第 1 章 质点运动学

基本要求

1. 掌握描述质点运动的基本物理量——位置矢量、位移、速度和加速度等概念及其主要性质(矢量性、瞬时性和相对性)。

2. 理解运动方程和轨道方程的意义,能应用直线运动方程和运动叠加原理求解简单的质点运动学问题。

(1) 已知质点运动方程,求质点的位移、速度和加速度等物理量;

(2) 已知速度或加速度及初始条件,求质点的运动方程;

(3) 熟练掌握匀变速直线运动、抛体运动的规律。

3. 掌握圆周运动中角速度、角加速度、切向加速度和法向加速度等概念。

基本概念和基本规律

1. 质点

在所研究的问题中,物体的大小和形状可忽略不计时,我们把它看作只具有质量而无大小、形状的理想物体,称为质点。质点是物理学中物体的理想模型。

2. 位置矢量(或矢径)$\boldsymbol{r}$

在直角坐标系中点 P 的位置矢量(如图 1.2.1 所示)表示为

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$$

位置矢量的大小为

$$r = |\boldsymbol{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

位置矢量的方向用方向余弦表示为

$$\cos\alpha = \frac{x}{r}, \quad \cos\beta = \frac{y}{r}, \quad \cos\gamma = \frac{z}{r}$$

在二维运动中(如图 1.2.2 所示)

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j}$$

$$r = |\boldsymbol{r}| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\theta = \arctan\frac{y}{x}$$

式中 θ 是 $\boldsymbol{r}$ 与 x 轴正向间夹角。

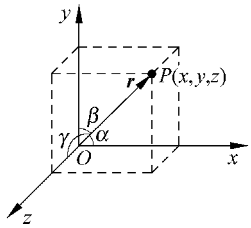

图 1.2.1

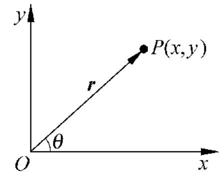

图 1.2.2

3. 位移

位移是描述质点在 $t\sim t+\Delta t$ 时间内位置矢量变化的物理量(如图 1.2.3 所示)。质点在 Δt 内由 P_1 到 P_2 的位移等于同一时间内位置矢量的增量 $\Delta\boldsymbol{r}$:

$$\Delta\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1=(x_2-x_1)\boldsymbol{i}+(y_2-y_1)\boldsymbol{j}+(z_2-z_1)\boldsymbol{k}$$

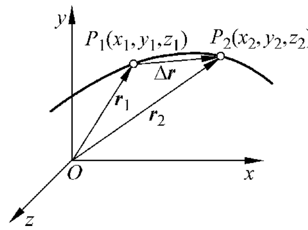

图 1.2.3

位移的大小

$$|\Delta\boldsymbol{r}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

位移的方向:

$$\cos\alpha=\frac{\Delta x}{|\Delta\boldsymbol{r}|},\quad \cos\beta=\frac{\Delta y}{|\Delta\boldsymbol{r}|},\quad \cos\gamma=\frac{\Delta z}{|\Delta\boldsymbol{r}|}$$

注意:①位移 $\Delta\boldsymbol{r}$ 与位置矢量 $\boldsymbol{r}$ 的物理意义不同,$\boldsymbol{r}$ 与时刻 t 对应,$\Delta\boldsymbol{r}$ 与 Δt 对应;② $|\Delta\boldsymbol{r}|\neq\Delta r=r_2-r_1$,$\Delta r=\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}-\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}$;③位移与参照系的选择有关,具有相对性;④直线运动中的位移 $\Delta x=x_2-x_1$,Δx 的正负表示位移的方向沿 x 轴的正向或负向。

4. 速度

速度是描述质点的位置随时间变化快慢和方向的物理量。

(1) 平均速度

$$\bar{\boldsymbol{v}}=\frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t}=\frac{\Delta x}{\Delta t}\boldsymbol{i}+\frac{\Delta y}{\Delta t}\boldsymbol{j}+\frac{\Delta z}{\Delta t}\boldsymbol{k}=\bar{v}_x\boldsymbol{i}+\bar{v}_y\boldsymbol{j}+\bar{v}_z\boldsymbol{k}$$

$\bar{\boldsymbol{v}}$称为质点在 $t\sim t+\Delta t$ 这段时间内的平均速度。

(2) 瞬时速度

$$\boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i}+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j}+\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k}=v_x\boldsymbol{i}+v_y\boldsymbol{j}+v_z\boldsymbol{k}$$

$\boldsymbol{v}$ 称为质点在时刻 t 的瞬时速度,简称速度。

注意:①$v=|\boldsymbol{v}|=\sqrt{v_x^2+v_y^2+v_z^2}=\sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right)^2}\neq\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$;②直线运动中 $v=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$,$v$ 的正负表示速度的方向沿 x 轴正向、负向。

(3) 平均速率

$$\bar{v}=\frac{\Delta s}{\Delta t}$$

式中 Δs 是质点在 $t\sim t+\Delta t$ 时间内走过的路程,$\bar{v}$称质点在 $t\sim t+\Delta t$ 时间内的平均速率。

（4）瞬时速率

$$v=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$$

v 称为质点在 t 时刻的瞬时速率，简称速率。同一瞬间的瞬时速率和瞬时速度的大小是相同的。

5. 加速度

加速度是描述质点运动速度变化的物理量。

（1）平均加速度

$$\bar{\boldsymbol{a}}=\frac{\Delta \boldsymbol{v}}{\Delta t}=\frac{\Delta v_x}{\Delta t}\boldsymbol{i}+\frac{\Delta v_y}{\Delta t}\boldsymbol{j}+\frac{\Delta v_z}{\Delta t}\boldsymbol{k}$$

$\bar{\boldsymbol{a}}$ 称为质点在 $t\sim t+\Delta t$ 这段时间内的平均加速度。

（2）瞬时加速度

$$\boldsymbol{a}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i}+\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j}+\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k}=\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{i}+\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{j}+\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{k}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}$$

$\boldsymbol{a}$ 称为质点在 t 时刻的瞬时加速度，简称加速度。

（3）质点作平面曲线运动时的加速度，亦可用自然坐标系中的法向加速度和切向加速度表示：

法向加速度 $a_{\mathrm{n}}=\dfrac{v^2}{\rho}$，方向指向该处的曲率中心；

切向加速度 $a_{\tau}=\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$，正、负表示切向加速度的方向与该处速度方向“同”、“反”。

总加速度

$$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}_{\mathrm{n}}+\boldsymbol{a}_{\tau}$$

式中，v 为质点所在处的速率；ρ 为质点所在处曲率半径。

注意：①$\boldsymbol{a}$ 的方向是速度变化的方向，即 $\Delta\boldsymbol{v}$ 的极限方向，一般不代表质点的运动方向。②区分 $\boldsymbol{v}$ 和 $\boldsymbol{a}$ 概念：$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{a}$ 不一定为零；$\boldsymbol{v}$ 大，$\boldsymbol{a}$ 不一定大。③曲线运动中 $a_{\mathrm{n}}\neq 0$；直线运动中 $a_{\mathrm{n}}=0$，$a_{\tau}=\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$；直线运动 a 的正、负表示加速度的方向沿选定轴的正向、负向。

6. 圆周运动的角量描述

设质点作圆周运动，t 时刻质点在 A 点，$t+\Delta t$ 时刻质点运动到 B 点，如图 1.2.4 所示。则质点的运动亦可用下述角量描述。

θ 为半径 OA 与 x 轴间夹角，θ_A 是质点在 A 点的角位置，则

$$\Delta\theta=\theta_B-\theta_A$$

$\Delta\theta$ 称为质点在 $t\sim t+\Delta t$ 内对 O 点的角位移。

$$\omega=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\theta}{\Delta t}=\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$$

ω 称为质点在 t 时刻对 O 点的瞬时角速度(简称角速度)。

$$\alpha=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\omega}{\Delta t}=\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}$$

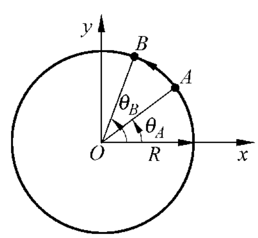

图　1.2.4

α 称为质点在 t 时刻对 O 点的瞬时角加速度(简称角加速度)。

角量与线量间的关系：

$$v = R\omega$$

$$a_n = \frac{v^2}{R}, \quad a_\tau = \frac{dv}{dt} = R\alpha$$

7. 运动方程 $\boldsymbol{r}(t)$

质点的位置矢量 $\boldsymbol{r}(t)$（或角位置 θ）随时间的变化规律称为质点的运动方程，可表示为

$$\boldsymbol{r}(t) = x(t)\boldsymbol{i} + y(t)\boldsymbol{j} + z(t)\boldsymbol{k}$$

或

$$\theta = \theta(t)$$

质点的运动方程在直角坐标系中亦可用分量式表示为

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$$

运动方程反映了质点的空间位置随时间的变化过程。从运动方程的分量式中消去 t，得到 x、y、z 间的关系式，称为质点的轨道方程。

8. 运动叠加原理

一个运动可看成几个各自独立进行的运动叠加而成，这称为运动叠加原理或运动独立性原理。例如，抛体运动可看成水平方向的匀速直线运动和竖直方向的匀变速直线运动的叠加。

9. 几种简单的运动规律

（1）直线运动的规律（假设运动发生在 x 轴上）

匀速直线运动方程：

$$x = x_0 + vt$$

匀变速直线运动方程：

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

变速直线运动方程：

$$x = x_0 + \int_0^t v\,dt$$

$$v = v_0 + \int_0^t a\,dt$$

式中 x_0、v_0 分别是 $t=0$ 时质点的初始位置、初始速度。

（2）圆周运动的角量描述规律

匀速圆周运动：

$$\theta = \theta_0 + \omega t$$

$$a_n = R\omega^2, \quad a_\tau = 0$$

匀变速圆周运动：

$$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$$

$$a_n = R\omega^2, \quad a_\tau = \frac{dv}{dt} = R\alpha$$

式中 θ_0、ω_0 分别是 $t=0$ 时质点的角位置、初角速度。

(3) 抛体运动规律

抛体运动(如图 1.2.5 所示)方程为

$$x = v_0 \cos\theta_0 t$$

$$y = h + v_0 \sin\theta_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$

讨论：$\theta_0=0$ 时为平抛运动；$\theta_0=\frac{\pi}{2}$时为竖直上抛运动；$\theta_0=-\frac{\pi}{2}$且 $v_0=0$,则为自由落体运动。

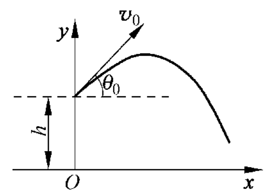

图　1.2.5

10. 运动的相对性

由于位置矢量、速度和加速度的大小和方向都与参照系的选择有关,具有相对性,因此同一质点的运动对不同参照系的描述是不同的。

设坐标系 $Ox'y'z'$ 相对于坐标系 $Oxyz$ 的平动速度为 $\boldsymbol{u}$,则

位移

$$\Delta \boldsymbol{r} = \Delta \boldsymbol{r}' + \boldsymbol{u} \Delta t$$

速度

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}' + \boldsymbol{u}$$

或表示为

$$\boldsymbol{v}_{A对C} = \boldsymbol{v}_{A对B} + \boldsymbol{v}_{B对C}$$

上式称速度变换原理或速度合成定理。

加速度

$$\boldsymbol{a}_{A对C} = \boldsymbol{a}_{A对B} + \boldsymbol{a}_{B对C}$$

上式称加速度交换原理或加速度合成定理。

解题指导

本章的重点是深刻理解位置矢量、位移、速度和加速度等概念,注意其矢量性与相对性。本章习题一般分两大类：第一类是已知质点的运动方程,利用微分法求各物理量(速度、加速度等)；第二类是已知速度或加速度及初始条件,利用积分法求运动方程。第二类问题和学会用速度合成定理处理运动的矢量性和相对性问题是本章的难点。

在直线运动中,位移、速度和加速度的方向均在一直线上,建立坐标后,这些矢量可作为标量来处理。位移 Δx、速度 v 和加速度 a 的正负,表示其方向与选定坐标轴的正向一致或相反。

应特别注意的是,中学阶段定量研究的是匀变速直线运动,加速度是常量。但大学物理中讨论的是具有普遍意义的运动,加速度不一定是常量,必须用高等数学中的微积分解题。由中学的“常量”到大学的“变量”,这是学习的一个飞跃。

质点运动学问题的一般解题程序为：

(1) 审清题意,确定研究对象,分析研究对象的运动情况。

(2) 选择适当的参照系,建立坐标系。

(3) 根据所求物理量的定义,列式并求解。或根据运动的特点和题设条件,列方程求解。

（4）必要时进行分析讨论。

【例题 1.1】 有一物体作直线运动，其运动方程为 $x=6t^2-2t^3$，式中 x 的单位为 m，t 的单位为 s。求：

（1）速度和加速度的表达式；

（2）$t=0,1,2,3,4$s 时物体的位置 x、速度 v 和加速度 a；

（3）第 2s 内的平均速度；

（4）最初 4s 内物体的位移、路程、平均速度和平均速率；

（5）讨论物体的运动情况。

【解】 （1）物体的运动方程

$$x = 6t^2 - 2t^3$$

速度

$$v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 12t - 6t^2(\mathrm{m/s})$$

加速度

$$a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 12 - 12t(\mathrm{m/s^2})$$

（2）将 t 的各值代入上述三式，可得各时刻的 x、v 和 a，见表 1.3.1：

表 1.3.1

t/s	0	1	2	3	4
x/m	0	4	8	0	−32
v/(m/s)	0	6	0	−18	−48
a/(m/s^2)	12	0	−12	−24	−36

（3）第 2s 内平均速度

$$\bar{v}_{1-2} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{8-4}{2-1} = 4(\mathrm{m/s})$$

但这不能用下式来计算：

$$\bar{v}_{1-2} = \frac{v_1 + v_2}{2}$$

为什么不行？请读者自己思考。

（4）位移

$$\Delta x = x_4 - x_0 = -32 - 0 = -32(\mathrm{m})$$

式中负号表示位移的方向沿 x 轴负向。

路程 Δs 是否等于位移 Δx？通常 $\Delta s \neq \Delta x$，只有在直线运动中速度不改变方向的那段时间内，路程才与位移的大小相等。今由 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=12t-6t^2=0$ 得 $t=2$s 时开始速度改变方向，所以路程为

$$\Delta s = \Delta s_1 + \Delta s_2 = |x_2 - x_0| + |x_4 - x_2| = |8-0| + |-32-8| = 48(\mathrm{m})$$

平均速度为

$$\bar{v}_{0-4} = \frac{x_4 - x_0}{t_4 - t_0} = \frac{-32}{4} = -8(\mathrm{m/s})$$

式中负号表示平均速度的方向沿 x 轴负向。

平均速率为

$$\bar{v}_{0-4}=\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{48}{4}=12(\mathrm{m/s})$$

（5）由 $v=12t-6t^2$，可见 $t<2\mathrm{s}$，$v>0$；$t=2\mathrm{s}$，$v=0$；$t>2\mathrm{s}$，$v<0$。而由 $a=12-12t$ 得 $t<1\mathrm{s}$，$a>0$；$t=1\mathrm{s}$，$a=0$；$t>1\mathrm{s}$，$a<0$。因此：

t 在 0～1s 内，$v>0$，$a>0$，物体作加速运动；

t 在 1～2s 内，$v>0$，$a<0$，物体作减速运动；

$t>2\mathrm{s}$，$v<0$，$a<0$，物体沿 x 轴负向作加速运动。

应注意：$a>0$，并不表示物体作加速运动；$a<0$ 也不一定是减速运动。如何判断物体作加速还是减速运动呢？这应从 a 和 v 的方向是否一致来判断。a 与 v 同号（即同方向），则为加速运动；a 与 v 异号（即反向），则为减速运动。

【例题 1.2】　已知质点的运动方程为

$$x=3t,\quad y=t^2+t$$

式中 x、y 以 m 计，t 以 s 计。试求：

（1）$t=1\mathrm{s}$ 和 2s 时质点的位置矢量，并计算这 1s 内质点的位移和平均速度；

（2）2s 末质点的速度和加速度；

（3）质点的轨道方程。

【解】　（1）质点的位置矢量为

$$\boldsymbol{r}=3t\boldsymbol{i}+(t^2+t)\boldsymbol{j}$$

$t=1\mathrm{s}$ 时，$\boldsymbol{r}_1=3\boldsymbol{i}+(1+1)\boldsymbol{j}=3\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}(\mathrm{m})$

$t=2\mathrm{s}$ 时，$\boldsymbol{r}_2=6\boldsymbol{i}+6\boldsymbol{j}(\mathrm{m})$

根据位移的定义，这 1s 内的位移为

$$\Delta\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1=(6-3)\boldsymbol{i}+(6-2)\boldsymbol{j}=3\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}(\mathrm{m})$$

或用位移的大小和方向表示为

$$|\Delta\boldsymbol{r}|=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}=\sqrt{(6-3)^2+(6-2)^2}=5(\mathrm{m})$$

$$\theta=\arctan\frac{\Delta y}{\Delta x}=\arctan\frac{6-2}{6-3}=53^\circ$$

式中 θ 是位移与 x 轴正向间夹角。

根据平均速度的定义，这 1s 内的平均速度为

$$\bar{\boldsymbol{v}}=\frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t}=\frac{3\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}}{2-1}=3\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}(\mathrm{m/s})$$

（2）根据速度的定义，可得速度的两个分量 v_x 和 v_y：

$$v_x=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=3(\mathrm{m/s})$$

$$v_y=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=(2t+1)\big|_{t=2}=2\times2+1=5(\mathrm{m/s})$$

所以质点在 2s 末的速度为

$$\boldsymbol{v}_2=3\boldsymbol{i}+5\boldsymbol{j}(\mathrm{m/s})$$

或用 $\boldsymbol{v}_2$ 的大小和 $\boldsymbol{v}_2$ 与 x 轴正向间夹角来表示为

$$v_2=\sqrt{v_x^2+v_y^2}=\sqrt{3^2+5^2}=5.83(\mathrm{m/s})$$

$$\theta = \arctan \frac{v_y}{v_x} = \arctan \frac{5}{3} = 59°$$

式中 θ 是速度 $\boldsymbol{v}_2$ 与 x 轴正向间夹角。

根据加速度的定义，它的两个分量 a_x、a_y 分别为

$$a_x = \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} = 0$$

$$a_y = \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} = 2(\mathrm{m/s^2})$$

所以

$$\boldsymbol{a} = a_x \boldsymbol{i} + a_y \boldsymbol{j} = 2\boldsymbol{j}(\mathrm{m/s^2})$$

即加速度的大小为 $a=2\mathrm{m/s^2}$，方向沿 y 轴正向。由于加速度不随时间变化，所以本题中质点作匀加速运动。

(3) 从质点的运动方程中消去 t，即得轨道方程

$$y = \left(\frac{x}{3}\right)^2 + \frac{x}{3}$$

即

$$x^2 + 3x - 9y = 0$$

【例题 1.3】 一质点沿 x 轴运动。已知加速度 $a=4t$(SI)，$t=0$ 时，初速度 $v_0=0$，初始位置 $x_0=10\mathrm{m}$。试求质点的运动方程。

【解】 根据加速度的定义 $a=\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$，得

$$a\mathrm{d}t = 4t\mathrm{d}t = \mathrm{d}v$$

对上式两边积分，得速度 v 随时间 t 的变化规律

$$\int_0^t 4t\mathrm{d}t = \int_0^v \mathrm{d}v$$

积分后代入上下限得

$$v = 2t^2$$

又根据速度的定义 $v=\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$得

$$\mathrm{d}x = v\mathrm{d}t = 2t^2\mathrm{d}t$$

对上式两边积分后得质点的运动方程

$$\int_{x_0}^x \mathrm{d}x = \int_0^t 2t^2\mathrm{d}t$$

$$x = x_0 + \frac{2}{3}t^3$$

将 $x_0=10\mathrm{m}$ 代入上式得

$$x = 10 + \frac{2}{3}t^2(\mathrm{m})$$

本题属已知加速度及初始条件(即 $t=0$ 时的 x_0、v_0)求运动方程的问题，主要根据加速度和速度的定义，通过积分解决。需注意初始条件的运用和定积分的计算方法。

【例题 1.4】 一物体沿 x 轴运动，开始时物体位于坐标原点，初速度 $v_0=3\mathrm{m/s}$。若加

速度 $a=4x$(SI)，求：

（1）物体经过 $x=2\text{m}$ 时的速度；

（2）物体的运动方程。

【解】（1）本题中加速度随 x 而变化，所以物体作变速直线运动。根据加速度和速度的定义 $v=\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}, a=\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$，得

$$v\mathrm{d}t=\mathrm{d}x$$

$$a\,\mathrm{d}t=\mathrm{d}v=a\,\frac{\mathrm{d}x}{v}$$

所以

$$v\mathrm{d}v=a\mathrm{d}x=4x\mathrm{d}x$$

两边积分：

$$\int_{v_0}^{v} v\mathrm{d}v=\int_{x_0}^{x}4x\mathrm{d}x$$

$$v^2-v_0^2=4(x^2-x_0^2)$$

将 $x_0=0, v_0=3\text{m/s}$ 及 $x=2\text{m}$ 代入上式得

$$v=\sqrt{v_0^2+4x^2}=\sqrt{3^2+4\times 2^2}=5(\text{m/s})$$

（2）再根据速度的定义得

$$\mathrm{d}x=v\mathrm{d}t=\sqrt{v_0^2+4x^2}\,\mathrm{d}t$$

所以

$$\int_0^x\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{v_0^2+4x^2}}=\int_0^t\mathrm{d}t$$

由积分公式 $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2+x^2}}=\ln(x+\sqrt{a^2+x^2})$，将上式积分，则有

$$\frac{1}{2}\ln(2x+\sqrt{v_0^2+4x^2})\Big|_0^x=t$$

$$\frac{2x+\sqrt{v_0^2+4x^2}}{v_0}=\mathrm{e}^{2t}$$

化简后得运动方程

$$x=\frac{v_0}{4}(\mathrm{e}^{2t}-\mathrm{e}^{-2t})=\frac{3}{4}(\mathrm{e}^{2t}-\mathrm{e}^{-2t})(\text{m})$$

需注意：通常解题时应先用文字式运算，求得结果的文字表达式后，再代入数据进行计算，得出最后的结果。

【例题1.5】 如图1.3.1所示，在离水面高度 h 的岸边上，有人用绳子拉船靠岸。船位于离岸的水平距离 s 处。当人以 v_0 的匀速率收绳时，试求船的速度和加速度。

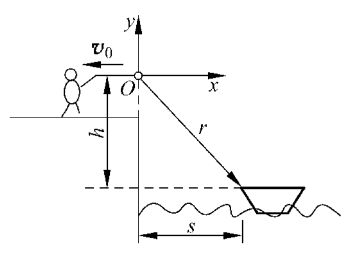

图 1.3.1

【解】 本题要求 $\boldsymbol{v}$ 和 $\boldsymbol{a}$，但船的运动方程未知，因此须先根据已知条件，建立坐标后写出船的运动方程，然后根据定义求 $\boldsymbol{v}$ 和 $\boldsymbol{a}$。

以人的收绳点为坐标原点，建立坐标系如图1.3.1所

示，则船的位置矢量即运动方程为

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} - h\boldsymbol{j}$$

式中 h 是常量，x 随时间而变。根据速度和加速度的定义得

$$\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i}$$

$$\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{i}$$

根据题意，人的收绳速率为

$$v_0 = -\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sqrt{x^2+h^2} = -\frac{x}{\sqrt{x^2+h^2}}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$$

这里因 $r=|\boldsymbol{r}|$ 随时间减小，所以 $\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}<0$，而 $v_0>0$。由上式得

$$v_x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -\frac{v_0\sqrt{x^2+h^2}}{x}$$

所以船的速度为

$$\boldsymbol{v} = -\frac{v_0\sqrt{s^2+h^2}}{s}\boldsymbol{i}$$

而

$$a_x = \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(-\frac{v_0\sqrt{x^2+h^2}}{x}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(-\frac{v_0\sqrt{x^2+h^2}}{x}\right)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -\frac{h^2 v_0^2}{x^3}$$

所以船的加速度为

$$\boldsymbol{a} = -\frac{h^2 v_0^2}{x^3}\boldsymbol{i}$$

当船在 $x=s$ 处的速度和加速度为

$$\boldsymbol{v} = -\frac{v_0\sqrt{s^2+h^2}}{s}\boldsymbol{i}$$

$$\boldsymbol{a} = -\frac{h^2 v_0^2}{s^3}\boldsymbol{i}$$

讨论：(1) $\boldsymbol{v}$ 和 $\boldsymbol{a}$ 的方向均沿 x 轴负向，所以船向岸边作加速运动。

(2) 由 $\boldsymbol{a}$ 的表达式，h 和 v_0 不变，s 随时间减小，$|\boldsymbol{a}|$ 随时间增大，所以船作变加速运动。

(3) 船的速率 $v>v_0$（人的收绳速率），这是严格按速度的定义求得的。显然 v 不等于 v_0 在水平方向的分量。

【例题 1.6】 一石子从倾角为 $\alpha=30°$ 的斜面上的 O 点抛出。已知初速度 $v_0=9.8\mathrm{m/s}$，$\boldsymbol{v}_0$ 与水平面的夹角 $\theta=30°$，如图 1.3.2 所示。若忽略空气阻力，试求：

(1) 石子落到斜面上的 B 点离 O 点的距离 l；

(2) 石子所到达的最大高度；

(3) $t=1.5\mathrm{s}$ 时石子的速度、切向加速度和法向加速度。

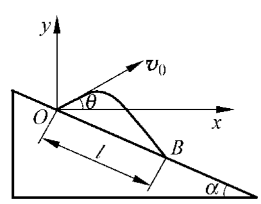

图 1.3.2

【解】 (1) 石子的运动可看作水平方向的匀速直线运动和竖直方向的加速度为 g 的匀变速直线运动的叠加。今以 O 点为原点，建立坐标如图，则石子的加速度分量为