

第 3 章 MATLAB 工程应用实例

MATLAB 在工程上的应用广泛，例如机械机构优化分析、机械控制、通信、数值计算等，MATLAB 因其强大的数据处理能力，逐渐成为工程应用领域主导辅助工具。本章主要应用 MATLAB 解决简单的工程问题，例如光反射定理、质点系转动惯量、人吸烟摄入有毒成分含量、冰雹下落模型的求解等，这类问题的优化求解对解决复杂的工程问题有着一定的参考价值，并能够提高结合 MATLAB 求解实际问题的能力。

学习目标：

- (1) 熟练掌握 MATLAB 编程表示方法；
- (2) 熟练运用 MATLAB 求解实际物理模型；
- (3) 熟练掌握使用 MATLAB 工具解决简单工程问题等。

3.1 光的反射定理论证

光的反射定理最早由费马提出，费马原理是：光总是沿用时最短的光程传播。例如光线的入射、反射过程可由图 3-1 直观地表示出来，2 中光线从 1 入射，发射到 2 点。试证明光的反射定律：入射角等于反射角。

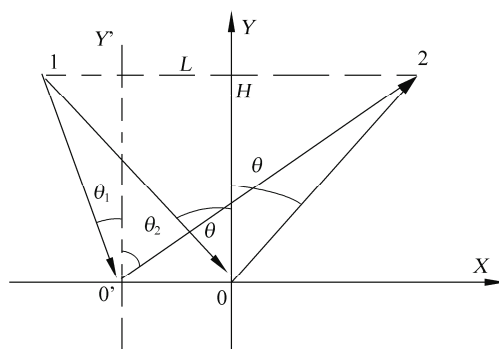


图 3-1 光线反射示意图

针对图 3-1 所示的光线反射路径图，假设 X 轴为实体表面，且为理想状态，光线传播过程中无阻碍，一束自然光线沿路径 L_{10} 照射到 X 轴，与法线 Y 轴的夹角为 θ_1 ；光线经实体表面 X 轴反射后，沿路径 L_{02} 发射，与法线 Y 轴的夹角为 θ_2 。

3.1.1 公式推算

由光的直线传播可得，路径 L_{10} 、路径 L_{02} 为直线；光线从 1 点到 2 点，两点在坐标

轴上的竖直方向上的投影相等, 且为 H ; 光在空气中传播的速度为光线在真空中传播的速度 C ; 光线从 1 点到 2 点, 1 点与 2 点之间的距离为定值 L ; 光线经 $L_{10'}$ 、 $L_{0'2}$, 所需时间为 T 。

则光线从 $L_{10'}$ 到 $L_{0'2}$, 所需时间为:

$$T = \frac{L_{10'}}{C} + \frac{L_{0'2}}{C} = \frac{H/\cos\theta_1}{C} + \frac{H/\cos\theta_2}{C} = \frac{H}{C} \left(\frac{1}{\cos\theta_1} + \frac{1}{\cos\theta_2} \right) \quad (3.1)$$

其中, $\theta_1, \theta_2 \in (0^\circ, 90^\circ)$;

又 1 点与 2 点之间的距离为定值 L , 则可得到:

$$L = H(\tan\theta_1 + \tan\theta_2) \quad (3.2)$$

设 $K = \frac{L}{H}$, 则

$$\tan\theta_1 + \tan\theta_2 = K \quad (3.3)$$

由三角代换变形得到:

$$\cos\theta_2 = [1 + (K - \tan\theta_1)^2]^{-1/2}$$

代入 (3.1) 式得到:

$$T = \frac{H}{C} \left(\frac{1}{\cos\theta_1} + \frac{1}{\cos\theta_2} \right) = \frac{H}{C} \left(\frac{1}{\cos\theta_1} + [1 + (K - \tan\theta_1)^2]^{1/2} \right) \quad (3.4)$$

对上式求一阶导数得到:

$$T' = \frac{H}{C} \left\{ \frac{\frac{\sin\theta_1}{\cos^2\theta_1} + 2(K - \tan\theta_1)}{2\cos^2\theta_1 \times [1 + (K - \tan\theta_1)^2]^{1/2}} \right\} \quad (3.5)$$

因函数时间 T 有极小值, 令 $T'=0$, 整理结果可得下式:

$$\tan\theta_1 = \frac{K}{2} \quad (3.6)$$

此时, 将上式代入 (3.3) 式得到:

$$\tan\theta_2 = \tan\theta_1 = \frac{K}{2} \quad (3.7)$$

从而有:

$$\theta_1 = \theta_2 \quad (3.8)$$

由 (3.8) 式可得: 入射角等于反射角, 即结果成立。故由费马原理: 光总是沿用时最短的光程传播可知, 实际光线从 1 点到达 2 点, 经过路径为 L_{10} 、 L_{02} , 与图示法线 Y 所成夹角均为 θ 。

3.1.2 代码实现

编写 MATLAB 程序如下:

```
>> syms H C K x %字母变量
>> T=(H/C)*((1/cos(x))+[1+(K-tan(x))^2]^(1/2)); %表达式 T
```

```

>> dfdx=diff(T,x) %求导
dfdx =
H/C*(1/cos(x)^2*sin(x)+1/(1+(K-tan(x))^2)^(1/2)*(K-tan(x))*(-1-tan(x)^2))

>> a=solve(dfdx,'x'); %求解方程

>> tan(a) %正切值
ans =
1/2*K
1/2*K

```

3.2 质点系转动惯量求解

已知在平面上的 n 个质点 $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2), \dots, P_n(x_n, y_n)$, 其质量分别为 $m_1, m_2, \dots, m_n$, 确定一个点 $P(x, y)$, 使得质点系关于此点的转动惯量为最小。

设质点系关于此点的转动惯量为 J , 由转动惯量为 J 定义可知:

$$J = \sum_{i=1}^n [(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2] \times m_i \quad (3.9)$$

要满足质点系的转动惯量为最小, 即 $\sum_{i=1}^n [(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2] \times m_i$ 和最小, 这是一个二元一次极值问题。

由式 (3.9) 可知:

$$\begin{aligned} J &= \sum_{i=1}^n [x^2 - 2x_i x + x_i^2 + y^2 - 2y_i y + y_i^2] \times m_i \\ &= x^2 \sum_{i=1}^n m_i + y^2 \sum_{i=1}^n m_i - 2x \sum_{i=1}^n x_i m_i - 2y \sum_{i=1}^n y_i m_i + \sum_{i=1}^n (x_i^2 + y_i^2) m_i \end{aligned} \quad (3.10)$$

由上式满足最小值条件时, 其 $\frac{\partial J}{\partial x} = 0, \frac{\partial J}{\partial y} = 0$, 可得:

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial x} &= 2x \sum_{i=1}^n m_i - 2 \sum_{i=1}^n x_i m_i = 0 \\ \frac{\partial J}{\partial y} &= 2y \sum_{i=1}^n m_i - 2 \sum_{i=1}^n y_i m_i = 0 \end{aligned} \quad (3.11)$$

由上式可得:

$$x = \frac{\sum_{i=1}^n x_i m_i}{\sum_{i=1}^n m_i}, \quad y = \frac{\sum_{i=1}^n y_i m_i}{\sum_{i=1}^n m_i}$$

此时使得质点系关于 P 的转动惯量为最小。

3.3 储油罐的油量计算

一平放的椭圆柱体形状的油罐，长度为 L ，椭圆的长半轴为 a ，短半轴为 b ，油的密度为 ρ ，油罐中油的高度为 h ，油罐的横断面如图 3-2 所示。

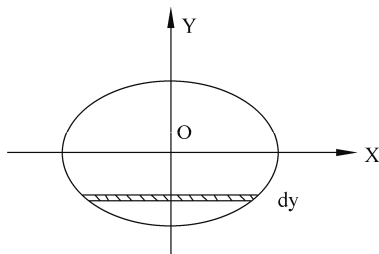


图 3-2 油罐横断面

得到横断面的方程表达式： $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ；

将椭圆对 y 进行微分，则图 3-2 中小矩形的面积为： $2a\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}dy$ ；

油罐中油横断面中高度为 h 时的面积为： $\int_{-b}^{-b+h} 2a\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}dy$

当油罐中油的高度为 h 时油量为： $\int_{-b}^{-b+h} 2\rho aL\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}dy$ ，对 $\int_{-b}^{-b+h} 2\rho aL\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}dy$ 进行积分为：

$$\begin{aligned}
 & \int_{-b}^{-b+h} 2\rho aL\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}dy \stackrel{\text{令 } y=b\sin t}{=} \int_{-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}}^{\arcsin(-1+\frac{h}{b})} 2\rho Lab \cot^2 t dt \\
 & = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\arcsin(-1+\frac{h}{b})} 2\rho Lab \frac{1+\cos 2t}{2} dt \\
 & = \left[\frac{\rho Lab(2t + \sin 2t)}{2} \right]_{-\frac{\pi}{4}}^{\arcsin(-1+\frac{h}{b})} \\
 & = \rho Lab \left[\arcsin(-1+\frac{h}{b}) + (\frac{h}{b}-1)\sqrt{1-(\frac{h}{b}-1)^2} + \frac{\pi}{4} \right]
 \end{aligned}$$

3.4 香烟毒物摄入问题

人在吸烟时，烟草内所含的毒物在点燃处随烟雾释放，释放出来的烟雾一部分直接进入空气中，另外一部分沿未点燃的香烟和过滤嘴穿行。烟雾在穿行过程中，烟雾中的毒物不断被未点燃的烟草及过滤嘴吸收，最后剩余的毒物全部进入人体。这种吸收过程使未点

燃烟草中毒物密度随时间的变化而变化。

考虑抽烟进入人体的毒物数量（不考虑从空气烟雾中吸入的）与香烟中所含毒物总量、香烟长度和过滤嘴长度等因素间的关系，对于香烟毒物摄入作如下假设。

（1）一支香烟的毒物总含量 $M=80\text{mg}$ ，毒物均匀分布在长度为 $l_1=80\text{mm}$ 的香烟中，过滤嘴长度为 $l_2=20\text{mm}$ ；

（2）烟草点燃后毒物全部随烟雾释放，且均匀分布在烟雾中；

（3）直接进入空气的烟雾比例为 $a=30\%$ ，其余的部分沿未点燃的烟草穿行，穿行速度是 $v=50\text{mm/s}$ ；

（4）单位长度未点燃烟草和过滤嘴在单位时间内对随烟雾穿行的毒物的吸收率分别是 $b=0.02$ 和 $\beta=0.08$ （例如：带有毒物量 ΔM 的烟雾经过 l_2 长度的过滤嘴时，被过滤嘴吸收的毒物量是 $\Delta M \cdot \beta \cdot (l_2 v^{-1})$ ）；

（5）把一只香烟均匀分成 N 段，每次吸烟都燃烧一段；在点燃后的任意时刻，每一段未燃烧烟草中的毒物都在该段均匀分布，不同段的毒物密度不相同。

香烟分为 N 段，说明下一段香烟的毒物量叠加上一段香烟的毒物量，由上述分析可知，当 $N=4$ 时，编写 MATLAB 程序如下：

```

Clc                                %清屏
clear all;                         %删除 workspace 变量
close all;                         %关掉显示图形窗口
format short
%Initial
M=800;                             %香烟的毒物总含量
N=4;                               %香烟均匀分成 N 段
L1=80;                             %香烟长度
L2=20;                             %过滤嘴长度
a=0.3;                             %空气的烟雾比例
c=0.7;
v=50;                              %穿行速度
b=0.02;                            %吸收率
beta=0.08;                         %吸收率
m=[];                              %初始化值
j=1;
t=zeros(1000,1000);
for i=1:N
    m(i,1)=(M/N+t(i,j));
    m(i,2)=(M/N+ t(i,j))*c;
    m(i,3)=(M/N+t(i,j))*c*b*(L1/N)/v;
    m(i,4)=(M/N+t(i,j))*c-m(i,3))*b*(L1/N)/v+t(i,2);
    m(i,5)=(M/N+t(i,j))*c-m(i,3)-m(i,4))*b*(L1/N)/v+t(i,3);
    m(i,6)=(M/N+t(i,j))*c-m(i,3)-m(i,4)-m(i,5))*beta*L2/v+t(i,4);
    m(i,7)=(M/N+t(i,j))*c-m(i,3)-m(i,4)-m(i,5)-m(i,6)+t(i,2) +t(i,3)
    +t(i,4)+t(i,5);
    t(i+1,2)=m(i,3);
    t(i+1,3)=m(i,4);
    t(i+1,4)=m(i,5);
    t(i+1,5)=m(i,6);
    j=j+1;
end
m

```

运行程序的输出结果如下所示。

```

m =
200.0000  140.0000  1.1200  1.1110  1.1022  4.3733  132.2935
201.1200  140.7840  1.1263  2.2373  2.2104  5.4289  137.4877
202.2373  141.5661  1.1325  2.2497  3.3427  6.5253  139.3186
203.3427  142.3399  1.1387  2.2621  3.3613  7.6812  141.1469

```

整理相应的结果如表 3-1 所示。

表 3-1 N段香烟摄入毒物量

时间	燃烧后释放毒物量	进入烟草的毒物量	每段香烟的累积毒物量	过滤嘴累积毒物量	吸完该段进入人体的毒物量
开始时	0.00000	0.0000	0.0000、0.0000、0.0000	0.0000	0.0000
第 1 段	200.0000	140.0000	1.1200、1.1110、1.1022	4.3733	132.2935
第 2 段	201.1200	140.7840	1.1263、2.2373、2.2104	5.4289	137.4877
第 3 段	202.2373	141.5661	1.1325、2.2497、3.3427	6.5253	139.3186
第 4 段	203.3427	142.3399	1.1387、2.2621、3.3613	7.6812	141.1469

3.5 冰雹的下落速度

当冰雹由高空落下时，它受到地球引力和空气阻力的作用，阻力的大小与冰雹的形状和速度有关，一般可以对阻力作两种假设：

□ 阻力大小与下落的速度成正比；

□ 阻力大小与速度的平方成正比。

已知初速度 $v(0)=0$ 、冰雹质量 m 、重力加速度 g 、正比例系数 $k>0$ 。

3.5.1 公式推算

(1) 由物理学可知，建立速度满足的微分方程，冰雹受到地球引力和空气阻力的影响，其加速度应该为：

$$mg - kv = ma \quad (3.12)$$

$$a = \frac{dv(t)}{dt} \quad (3.13)$$

结合上述两式子得到：

$$m \frac{dv(t)}{dt} + kv(t) = mg \quad (3.14)$$

在式 (3.14) 两边作 Laplace 变换并且代入 $v(0)=0$ ，得到：

$$msV(s) + kV(s) = mg \cdot \frac{1}{s} \quad (3.15)$$

解代数方程得：

$$V(s) = g \left(\frac{m}{k} \cdot \frac{1}{s} - \frac{m}{k} \cdot \frac{1}{s + k/m} \right) \quad (3.16)$$

最后对 $V(s)$ 作 Laplace 反变换, 有:

$$v(t) = \frac{gm}{k} (1 - e^{-\frac{k}{m}t}) \quad (3.17)$$

从上式可知, 当 $t \rightarrow \infty$ 时, $v(t)$ 的值为 $\frac{gm}{k}$ 。

(2) 阻力大小与速度的平方成正比, 有:

$$mg - kv^2 = ma \quad (3.18)$$

则式 (3.14) 所求解的模型变成了式 (3.19)。

$$m \frac{dv(t)}{dt} + kv^2(t) = mg \quad (3.19)$$

冰雹下落时, 在一开始速度比较小时 (阻力小于重力), 冰雹的速度总是增加的。当速度达到一定时 (阻力等于重力), 速度不再增加, 显然这个时候就是冰雹速度的最大值。所以, 若要冰雹的速度达到最大, 有:

$$kf = mg \quad (3.20)$$

即

$$kv^2 = mg \quad (3.21)$$

即

$$v = \sqrt{\frac{mg}{k}} \quad (3.22)$$

采用数值计算的办法来求解该非线性微分方程。此时, 取 $m=1.1$, $k=0.1$, $g=9.8$ 。

3.5.2 代码实现

编写 MATLAB 程序如下:

```
function y3_2
    t0=0; %初始值
    tf=6; %终止值
    a=9.8; %初始加速度
    options =odeset('RelTol',1e-4,'AbsTol',[1e-4]); %求解精度设置
    [T,V]=ode45(@diffv,[t0 tf],a,options); %用低阶法求微分方程二的数值解
    plot(T,V) %画图
    axis tight %轴紧凑
    grid on %网格化
    xlabel('t'); %x 轴标记
    ylabel('v'); %y 轴标记
end

function dv = diffv(t,v) %/第二个微分方程
    m=1.1;
    k=0.1;
```

```

g=9.8;                                %g 值
dv=zeros(1,1);
dv(1)=(m*g-k*v(1)*v(1))/m;           %加速度
end

```

运行程序得到数值解如图 3-3 所示。

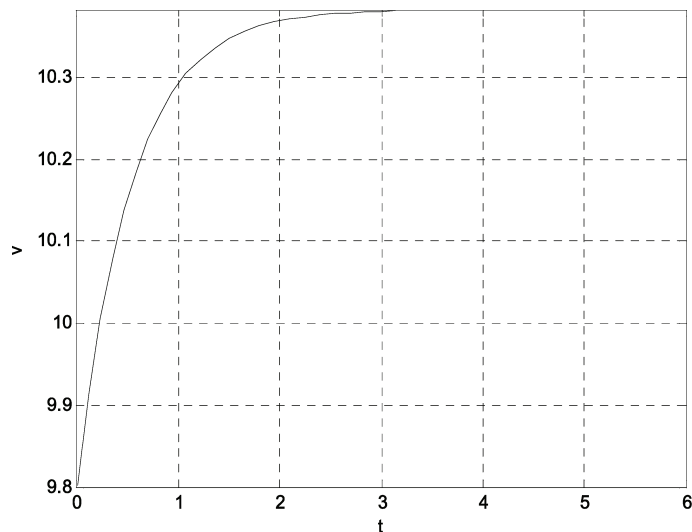


图 3-3 速度曲线

综合考虑下落阻力与速度一次和二次方相关。对于阻力，不妨先将阻力设成速度的函数，即令：

$$f = f(v) \quad (3.23)$$

利用 Taylor 级数将其理论上展开成为如下的形式：

$$f(v) = k_1 v + k_2 v^2 + \cdots + k_n v^n + \cdots \quad (3.24)$$

v 的次方取决于速度的大小，对这个冰雹的模型，讨论速度的平方项，故不妨将阻力设为：

$$f(v) = k_1 v + k_2 v^2 \quad (3.25)$$

则微分方程变为：

$$m \frac{dv(t)}{dt} + k_1 v^2(t) + k_2 v(t) = mg \quad (3.26)$$

用数值计算的方法求出数值解，取 $m = 1.1$ ， $k_1 = 0.1$ ， $k_2 = 0.2$ ， $g = 9.8$ 。编写 MATLAB 程序如下：

```

function y3_2
t0=0;                                %时间初始值
tf=6;                                %时间终止值
a=9.8;                                %初始加速度
options =odeset('RelTol',1e-4,'AbsTol',[1e-4]);
[T,V]=ode45(@diffv,[t0 tf],a,options); %用低阶法求微分方程二的数值解
plot(T,V)                             %画图
axis tight                             %轴紧凑显示
grid on                               %网格化

```

```

xlabel('t'); %x 轴标记
ylabel('v'); %y 轴标记
end

function dv = diffv(t,v) %第二个微分方程
    m=1.1;
    k1=0.1;k2=0.2;
    g=9.8; %加速度 g
    dv=zeros(1,1); %初始值 0
    dv(1)=(m*g-k1*v(1)*v(1)-k2*v(1))/m; %导数
end

```

运行程序得到其数值解的结果如图 3-4 所示。

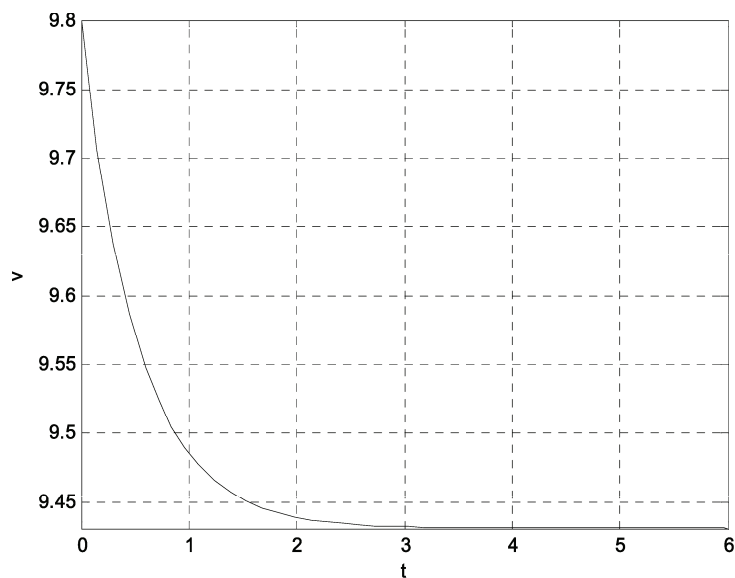


图 3-4 修正速度曲线

3.6 本章小结

本章从高等数学问题着手，阐述了包括质点系转动惯量求解、油罐体积以及香烟毒物摄入量等问题。然而对于复杂问题的求解，例如冰雹下落速度微分方程的求解，MATLAB 数值解计算表现出较好的优势，因此 MATLAB 在工程上得到广泛的应用。