规律却很相近。从工程角度看, 这两条曲线主要特征相同, 而细节差别并不重要。由此可以想到, 如果能够设法从微分方程判断出系统运动的主要特征而不必准确地把微分方程解出来, 则更为实用。这样, 就提出了从工程角度分析系统运动规律的问题。

分析系统的运动, 首先要判断它是否稳定。第 1 章讲过, 负反馈是实现控制的基本方法。但仅仅有了负反馈, 并不一定能实现满意的控制。试观察秋千, 以秋千的垂直悬挂位置作为基准。当荡秋千时, 秋千摆到南边, 就把它向北推; 摆到北边, 就向南推。这也是负反馈控制, 但这样“控制”的结果, 并不能使秋千回到垂直位置不动, 相反却使秋千愈摆愈高, 最后在基准位置的两侧形成大幅度的振荡。设计得不好的负反馈控制系统的被控制量也会出现类似的振荡。这在技术上称为不稳定。不稳定的负反馈系统显然是不能实现控制的。

其次, 即使不发生上述情况, 一个负反馈控制系统的质量也有优劣之分。图 3-2 表示三个随动系统当输入量按照虚线变化时被控量的变化情况。系统 1 的被控量要经过很长时间才能跟上输入量的变化。系统 2 的被控量虽然变化很快, 但不易收敛, 要经过几次振荡才能跟上输入量的变化。只有系统 3 才能较好地跟随输入量的变化。我们说, 系统 3 的

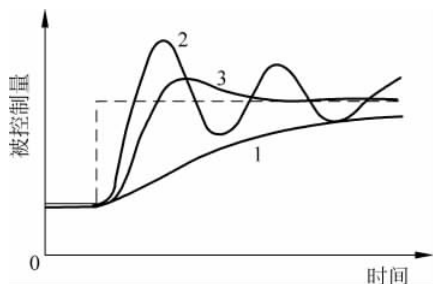


图 3-2

动态性能较好。动态性能的好坏在工程上往往是至关重要的。在控制理论发展的历史过程中, 形成了多种分析控制系统运动的方法。诸如时间域分析法、频域分析法等。它们都得到了广泛的应用。

本章研究时间域分析方法, 包括简单系统的动态性能以及高阶系统运动特性、系统稳定性、稳态误差的近似分析等。通过这些方面可以建立起关于系统运动的基本概念。我们还要从工程设计角度提出对控制系统性能指标的要求及一些基本设计原则和方法。

3.1 自动控制系统的时域指标

3.1.1 对控制性能的要求

对一个控制系统的要求与该系统的用途和具体工作条件有关, 而且不论是时域分析方法还是频域分析方法, 对系统的基本要求总是以下三个方面:

- (1) 系统的稳定性;

- (2) 系统进入稳态后,应满足给定的稳态误差的要求;
- (3) 系统在动态过程中应满足动态品质的要求。

3.1.2 自动控制系统的典型输入信号

为了研究系统的动态特性或稳态特性,需要知道输入量是怎样变化的。但是我们常常不能准确地知道输入量怎样变化,因此选择了几种典型输入信号,研究在这几种典型输入信号作用下,系统的动态特性和稳态特性。自动控制系统的典型输入信号有阶跃函数、斜坡函数、抛物线函数、脉冲函数和正弦函数等。利用这些典型输入信号易于对系统进行实验和数学分析。

1. 阶跃函数

阶跃函数的定义是

$$x_r(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ A, & t \geq 0 \end{cases}$$

式中: A ——常数。 $A=1$ 时的阶跃函数称为单位阶跃函数,如图 3-3 所示。它表示为

$$x_r(t) = 1(t)$$

或

$$x_r(t) = u(t)$$

单位阶跃函数的拉氏变换为

$$X_r(s) = \mathcal{L}[1(t)] = \frac{1}{s}$$

在 $t=0$ 处的阶跃函数,相当于一个不变的信号突然加于系统;对于恒值系统,相当于给定值突然变化或者突然变化的扰动量;对于随动系统,相当于加一个突变的给定位置信号。

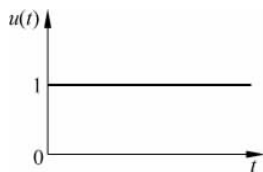


图 3-3 单位阶跃函数

2. 斜坡函数

这种函数的定义是

$$x_r(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ At, & t \geq 0 \end{cases}$$

式中: A ——常数。斜坡函数的拉氏变换表达式为

$$X_r(s) = \mathcal{L}[At] = \frac{A}{s^2}$$

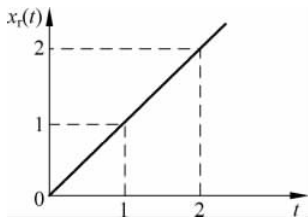


图 3-4 单位斜坡函数

这种函数相当于随动系统中加入一个按恒速变化的位置信号,该恒速度为 A 。当 $A=1$ 时,称为单位斜坡函数,如图 3-4 所示。

3. 抛物线函数

如图 3-5 所示,这种函数的定义是

$$x_r(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ At^2, & t \geq 0 \end{cases}$$

式中: A ——常数。

这种函数相当于随动系统中加入一个按照恒加速变化的位置信号,该恒加速度为 A 。抛物线函数的拉氏变换表达式为

$$X_r(s) = \mathcal{L}[At^2] = \frac{2A}{s^3}$$

当 $A = \frac{1}{2}$ 时,称为单位抛物线函数,即 $X_r(s) = \frac{1}{s^3}$ 。

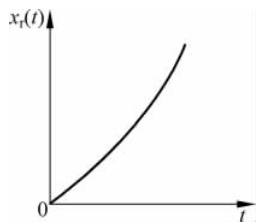


图 3-5 抛物线函数

4. 脉冲函数

这种函数的定义是

$$x_r(t) = \begin{cases} \frac{A}{\epsilon}, & 0 \leq t \leq \epsilon \\ 0, & t < 0, t > \epsilon \end{cases}$$

式中: A ——常数;

ϵ ——趋于 0 的正数。

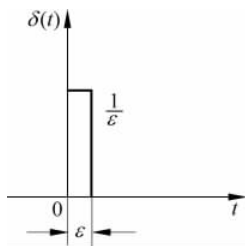


图 3-6 单位脉冲函数

脉冲函数的拉氏变换表达式为

$$X_r(s) = \mathcal{L}\left[\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{A}{\epsilon}\right] = A$$

当 $A = 1, \epsilon \rightarrow 0$ 时,称为单位脉冲函数 $\delta(t)$,如图 3-6 所示。单位脉冲函数的面积等于 1

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$$

在 $t = t_0$ 处的单位脉冲函数用 $\delta(t - t_0)$ 来表示,它满足如下条件

$$\delta(t - t_0) = \begin{cases} 0, & t \neq t_0 \\ \infty, & t = t_0 \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) dt = 1$$

幅值为无穷大、持续时间为零的脉冲是数学上的假设,但在系统分析中却很有用处。单位脉冲函数 $\delta(t)$ 可认为是在间断点上单位阶跃函数对时间的导数,即

$$\delta(t) = \frac{d}{dt} 1(t)$$

反之,单位脉冲函数 $\delta(t)$ 的积分就是单位阶跃函数。

5. 正弦函数

用正弦函数作输入信号,可以求得系统对不同频率的正弦输入函数的稳态响应,由此可以间接判断系统的性能。

本章主要以单位阶跃函数作为系统的输入量来分析系统的动态响应。

计算高阶微分方程的时间解是相当复杂的,在工程上,许多高阶系统常常具有近似一阶、二阶系统的时间响应。因此,深入研究一阶、二阶系统的性能指标,有着广泛的实际意义。

3.2 一阶系统的阶跃响应

由一阶微分方程描述的系统,称为一阶系统。一些控制元、部件及简单系统如 RC 网络、发电机、空气加热器和液位控制系统等都是一阶系统。

3.2.1 一阶系统的数学模型

一阶系统的微分方程为

$$T \frac{dx_c(t)}{dt} + x_c(t) = x_r(t) \quad (3-3)$$

式中: $x_c(t)$ ——输出量;

$x_r(t)$ ——输入量;

T ——时间常数。

一阶系统的结构图,如图 3-7 所示。其闭环传递函数

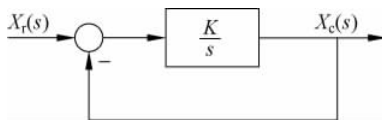


图 3-7 一阶控制系统

$$W_B(s) = \frac{X_c(s)}{X_r(s)} = \frac{1}{\frac{1}{K}s + 1} = \frac{1}{Ts + 1} \quad (3-4)$$

式中: $T = \frac{1}{K}$ 。

式(3-3)和式(3-4)分别是用微分方程和传递函数表示的一阶系统的数学模型。时间常数 T 是表征系统惯性的一个主要参数,所以一阶系统也称为惯性环节。对于不同的系统,时间常数 T 具有不同的物理意义,但是由式(3-3)看出,它总是具有时间“秒”的量纲。

3.2.2 一阶系统的单位阶跃响应

因为单位阶跃输入的拉氏变换为

$$X_r(s) = \frac{1}{s}$$

所以由式(3-4)可得

$$X_c(s) = W_B(s)X_r(s) = \frac{1}{Ts+1} \cdot \frac{1}{s}$$

取 $X_c(s)$ 的拉氏反变换, 可得单位阶跃响应

$$x_c(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{Ts+1} \cdot \frac{1}{s}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s} - \frac{1}{s + \frac{1}{T}}\right]$$

即

$$x_c(t) = 1 - e^{-\frac{1}{T}t}, \quad t \geq 0 \quad (3-5)$$

或写成

$$x_c = x_{ss} + x_{ts}$$

式中: $x_{ss}=1$, 代表稳态分量; $x_{ts}=-e^{-\frac{1}{T}t}$, 代表暂态分量。当时间 t 趋于无穷, x_{ts} 衰减为零。显然, 一阶系统的单位阶跃响应曲线是一条由零开始, 按指数规律上升并最终趋于 1 的曲线, 如图 3-8 所示。响应曲线具有非振荡特征, 故也称为非周期响应。

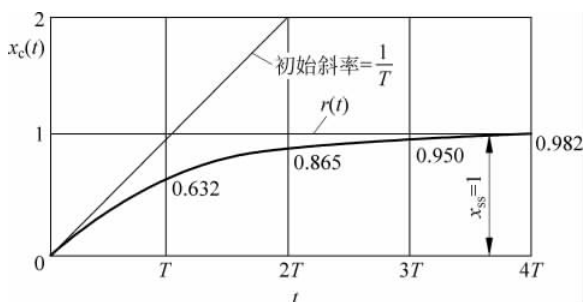


图 3-8 一阶系统的单位阶跃响应

时间常数 T 是表征系统响应特性的唯一参数。它与输出值有确定的对应关系:

$$t = T, \quad x_c(T) = 0.632$$

$$t = 2T, \quad x_c(2T) = 0.865$$

$$t = 3T, \quad x_c(3T) = 0.950$$

$$t = 4T, \quad x_c(4T) = 0.982$$

可以用实验方法, 根据这些值鉴别和确定被测系统是否为一阶系统。

响应曲线的初始斜率

$$\left. \frac{dx_c(t)}{dt} \right|_{t=0} = \left. \frac{1}{T} e^{-\frac{1}{T}t} \right|_{t=0} = \frac{1}{T} \quad (3-6)$$

式(3-6)表明, 一阶系统的单位阶跃响应如果以初始速度等速上升至稳态值 1, 所需的时间应恰好为 T 。

由于一阶系统的单位阶跃响应没有超调量, 所以其性能指标主要是调节时间

t_s , 它表征系统过渡过程进行的快慢。由于 $t = 3T$ 时, 输出响应可达稳态值的 95%; $t = 4T$ 时, 输出响应可达稳态值的 98%, 故一般取

$$t_s = 3T \quad (\text{对应 } 5\% \text{ 误差带}) \quad (3-7)$$

$$t_s = 4T \quad (\text{对应 } 2\% \text{ 误差带}) \quad (3-8)$$

显然, 系统的时间常数 T 越小, 调节时间 t_s 越小, 响应过程的快速性也越好。

例 3-1 一阶系统的结构如图 3-9 所示。试求该系统单位阶跃响应的调节时间 t_s ; 如果要求 $t_s \leq 0.1\text{s}$, 试问系统的反馈系数应取何值?

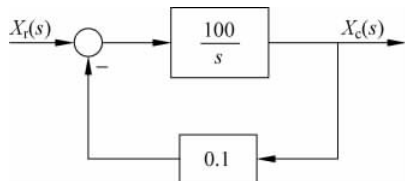


图 3-9 一阶系统结构图

解 首先由系统结构图写出闭环传递函数

$$W_B(s) = \frac{X_c(s)}{X_r(s)} = \frac{100/s}{1 + \frac{100}{s} \times 0.1} = \frac{10}{0.1s + 1}$$

由闭环传递函数得到时间常数 $T = 0.1\text{s}$ 。因此调节时间

$$t_s = 3T = 0.3\text{s} \quad (\text{取 } 5\% \text{ 误差带})$$

闭环传递函数分子上的数值 10, 称为放大系数 (或开环增益), 相当于串接一个 $K = 10$ 的放大器, 故调节时间 t_s 与它无关, 只取决于时间常数 T 。

下面来求满足 $t_s \leq 0.1\text{s}$ 的反馈系数值。假设反馈系数为 K_t ($K_t > 0$), 那么同样可由结构图写出闭环传递函数

$$W_B(s) = \frac{100/s}{1 + \frac{100}{s} \times K_t} = \frac{1/K_t}{\frac{0.01}{K_t}s + 1}$$

由闭环传递函数可得

$$T = 0.01/K_t$$

根据题意要求 $t_s \leq 0.1\text{s}$, 有

$$t_s = 3T = 0.03/K_t \leq 0.1\text{s}$$

所以

$$K_t \geq 0.3$$

3.3 二阶系统的阶跃响应

分析二阶系统的动态特性对于研究自动控制系统的动态特性具有重要意义。这是因为在实际工作中, 在一定的条件下, 忽略一些次要因素, 常常可以把一个高阶系统降为二阶系统来处理, 仍不失其运动过程的基本性质。另外, 在初步设计

时,常常将高阶系统简化为二阶系统来作近似的分析。

图 3-10 所示为一个位置随动系统结构图,其输入量为一个给定的位置转角 φ_r ,其输出量为随动转角 φ_c 。当不计电动机的电枢回路电磁时间常数时,各环节的传递函数如下。

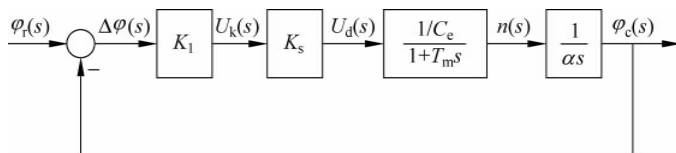


图 3-10 位置随动系统结构图

(1) 比较环节

$$\Delta\varphi(s) = \varphi_r(s) - \varphi_c(s)$$

(2) 转换及放大环节

$$K_1 = \frac{U_k(s)}{\Delta\varphi(s)}$$

(3) 功率放大环节

$$K_s = \frac{U_d(s)}{U_k(s)}$$

式中: K_s ——功率放大环节的电压放大系数。

(4) 电动机不计电枢回路的电磁时间常数时,为

$$\frac{n(s)}{U_d(s)} = \frac{1/C_e}{1 + T_ms}$$

式中: T_m ——电动机时间常数, $T_m = \frac{GD^2 R_d}{375 C_m C_e}$;

GD^2 ——折合到电动机轴上的系统转动惯量;

R_d ——电动机的电枢电阻;

C_e ——电动机的电势常数;

C_m ——电动机的转矩常数;

$n(s)$ ——电动机的转速。

(5) 转角的转换环节

$$\frac{\varphi_c(s)}{n(s)} = \frac{1}{\alpha s}$$

式中: α ——电动机的转角与输出轴转角间的比例系数。

由系统的结构图可以看出,系统的开环传递函数为

$$W_K(s) = \frac{K_K}{s(T_ms + 1)}$$

式中: K_K ——系统的开环放大系数, $K_K = \frac{K_1 K_s}{C_e \alpha}$ 。

系统的闭环传递函数为

$$W_B(s) = \frac{K_K}{T_m s^2 + s + K_K}$$

由上式可以看出,该系统特征方程式的最高阶次为二阶,是一个典型的二阶系统。现将该式转换为二阶系统闭环传递函数的标准形式

$$W_B(s) = \frac{K_K/T_m}{s^2 + \frac{1}{T_m}s + \frac{K_K}{T_m}}$$

令 $\omega_n = \sqrt{\frac{K_K}{T_m}}$ 为二阶系统的自然振荡角频率, $\xi = \frac{1}{2\sqrt{T_m K_K}}$ 为二阶系统的阻尼比。在本例中

$$\xi\omega_n = \frac{1}{2T_m}$$

这样可把所分析的二阶系统的传递函数写成如下标准形式

$$W_K(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s + 2\xi\omega_n)} \quad (3-9)$$

$$W_B(s) = \frac{X_c(s)}{X_r(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \quad (3-10)$$

二阶系统标准形式的结构图如图 3-11 所示。

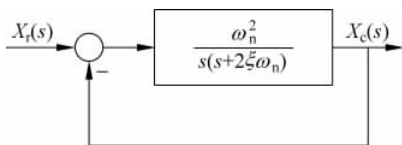


图 3-11 二阶系统标准形式的结构图

3.3.1 典型二阶系统的动态特性

现以图 3-11 所示典型的单位反馈系统来分析二阶系统的单位阶跃响应及其动态指标。假设初始条件为零,当输入量为单位阶跃函数时,输出量的拉氏变换为

$$X_c(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2)}$$

系统的特征方程为

$$s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2 = 0 \quad (3-11)$$

由式(3-11)可解出特征方程式的根,这些根与阻尼比 ξ 有关。下面分几种情况来分析二阶系统的动态特性。

1. 过阻尼($\xi > 1$)的情况

系统的特征根为

$$-p_1 = -(\xi - \sqrt{\xi^2 - 1})\omega_n$$

$$-p_2 = -(\xi + \sqrt{\xi^2 - 1})\omega_n$$

由于阻尼比大于 1 ($\xi > 1$), 所以 $-p_1$ 及 $-p_2$ 均位于根平面(即 s 平面)虚轴的左侧, 并且均在实轴上, 如图 3-12 所示。在这种情况下

系统输出的拉氏变换可以写成

$$\begin{aligned} X_c(s) &= \frac{\omega_n^2}{s(s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2)} = \frac{\omega_n^2}{s(s + p_1)(s + p_2)} \\ &= \frac{A_0}{s} + \frac{A_1}{s + p_1} + \frac{A_2}{s + p_2} \end{aligned}$$

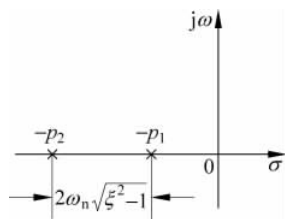


图 3-12 $\xi > 1$ 时根的分布

式中各系数可按下列各式求出

$$A_0 = [X_c(s)s]_{s=0} = 1$$

$$A_1 = [X_c(s)(s + p_1)]_{s=-p_1} = \frac{-1}{2\sqrt{\xi^2 - 1}(\xi - \sqrt{\xi^2 - 1})}$$

$$A_2 = [X_c(s)(s + p_2)]_{s=-p_2} = \frac{1}{2\sqrt{\xi^2 - 1}(\xi + \sqrt{\xi^2 - 1})}$$

对 $X_c(s)$ 求拉氏反变换, 得

$$\begin{aligned} x_c(t) &= \mathcal{L}^{-1}[X_c(s)] = \mathcal{L}\left[\frac{A_0}{s} + \frac{A_1}{s + p_1} + \frac{A_2}{s + p_2}\right] \\ &= 1 - \frac{1}{2\sqrt{\xi^2 - 1}} \left(\frac{e^{-(\xi - \sqrt{\xi^2 - 1})\omega_n t}}{\xi - \sqrt{\xi^2 - 1}} - \frac{e^{-(\xi + \sqrt{\xi^2 - 1})\omega_n t}}{\xi + \sqrt{\xi^2 - 1}} \right), \quad t \geq 0 \end{aligned} \quad (3-12)$$

由式(3-12)可以明显看出, 动态响应曲线由稳态分量和暂态分量组成。暂态分量又包含两项衰减的指数项, 一项衰减指数为 $-p_1 = -(\xi - \sqrt{\xi^2 - 1})\omega_n$, 另一项为 $-p_2 = -(\xi + \sqrt{\xi^2 - 1})\omega_n$ 。当 $\xi \geq 1$ 时, 后一项的衰减指数远比前一项大得多。也就是说, 在动态过程中后一分量衰减得快, 因此后一项暂态分量只是在响应的前期对系统有所影响, 而在后期, 则影响甚小。所以近似分析过阻尼的动态响应时, 可以将后一项忽略不计。这样二阶系统的动态响应就类似于—阶系统的响应。

2. 欠阻尼($0 < \xi < 1$)的情况

当 $0 < \xi < 1$ 时, 特征方程的根为

$$-p_1 = -(\xi - j\sqrt{1 - \xi^2})\omega_n$$

$$-p_2 = -(\xi + j\sqrt{1 - \xi^2})\omega_n$$

由于 $0 < \xi < 1$, 故 $-p_1$ 及 $-p_2$ 为一对共轭复根, 如图 3-13 所示。

在第2章已求出输出的拉氏变换为

$$X_c(s) = \frac{1}{s} - \frac{s + 2\xi\omega_n}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

为了对 $X_c(s)$ 求拉氏反变换, 将上式作如下变换并求其原函数, 得

$$\begin{aligned} X_c(s) &= \frac{1}{s} - \frac{s + \xi\omega_n}{(s + \xi\omega_n)^2 + (\omega_n \sqrt{1 - \xi^2})^2} - \frac{\xi\omega_n}{(s + \xi\omega_n)^2 + (\omega_n \sqrt{1 - \xi^2})^2} \\ x_c(t) &= \mathcal{L}^{-1}[X_c(s)] \\ &= 1 - e^{-\xi\omega_n t} \left(\cos \sqrt{1 - \xi^2} \omega_n t + \frac{\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}} \sin \sqrt{1 - \xi^2} \omega_n t \right) \\ &= 1 - \frac{1}{\sqrt{1 - \xi^2}} e^{-\xi\omega_n t} \sin(\sqrt{1 - \xi^2} \omega_n t + \theta) \\ &= 1 - \frac{1}{\sqrt{1 - \xi^2}} e^{-\xi\omega_n t} \sin(\omega_d t + \theta), \quad t \geq 0 \end{aligned} \quad (3-13)$$

式中: $\omega_d = \sqrt{1 - \xi^2} \omega_n$ ——阻尼振荡角频率, 或振荡角频率;

$\theta = \arctan \frac{\sqrt{1 - \xi^2}}{\xi}$ ——阻尼角。

由式(3-13)所得结果看出, 在 $0 < \xi < 1$ 的情况下, 二阶系统的动态响应的暂态分量为一个按指数衰减的简谐振动时间函数。以 ξ 为参变量的二阶系统动态响应绘于图 3-14。

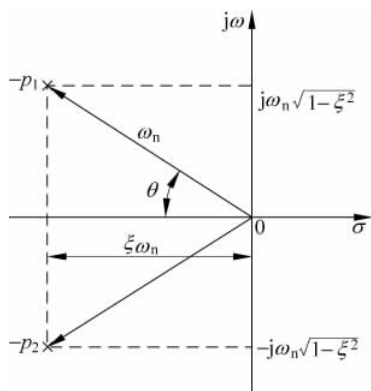


图 3-13 $0 < \xi < 1$ 时根的分佈

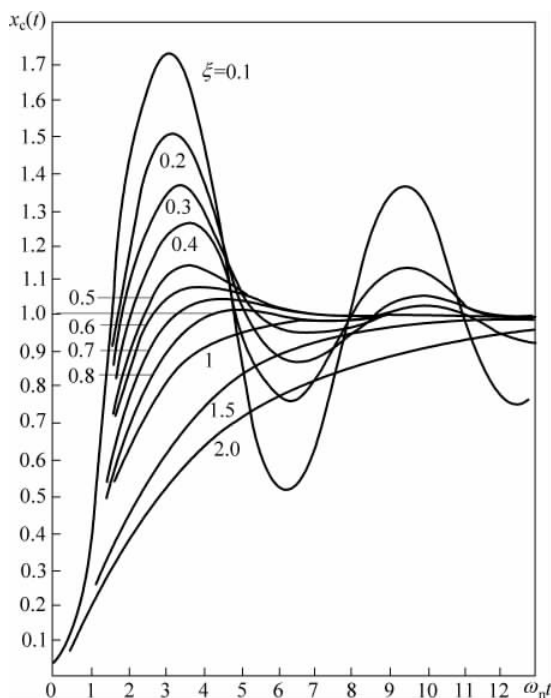


图 3-14 二阶系统的单位阶跃响应

3. 临界阻尼($\xi=1$)的情况

当 $\xi=1$ 时,系统的特征方程式的根为

$$-p_{1,2} = -\omega_n$$

$$X_c(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s + \omega_n)^2}$$

也就是特征方程式有两个负实重根,如图 3-15(a)所示。在这种情况下,将上式分解为部分分式为

$$X_c(s) = \frac{A_0}{s} + \frac{A_{02}}{s + \omega_n} + \frac{A_{01}}{(s + \omega_n)^2}$$

各待定系数分别求得如下:

$$A_0 = [X_c(s)s]_{s=0} = 1$$

$$A_{01} = [X_c(s)(s + \omega_n)^2]_{s=-\omega_n} = -\omega_n$$

$$A_{02} = \left\{ \frac{d}{ds} [X_c(s)(s + \omega_n)^2] \right\}_{s=-\omega_n} = \left\{ \frac{-\omega_n^2}{s^2} \right\}_{s=-\omega_n} = -1$$

因此得

$$X_c(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s + \omega_n} - \frac{\omega_n}{(s + \omega_n)^2}$$

求上式的反变换,得原函数为

$$x_c(t) = 1 - e^{-\omega_n t}(1 + \omega_n t), \quad t \geq 0 \quad (3-14)$$

因此,当 $\xi=1$ 时,二阶系统的动态响应仍为一条上升曲线,如图 3-15(b)所示。

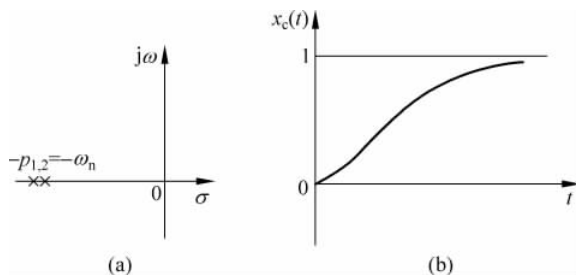


图 3-15 $\xi=1$ 时二阶系统的单位阶跃响应

4. 无阻尼($\xi=0$)的情况

当 $\xi=0$ 时,输出量的拉氏变换为

$$X_c(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s^2 + \omega_n^2)}$$

特征方程式的根为

$$-p_1 = j\omega_n, \quad -p_2 = -j\omega_n$$

因此,二阶系统的动态响应为

$$x_c(t) = 1 - \cos\omega_n t \quad (3-15)$$

在这种情况下,系统为不衰减的振荡,其振荡角频率为 ω_n ,其动态响应曲线如图3-16所示。从这里可以看出自然振荡角频率 ω_n 的物理意义。

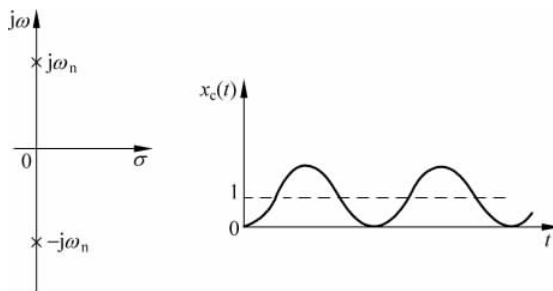


图 3-16 $\xi=0$ 时二阶系统的动态响应

综上所述,在不同的阻尼比时,二阶系统的动态响应有很大的区别,因此阻尼比 ξ 是二阶系统的重要参量。当 $\xi \leq 0$ 时,系统不能正常工作,而在 $\xi \geq 1$ 时,系统动态响应进行的又太慢。所以,对二阶系统来说,欠阻尼情况($0 < \xi < 1$)是最有实际意义的。下面讨论这种情况下的动态性能指标。

3.3.2 二阶系统动态性能指标

1. 上升时间 t_r

在动态过程中,系统的输出第一次达到稳态值的时间称为上升时间 t_r 。根据这一定义,在式(3-13)中,令 $t=t_r$ 时, $x_c(t)=1$,得

$$\frac{e^{-\xi\omega_n t_r}}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin(\omega_d t_r + \theta) = 0 \quad (3-16)$$

但是,在 $t < \infty$ 期间,也就是没有达到最后的稳定以前, $\frac{e^{-\xi\omega_n t_r}}{\sqrt{1-\xi^2}} > 0$,所以为满足式(3-16)只能使 $\sin(\omega_d t_r + \theta) = 0$ 。由此得

$$\begin{aligned} \omega_d t_r + \theta &= \pi \\ t_r &= \frac{\pi - \theta}{\omega_d} = \frac{\pi - \theta}{\omega_n \sqrt{1-\xi^2}} \end{aligned} \quad (3-17)$$

由上式可以看出 ξ 和 ω_n 对上升时间的影响。当 ω_n 一定时,阻尼比 ξ 越大,则上升时间 t_r 越长;当 ξ 一定时, ω_n 越大,则 t_r 越短。

2. 最大超调量 $\sigma\%$

最大超调量发生在第一个周期中 $t=t_m$ 时刻。根据求极值的方法,由式(3-13),可求出

$$\left. \frac{dx_c(t)}{dt} \right|_{t=t_m} = 0$$

得

$$\frac{\sin(\omega_d t_m + \theta)}{\cos(\omega_d t_m + \theta)} = \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}$$

$$\tan(\omega_d t_m + \theta) = \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}$$

因此

$$\omega_d t_m + \theta = n\pi + \arctan \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi} = n\pi + \theta$$

即

$$\omega_d t_m = n\pi$$

因为在 $n=1$ 时出现最大超调量, 所以有 $\omega_d t_m = \pi$ 。峰值时间为

$$t_m = \frac{\pi}{\omega_d} = \frac{\pi}{\sqrt{1-\xi^2} \omega_n} \quad (3-18)$$

将 $t_m = \frac{\pi}{\sqrt{1-\xi^2} \omega_n}$ 代入式(3-13), 并整理得最大值为

$$x_{cm} = 1 - \frac{e^{\frac{-\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}}}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin(\pi + \theta)$$

因为

$$\sin(\pi + \theta) = -\sin \theta = -\sqrt{1-\xi^2}$$

所以

$$x_{cm} = 1 + e^{\frac{-\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \quad (3-19)$$

根据超调量的定义

$$\sigma\% = \frac{x_{cm} - x_c(\infty)}{x_c(\infty)} \times 100\%$$

在单位阶跃输入下, 稳态值 $x_c(\infty)=1$, 因此得最大超调量为

$$\sigma\% = e^{\frac{-\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \times 100\% \quad (3-20)$$

从上式知, 二阶系统的最大超调量与 ξ 值有密切的关系, 阻尼比 ξ 越小, 超调量越大。

3. 调节时间 t_s

调节时间 t_s 是 $x_c(t)$ 与稳态值 $x_c(\infty)$ 之间的偏差达到允许范围(一般取稳态值的 $\pm 2\% \sim \pm 5\%$) 而不再超出的动态过程时间。在动态过程中的偏差为

$$\Delta x = x_c(\infty) - x_c(t) = \frac{e^{-\xi\omega_n t}}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin(\sqrt{1-\xi^2} \omega_n t + \theta)$$

当 $\Delta x = 0.05$ 或 0.02 时得

$$\frac{e^{-\xi\omega_n t_s}}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin(\sqrt{1-\xi^2}\omega_n t_s + \theta) = 0.05 \quad (\text{或 } 0.02) \quad (3-21)$$

由上式可以看出,在 $0 \sim t_s$ 时间范围内,满足上述条件的 t_s 值有多个,其中最大的值就是调节时间 t_s 。由于正弦函数的存在, t_s 值与阻尼比 ξ 间的函数关系是不连续的。为简单起见,可以采用近似的计算方法,忽略正弦函数的影响,认为指数项衰减到 0.05 或 0.02 时,过渡过程即进行完毕。这样得到

$$\frac{e^{-\xi\omega_n t_s}}{\sqrt{1-\xi^2}} = 0.05 \quad (\text{或 } 0.02)$$

由此求得调节时间为

$$t_s(5\%) = \frac{1}{\xi\omega_n} \left[3 - \frac{1}{2} \ln(1-\xi^2) \right] \approx \frac{3}{\xi\omega_n}, \quad 0 < \xi < 0.9 \quad (3-22)$$

$$t_s(2\%) = \frac{1}{\xi\omega_n} \left[4 - \frac{1}{2} \ln(1-\xi^2) \right] \approx \frac{4}{\xi\omega_n}, \quad 0 < \xi < 0.9 \quad (3-23)$$

根据上式绘成曲线见图 3-17。

如果考虑正弦项,由于调节时间 t_s 值与 ξ 之间的复杂函数关系,只能用数值计算求取 $t_s = f(\xi)$ 的函数曲线,或者由图 3-14 所示曲线上测出与 $\pm 2\%$ 或 $\pm 5\%$ 允许误差相对应的调节时间。

通过上述分析可知,调节时间 t_s 近似与 $\xi\omega_n$ 成反比关系。在设计系统时, ξ 通常由要求的最大超调量所决定,所以调节时间 t_s 由自然振荡角频率 ω_n 所决定。也就是说,在不改变超调量的条件下,通过改变 ω_n 的值可以改变调节时间。

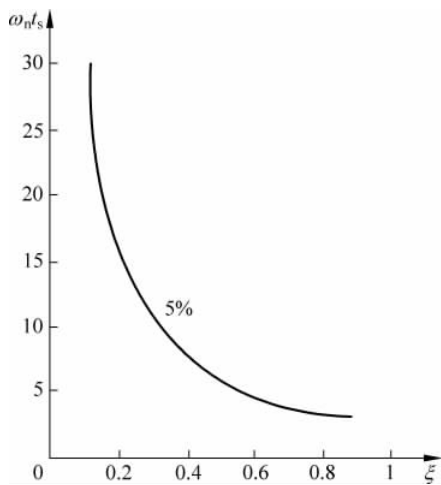


图 3-17 调节时间 t_s 与阻尼比的近似关系曲线

4. 振荡次数 μ

振荡次数是指在调节时间 t_s 内, $x_c(t)$ 波动的次数。根据这一定义可得振荡次数为

$$\mu = \frac{t_s}{t_f} \quad (3-24)$$

式中: $t_f = \frac{2\pi}{\omega_d} = \frac{2\pi}{\omega_n \sqrt{1-\xi^2}}$ —— 阻尼振荡的周期时间。

3.3.3 二阶系统特征参数与动态性能指标之间的关系

根据上面分析所得的结果,可以将二阶系统特征参数($\xi\omega_n$)和动态性能指标($\sigma\%$, t_r , t_m , t_s)之间的关系绘成曲线如图 3-18 所示。

图 3-18 中, $T_a = \frac{1}{2\xi\omega_n}$ 为时间常数。调节时间曲线是利用准确公式由数字计算机解得。可以看出,曲线有突跳。这是由于在突跳点附近, ξ 值的微小变化会引起调节时间 t_s 显著变化造成的。在 $\xi=0.76$ (或 $\xi=0.68$) 附近,调节时间达到最小值;以后,随着 ξ 的增大,调节时间迅速增长。

应注意到,当用式(3-22) (或式(3-23))这一近似公式计算调节时间 t_s 时, $\frac{t_s}{T_a} = 6$ (或 8),在图 3-18 中应是一条水平线。

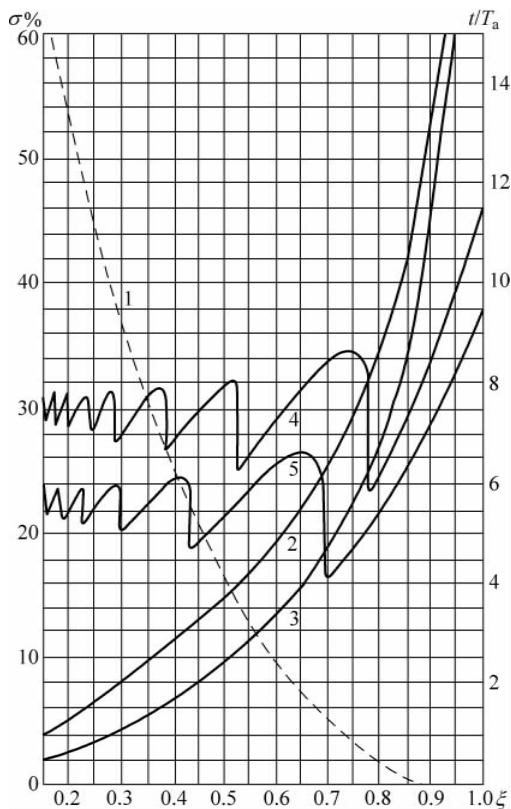


图 3-18 二阶系统动态响应指标

1— $\sigma\%$; 2— t_r ; 3— t_m ; 4— t_s (2%); 5— t_s (5%)

由上可以得出如下结论:

(1) 阻尼比 ξ 是二阶系统的一个重要参量,由 ξ 值的大小可以间接判断一个

二阶系统的动态品质。在过阻尼($\xi > 1$)情况下,动态特性为单调变化曲线,没有超调和振荡,但调节时间较长,系统反应迟缓。当 $\xi \leq 0$,输出量作等幅振荡或发散振荡,系统不能稳定工作。

(2) 一般情况下,系统在欠阻尼($0 < \xi < 1$)情况下工作。但是 ξ 过小,则超调量大,振荡次数多,调节时间长,动态品质差。应注意到,最大超调量只和阻尼比这一特征参数有关。因此,通常可以根据允许的超调量来选择阻尼比 ξ 。

(3) 调节时间与系统阻尼比和自然振荡角频率这两个特征参数的乘积成反比。在阻尼比 ξ 一定时,可以通过改变自然振荡角频率 ω_n 来改变动态响应的持续时间。 ω_n 越大,系统的调节时间越短。

(4) 为了限制超调量,并使调节时间较短,阻尼比一般应在 $0.4 \sim 0.8$ 之间,这时阶跃响应的超调量将在 $1.5\% \sim 25\%$ 之间。

3.3.4 二阶工程最佳参数

目前,在某些控制系统中常常采用所谓二阶工程最佳参数作为设计控制系统的依据。这种系统选择的参数使

$$\xi = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0.707$$

这时, $T = \frac{1}{2\xi\omega_n} = \frac{1}{\sqrt{2}\omega_n}$ 。将这一参数代入二阶系统标准式,得开环传递函数为

$$W_K(s) = \frac{1}{2Ts(Ts+1)} = \frac{K_K}{s(Ts+1)} \quad (3-25)$$

式中: $K_K = 1/2T$ 。

闭环传递函数为

$$W_B(s) = \frac{1}{2T^2s^2 + 2Ts + 1} = \frac{K_K/T}{s^2 + s/T + K_K/T}$$

这一系统的单位阶跃响应动态性能指标如下:

$$\sigma\% = e^{\frac{-\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \times 100\% = 4.3\%$$

$$t_r = \frac{\pi - \theta}{\omega_n \sqrt{1-\xi^2}} = 4.7T$$

$$t_s(2\%) = 8.43T \text{ (用近似公式求得为 } 8T \text{)}$$

$$t_s(5\%) = 4.14T \text{ (用近似公式求得为 } 6T \text{)}$$

显然,这是一种以获取比较小的超调量为目标设计系统的工程方法。

例 3-2 有一个位置随动系统,其结构图如图 3-19 所示,其中 $K_K = 4$ 。求该系统的:(1)自然振荡角频率;(2)系统的阻尼比;(3)超调量和调节时间;(4)如果要求 $\xi = 0.707$,应怎样改变系统参数 K_K ?

解 系统的闭环传递函数为

$$W_B(s) = \frac{K_K}{s^2 + s + K_K}, \quad K_K = 4$$

写成标准形式

$$W_B(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

由此得

$$(1) \text{ 自然振荡角频率} \quad \omega_n = \sqrt{K_K} = 2$$

$$(2) \text{ 阻尼比} \quad \xi = \frac{1}{2\omega_n} = 0.25$$

$$(3) \text{ 超调量} \quad \sigma\% = e^{\frac{-\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \times 100\% = 44\%$$

$$\text{调节时间} \quad t_s(5\%) \approx \frac{3}{\xi\omega_n} = 6\text{s}$$

$$(4) \text{ 当要求 } \xi = 0.707 \text{ 时, } \omega_n = \frac{1}{\sqrt{2}}, K_K = \omega_n^2 = 0.5$$

所以必须降低开环放大系数 K_K , 才能满足二阶工程最佳参数的要求。但应注意到, 降低开环放大系数将使系统稳态误差增大。

例 3-3 为了改善图 3-19 所示系统的动态响应性能, 满足单位阶跃输入下系统超调量 $\sigma\% \leq 5\%$ 的要求, 今加入微分负反馈 τs , 如图 3-20 所示。求微分时间常数 τ 。

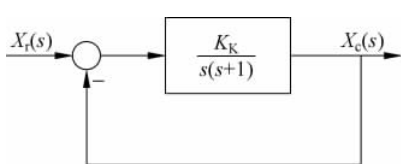


图 3-19 例 3-2 随动系统结构图

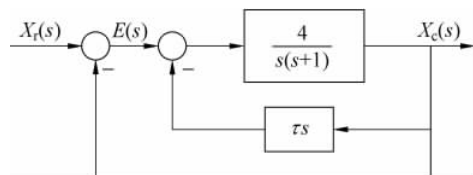


图 3-20 例 3-3 随动系统结构图

解 系统的开环传递函数为

$$W_K(s) = \frac{4}{s(s+1+4\tau)} = \frac{4}{1+4\tau} \times \frac{1}{s\left(\frac{1}{1+4\tau}s + 1\right)}$$

由上式可以看出, 等效于控制对象的时间常数减小为 $\frac{1}{1+4\tau}$, 开环放大系数由 4 降低为 $\frac{4}{1+4\tau}$ 。

系统闭环传递函数为

$$W_B(s) = \frac{4}{s^2 + (1+4\tau)s + 4}$$

为了使 $\sigma\% \leq 5\%$, 令 $\xi = 0.707$ 。由

$$2\xi\omega_n = 1+4\tau, \quad \omega_n^2 = 4$$

可求得

$$\tau = \frac{2\xi\omega_n - 1}{4} = \frac{2 \times 0.707 \times 2 - 1}{4} = 0.457$$

并由此求得开环放大系数为

$$K_K = \frac{4}{1 + 4\tau} = 1.414$$

可以看出,当系统加入局部微分负反馈时,相当于增加了系统的阻尼比,提高了系统的平稳性,但同时也降低了系统的开环放大系数。与例 3-2 之(4)所求的参数相比,同样保证了 $\xi=0.707$ 的要求,而 K_K 远大于 0.5,提高了稳态精度。

3.3.5 零点、极点对二阶系统动态性能的影响

1. 具有零点的二阶系统的动态特性分析

具有零点的二阶系统的闭环传递函数为

$$\frac{X_c(s)}{X_r(s)} = \frac{\omega_n^2(\tau s + 1)}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{\omega_n^2\left(s + \frac{1}{\tau}\right)}{\frac{1}{\tau}(s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2)}$$

式中: τ ——时间常数。

令 $\frac{1}{\tau} = z$, 则上式可写为如下标准形式

$$\frac{X_c(s)}{X_r(s)} = \frac{\omega_n^2(s+z)}{z(s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2)} \quad (3-26)$$

式(3-26)所示系统的闭环传递函数为具有零点 $-z$ 的二阶系统。为了求解方便起见,将系统的结构图等效成图 3-21 所示的结构,得

$$X_{cl}(s) = \frac{\omega_n^2 X_r(s)}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}, \quad 0 < \xi < 1$$

$$X_c(s) = X_{cl}(s) + \frac{s}{z} X_{cl}(s)$$

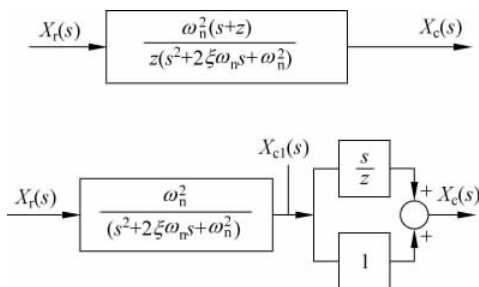


图 3-21 具有零点的二阶系统结构图

设 $X_r(s) = \frac{1}{s}$, 在初始条件为零时, 取 $X_{cl}(s)$ 和 $X_c(s)$ 的拉氏反变换得

$$x_{cl}(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{\omega_n^2}{s(s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2)} \right]$$

$$x_c(t) = \mathcal{L}^{-1}[X_{cl}(s)] + \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{s}{z} X_{cl}(s) \right] = x_{cl}(t) + \frac{1}{z} \frac{dx_{cl}(t)}{dt} \quad (3-27)$$

分别求出式(3-27)中的两项, 然后相加, 就可以求出输出量。由式(3-13)得

$$x_{cl}(t) = 1 - \frac{e^{-\xi\omega_n t}}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin(\sqrt{1-\xi^2}\omega_n t + \theta)$$

于是得

$$\frac{1}{z} \frac{dx_{cl}(t)}{dt} = \frac{e^{-\xi\omega_n t}}{\sqrt{1-\xi^2}} \frac{1}{z} \left[\xi\omega_n \sin(\sqrt{1-\xi^2}\omega_n t + \theta) - \sqrt{1-\xi^2}\omega_n \cos(\sqrt{1-\xi^2}\omega_n t + \theta) \right]$$

将上两式代入式(3-27)得

$$x_c(t) = 1 - \frac{e^{-\xi\omega_n t}}{\sqrt{1-\xi^2}} \frac{1}{z} \left[(z - \xi\omega_n) \sin(\sqrt{1-\xi^2}\omega_n t + \theta) + \sqrt{1-\xi^2}\omega_n \cos(\sqrt{1-\xi^2}\omega_n t + \theta) \right]$$

$$= 1 - \frac{e^{-\xi\omega_n t}}{\sqrt{1-\xi^2}} \frac{l}{z} \left[\frac{z - \xi\omega_n}{l} \sin(\sqrt{1-\xi^2}\omega_n t + \theta) + \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{l} \omega_n \cos(\sqrt{1-\xi^2}\omega_n t + \theta) \right] \quad (3-28)$$

式中, l 为极点与零点间的距离, 可由系统闭环传递函数的零点和极点在复平面上所在的位置确定。由图 3-22 知

$$l = |z - p_1| = \sqrt{(z - \xi\omega_n)^2 + (\omega_n \sqrt{1-\xi^2})^2}$$

$$\frac{|z - \xi\omega_n|}{l} = \cos \varphi$$

$$\frac{\omega_n \sqrt{1-\xi^2}}{l} = \sin \varphi$$

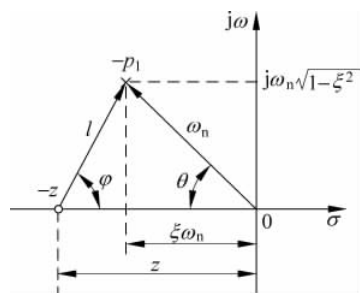


图 3-22 零、极点在 s 平面上的分布

故式(3-28)可写成

$$x_c(t) = 1 - \frac{e^{-\xi\omega_n t}}{\sqrt{1-\xi^2}} \frac{l}{z} \left[\sin(\sqrt{1-\xi^2}\omega_n t + \theta) \cos \varphi + \cos(\sqrt{1-\xi^2}\omega_n t + \theta) \sin \varphi \right]$$

$$= 1 - \frac{e^{-\xi\omega_n t}}{\sqrt{1-\xi^2}} \frac{l}{z} \sin(\sqrt{1-\xi^2}\omega_n t + \varphi + \theta) \quad (3-29)$$

式中:

$$\theta = \arctan \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}$$

$$\varphi = \arctan \frac{\omega_n \sqrt{1-\xi^2}}{z - \xi\omega_n}$$

$$\frac{l}{z} = \sqrt{\frac{(z - \xi\omega_n)^2 + (\omega_n \sqrt{1-\xi^2})^2}{z^2}} = \sqrt{\frac{z^2 - 2z\xi\omega_n + \omega_n^2}{z^2}}$$

令 $r = \frac{\xi\omega_n}{z}$, 由图 3-22 知, r 为闭环传递函数的复数极点的实部与零点的实部之比, 则得

$$\frac{l}{z} = \frac{1}{\xi} \sqrt{\xi^2 - 2r\xi^2 + r^2}$$

因此, 式(3-29)可写成

$$x_c(t) = 1 - \frac{\sqrt{\xi^2 - 2r\xi^2 + r^2}}{\xi \sqrt{1 - \xi^2}} e^{-\xi\omega_n t} \sin(\sqrt{1 - \xi^2} \omega_n t + \varphi + \theta), \quad t \geq 0 \quad (3-30)$$

式(3-30)即为典型的具有零点的二阶系统的单位阶跃响应。由此式可以看出, 当阻尼比 ξ 为定值时, 闭环传递函数的零点影响二阶系统的动态特性。式中的 r 值反映了复数平面上零点与复数极点的相对位置。如果 z 值越小, 即零点越靠近虚轴, 则 r 值越大, 振荡性越强。反之, 如果 z 值越大, 即零点离虚轴越远, 则 r 值越小, 振荡性相对减弱。总之, 由于闭环传递函数零点的存在, 振荡性增强。

在实际系统中, 常常通过在正向通道中添加 PD 控制器或超前校正装置来设置系统零点。

2. 二阶系统加极点的动态响应

二阶系统加极点后, 系统变为三阶, 其传递函数可等效为如下标准式

$$W_B(s) = \frac{\omega_n^2 R_3}{(s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2)(s + R_3)} \quad (3-31)$$

从数学观点来看, 该系统只是在二阶系统的基础上又多加了一个极点

$$-p_3 = -R_3$$

现在分析一般情况下 $\xi < 1$ 时的单位阶跃响应。当 $\xi < 1$ 时, 特征方程式的三个根为

$$\begin{aligned} -p_1 &= -(\xi - j\sqrt{1 - \xi^2})\omega_n \\ -p_2 &= -(\xi + j\sqrt{1 - \xi^2})\omega_n \\ -p_3 &= -R_3 \end{aligned}$$

因此得

$$X_c(s) = \frac{A_0}{s} + \frac{A_1 s + A_2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} + \frac{A_3}{s + R_3}$$

上式中各项的待定系数为

$$A_0 = [X_c(s)s]_{s=0} = 1$$

由式

$$[X_c(s)(s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2)]_{s=-(\xi - j\sqrt{1 - \xi^2})\omega_n} = [A_1 s + A_2]_{s=-(\xi - j\sqrt{1 - \xi^2})\omega_n}$$

可以求得

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{-\xi^2 \beta (\beta - 2)}{\xi^2 \beta (\beta - 2) + 1} \\ A_2 &= \frac{-\xi \beta [2\xi^2 (\beta - 2) + 1] \omega_n}{\xi^2 \beta (\beta - 2) + 1} \end{aligned}$$

式中: $\beta = \frac{R_3}{\xi\omega_n}$ 是负实数极点 $-R_3$ 与共轭复数极点的负实部之比, 见图 3-23。

$$A_3 = [X_c(s)(s + R_3)]_{s=-R_3} = \frac{-1}{\xi^2\beta(\beta-2)+1}$$

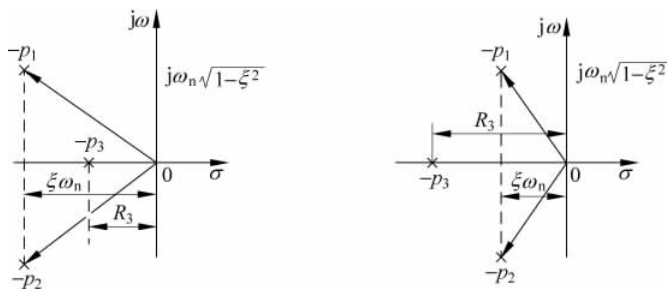


图 3-23 三阶系统的极点分布

输出量的动态响应为

$$x_c(t) = 1 - \frac{e^{-R_3 t}}{\xi^2\beta(\beta-2)+1} + e^{-\xi\omega_n t} \left(A_1 \cos \sqrt{1-\xi^2} \omega_n t + \frac{A_2 - A_1 \xi \omega_n}{\omega_n \sqrt{1-\xi^2}} \sin \sqrt{1-\xi^2} \omega_n t \right), \quad t \geq 0$$

由此得系统的输出量为

$$x_c(t) = 1 - \frac{e^{-\beta\xi\omega_n t}}{\xi^2\beta(\beta-2)+1} - \frac{e^{-\xi\omega_n t}}{\xi^2\beta(\beta-2)+1} \left\{ \xi^2\beta(\beta-2) \cos \omega_d t + \frac{\xi\beta[\xi^2(\beta-2)+1]}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin \omega_d t \right\}, \quad t \geq 0$$

或

$$x_c(t) = 1 - \frac{e^{-\beta\xi\omega_n t}}{\xi^2\beta(\beta-2)+1} - \frac{\xi\beta e^{-\xi\omega_n t}}{\sqrt{1-\xi^2} \sqrt{\xi^2\beta(\beta-2)+1}} \left\{ \frac{\xi \sqrt{1-\xi^2} (\beta-2)}{\sqrt{\xi^2\beta(\beta-2)+1}} \cos \omega_d t + \frac{\xi^2(\beta-2)+1}{\sqrt{\xi^2\beta(\beta-2)+1}} \sin \omega_d t \right\} = 1 - \frac{e^{-\beta\xi\omega_n t}}{\xi^2\beta(\beta-2)+1} - \frac{\xi\beta e^{-\xi\omega_n t}}{\sqrt{1-\xi^2} \sqrt{\xi^2\beta(\beta-2)+1}} \sin(\omega_d t + \theta), \quad t \geq 0 \quad (3-32)$$

式中: $\omega_d = \sqrt{1-\xi^2} \omega_n$; $\tan\theta = \frac{\xi(\beta-2) \sqrt{1-\xi^2}}{\xi^2(\beta-2)+1}$ 。

由上述分析可以看出, 三阶系统的动态响应由三部分组成, 即稳态分量、由极点 $-R_3$ 构成的指数函数项和由共轭复数极点构成的二阶系统暂态分量。影响动态特性的有两个因素。一个因素是共轭复数特征根的实部和负实根之比, 即 $\frac{R_3}{\xi\omega_n} = \beta$, 该值反映了这两种特征根在复数平面上的相对位置。当 $\beta \gg 1$ 时, 与共轭复根相

比,实根 $-p_3$ 距虚轴较远,共轭复根 $-p_1$ 和 $-p_2$ 则距虚轴较近,因此系统的动态特性主要由 $-p_1$ 和 $-p_2$ 决定,系统呈现二阶系统的特性。当 $\beta \ll 1$ 时, $-p_3$ 距虚轴较近,系统动态特性主要由 $-p_3$ 决定,系统呈现一阶系统特性。另一个因素为阻尼比 ξ ,它对系统的影响与二阶系统相似。

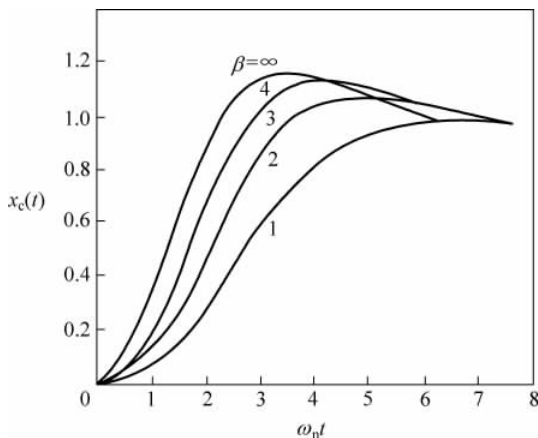


图 3-24 $\xi=0.5$,以 β 为参变量时三阶系统的单位阶跃响应

图 3-24 所示曲线为 $\xi=0.5$,以 β 为参变量时系统的单位阶跃响应。由图可知,当 $\beta=\infty$ 时,系统即为 $\xi=0.5$ 时的二阶系统的动态响应。一般情况下, $0 < \beta < \infty$,因此具有负实数极点的三阶系统,其动态特性的振荡性减弱,而上升时间和调节时间增长,超调量减小,也就是相当于系统的惯性增强了。

3.4 高阶系统的动态响应

高阶系统的闭环传递函数可表示为如下普通形式

$$\frac{X_c(s)}{X_r(s)} = W_B(s) = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \cdots + b_{m-1} s + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n}$$

将分子和分母分解成因式,上式可写成

$$\frac{X_c(s)}{X_r(s)} = W_B(s) = \frac{K(s+z_1)(s+z_2)\cdots(s+z_m)}{(s+p_1)(s+p_2)\cdots(s+p_n)}$$

式中: $-z_1, -z_2, \cdots, -z_m$ ——系统闭环传递函数的零点,又称系统零点;

$-p_1, -p_2, \cdots, -p_n$ ——系统闭环传递函数的极点,又称系统极点。

如果系统是稳定的,全部的极点和零点都互不相同,并且极点中包含共轭复数极点,则当输入为单位阶跃函数时,输出量的拉氏变换为

$$X_c(s) = \frac{K \prod_{i=1}^m (s+z_i)}{s \prod_{j=1}^q (s+p_j) \prod_{k=1}^r (s^2 + 2\xi\omega_{nk}s + \omega_{nk}^2)} \quad (3-33)$$

式中: $n=q+2r$;

q ——实数极点的个数;

r ——共轭复数极点的对数。

用部分分式展开得

$$X_c(s) = \frac{A_0}{s} + \sum_{j=1}^q \frac{A_j}{s + p_j} + \sum_{k=1}^r \frac{B_k s + C_k}{s^2 + 2\xi_k \omega_{nk} s + \omega_{nk}^2}$$

单位阶跃响应为

$$\begin{aligned} x_c(t) = & A_0 + \sum_{j=1}^q A_j e^{-p_j t} + \sum_{k=1}^r B_k e^{-\xi_k \omega_{nk} t} \cos \sqrt{1 - \xi_k^2} \omega_{nk} t \\ & + \sum_{k=1}^r \frac{C_k - \xi_k \omega_{nk} B_k}{\sqrt{1 - \xi_k^2} \omega_{nk}} e^{-\xi_k \omega_{nk} t} \sin \sqrt{1 - \xi_k^2} \omega_{nk} t \end{aligned} \quad (3-34)$$

由上式可以看出,高阶系统的动态响应是由一阶系统和二阶系统的动态响应组合而成。各个暂态分量由其系数 A_j, B_k, C_k 及其指数衰减常数 $p_j, \xi_k \omega_{nk}$ 决定。如果所有闭环极点都分布在 s 平面左侧,即所有极点都有负实部,那么随时间增加,式中的指数项都趋近于零,该高阶系统就是稳定的。

从分析高阶系统单位阶跃响应表达式还可以得出如下结论:

(1) 高阶系统动态响应各分量衰减的快慢,决定于指数衰减常数 $p_j, \xi_k \omega_{nk}$ 。 p_j 和 $\xi_k \omega_{nk}$ 越大,即系统闭环传递函数极点的实部在 s 平面左侧离虚轴越远,则相应的分量衰减越快。反之,系统闭环极点的实部越小,即在 s 平面左侧离虚轴越近,则相应的分量衰减越慢。

(2) 高阶系统动态响应各分量的系数不仅和极点在 s 平面中的位置有关,并且与零点的位置有关。

如果某极点 $-p_j$ 的位置距离原点很远,那么相应的系数 A_j 很小。所以离原点很远的极点的暂态分量,幅值小,衰减快,对系统的动态响应影响很小。

如果某极点 $-p_j$ 靠近一个闭环零点,远离原点及其他极点,则相应项的系数 A_j 比较小,该暂态分量的影响也就越小。如果极点和零点靠得很近,则该极点对动态响应几乎没有影响。

如果某极点 $-p_j$ 远离闭环零点,但与原点相距较近,则相应的系数 A_j 比较大。因此离原点很近并且附近没有闭环零点的极点,其暂态分量项不仅幅值大,而且衰减慢,对系统动态响应的影响很大。

(3) 如果高阶系统中距离虚轴最近的极点,其实部小于其他极点的实部的 $1/5$,并且附近不存在零点,可以认为系统的动态响应主要由这一极点决定。这些对动态响应起主导作用的闭环极点,叫做主导极点,是所有闭环极点中最重要的极点。该极点经常以共轭复数的形式出现。如果找到一对共轭复数主导极点,那么,高阶系统就可以近似地当作二阶系统来分析,并可以用二阶系统的动态性能指标来估计系统的动态特性。

在设计一个高阶控制系统时,我们常常利用主导极点这一概念选择系统参数,使系统具有一对共轭复数主导极点,这样就可以近似地用二阶系统的指标来设计系统。

3.5 自动控制系统的代数稳定判据

一个线性系统正常工作的首要条件,就是它必须是稳定的。所谓稳定,是指如果系统受到瞬时扰动的作用,使被控量 $x_c(t)$ 偏离了原始的平衡状态而产生偏差 Δx_c ,当瞬时扰动消失后, Δx_c 逐渐衰减,经过足够长的时间, Δx_c 趋近于零,系统恢复到原来的平衡状态,则系统是稳定的。反之,若 Δx_c 随着时间的推移而发散,则系统是不稳定的。

用代数的方法判断线性系统的稳定性,分析系统参数变化对稳定性的影响,是本节要介绍的内容。

3.5.1 线性系统稳定性的概念和稳定的充分必要条件

线性系统的稳定性取决于系统本身固有的特性而与扰动信号无关,它决定于瞬时扰动消失后暂态分量的衰减与否。根据上一节的讨论,暂态分量的衰减与否,决定于系统闭环传递函数的极点(系统的特征根)在 s 平面的分布:如果所有极点都分布在 s 平面的左侧,系统的暂态分量将逐渐衰减为零,则系统是稳定的;如果有共轭极点分布在虚轴上,则系统的暂态分量做简谐振荡,系统处于临界稳定状态;如果有闭环极点分布在 s 平面的右侧,系统具有发散振荡的分量,则系统是不稳定的。

根据上述分析,线性系统稳定的充分必要条件是:系统特征方程的根(即系统闭环传递函数的极点)全部为负实数或具有负实部的共轭复数,也就是所有的闭环特征根分布在 s 平面虚轴的左侧。该条件又可表示为

$$\operatorname{Re}[-p_j] < 0, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

本章 3.3.1 节讨论了典型二阶系统的动态特性。从讨论结果可知: $\xi > 0$ 时,系统的极点均位于 s 左半平面,系统的动态过程呈现指数衰减或衰减振荡,系统是稳定的; $\xi \leq 0$ 时,系统的极点位于虚轴或 s 右半平面,系统的动态过程呈现等幅振荡或发散振荡,系统是不稳定的。

既然线性系统的稳定性完全取决于特征方程的根,那么只要解出特征方程来就可以判定系统是否稳定。然而当特征方程的次数较高时,求解是困难的。因此在实践中人们需要一种方法,不必解出特征方程就能判别它是否有 s 右半平面的根以及根的个数。这是代数中一个已经解决的问题,我们用它来研究控制系统的稳定性,就称之为稳定性的代数判据。

本节叙述的代数判据(劳斯判据和赫尔维茨判据以及谢绪恺判据)就是不用直接求解代数方程,就可判断一个代数多项式有几个零点位于复平面的右半平面的方法。劳斯(E. J. Routh)判据和赫尔维茨(A. Hurwitz)判据是 Routh 于 1877 年和 Hurwitz 于 1895 年分别独立提出的稳定性判据,常常合称为 Routh-Hurwitz 判据;谢绪恺判据是 1957 年提出的。

3.5.2 劳斯判据

首先将系统的特征方程式写成如下标准形式

$$a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n = 0 \quad (3-35)$$

式中, a_0 为正(如果原方程首项系数为负,可先将方程两端同乘以 -1)。

为判断系统稳定与否,将系统特征方程式中的 s 各次项系数排列成如下劳斯表(Routh Array)。

$$\begin{array}{cccccc} s^n & a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & \cdots \\ s^{n-1} & a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & \cdots \\ s^{n-2} & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & \cdots \\ s^{n-3} & c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \\ s^2 & e_1 & e_2 & & & \\ s^1 & f_1 & & & & \\ s^0 & g_1 & & & & \end{array}$$

劳斯表共 $n+1$ 行;最下面的两行各有 1 列,其上两行各有 2 列,再上面两行各有 3 列,依此类推。最高一行应有 $(n+1)/2$ 列(若 n 为奇数)或 $(n+2)/2$ 列(若 n 为偶数)。

表中的有关系数为

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{-1}{a_1} \begin{vmatrix} a_0 & a_2 \\ a_1 & a_3 \end{vmatrix}, & b_2 &= \frac{-1}{a_1} \begin{vmatrix} a_0 & a_4 \\ a_1 & a_5 \end{vmatrix}, & b_3 &= \frac{-1}{a_1} \begin{vmatrix} a_0 & a_6 \\ a_1 & a_7 \end{vmatrix} & \cdots \\ c_1 &= \frac{-1}{b_1} \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}, & c_2 &= \frac{-1}{b_1} \begin{vmatrix} a_1 & a_5 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}, & c_3 &= \frac{-1}{b_1} \begin{vmatrix} a_1 & a_7 \\ b_1 & b_4 \end{vmatrix} & \cdots \\ & \cdots & & & & \end{aligned}$$

这一计算过程,一直进行到 s^0 行,计算到每行其余的系数全部等于零为止。为简化数值运算,可以用一个正整数去除或乘某一行的各项,这时并不改变稳定性的结论。

劳斯判据: 方程式(3-35)的全部根都在 s 左半平面的充分必要条件是劳斯表的第 1 列系数全部是正数。

劳斯判据还可以指出方程在 s 右半平面根的个数。它等于劳斯表中第 1 列各系数改变符号的次数。

例 3-4 系统的特征方程为

$$2s^6 + 5s^5 + 3s^4 + 4s^3 + 6s^2 + 14s + 7 = 0 \quad (3-36)$$

试用劳斯判据判断系统的稳定性。

解 (1) 建立劳斯表。计算劳斯表中各系数的值,并排列成下表

s^6	2	3	6	7
s^5	5	4	14	
s^4	$\frac{7}{5}$	$\frac{2}{5}$	7	
s^3	$\frac{18}{7}$	-11		
s^2	$\frac{115}{18}$	7		
s^1	$-\frac{1589}{115}$			
s^0	7			

(2) 根据劳斯判据判断系统的稳定性及根的分布。

由于表中的第1列出现了负数,可以判定方程(3-36)的根并非都在 s 左半平面,因此,该系统是不稳定的。

又由表中第1列系数符号改变2次,即可判定方程(3-36)有2个根在 s 右半平面。事实上方程(3-36)的根是 $-2.182, -0.599, -0.691 \pm j1.059$ 和 $+0.832 \pm j0.992$,确有2个根在 s 右半平面。

在应用劳斯判据时,可能遇到如下特殊情况:

1. 劳斯表中第1列出现零

如果劳斯表第1列中出现0,那么可以用一个小的正数 ϵ 代替它,而继续计算其余各系数。例如,方程

$$s^4 + 2s^3 + s^2 + 2s + 1 = 0$$

的劳斯表如下

s^4	1	1	1
s^3	2	2	
s^2	$\epsilon (\approx 0)$	1	
s^1	$2 - \frac{2}{\epsilon}$		
s^0	1		

现在观察劳斯表第1列的各系数。当 ϵ 趋近于零时, $2 - \frac{2}{\epsilon}$ 的值是一个很大的负值,因此可以认为第1列中的各系数的符号改变了两次。由此得出结论,该系统特征方程式有两个根具有正实部,系统是不稳定的。

如果 ϵ 上面一行的首列和 ϵ 下面一行的首列符号相同, 这表明有一对纯虚根存在。例如下列方程式

$$s^3 + 2s^2 + s + 2 = 0$$

的劳斯表为

$$\begin{array}{ccc} s^3 & 1 & 1 \\ s^2 & 2 & 2 \\ s^1 & \epsilon & \\ s^0 & 2 & \end{array}$$

可以看出, 第 1 列各元中 ϵ 的上面和下面的系数符号不变, 故有一对虚根。将特征方程式分解, 有

$$(s^2 + 1)(s + 2) = 0$$

解得根为

$$-p_{1,2} = \pm j1, \quad -p_3 = -2$$

2. 劳斯表的某一行中, 所有系数都等于零

如果在劳斯表的某一行中, 所有系数都等于 0, 则表明方程有一些大小相等且对称于原点的根。在这种情况下, 可利用全 0 行的上一行各系数构造一个辅助多项式(称为辅助方程), 式中 s 均为偶次。以辅助方程的导函数的系数代替劳斯表中的这个全 0 行, 然后继续计算下去。这些大小相等而关于原点对称的根也可以通过求解这个辅助方程得出。

例 3-5 系统特征方程式为

$$s^6 + 2s^5 + 8s^4 + 12s^3 + 20s^2 + 16s + 16 = 0$$

试用劳斯判据判断系统的稳定性。

解 劳斯表中得 $s^6 \sim s^3$ 各系数为

$$\begin{array}{ccccc} s^6 & 1 & 8 & 20 & 16 \\ s^5 & 2 & 12 & 16 & 0 \\ s^4 & 1 & 6 & 8 & \\ s^3 & 0 & 0 & 0 & \end{array}$$

由上表可以看出, s^3 行的各项全部为零。为了求出 $s^3 \sim s^0$ 各项, 用 s^4 行的各系数构成辅助方程式

$$p(s) = s^4 + 6s^2 + 8$$

它的导函数为

$$\frac{dp(s)}{ds} = 4s^3 + 12s$$

用导函数的系数 4 和 12 代替 s^3 行相应的系数继续算下去, 得劳斯表为

$$\begin{array}{rcccc}
 s^6 & 1 & 8 & 20 & 16 \\
 s^5 & 2 & 12 & 16 & 0 \\
 s^4 & 1 & 6 & 8 & \\
 s^3 & 4 & 12 & & \\
 s^2 & 3 & 8 & & \\
 s^1 & \frac{4}{3} & & & \\
 s^0 & 8 & & &
 \end{array}$$

可以看出,在新得到的劳斯表中第1列没有变号,因此可以确定在 s 右半平面没有特征根。另外,由于 s^3 行的各系数均为零,这表示有共轭虚根。这些根可由辅助方程式求出。本例的辅助方程式是

$$p(s) = s^4 + 6s^2 + 8$$

求得特征方程式的大小相等符号相反的虚根为

$$-p_{1,2} = \pm j\sqrt{2}, \quad -p_{3,4} = \pm j2, \quad -p_{5,6} = -1 \pm j$$

应用劳斯判据分别研究一阶、二阶和三阶微分方程

$$a_0s + a_1 = 0$$

$$a_0s^2 + a_1s + a_2 = 0$$

$$a_0s^3 + a_1s^2 + a_2s + a_3 = 0$$

容易得到以下简单结论:

- (1) 一阶和二阶系统稳定的充分必要条件是:特征方程所有系数均为正。
- (2) 三阶系统稳定的充分必要条件是:特征方程所有系数均为正,且 $a_1a_2 > a_0a_3$ 。

值得指出,如果系统稳定,那么它的微分方程(不论是几阶的)的特征方程的所有系数必须同号。这是因为,若系统稳定,特征方程的根无非是负实数或实部为负的共轭复数。因此,把特征方程左端的多项式分解因式时,只会有两种类型的因式,即对应于负实根 $-p$ 的因式 $(s+p)$ 与对应于负实部复根 $-\alpha \pm j\beta$ 的因式 $(s^2 + 2bs + c)$ 。这里 α 与 β 均为正,所以这两类因式中各项的系数均为正。因此,这些因式相乘时,所得多项式的各系数都是一些正数的乘积之和,所以也都是正数,不可能是负数或0,从而它们是同号的。注意,这只是系统稳定的必要条件,而不是充分条件。

3.5.3 赫尔维茨判据

设所研究的代数方程仍为式(3-35),即

$$a_0s^n + a_1s^{n-1} + \cdots + a_{n-1}s + a_n = 0$$

构造赫尔维茨行列式 D

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \cdots & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & \cdots & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & \cdots & 0 \\ 0 & a_0 & a_2 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & a_{n-1} & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & a_{n-2} & a_n \end{vmatrix}$$

这个行列式的构造方法如下:行列式的维数为 $n \times n$ 。在主对角线上,从 a_1 开始依次写入式(3-35)的系数,直至 a_n 为止。然后在每一列内从上到下按下标递减的顺序填入其他系数,最后用 0 补齐。

赫尔维茨稳定判据:特征方程式(3-35)的全部根都在左半复平面的充分必要条件是上述行列式的各阶主子式均大于 0,即

$$D_1 = a_1 > 0, \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} > 0, \quad D_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} > 0, \cdots, D_n = D > 0$$

我们把这些主子行列式与劳斯表中第 1 列的系数比较,就会发现它们与劳斯表中第 1 列的各元 $b_1, c_1, \cdots, g_1$ 之间存在如下关系:

$b_1 = D_2/D_1, c_1 = D_3/D_2, \cdots, g_1 = D_n/D_{n-1}$ 。若 $b_1, c_1, \cdots, g_1$ 均为正,则 $D_1, D_2, \cdots, D_n$ 自然也都为正,反之亦然。可见劳斯稳定判据和赫尔维茨稳定判据实质是一致的。当 n 较大时,赫尔维茨判据计算量急剧增加,所以它通常只用于 $n \leq 6$ 的系统。

需要指出,劳斯-赫尔维茨判据用于分析次数较高的方程时会出现数值计算稳定性的问题。

3.5.4 谢绪恺判据

根据多项式系数来判断系统的稳定性虽然早已由 E. J. Routh 和 A. Hurwitz 等人解决,但其判据的充要条件都由多个式子组成,尤其在阶次高时,式子多且繁杂。中国学者谢绪恺于 1957 年研究系统稳定性时得到如下结论:

设系统的特征方程仍为式(3-35),即

$$a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n = 0 \quad (n \geq 3)$$

式(3-35)的根全部具有负实部的必要条件为

$$a_i a_{i+1} > a_{i-1} a_{i+2} \quad (n = 1, 2, \cdots, n-2) \quad (3-37)$$

其根全部具有负实部的充分条件为

$$\frac{1}{3} a_i a_{i+1} > a_{i-1} a_{i+2} \quad (n = 1, 2, \cdots, n-2) \quad (3-38)$$

1976年中国学者聂义勇进一步证明,可将此充分条件放宽为

$$0.465a_i a_{i+1} > a_{i-1} a_{i+2} \quad (n=1,2,\dots,n-2) \quad (3-39)$$

此判据被称为谢绪恺判据。

谢绪恺判据完全避免了除法,且节省了计算量。

需要指出,式(3-39)有过量的稳定性储备,即有些不满足式(3-39)的系统仍可能稳定。

3.5.5 参数对稳定性的影响

如上所述,线性系统的稳定性完全取决于系统的特征方程。但特征方程的各系数完全是由系统本身的结构和参数决定的,与初始条件和输入量无关。这就是说,系统本身的结构和参数将直接影响系统的稳定性。

应用代数稳定判据可以用来判定系统是否稳定,还可以方便地用于分析系统参数变化对系统稳定性的影响,从而给出使系统稳定的参数范围。

例 3-6 系统的闭环传递函数为

$$W_B(s) = \frac{K_K}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)(T_3 s + 1) + K_K}$$

式中, K_K 为系统的开环放大系数。试给出为使系统稳定的 K_K 与系统其他参数间的关系。

解 系统特征方程为

$$T_1 T_2 T_3 s^3 + (T_1 T_2 + T_1 T_3 + T_2 T_3) s^2 + (T_1 + T_2 + T_3) s + 1 + K_K = 0$$

根据代数稳定判据,稳定的充要条件是

$$a_0 > 0, a_1 > 0, a_3 > 0, a_4 > 0, (a_1 a_2 - a_0 a_3) > 0$$

所以得 $(T_1 T_2 + T_1 T_3 + T_2 T_3)(T_1 + T_2 + T_3) > T_1 T_2 T_3 (1 + K_K)$, 经整理得

$$0 < K_K < \frac{T_1}{T_2} + \frac{T_2}{T_3} + \frac{T_3}{T_1} + \frac{T_2}{T_1} + \frac{T_3}{T_2} + \frac{T_1}{T_3} + 2$$

在本例中,假设取 $T_1 = T_2 = T_3$, 则使系统稳定的临界放大系数为 $K_K = 8$ 。如果取 $T_2 = T_3, T_1 = 10T_2$, 则使系统稳定的临界放大系数变为 $K_K = 24.2$ 。由此可见,将各时间常数的数值错开,可以允许较大的开环放大系数。

利用代数判据也可以给出使系统稳定的参数范围。

例 3-7 如图 3-25 所示的系统,其闭环传递函数为

$$W_B(s) = \frac{K_y (\tau_1 s + 1) (T_f s + 1)}{T_i T_a T_f \tau_1 s^4 + T_i \tau_1 (T_a + T_f) s^3 + T_i \tau_1 s^2 + K \tau_1 s + K}$$

式中, $K_y = K_c K_s, K = K_c K_s K_f$ 。(1)设参数为 $\tau_1 = 0.15, T_a = 0.2, T_i = 0.2, T_f = 0.01, K = 5$, 试判断该系统是否稳定;(2)试确定使系统稳定的参数 τ_1 的范围。

解 (1) 特征方程式为

$$T_i T_a T_f \tau_1 s^4 + T_i \tau_1 (T_a + T_f) s^3 + T_i \tau_1 s^2 + K \tau_1 s + K = 0$$

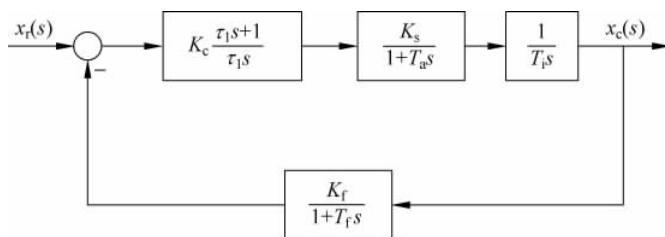


图 3-25 系统结构图

可以算得

$$a_0 = T_i T_a T_f \tau_1 = 6 \times 10^{-5}, a_1 = T_i \tau_1 (T_a + T_f) = 6.3 \times 10^{-3}$$

$$a_2 = T_i \tau_1 = 3 \times 10^{-2}, a_3 = K \tau_1 = 0.75, a_4 = K = 5$$

各子行列式为

$$\Delta_1 = a_1 a_2 - a_0 a_3 = 1.44 \times 10^{-5}$$

$$\Delta_2 = a_3 \Delta_1 - a_1^2 a_4 = -1.8 \times 10^{-5}$$

由稳定条件可知,该系统不稳定。

(2) 将特征方程式改写为

$$T_i T_a T_f s^4 + T_i (T_a + T_f) s^3 + T_i s^2 + K s + \frac{K}{\tau_1} = 0$$

可以算得

$$a_0 = T_i T_a T_f = 4 \times 10^{-4}, a_1 = T_i (T_a + T_f) = 4.2 \times 10^{-2}, a_2 = T_i = 0.2,$$

$$a_3 = K = 5, a_4 = \frac{K}{\tau_1} = \frac{5}{\tau_1}$$

各子行列式为

$$\Delta_1 = a_1 a_2 - a_0 a_3 = 6.4 \times 10^{-3}$$

$$\Delta_2 = a_3 \Delta_1 - a_1^2 a_4 = 5 \left(6.4 \times 10^{-3} - \frac{1.764 \times 10^{-3}}{\tau_1} \right)$$

系统稳定的条件是

$$6.4 \times 10^{-3} - \frac{1.764 \times 10^{-3}}{\tau_1} > 0$$

由此可得

$$\tau_1 > 0.275$$

所以,参数 τ_1 的整定范围为 $\tau_1 > 0.275$ 。

另外,如果调节器时间常数为已知量,也可以根据稳定条件来确定放大系数的范围。应指出,代数稳定判据只能应用于特征方程式是代数方程,并且其系数是实系数的情况。如果任一系数为复数,或者方程中包含了 s 的指数项,就不能应用代数判据。

3.5.6 相对稳定性和稳定裕度

应用代数判据只能给出系统是稳定还是不稳定,即只解决了绝对稳定性的问题。在处理实际问题时,只判断系统是否稳定是不够的。因为,对于实际的系统,所得到参数值往往是近似的,并且有的参数随着条件的变化而变化,这样就给得到的结论带来了误差。考虑这些因素,往往希望知道系统距离稳定边界有多少余量,这就是相对稳定性或稳定裕度的问题。

我们可以用闭环特征方程式每一对复数根的阻尼比的大小来定义相对稳定性,这时是以响应速度和超调量来代表相对稳定性;我们也可以用每个根的负实部来定义相对稳定性,这时是以每个根的相对调节时间来代表相对稳定性。在 s 平面中,用根的负实部的位置来表示相对稳定性是很方便的。例如,要检查系统是否具有 σ_1 的稳定裕度(见图 3-26),相当于把纵坐标轴向左位移距离 σ_1 ,然后判断系统是否仍然稳定。这就是说,以

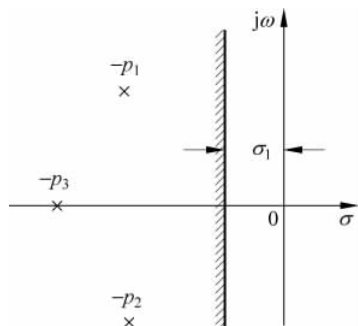


图 3-26 相对稳定性

$$s = z - \sigma_1$$

代入系统特征方程式,写出 z 的多项式,然后用代数判据判定 z 的多项式的根是否都在新的虚轴的左侧。

例 3-8 系统特征方程式为

$$s^3 + 5s^2 + 8s + 6 = 0$$

试检查上述系统是否有裕度 $\sigma_1 = 1$ 。

解 劳斯表为

s^3	1	8
s^2	5	6
s^1	$\frac{34}{5}$	
s^0	6	

可以看出,第一列中各项符号没有改变,所以没有根在 s 平面的右侧,系统是稳定的。

将 $s = z - 1$ 代入原特征方程式,得

$$(z - 1)^3 + 5(z - 1)^2 + 8(z - 1) + 6 = 0$$

新的特征方程为

$$z^3 + 2z^2 + z + 2 = 0$$

列出劳斯表

z^3	1	1
z^2	2	2
z^1	$0(\approx \epsilon)$	
z^0	2	

由于 $0(\epsilon)$ 上面的系数符号与 $0(\epsilon)$ 下面的系数符号相同,表明没有在 s 右半平面的根,但由于 z^1 行的系数为零,故有一对虚根。这说明,原系统刚好有 $\sigma_1=1$ 的稳定裕度。

3.6 稳态误差

在稳态条件下输出量的期望值与稳态值之间存在的误差,称为系统稳态误差。稳态误差的大小是衡量系统稳态性能的重要指标。影响系统稳态误差的因素很多,如系统的结构、系统的参数以及输入量的形式等。必须指出的是,这里所说的稳态误差并不考虑由于元件的不灵敏区、零点漂移、老化等原因所造成的永久性的误差。

为了分析方便,把系统的稳态误差分为扰动稳态误差和给定稳态误差。扰动稳态误差是由于外部扰动而引起的,常用这一误差来衡量恒值系统的稳态品质,因为对于恒值系统,给定量是不变的。而对于随动系统,给定量是变化的,要求输出量以一定的精度跟随给定量的变化,因此给定稳态误差就成为衡量随动系统稳态品质的指标。本节将讨论计算和减少稳态误差的方法。

3.6.1 扰动稳态误差

图 2-49 所示为有给定作用和扰动作用的系统动态结构图。当给定量不变,即 $\Delta X_r(s)=0$,而扰动量变化,即 $\Delta X_d(s)\neq 0$,这时输出量 $x_c(t)$ 的变化量 $\Delta x_c(t)$ 即为扰动误差。扰动误差的拉氏变换为

$$\Delta X_c(s) = \frac{W_2(s)\Delta X_d(s)}{1+W_1(s)W_2(s)W_f(s)} \quad (3-40)$$

由此求出扰动误差的传递函数为

$$W_e(s) = \frac{\Delta X_c(s)}{\Delta X_d(s)} = \frac{W_2(s)}{1+W_1(s)W_2(s)W_f(s)} \quad (3-41)$$

$W_e(s)$ 称为误差传递函数。根据拉氏变换的终值定理,求得扰动作用下的稳态误差为

$$e_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} \Delta x_c(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s W_e(s) \Delta X_d(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s W_2(s) \Delta X_d(s)}{1+W_1(s)W_2(s)W_f(s)} \quad (3-42)$$

由上式可知,系统扰动误差决定于系统的误差传递函数和扰动量。

对于恒值系统,典型的扰动量为单位阶跃函数, $\Delta X_d(s) = \frac{1}{s}$, 则扰动稳态误差为

$$e_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} \Delta x_c(t) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{W_2(s)}{1 + W_1(s)W_2(s)W_f(s)} \quad (3-43)$$

下面举例说明。

图 3-27 所示为具有比例调节器的速度负反馈系统的动态结构图。

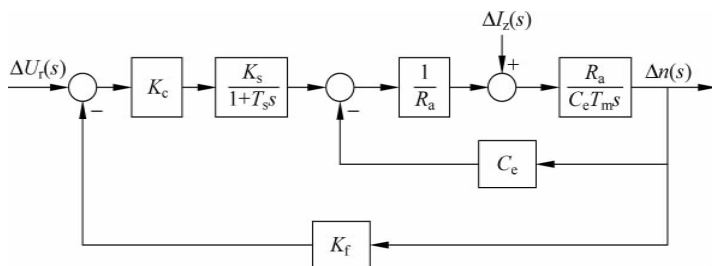


图 3-27 速度负反馈系统的动态结构图

图中: $\Delta I_z(s)$ ——负载电流的拉氏变换;

K_c ——比例调节器的比例系数;

K_s ——晶闸管整流装置的电压放大系数;

T_s ——晶闸管整流装置的时间常数;

T_m ——电动机的机电时间常数;

R_a ——电动机电枢回路电阻;

C_e ——电动机的电势常数;

K_f ——速度反馈系数。

图 3-28 所示为给定量 $\Delta U_r(s) = 0$ 时,以扰动量为输入量的系统结构图。在负载电流作用下转速误差的拉氏变换为

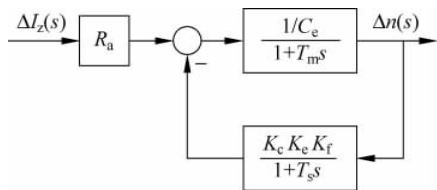


图 3-28 负载作用下的结构图

$$\Delta n(s) = \frac{(T_s s + 1) \frac{R_a}{C_e} \Delta I_z(s)}{(T_m s + 1)(T_s s + 1) + K_K} \quad (3-44)$$

式中: $K_K = K_c K_s K_f \frac{1}{C_e}$ ——系统开环放大系数。

当负载为阶跃函数时, $\Delta I_z(s) = \frac{1}{s} \Delta I_z$, 则转速的稳态误差为

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \Delta n(t) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{(T_s s + 1) \frac{R_a}{C_e} \Delta I_z}{(T_m s + 1)(T_s s + 1) + K_K} = \frac{\Delta I_z R_a}{C_e (1 + K_K)} \quad (3-45)$$

K_K 越大,则稳态误差越小,因此提高 K_K 值是这一系统减小稳态误差的主要方法。 K_K 值决定于调节器的比例系数 K_c 和速度反馈系数 K_f 等参量,因此提高 K_c 或增加速度反馈强度都可以减小稳态误差。但是, K_K 值太大容易使系统不稳定。

由于这一系统在负载扰动下存在稳态误差,所以称为有差系统。

将上述调速系统中的比例调节器换成积分调节器,构成图 3-29 所示的系统。

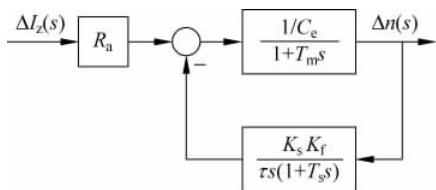


图 3-29 负载作用下系统结构图

积分调节器的传递函数为 $W_1(s) = \frac{1}{\tau s}$, 则速度误差的拉氏变换为

$$\Delta n(s) = \frac{s(T_s s + 1)\Delta I_z(s)R_a}{C_e[s(T_m s + 1)(T_s s + 1) + K]}$$

式中: $K = \frac{K_s K_f}{C_e \tau}$ 。

当负载电流作阶跃变化时,有

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \Delta n(t) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s(T_s s + 1)\Delta I_z R_a}{C_e[s(T_m s + 1)(T_s s + 1) + K]} = 0$$

由上式可知,具有积分调节器的速度负反馈系统,当扰动量为阶跃函数时,其稳态误差为零,为无差系统。因此,在扰动作用点之前串联积分环节,可以消除阶跃扰动的稳态误差。

3.6.2 给定稳态误差和误差系数

图 3-30(a)所示为控制系统的典型动态结构图。图中 $W_f(s)$ 为主反馈检测元件的传递函数,不包括为改善被控制对象性能的局部反馈环节在内。系统的期望值是给定信号 $X_r(s)$ 。

当给定信号 $X_r(s)$ 与主反馈信号 $X_f(s)$ 不相等时,一般定义其差值 $E(s)$ 为误差信号。这时,误差定义为

$$E(s) = X_r(s) - X_f(s) = X_r(s) - W_f(s)X_c(s)$$

这个误差是可以量测的,但是这个误差并不一定反映输出量的实际值与期望值之间的偏差。

另一种定义误差的方法是取系统输出量的实际值与期望值的差,但这一误差在实际系统中有时无法测量。

对于图 3-30(b)所示的单位反馈系统,上述两种误差定义是相同的。

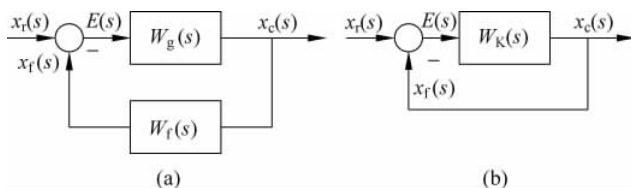


图 3-30 典型动态结构图

根据前一种误差定义方法,可得误差传递函数为

$$W_e(s) = \frac{E(s)}{X_r(s)} = 1 - \frac{X_f(s)}{X_r(s)} = \frac{1}{1 + W_g(s)W_f(s)} = \frac{1}{1 + W_K(s)}$$

式中: $W_K(s) = W_g(s)W_f(s)$ 。

由此得误差的拉氏变换为

$$E(s) = \frac{X_r(s)}{1 + W_K(s)} \quad (3-46)$$

给定稳态误差为

$$e_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{sX_r(s)}{1 + W_K(s)} \quad (3-47)$$

由此可知,有两个因素决定给定稳态误差,即系统的开环传递函数 $W_K(s)$ 和给定量 $X_r(s)$ 。现在讨论这两个因素对给定稳态误差的影响。

根据开环传递函数中串联的积分环节个数,可将系统分为几种不同类型。单位反馈系统的开环传递函数可以表示为

$$W_K(s) = \frac{K_K \prod_{i=1}^m (T_i s + 1)}{s^N \prod_{j=1}^n (T_j s + 1)} \quad (3-48)$$

式中: N ——开环传递函数中串联的积分环节的阶次,或称系统的无差阶数;

$\frac{1}{s^N}$ —— N 个串联积分环节的等效传递函数。

$N = 0$ 时的系统称为 0 型系统; $N = 1$ 时的系统称为 I 型系统;相应地, $N = 2$ 时,称为 II 型系统。 N 越高,系统的稳态精度越高,但系统的稳定性越差。一般采用的是 0 型、I 型和 II 型系统。

1. 典型输入情况下系统的给定稳态误差分析

下面对于不同的输入函数,分析系统的稳态误差。

(1) 单位阶跃函数输入。在这种情况下, $X_r(s) = \frac{1}{s}$, 故得稳态误差为

$$e_{ss} = e_p(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{1 + W_K(s)}$$

令 $K_p = \lim_{s \rightarrow 0} W_K(s)$, K_p 称为位置稳态误差系数, 则

$$e_p(\infty) = \frac{1}{1 + K_p}$$

因此在单位阶跃输入下, 给定稳态误差决定于位置稳态误差系数。

对于 0 型系统, 因 $N = 0$, 则位置稳态误差系数

$$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{K_K \prod_{i=1}^m (T_i s + 1)}{\prod_{j=1}^n (T_j s + 1)} = K_K$$

因此 0 型系统的位置稳态误差为

$$e_p(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \frac{1}{1 + K_p} = \frac{1}{1 + K_K}$$

由此而知, 0 型系统的位置稳态误差决定于开环放大系数 K_K : K_K 越大, $e_p(\infty)$ 越小。

对于 I 型或 II 型系统, 因 $N=1$ 或 2, 则位置稳态误差系数为

$$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{K_K \prod_{i=1}^m (T_i s + 1)}{s^N \prod_{j=1}^n (T_j s + 1)} = \infty$$

故 I 型或 II 型系统的位置稳态误差为

$$e_p(\infty) = \frac{1}{1 + K_p} = 0$$

由此而知, 对于单位阶跃输入, I 型以上各型系统的位置稳态误差系数均为无穷大, 稳态误差均为零。

(2) 单位斜坡函数输入。在这种情况下, 输入量的拉氏变换为

$$X_r(s) = \frac{1}{s^2}$$

因此给定稳态误差为

$$e_{ss} = e_v(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s[1 + W_K(s)]} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{sW_K(s)}$$

令 $K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sW_K(s)$, K_v 称为速度稳态误差系数。由此得各型系统在斜坡输入时的稳态误差为

对于 0 型系统, $K_v = 0, e_v(\infty) = \infty$;

对于 I 型系统, $K_v = K_K, e_v(\infty) = \frac{1}{K_K}$;

对于 II 型系统, $K_v = \infty, e_v(\infty) = 0$ 。

由此可知, 在斜坡输入情况下, 0 型系统的稳态误差为 ∞ , 也就是说, 被控制量不能跟随按时间变化的斜坡函数。而对 I 型系统, 有跟踪误差; II 型系统则能

准确地跟踪斜坡输入,稳态误差为零,如图 3-31 所示。

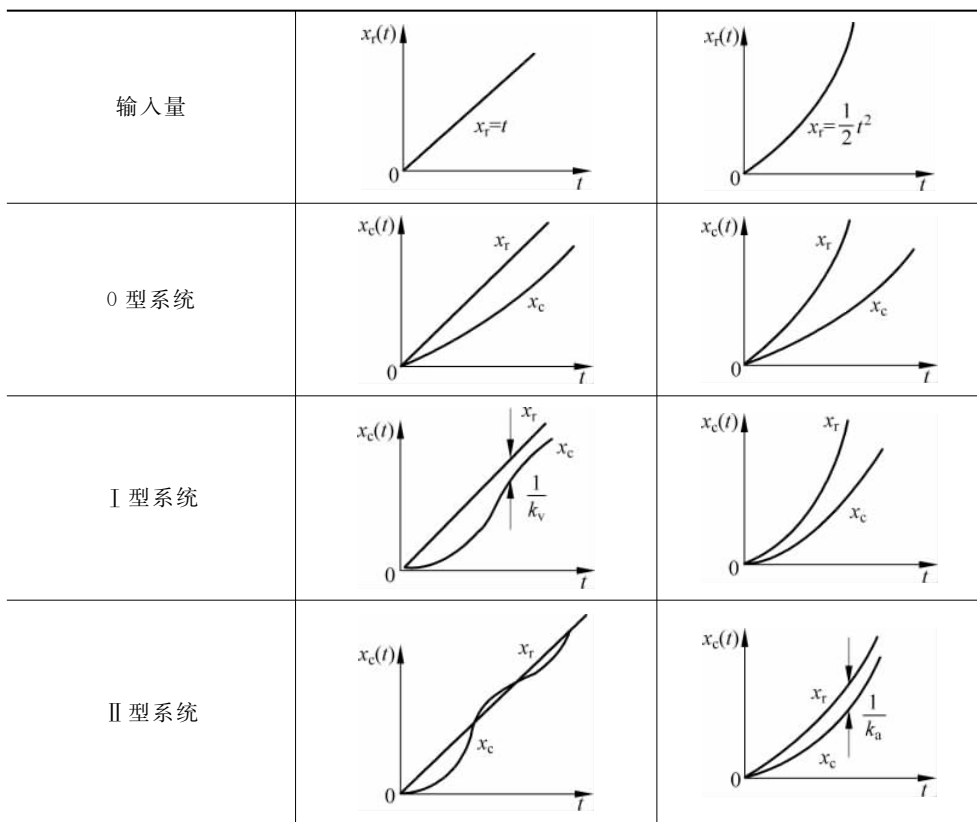


图 3-31 输出量示意图

(3) 单位抛物线函数输入。这时输入量的拉氏变换为

$$X_r(s) = \frac{1}{s^3}$$

稳态误差为

$$e_{ss} = e_a(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s}{1 + W_K(s)} \cdot \frac{1}{s^3} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s^2 W_K(s)}$$

令 $K_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 W_K(s)$, K_a 称为加速度稳态误差系数,则

对于 0 型和 I 型系统, $K_a = 0$, $e_a(\infty) = \infty$;

对于 II 型系统, $K_a = K_K$, 故 $e_a(\infty) = \frac{1}{K_K}$ 。

由此可知,0 型和 I 型系统都不能跟踪抛物线输入,只有 II 型系统可以跟踪抛物线输入,但是有稳态误差,如图 3-31 所示。现将各型系统在不同输入情况下的稳态误差系数和给定稳态误差汇总列于表 3-1。

表 3-1 稳态误差系数与给定稳态误差

$x_r(t)$	1		t		$\frac{1}{2}t^2$	
系数/误差	K_p	$e_p(\infty)$	K_v	$e_v(\infty)$	K_a	$e_a(\infty)$
0 型	K_K	$\frac{1}{1+K_K}$	0	∞	0	∞
I 型	∞	0	K_K	$\frac{1}{K_K}$	0	∞
II 型	∞	0	∞	0	K_K	$\frac{1}{K_K}$

由此可知,为了使系统具有较小的稳态误差,必须针对不同的输入量选择不同类型的系统,并且选取较高的 K_K 值。但是,考虑系统的稳定性,一般选择 II 型以内的系统,并且 K_K 值也要满足系统稳定性的要求。

2. 动态误差系数

上面所介绍的计算稳态误差的方法,只能根据终值定理求得稳态误差值,而不能了解进入稳态后误差的变化规律。下面介绍另一个计算稳态误差的方法。根据这一方法不但可以求出稳态值,而且不必通过解微分方程,可以简便地了解进入稳态后,误差随时间变化的规律。

由式(3-48)所给出的单位反馈系统的误差传递函数为

$$\frac{E(s)}{X_r(s)} = \frac{1}{1+W_K(s)} = \frac{s^N \prod_{j=1}^{n-N} (T_j s + 1)}{s^N \prod_{j=1}^{n-N} (T_j s + 1) + K_K \prod_{i=1}^m (T_i s + 1)} \quad (3-49)$$

如果将分子和分母中的幂次相同的各项合并,则可写成

$$\frac{E(s)}{X_r(s)} = \frac{\alpha_0 + \alpha_1 s + \alpha_2 s^2 + \cdots + \alpha_n s^n}{\beta_0 + \beta_1 s + \beta_2 s^2 + \cdots + \beta_n s^n} \quad (3-50)$$

用分母多项式除分子多项式,可把上式写为如下 s 的升幂级数

$$\frac{E(s)}{X_r(s)} = \frac{1}{k_0} + \frac{1}{k_1} s + \frac{1}{k_2} s^2 + \cdots \quad (3-51)$$

由此可得误差的拉氏变换为

$$E(s) = \frac{1}{k_0} X_r(s) + \frac{1}{k_1} s X_r(s) + \frac{1}{k_2} s^2 X_r(s) + \cdots \quad (3-52)$$

通过上式可以看出,系统的动态误差是由给定量及其各阶导数所引起。该式描述了动态过程的误差,因此 k_0, k_1, k_2 等各项系数定义为动态误差系数。为了与前面的位置稳态误差系数、速度稳态误差系数等相对应,将 k_0, k_1, k_2 分别定义为

k_0 ——动态位置误差系数;

k_1 ——动态速度误差系数;

k_2 ——动态加速度误差系数。

由式(3-52)可以求得稳态误差值。

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \left(\frac{s}{k_0} + \frac{s^2}{k_1} + \frac{s^3}{k_2} + \cdots \right) X_r(s) \quad (3-53)$$

由式(3-52)可知,该级数是在 $s = 0$ 的邻域中收敛,相当于在时间域 $t \rightarrow \infty$ 收敛,因此对应该式的反变换是 $t \rightarrow \infty$,即系统进入稳态时稳态误差的时间函数关系式。设初始条件为零,并忽略 $t=0$ 时系统的脉冲值,则进入稳态时的系统误差为

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{k_0} x_r(t) + \frac{1}{k_1} x_r'(t) + \frac{1}{k_2} x_r''(t) + \frac{1}{k_3} x_r'''(t) + \cdots \right] \quad (3-54)$$

如果已知各动态误差系数和输入量的各阶导数,即可求出 $t \rightarrow \infty$ 时误差的变化规律。

例 3-9 有一个单位反馈系统,其开环传递函数为

$$W_K(s) = \frac{K_K}{T_m T_d s^2 + T_m s + 1}$$

试计算输入量为 $x_r(t)=1(t)$ 和 $x_r(t)=t$ 时系统的稳态误差及其时间函数。

解 该系统为 0 型系统,系统的误差传递函数为

$$\frac{E(s)}{X_r(s)} = \frac{1 + T_m s + T_m T_d s^2}{1 + K_K + T_m s + T_m T_d s^2}$$

展开成 s 的升幂级数,得

$$\frac{E(s)}{X_r(s)} = \frac{1}{1 + K_K} + \frac{K_K T_m}{(1 + K_K)^2} s + \frac{K_K T_m T_d}{(1 + K_K)^2} \left[1 - \frac{T_m}{T_d(1 + K_K)} \right] s^2 + \cdots$$

故动态误差系数为

$$k_0 = 1 + K_K, k_1 = \frac{(1 + K_K)^2}{K_K T_m}, k_2 = \frac{(1 + K_K)^3}{K_K T_m [T_d(1 + K_K) - T_m]}$$

当给定量为阶跃函数时

$$x_r(t) = 1(t), \quad X_r(s) = \frac{1}{s}$$

稳态误差为

$$e_{ss} = e_p(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sW_e(s)X_r(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \left(\frac{1}{k_0} + \frac{1}{k_1}s + \frac{1}{k_2}s^2 + \cdots \right) = \frac{1}{k_0} = \frac{1}{1 + K_K}$$

稳态误差的时间函数为

$$e(t) = \frac{1}{k_0} x_r(t) + \frac{1}{k_1} x_r'(t) + \frac{1}{k_2} x_r''(t)$$

因为 $x_r(t)=1(t)$, $x_r'(t)=x_r''(t)=x_r'''(t)=0$ (不计时间等于零时的脉冲值), 故得

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \frac{1}{k_0} = \frac{1}{1 + K_K}$$

当给定量为单位斜坡函数时, $x_r(t)=t$, $x_r'(t)=1$, $x_r''(t)=x_r'''(t)=0$, 稳态误差值为

$$e_{ss} = e_v(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} \left(\frac{1}{k_0 s} + \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} s + \cdots \right) = \infty$$

稳态误差的时间函数为

$$e(t) = \frac{t}{k_0} + \frac{1}{k_1}$$

例 3-10 一个单位反馈系统的开环传递函数为

$$W_K(s) = \frac{10(1+5s)}{s^2(1+s)}$$

试求输入量为 $x_r(t) = g_0 + g_1 t + \frac{1}{2} g_2 t^2$ 时, 系统的稳态误差时间函数和稳态误差。

解 系统给定误差的传递函数为

$$\frac{E(s)}{X_r(s)} = \frac{s^2 + s^3}{10 + 50s + s^2 + s^3}$$

用分子多项式除以分母多项式, 可得 s 的升幂级数

$$\frac{E(s)}{X_r(s)} = \frac{1}{10} s^2 - \frac{2}{5} s^3 + \dots$$

故 $k_0 = k_1 = \infty, k_2 = 10, k_3 = -5/2$ 。误差的拉氏变换为

$$E(s) = \frac{1}{10} s^2 X_r(s) - \frac{2}{5} s^3 X_r(s) + \dots$$

已知给定输入量为

$$x_r(t) = g_0 + g_1 t + \frac{1}{2} g_2 t^2$$

则

$$x_r'(t) = g_1 + g_2 t, \quad x_r''(t) = g_2, \quad x_r'''(t) = 0$$

稳态误差的时间函数为

$$e_{ss}(t) = e(t) = \frac{1}{10} x_r''(t) - \frac{2}{5} x_r'''(t) + \dots = \frac{g_2}{10}$$

系统稳态误差为

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{g_2}{10} \right) = \frac{g_2}{10}$$

3.6.3 减小稳态误差的方法

为了减小系统的给定或扰动稳态误差, 一般经常采用的方法是提高开环传递函数中的串联积分环节的阶次 N , 或增大系统的开环放大系数 K_K 。但是 N 值一般不超过 2, K_K 值也不能任意增大, 否则系统不稳定。为了进一步减小给定和扰动误差, 可以采用补偿的方法。所谓补偿是指作用于控制对象的控制信号中, 除了偏差信号外, 还引入与扰动或给定量有关的补偿信号, 以提高系统的控制精度, 减小误差。这种控制称为复合控制或前馈控制。

在图 3-32 所示的控制系统中, 给定量 $X_r(s)$ 通过补偿校正装置 $W_c(s)$, 对系

统进行开环控制。这样,引入的补偿信号 $X_b(s)$ 与偏差信号 $E(s)$ 一起,对控制对象进行复合控制。这种系统的闭环传递函数为

$$W_B(s) = \frac{X_c(s)}{X_r(s)} = \frac{[W_1(s) + W_c(s)]W_2(s)}{1 + W_1(s)W_2(s)}$$

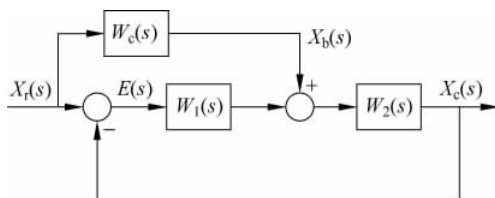


图 3-32 复合控制系统结构图之一

由此得到给定误差的拉氏变换为

$$E(s) = \frac{1 - W_c(s)W_2(s)}{1 + W_1(s)W_2(s)} X_r(s) \quad (3-55)$$

如果补偿校正装置的传递函数为

$$W_c(s) = \frac{1}{W_2(s)} \quad (3-56)$$

即补偿环节的传递函数为控制对象的传递函数的倒数,则系统补偿后的误差

$$E(s) = 0$$

闭环传递函数为

$$W_B(s) = \frac{X_c(s)}{X_r(s)} = 1$$

即

$$X_c(s) = X_r(s)$$

这时,系统的给定误差为零,输出量完全再现输入量。这种将误差完全补偿的作用称为全补偿。式(3-56)称为按给定作用的不变性条件。

又如在图 3-33 所示的结构图中,为了补偿外部扰动 $X_d(s)$ 对系统产生的作用,引入了扰动的补偿信号,补偿校正装置为 $W_c(s)$ 。此时,系统的扰动误差就是给定量为零时系统的输出量

$$X_c(s) = \frac{[1 - W_1(s)W_c(s)]W_2(s)}{1 + W_1(s)W_2(s)} X_d(s) \quad (3-57)$$

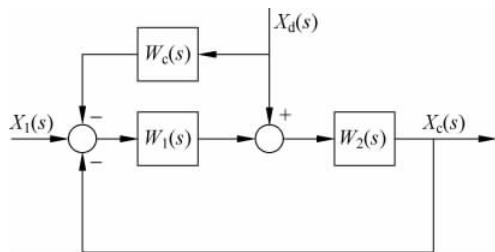


图 3-33 复合控制系统结构图之二

如果选取

$$W_c(s) = \frac{1}{W_1(s)} \quad (3-58)$$

或

$$1 - W_1(s)W_c(s) = 0$$

则得到

$$X_c(s) = 0$$

这种作用是对外部扰动的完全补偿,式(3-58)称为按扰动的不变性条件。实际上实现完全补偿是很困难的,但即使采取部分补偿也可以取得显著的效果。

图 3-34(a)所示为一个随动系统,补偿前的开环传递函数为

$$W_K(s) = \frac{K_1 K_2}{s(T_1 s + 1)(T_m s + 1)}$$

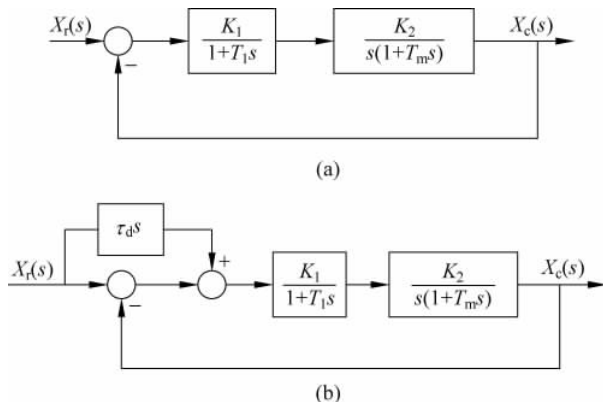


图 3-34 随动系统结构图

闭环传递函数为

$$W_B(s) = \frac{K_K}{s(T_1 s + 1)(T_m s + 1) + K_K}$$

式中: $K_K = K_1 K_2$ 。

误差传递函数为

$$W_e(s) = \frac{s(T_1 s + 1)(T_m s + 1)}{s(T_1 s + 1)(T_m s + 1) + K_K}$$

当输入量为单位斜坡函数时, $X_r(s) = \frac{1}{s^2}$, 系统的给定误差拉氏变换为

$$E(s) = \frac{s(T_1 s + 1)(T_m s + 1)}{s(T_1 s + 1)(T_m s + 1) + K_K} \frac{1}{s^2}$$

速度稳态误差系数为

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} s W_K(s) = K_1 K_2 = K_K$$

系统的稳态误差为

$$e_{ss} = e_v(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \frac{1}{K_v} = \frac{1}{K_K}$$

这时系统将产生速度稳态误差,误差的大小决定于系统的速度稳态误差系数 $K_v = K_K$ 。

为了补偿系统的速度误差,引进了给定量的微分信号,如图 3-34(b)所示。补偿校正装置 $W_c(s)$ 的传递函数为

$$W_c(s) = \tau_d s$$

由此求得系统的闭环传递函数为

$$W_B(s) = \frac{[1 + W_c(s)]W_K(s)}{1 + W_K(s)} = \frac{K_K(1 + \tau_d s)}{s(T_1 s + 1)(T_m s + 1) + K_K}$$

复合控制的给定误差传递函数为

$$W_e(s) = 1 - W_B(s) = \frac{s^2(T_1 T_m s + T_1 + T_m) + s(1 - K_K \tau_d)}{s(T_1 s + 1)(T_m s + 1) + K_K}$$

今选取 $\tau_d = \frac{1}{K_K}$, 则误差传递函数为

$$W_e(s) = \frac{s^2(T_1 T_m s + T_1 + T_m)}{s(T_1 s + 1)(T_m s + 1) + K_K}$$

误差的拉氏变换为

$$E(s) = \frac{s^2(T_1 T_m s + T_1 + T_m)}{s(T_1 s + 1)(T_m s + 1) + K_K} X_r(s)$$

在输入量为单位斜坡函数的情况下, $X_r(s) = \frac{1}{s^2}$, 系统的给定稳态误差为

$$e_{ss} = e_v(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s(T_1 T_m s + T_1 + T_m)}{s(T_1 s + 1)(T_m s + 1) + K_K} = 0$$

由此可知,当加入补偿校正装置 $W_c(s) = \frac{1}{K_K} s$ (也称为前馈控制)时,可以使系统的速度稳态误差为零,将原来的 I 型系统提高为 II 型系统。此时其等效单位反馈系统的开环传递函数为

$$W'_K(s) = \frac{1}{W_e(s)} - 1 = \frac{s + K_K}{s^2(T_1 T_m s + T_1 + T_m)}$$

应特别指出的是,加入这一前馈控制时,系统的稳定性与未加前馈相同,因为这两个系统的特征方程式是相同的。这样,提高了稳态精度,但系统稳定性不变。

实现上述补偿是很容易的,从输入端引入一个理想的微分环节即可,该环节的微分时间常数为 $\tau = \frac{1}{K_K}$ 。

3.7 用 MATLAB 进行系统时域分析

利用 MATLAB 中的函数进行时域分析可以使一些复杂的问题变得相对简单,从而方便地进行控制系统的时域分析。

3.7.1 典型输入信号的 MATLAB 实现

1. 单位脉冲响应

当输入信号为单位脉冲函数时,系统的输出为单位脉冲响应,在 MATLAB 中可用 `impulse()` 函数实现,其调用格式为

```
[y, x, t] = impulse(num, den, t)
```

或

```
impulse(num, den)
```

式中, t 为仿真时间; y 为输出响应; x 为状态响应。

例 3-11 系统传递函数为 $W(s) = \frac{1}{s^2 + s + 1}$, $t \in [0, 10]$, 求其单位脉冲响应。

解 输入以下 MATLAB 命令:

```
% L0301.m
t = [0: 0.1: 10];
num = [1];
den = [1, 1, 1];
[y, x, t] = impulse(num, den, t)
plot(t, y);
grid; % 绘制网格
xlabel('t');
ylabel('y');
title('单位脉冲响应')
```

其响应结果如图 3-35 所示。

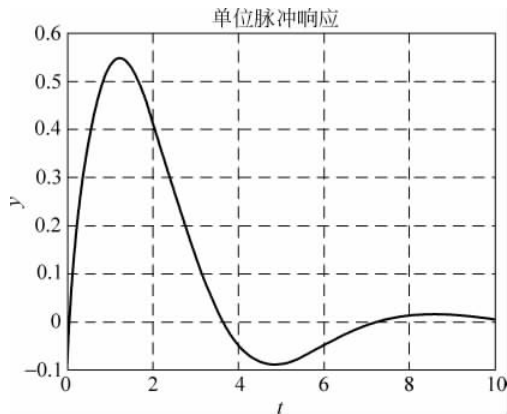


图 3-35 单位脉冲响应

2. 单位阶跃响应

当输入为单位阶跃信号时,系统的输出为单位阶跃响应,在 MATLAB 中可用 `step()` 函数实现,其调用格式为

```
[y, x, t] = step(num, den, t)
```

或

```
step(num, den)
```

例 3-12 求系统传递函数为 $W(s) = \frac{1}{s^2 + 0.5s + 1}$ 的单位阶跃响应。

解 输入以下 MATLAB 命令:

```
% L0302.m  
num = [1];  
den = [1, 0.5, 1];  
t = [0: 0.1: 10];  
[y, x, t] = step(num, den, t);  
plot(t, y);  
grid; % 绘制网格  
xlabel('t');  
ylabel('y');  
title('单位阶跃响应')
```

其响应结果如图 3-36 所示。

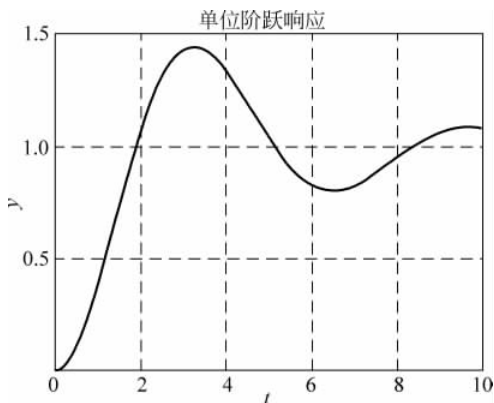


图 3-36 单位阶跃响应

3. 斜坡响应

MATLAB 中没有斜坡响应命令,因此,需要利用阶跃响应命令来求斜坡响应。因为线性系统中的单位斜坡响应可用其单位阶跃响应的积分来表示,所以当

求传递函数为 $W(s)$ 的斜坡响应时,可先用 s 除以 $W(s)$,然后利用阶跃响应命令即可求得斜坡响应。

例 3-13 已知闭环系统传递函数 $\frac{C(s)}{R(s)}=W(s)=\frac{1}{s^2+0.3s+1}$,求其单位斜坡响应。

解 对单位斜坡输入 $r(t)=t, R(s)=\frac{1}{s^2}$,有

$$C(s) = W(s)R(s) = \frac{W(s)}{s} sR(s) = \frac{1}{s(s^2+0.3s+1)} \cdot \frac{s}{s^2} = \frac{1}{s(s^2+0.3s+1)} \cdot \frac{1}{s}$$

输入以下 MATLAB 命令:

```
% L0303.m
num = [1];
den = [1,0.3,1,0];
t = [0:0.1:10];
c = step(num,den,t);
plot(t,c);
grid; %绘制网格
xlabel('t');
ylabel('y');
title('单位斜坡响应')
```

其响应结果如图 3-37 所示。

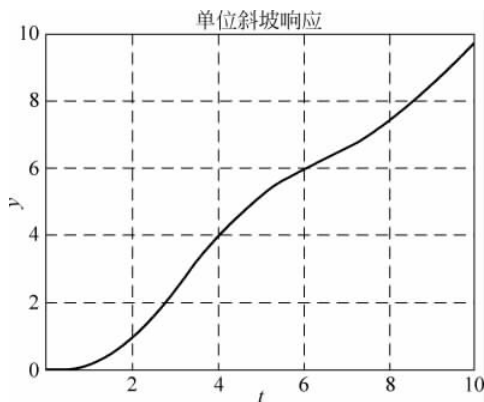


图 3-37 单位斜坡响应

4. 任意函数作用下系统的响应

在许多情况下,需要求取在任意已知函数作用下系统的响应,在 MATLAB 中可用 `lsim()` 函数实现,其调用格式

```
[y,x] = lsim(num,den,u,t)
```

式中, y 为系统输出响应; x 为系统状态响应; u 为系统输入信号; t 为仿真时间。

注意,调用仿真函数 `lsim()` 时,应给出与时间 t 向量相对应的输入向量。

例 3-14 反馈系统如图 3-38(a) 所示, 系统输入信号为如图 3-38(b) 所示的三角波, 求取系统输出响应。

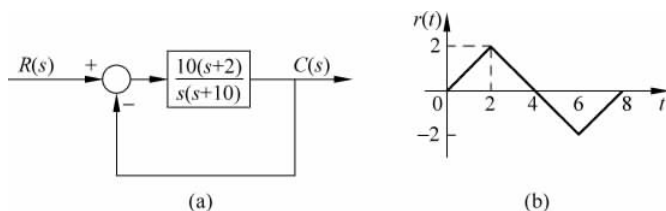


图 3-38 例 3-14 的反馈系统

解 输入以下 MATLAB 命令

```
% L0304.m
numg = [10,20];
deng = [1,10,0];
[num,den] = cloop(numg,deng,-1); % 构成负反馈闭环系统
% 产生三角波函数
v1 = [0:0.1:2];
v2 = [1.9:-0.1:-2];
v3 = [-1.9:0.1:0];
t = [0:0.1:8];
u = [v1,v2,v3];
[y,x] = lsim(num,den,u,t);
plot(t,y,t,u);
grid; % 绘制网格
xlabel('t');
ylabel('y');
title('系统在三角波函数作用下的响应')
```

其响应结果如图 3-39 所示。

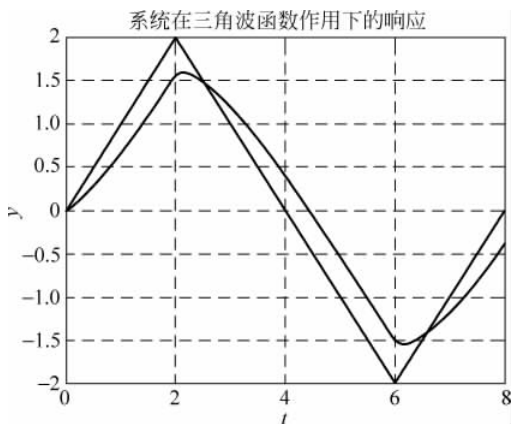


图 3-39 系统响应曲线

3.7.2 系统的稳定性分析

在 MATLAB 中,可以利用 tf2zp()函数将系统的传递函数形式变换为零点、极点增益形式,利用 zp2tf()函数将系统零点、极点形式变换为传递函数形式,还可利用 pzmap()函数绘制连续系统的零点、极点图,MATLAB 中的调用格式分别为

```
[z,p,k] = tf2zp(num,den)
[num,den] = zp2tf(z,p,k)
pzmap(num,den)
```

式中, z 为系统的零点; p 为系统的极点; k 为增益。

例 3-15 考虑连续系统 $W(s) = \frac{3s^4 + 2s^3 + 5s^2 + 4s + 6}{s^5 + 3s^4 + 4s^3 + 2s^2 + 7s + 2}$,求系统的零点、极点及增益,并绘制其零点、极点图。

解 输入以下 MATLAB 命令

```
% L0305.m
num = [3 2 5 4 6];
den = [1 3 4 2 7 2];
[Z,P,K] = tf2zp(num,den);
pzmap(num,den); % 绘制连续系统的零点、极点图
title('系统的零极点图')
```

运行结果为

```
Z =
    0.4019 + 1.1965i
    0.4019 - 1.1965i
   -0.7352 + 0.8455i
   -0.7352 - 0.8455i

P =
   -1.7680 + 1.2673i
   -1.7680 - 1.2673i
    0.4176 + 1.1130i
    0.4176 - 1.1130i
   -0.2991

K =
    3
```

系统的零点、极点分布如图 3-40 所示。

还可以利用 root(den)函数求分母多项式的根来确定系统的极点,从而确定系统的稳定性。在自动控制系统稳定性分析中,den 就是系统闭环特征多项式降

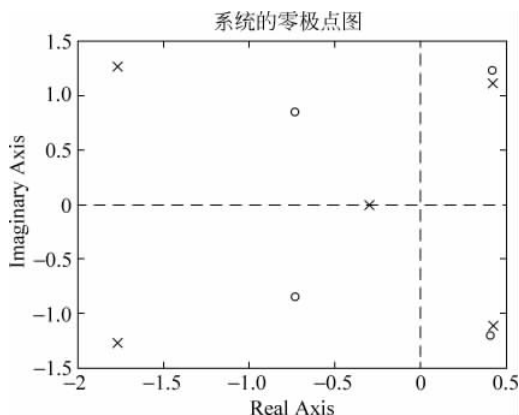


图 3-40 运行结果

幂排列的系数向量。若能够求得 den, 则其根就可以求出, 并进而判断所有根的实部是否小于零。若闭环系统特征方程的所有根的实部都小于零, 系统闭环是稳定的, 只要有一个根的实部不小于零, 则系统闭环不稳定。

上例中, 判断其稳定性, MATLAB 的程序如下

```
roots(den);
```

运行结果为

```
ans =  
-1.7680 + 1.2673i  
-1.7680 - 1.2673i  
0.4176 + 1.1130i  
0.4176 - 1.1130i  
-0.2991
```

计算结果表明, 特征根中有 2 个根的实部为正, 所以闭环系统是不稳定的。

例 3-16 已知系统开环传递函数为 $W(s) = \frac{100(s+2)}{s(s+1)(s+20)}$, 试判断闭环系统的稳定性。

解 输入以下 MATLAB 命令

```
% L0306.m  
k = 100;  
z = [-2];  
p = [0, -1, -20];  
[n1, d1] = zp2tf(z, p, k);  
P = n1 + d1;  
Roots(P)
```

其运行结果为

```
ans =
-12.8990
-5.0000
-3.1010
```

计算数据表明所有特征根的实部均为负值,所以闭环系统是稳定的。

3.7.3 MATLAB 在求解系统给定稳态误差中的应用

对于图 3-41 所示的线性系统,应用拉氏变换终值定理,可以很容易地得出系统给定稳态误差

$$\begin{aligned} e_{ss} &= \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} [R(s) - C(s)] = \lim_{s \rightarrow 0} [R(s) - W_B(s)R(s)] \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} R(s)[1 - W_B(s)] \end{aligned}$$

式中, $W_B(s) = \frac{W(s)}{HW(s)}$ 。

在 MATLAB 中,利用函数 `dcgain()` 可求取系统给定稳态误差。该函数的调用格式为

```
dcg = dcgain(num,den)
```

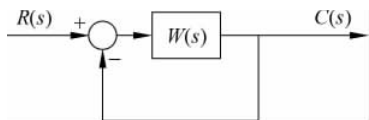


图 3-41 系统框图

式中, `dcg` 为所求系统的给定稳态误差。

例 3-17 试计算如图 3-41 所示的系统分别在典型输入信号 $r(t) = 1(t), t, \frac{1}{2}t^2$ 下的给定稳态误差,已知 $W(s) = \frac{7(s+1)}{s(s+3)(s^2+4s+5)}$ 。

解 输入以下 MATLAB 命令,求系统的闭环传递函数。

```
% 求系统的闭环传递函数
num1 = [7 7];
den1 = [conv(conv([1 0],[1 3]),[1 4 5])];
W = tf(num1,den1);
WW = feedback(W,1,-1)
```

运行结果为

```
Transfer function:
```

```
7s + 7
```

```
-----
s^4 + 7s^3 + 17s^2 + 22s + 7
```

输入以下 MATLAB 命令,计算 $s[1 - W_B(s)]$ 。

```
% 计算  $s[1 - W_B(s)]$ 
WWW = tf(WW.den{1} - WW.num{1},WW.den{1});
```

```
num2 = [1 0];
den2 = 1;
W1 = tf(num2,den2);
WWWW = WWW * W1
```

运行结果为

Transfer function:

$$\frac{s^5 + 7s^4 + 17s^3 + 15s^2}{s^4 + 7s^3 + 17s^2 + 22s + 7}$$

说明: WW.num{1}, WW.den{1} 分别表示 WW 对象的分子、分母部分。

(1) 计算 $r(t)=1(t)$ 时的给定稳态误差 e_{ss} 。

此时, $R(s) = \frac{1}{s}$, 输入以下 MATLAB 命令, 计算给定稳态误差终值。

% 计算 $r(t)=1(t)$ 时的给定稳态误差 e_{ss}

```
num3 = 1;
den3 = [1 0];
R1 = tf(num3,den3);
dcg = dcgain(WWWW * R1)
```

运行结果为

```
dcg = 0
```

即给定稳态误差为 0。

(2) 计算 $r(t)=t$ 时的给定稳态误差 e_{ss} 。

此时, $R(s) = \frac{1}{s^2}$, 输入以下 MATLAB 命令, 计算给定稳态误差。

% 计算 $r(t)=t$ 时的给定稳态误差 e_{ss}

```
num4 = 1;
den4 = [1 0 0];
R2 = tf(num4,den4);
dcg = dcgain(WWWW * R2)
```

运行结果为

```
dcg = 2.1429
```

即给定稳态误差为 2.1429。

(3) 计算 $r(t) = \frac{1}{2}t^2$ 时的给定稳态误差 e_{sr} 。

此时, $R(s) = \frac{1}{s^3}$, 输入以下 MATLAB 命令, 计算给定稳态误差。

```
% 计算  $r(t) = t^2$  时的给定稳态误差终值  $e_{ss}$   
num5 = 1;  
den5 = [1 0 0 0];  
R3 = tf(num5, den5);  
dcg = dcgain(WWW * R3)
```

运行结果为

```
dcg = Inf
```

即给定稳态误差为 ∞ 。

小结

(1) 时域分析是通过直接求解系统在典型输入信号作用下的时域响应来分析系统的性能的。通常是以系统阶跃响应的超调量、调整时间和稳态误差等性能指标来评价系统性能的优劣。

(2) 二阶系统在欠阻尼时的响应虽有振荡,但只要阻尼比 ξ 取值适当(如 $\xi = 0.707$ 左右),则系统既有响应的快速性,又有过渡过程的平稳性,因而在控制工程中常把二阶系统设计为欠阻尼。

(3) 如果高阶系统中含有一对闭环主导极点,则该系统的动态响应就可以近似地用这对主导极点所描述的二阶系统来表征。

(4) 稳定是系统能正常工作的首要条件。线性定常系统的稳定性是系统的一种固有特性,它仅取决于系统的结构和参数,与外施信号的形式和大小无关。不用求根而能直接判别系统稳定性的方法,称为代数稳定判据。代数稳定判据只回答特征方程式的根在 s 平面上的分布情况,而不能确定根的具体数值。

(5) 稳态误差是系统控制精度的度量,也是系统的一个重要性能指标。系统的稳态误差既与其结构和参数有关,也与控制信号的形式、大小和作用点有关。

(6) 系统的稳态精度与动态性能在对系统的类型和开环增益的要求上是相矛盾的。解决这一矛盾的方法,除了在系统中设置校正装置外,还可用前馈补偿的方法来提高系统的稳态精度。

思考题与习题

- 3-1 控制系统的时域指标如何定义?
- 3-2 系统的动态过程与系统的极点有什么对应关系?
- 3-3 系统的时间常数对其动态过程有何影响?
- 3-4 提高系统的阻尼比对系统有何影响?

3-5 什么是主导极点? 主导极点在系统分析中起什么作用?

3-6 系统稳定的条件是什么?

3-7 系统的稳定性与什么有关?

3-8 系统的稳态误差与哪些因素有关?

3-9 如何减小系统的稳态误差?

3-10 一个单位反馈控制系统的开环传递函数为 $W_K(s) = \frac{1}{s(s+1)}$ 。

试求: (1) 系统的单位阶跃响应及性能指标 $\sigma\%$, t_r , t_s 和 μ ;

(2) 输入量 $x_r(t) = t$ 时, 系统的输出响应;

(3) 输入量 $x_r(t)$ 为单位脉冲函数时, 系统的输出响应。

3-11 一个单位反馈控制系统的开环传递

函数为 $W_K(s) = \frac{K_K}{s(\tau s + 1)}$, 其单位阶跃响应曲

线如图 P3-1 所示, 图中的 $x_m = 1.25$, $t_m = 1.5$ s。

试确定系统参数 K_K 及 τ 值。

3-12 一个单位反馈控制系统的开环传递

函数为 $W_K(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s+2\xi\omega_n)}$ 。已知系统的

$x_r(t) = 1(t)$, 误差时间函数为 $e(t) = 1.4e^{-1.07t} -$

$0.4e^{-3.73t}$, 求系统的阻尼比 ξ 、自然振荡角频率 ω_n 、系统的开环传递函数和闭环传递函数、系统的稳态误差。

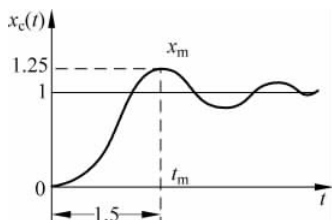


图 P3-1 题 3-11 系统的单位阶跃响应曲线

3-13 已知单位反馈控制系统的开环传递函数为 $W_K(s) = \frac{K_K}{s(\tau s + 1)}$, 试选择

K_K 及 τ 值以满足下列指标:

(1) 当 $x_r(t) = t$ 时, 系统的稳态误差 $e_v(\infty) \leq 0.02$;

(2) 当 $x_r(t) = 1(t)$ 时, 系统的 $\sigma\% \leq 30\%$, $t_s(5\%) \leq 0.3$ s。

3-14 已知单位反馈控制系统的闭环传递函数为 $W_B(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$, 试

画出以 ω_n 为常数、 ξ 为变数时, 系统特征方程式的根在 s 平面上的分布轨迹。

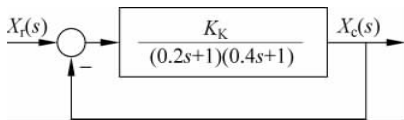


图 P3-2 题 3-15 的系统结构图

3-15 一个系统的动态结构图如图 P3-2 所示, 求在不同的 K_K 值下 (例如, $K_K = 1$, $K_K = 3$, $K_K = 7$) 系统的闭环极点、单位阶跃响应、动态性能指标及稳态误差。

3-16 一个闭环反馈控制系统的动态

结构图如图 P3-3 所示。

(1) 试求当 $\sigma\% \leq 20\%$, $t_s(5\%) = 1.8$ s 时, 系统的参数 K_1 及 τ 值。

(2) 试求上述系统的位置稳态误差系数 K_p 、速度稳态误差系数 K_v 、加速度稳

态误差系数 K_a 及其相应的稳态误差。

3-17 一个系统的动态结构图如图 P3-4 所示。

试求: (1) $\tau_1=0, \tau_2=0.1$ 时, 系统的 $\sigma\%, t_s(5\%)$;

(2) $\tau_1=0.1, \tau_2=0$ 时, 系统的 $\sigma\%, t_s(5\%)$;

(3) 比较上述两种校正情况下的动态性能指标及稳态性能。

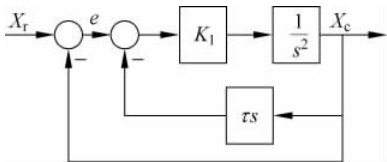


图 P3-3 题 3-16 的系统结构图

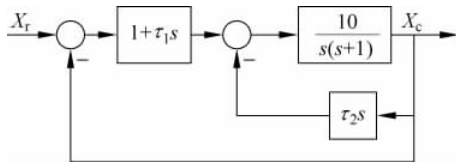


图 P3-4 题 3-17 的系统结构图

3-18 如图 P3-5 所示系统, 图中的 $W_g(s)$ 为被控对象的传递函数, $W_c(s)$ 为调节器的传递函数。如果被控对象为 $W_g(s) =$

$\frac{K_g}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}$, $T_1 > T_2$, 系统要求的指标为:

位置稳态误差为零, 调节时间最短, 超调量 $\sigma\% \leq$

4.3%, 问下述三种调节器中哪一种能满足上述指

标? 其参数应具备什么条件? 三种调节器分别为

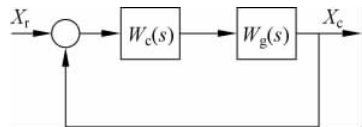


图 P3-5 题 3-18 的系统结构图

(a) $W_c(s) = K_p$; (b) $W_c(s) = K_p \frac{(\tau s + 1)}{s}$; (c) $W_c(s) = K_p \frac{(\tau_1 s + 1)}{(\tau_2 s + 1)}$

3-19 有闭环系统的特征方程式如下, 试用劳斯判据判断系统的稳定性, 并说明特征根在复平面上的分布。

(1) $s^3 + 20s^2 + 4s + 50 = 0$;

(2) $s^3 + 20s^2 + 4s + 100 = 0$;

(3) $s^4 + 2s^3 + 6s^2 + 8s + 8 = 0$;

(4) $2s^5 + s^4 - 15s^3 + 25s^2 + 2s - 7 = 0$;

(5) $s^6 + 3s^5 + 9s^4 + 18s^3 + 22s^2 + 12s + 12 = 0$ 。

3-20 单位反馈系统的开环传递函数为

$$W_K(s) = \frac{K_K(0.5s + 1)}{s(s + 1)(0.5s^2 + s + 1)}$$

试确定使系统稳定的 K_K 值范围。

3-21 已知系统的结构图如图 P3-6 所示, 试用劳斯判据确定使系统稳定的 K_f 值范围。

3-22 如果采用图 P3-7 所示的系统, 问 τ 取何值时, 系统方能稳定?

3-23 设单位反馈系统的开环传递函数为 $W_K(s) = \frac{K}{s(1 + 0.33s)(1 + 0.107s)}$, 要

求闭环特征根的实部均小于 -1, 求 K 值应取的范围。

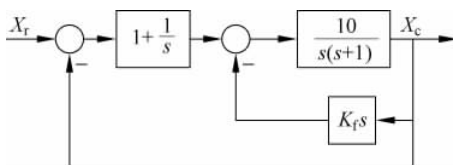


图 P3-6 题 3-21 的系统结构图

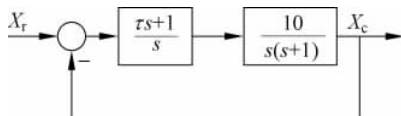


图 P3-7 题 3-22 的系统结构图

3-24 设有一个单位反馈系统,如果其开环传递函数为

$$(1) W_K(s) = \frac{10}{s(s+4)(5s+1)};$$

$$(2) W_K(s) = \frac{10(s+0.1)}{s^2(s+4)(5s+1)}.$$

试求输入量为 $x_r(t) = t$ 和 $x_r(t) = 2 + 4t + 5t^2$ 时系统的稳态误差。

3-25 有一个单位反馈系统,系统的开环传递函数为 $W_K(s) = \frac{K_K}{s}$ 。求当输入量为 $x_r(t) = \frac{1}{2}t^2$ 和 $x_r(t) = \sin \omega t$ 时,控制系统的稳态误差。

3-26 有一个单位反馈系统,其开环传递函数为 $W_K(s) = \frac{3s+10}{s(5s-1)}$,求系统的动态误差系数;并求当输入量 $x_r(t) = 1 + t + \frac{1}{2}t^2$ 时,稳态误差的时间函数 $e(t)$ 。

3-27 一个系统的结构图如图 P3-8 所示,并设 $W_1(s) = \frac{K_1(1+T_1s)}{s}$, $W_2(s) = \frac{K_2}{s(1+T_2s)}$ 。当扰动量分别以 $\Delta X_d(s) = \frac{1}{s}$ 、 $\frac{1}{s^2}$ 作用于系统时,求系统的扰动稳态误差。

3-28 一个复合控制系统的结构图如图 P3-9 所示,其中 $K_1 = 2K_3 = 1$, $T_2 = 0.25s$, $K_2 = 2$ 。

试求: (1) 输入量分别为 $x_r(t) = 1$, $x_r(t) = t$, $x_r(t) = \frac{1}{2}t^2$ 时系统的稳态误差;

(2) 系统的单位阶跃响应,及其 $\sigma\%$, t_s 。

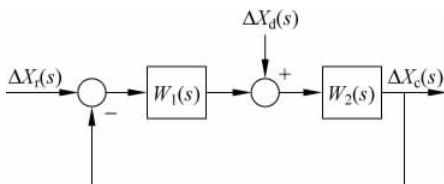


图 P3-8 题 3-27 的系统结构图

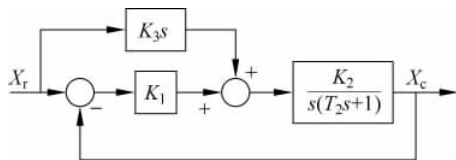


图 P3-9 题 3-28 的系统结构图

3-29 一个复合控制系统如图 P3-10 所示, 图中 $W_c(s) = as^2 + bs$, $W_g(s) = \frac{10}{s(1+0.1s)(1+0.2s)}$ 。如果系统由 I 型系统提高为 III 型系统, 求 a 值及 b 值。

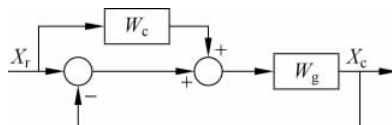


图 P3-10 题 3-29 的系统结构图