3 线性控制系统状态时域响应

本章将介绍如何从所建立的控制系统状态方程求取其状态的解，得到状态和输出随时间的变化规律，即时域响应。下面分别就线性连续定常系统、线性连续时变系统和线性离散系统进行讨论。

3.1 线性连续定常系统状态方程的解

本节先介绍线性连续定常系统状态方程齐次方程（没有外界输入作用的情况）的解，然后引出状态转移矩阵的概念，再介绍线性连续定常系统状态方程非齐次方程（存在外界输入作用的情况）的解。

3.1.1 齐次方程的解

对于齐次方程$\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{x}(t_0)=\boldsymbol{x}_0$，有唯一的解

$$\boldsymbol{x}(t)=\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{x}_0 \tag{3.1}$$

式中，$\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}$为矩阵指数，$\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}=\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}t+\frac{\boldsymbol{A}^2t^2}{2!}+\cdots=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\boldsymbol{A}^kt^k}{k!}$，且有以下性质：

（1）如果$\boldsymbol{A}$为常阵，则

$$\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}(t+s)}=\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}s} \tag{3.2}$$

（2）$\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}$非奇异，且

$$(\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t})^{-1}=\mathrm{e}^{-\boldsymbol{A}t} \tag{3.3}$$

（3）如果常阵$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$，则

$$\mathrm{e}^{(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})t}=\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}\mathrm{e}^{\boldsymbol{B}t} \tag{3.4}$$

（4）$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}=\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}$ （3.5）

（5）设$\boldsymbol{A}$为常阵，则

$$\boldsymbol{L}[\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}]=(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}$$

或

$$\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}=\boldsymbol{L}^{-1}[(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}] \tag{3.6}$$

(6) 如果 $\boldsymbol{A}$ 为 $n\times n$ 矩阵，则

$$e^{\boldsymbol{A}t}=\alpha_0(t)\boldsymbol{I}+\alpha_1(t)\boldsymbol{A}+\cdots+\alpha_{n-1}(t)\boldsymbol{A}^{n-1} \tag{3.7}$$

其中，当常阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值两两相异时，有

$$\begin{bmatrix}\alpha_0(t)\\ \alpha_1(t)\\ \vdots\\ \alpha_{n-1}(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \cdots & \lambda_1^{n-1}\\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_2^{n-1}\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & \lambda_n & \lambda_n^2 & \cdots & \lambda_n^{n-1}\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}e^{\lambda_1 t}\\ e^{\lambda_2 t}\\ \vdots\\ e^{\lambda_n t}\end{bmatrix} \tag{3.8}$$

当常阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值有重根时，有

$$\begin{bmatrix}\alpha_0(t)\\ \alpha_1(t)\\ \vdots\\ \alpha_{n-1}(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & \dfrac{(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)}{(m-1)!}\lambda_1^{n-m}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 1 & 2\lambda_1 & 3\lambda_1^2 & \cdots & \dfrac{(n-1)}{1!}\lambda_1^{n-2}\\ 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \lambda_1^3 & \cdots & \lambda_1^{n-1}\\ 1 & \lambda_{m+1} & \lambda_{m+1}^2 & \lambda_{m+1}^3 & \cdots & \lambda_{m+1}^{n-1}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & \lambda_n & \lambda_n^2 & \lambda_n^3 & \cdots & \lambda_n^{n-1}\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}\dfrac{t^{m-1}}{(m-1)!}e^{\lambda_1 t}\\ \vdots\\ \dfrac{t}{1!}e^{\lambda_1 t}\\ e^{\lambda_1 t}\\ e^{\lambda_{m+1} t}\\ \vdots\\ e^{\lambda_n t}\end{bmatrix} \tag{3.9}$$

式中，$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 为常阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值。

显然，性质(5)和性质(6)可用于求取齐次方程的解。

例 3-1 已知 $\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$，试求 $e^{\boldsymbol{A}t}$。

解 方法一(利用性质(5))：

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & -3\end{bmatrix}$$

$$s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}s & -1\\ 2 & s+3\end{bmatrix}$$

$$(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}=\frac{\mathrm{adj}(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})}{|s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|}=\frac{\begin{bmatrix}s+3 & 1\\ -2 & s\end{bmatrix}}{(s+1)(s+2)}=\begin{bmatrix}\dfrac{s+3}{(s+1)(s+2)} & \dfrac{1}{(s+1)(s+2)}\\ \dfrac{-2}{(s+1)(s+2)} & \dfrac{s}{(s+1)(s+2)}\end{bmatrix}$$

$$e^{\boldsymbol{A}t}=\boldsymbol{L}^{-1}[(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}]=\begin{bmatrix}2e^{-t}-e^{-2t} & e^{-t}-e^{-2t}\\ -2e^{-t}+2e^{-2t} & -e^{-t}+2e^{-2t}\end{bmatrix}$$

方法二(利用性质(6))：

$$|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda & -1\\ 2 & \lambda+3\end{vmatrix}=(\lambda+1)(\lambda+2)$$

$$\lambda_1=-1,\quad \lambda_2=-2$$

$$\begin{bmatrix}1 & \lambda_1\\ 1 & \lambda_2\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & -2\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}2 & -1\\ 1 & -1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\alpha_0(t)\\ \alpha_1(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & -1\\ 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e^{-t}\\ e^{-2t}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2e^{-t}-e^{-2t}\\ e^{-t}-e^{-2t}\end{bmatrix}$$

$$e^{At}=(2e^{-t}-e^{-2t})\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}+(e^{-t}-e^{-2t})\begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & -3\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}2e^{-t}-e^{-2t} & e^{-t}-e^{-2t}\\ -2e^{-t}+2e^{-2t} & -e^{-t}+2e^{-2t}\end{bmatrix}$$

方法三(利用矩阵指数展开式):

$$e^{At}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & -3\end{bmatrix}t+\begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & -3\end{bmatrix}^2\frac{t^2}{2!}+\begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & -3\end{bmatrix}^3\frac{t^3}{3!}+\cdots$$

$$=\begin{bmatrix}1-t^2+t^3+\cdots & t-\frac{3}{2}t^2-\frac{7}{6}t^3+\cdots\\ -2t+3t^2-\frac{7}{3}t^3+\cdots & 1-3t+\frac{7}{2}t^2-\frac{5}{2}t^3+\cdots\end{bmatrix}$$

例 3-2 设$\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{Ax}$,式中,$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 2 & -5 & 4\end{bmatrix}$,试求 e^{At}。

解 $|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda & -1 & 0\\ 0 & \lambda & -1\\ -2 & 5 & \lambda-4\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda-2)$

$$\lambda_{1,2}=1,\quad \lambda_3=2$$

$$\begin{bmatrix}0 & 1 & 2\lambda_1\\ 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2\\ 1 & \lambda_3 & \lambda_3^2\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 2\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 4\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}-2 & 0 & 1\\ 3 & 2 & -2\\ -1 & -1 & 1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\alpha_0(t)\\ \alpha_1(t)\\ \alpha_2(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2 & 0 & 1\\ 3 & 2 & -2\\ -1 & -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}te^t\\ e^t\\ e^{2t}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2te^t+e^{2t}\\ 3te^t+2e^t-2e^{2t}\\ -te^t-e^t+e^{2t}\end{bmatrix}$$

$$e^{At}=(-2te^t+e^{2t})\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}+(3te^t+2e^t-2e^{2t})\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 2 & -5 & 4\end{bmatrix}$$

$$+(-te^t-e^t+e^{2t})\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 2 & -5 & 4\end{bmatrix}^2$$

$$=\begin{bmatrix}-2te^t+e^{2t} & 3te^t+2e^t-e^{2t} & -te^t-e^t+e^{2t}\\ 2(-te^t-e^t+e^{2t}) & 3te^t+5e^t-4e^{2t} & -te^t-2e^t+2e^{2t}\\ -2te^t-4e^t+4e^{2t} & 3te^t+8e^t-8e^{2t} & -te^t-3e^t+4e^{2t}\end{bmatrix}$$

以下为几个特殊的矩阵,可直接写出其对应的矩阵指数:

(1) 若 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n\end{bmatrix}$,则 $\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}=\begin{bmatrix}\mathrm{e}^{\lambda_1 t} & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \mathrm{e}^{\lambda_2 t} & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & \cdots & 0 & \mathrm{e}^{\lambda_n t}\end{bmatrix}$;

(2) 若 $\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{AT}=\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n\end{bmatrix}$,则 $\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}=\boldsymbol{T}\begin{bmatrix}\mathrm{e}^{\lambda_1 t} & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \mathrm{e}^{\lambda_2 t} & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & \cdots & 0 & \mathrm{e}^{\lambda_n t}\end{bmatrix}\boldsymbol{T}^{-1}$;

(3) 若 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\lambda & 1 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda & \cdots & \vdots\\ \vdots & \vdots & & 1\\ 0 & \cdots & 0 & \lambda\end{bmatrix}$,则 $\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}=\mathrm{e}^{\lambda t}\begin{bmatrix}1 & t & \cdots & \frac{1}{(n-1)!}t^{n-1}\\ 0 & 1 & \cdots & \vdots\\ \vdots & \vdots & & t\\ 0 & \cdots & 0 & 1\end{bmatrix}$;

(4) 若 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\sigma & \omega\\ -\omega & \sigma\end{bmatrix}$,则 $\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}=\begin{bmatrix}\cos\omega t & \sin\omega t\\ -\sin\omega t & \cos\omega t\end{bmatrix}\mathrm{e}^{\sigma t}$。

3.1.2 状态转移矩阵

满足齐次矩阵方程的解$\boldsymbol{\Phi}(t)$称为线性定常系统的状态转移矩阵,又称基本解阵,或称跃迁阵。它定义为如下矩阵微分方程的解:

$$\dot{\boldsymbol{\Phi}}(t,t_0)=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{\Phi}(t,t_0),\quad \boldsymbol{\Phi}(t_0,t_0)=\boldsymbol{I} \tag{3.10}$$

对于齐次方程$\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{Ax}$,$\boldsymbol{x}(t_0)=\boldsymbol{x}_0$,有唯一的解:

$$\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{x}_0 \tag{3.11}$$

其解就是由初始状态引起的无外界输入强迫项情况的自由运动。其基本性质如下:

(1) 对于线性定常系统,

$$\boldsymbol{\Phi}(t)=\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t} \tag{3.12}$$

(2) $\boldsymbol{\Phi}(0)=\boldsymbol{I}$ (3.13)

(3) $[\boldsymbol{\Phi}(t)]^{-1}=\boldsymbol{\Phi}(-t)$ (3.14)

(4) $\boldsymbol{\Phi}(t_1+t_2)=\boldsymbol{\Phi}(t_1)\boldsymbol{\Phi}(t_2)=\boldsymbol{\Phi}(t_2)\boldsymbol{\Phi}(t_1)$ (3.15)

(5) $\boldsymbol{\Phi}(nt)=[\boldsymbol{\Phi}(t)]^n$ (3.16)

(6) $\boldsymbol{\Phi}(t_2-t_1)\boldsymbol{\Phi}(t_1-t_0)=\boldsymbol{\Phi}(t_2-t_0)$ (3.17)

3.1.3 非齐次方程的解

对于非齐次方程$\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{Ax}+\boldsymbol{Bu}$,$\boldsymbol{x}(t_0)=\boldsymbol{x}_0$,假定$\boldsymbol{u}$在$[0,t_1)$是有界的,则方程有唯一的解:

$$\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{x}_0+\int_0^t\boldsymbol{\Phi}(t-\tau)\boldsymbol{Bu}(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{3.18}$$

例 3-3 已知

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u$$

$$u = 1(t)$$

解 由例 3-1 可知：

$$\boldsymbol{\Phi}(t) = \begin{bmatrix} 2\mathrm{e}^{-t} - \mathrm{e}^{-2t} & \mathrm{e}^{-t} - \mathrm{e}^{-2t} \\ -2\mathrm{e}^{-t} + 2\mathrm{e}^{-2t} & -\mathrm{e}^{-t} + 2\mathrm{e}^{-2t} \end{bmatrix}$$

则

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} &= \boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{x}(0) + \int_0^t \boldsymbol{\Phi}(t-\tau)\boldsymbol{B}u(\tau)\mathrm{d}\tau \\
&= \begin{bmatrix} 2\mathrm{e}^{-t} - \mathrm{e}^{-2t} & \mathrm{e}^{-t} - \mathrm{e}^{-2t} \\ -2\mathrm{e}^{-t} + 2\mathrm{e}^{-2t} & -\mathrm{e}^{-t} + 2\mathrm{e}^{-2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} \\
&\quad + \int_0^t \begin{bmatrix} 2\mathrm{e}^{-(t-\tau)} - \mathrm{e}^{-2(t-\tau)} & \mathrm{e}^{-(t-\tau)} - \mathrm{e}^{-2(t-\tau)} \\ -2\mathrm{e}^{-(t-\tau)} + 2\mathrm{e}^{-2(t-\tau)} & -\mathrm{e}^{-(t-\tau)} + 2\mathrm{e}^{-2(t-\tau)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} 1\mathrm{d}\tau \\
&= \begin{bmatrix} (2\mathrm{e}^{-t}\mathrm{e}^{-2t})x_1(0) + (\mathrm{e}^{-t} - \mathrm{e}^{-2t})x_2(0) + \left(\frac{1}{2} - \mathrm{e}^{-t} + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2t}\right) \\ (-2\mathrm{e}^{-t} + 2\mathrm{e}^{-2t})x_1(0) + (-\mathrm{e}^{-t} + 2\mathrm{e}^{-2t})x_2(0) + (\mathrm{e}^{-t} - \mathrm{e}^{-2t}) \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

状态向量 $\boldsymbol{x}(t)$在状态空间中随时间 t 变化的轨迹称为状态轨迹。

3.2 线性连续时变系统状态方程的解

线性连续时变系统状态方程表示为

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}(t)\boldsymbol{u}(t) \tag{3.19}$$

对于系统$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}(t)x(t)$，$\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0$，如果 $\boldsymbol{A}(t)$在$[t_0, t_a]$上绝对可积，则在$[t_0, t_a]$存在唯一解，即

$$\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{\Phi}(t, t_0)x_0 + \int_{t_0}^t \boldsymbol{\Phi}(t, \tau)\boldsymbol{B}(\tau)\boldsymbol{u}(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{3.20}$$

已知状态转移矩阵由下式(即前面式(3.10))的解定义：

$$\dot{\boldsymbol{\Phi}}(t, t_0) = \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{\Phi}(t, t_0), \quad \boldsymbol{\Phi}(t_0, t_0) = \boldsymbol{I}$$

为了求得状态转移矩阵$\boldsymbol{\Phi}(t, t_0)$的表达式，可在时间域内对该矩阵微分方程积分，即有

$$\boldsymbol{\Phi}(t, t_0) = \boldsymbol{I} + \int_{t_0}^t \boldsymbol{A}(\tau_1)\boldsymbol{\Phi}(\tau_1, t_0)\mathrm{d}\tau_1 \tag{3.21}$$

如果将上式中积分号内的$\boldsymbol{\Phi}(\tau_1, t_0)$再按上式展开，则有

$$\boldsymbol{\Phi}(\tau_1, t_0) = \boldsymbol{I} + \int_{t_0}^{\tau_1} \boldsymbol{A}(\tau_2)\boldsymbol{\Phi}(\tau_2, t_0)\mathrm{d}\tau_2 \tag{3.22}$$

按此法继续迭代下去，并将各展开式代入式(3.10)，可得

$$\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{\Phi}(t, t_0)\boldsymbol{x}_0 \tag{3.23}$$

$$\boldsymbol{\Phi}(t, t_0) = \boldsymbol{I} + \int_{t_0}^t \boldsymbol{A}(\tau_1)\mathrm{d}\tau_1 + \int_{t_0}^t \boldsymbol{A}(\tau_1)\left[\int_{t_0}^{\tau_1} \boldsymbol{A}(\tau_2)\mathrm{d}\tau_2\right]\mathrm{d}\tau_1 + \cdots \tag{3.24}$$

该状态转移矩阵是由无穷项之和组成的，在一般情况下，它不能写成封闭的解析形式。在实际应用此公式时，可按一定的精度要求，用数值积分计算方法近似计算。

当时变的系统矩阵 $\boldsymbol{A}(t)$满足如下可交换条件时：

$$\boldsymbol{A}(t)\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{A}(\tau)\mathrm{d}\tau=\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{A}(\tau)\mathrm{d}\tau\cdot\boldsymbol{A}(t) \tag{3.25}$$

时变系统的状态转移矩阵的解可以表示为

$$\boldsymbol{\Phi}(t,t_0)=\exp\left[\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{A}(\tau)\mathrm{d}\tau\right] \tag{3.26}$$

式(3.25)的可交换条件一般较难检验是否成立。事实上，根据式(3.25)的可交换条件，有

$$\int_{t_0}^{t}[\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{A}(\tau)-\boldsymbol{A}(\tau)\boldsymbol{A}(t)]\mathrm{d}\tau\equiv\boldsymbol{0} \tag{3.27}$$

式(3.27)对于任意时间变量 t 和 t_0 都成立的充分必要条件是对于任意的 t_1 和 t_2，下式成立：

$$\boldsymbol{A}(t_1)\boldsymbol{A}(t_2)-\boldsymbol{A}(t_2)\boldsymbol{A}(t_1)=\boldsymbol{0} \tag{3.28}$$

故实际上较易于检验的条件可取代 $\boldsymbol{A}(t)$ 和 $\int\boldsymbol{A}(\tau)\mathrm{d}\tau$ 可交换条件，成为时变系统的状态转移矩阵的解可表示为指数矩阵形式的充分必要条件。

时变系统的状态转移矩阵的基本性质如下：

(1) $\boldsymbol{\Phi}(0)=\boldsymbol{I}$； (3.29)

(2) 可逆性：$[\boldsymbol{\Phi}(t_1,t_0)]^{-1}=\boldsymbol{\Phi}(t_0,t_1)$； (3.30)

(3) 传递性：$\boldsymbol{\Phi}(t_2,t_1)\boldsymbol{\Phi}(t_1,t_0)=\boldsymbol{\Phi}(t_2,t_0)$； (3.31)

(4) 对角线矩阵的状态转移矩阵：如果时变的系统矩阵 $\boldsymbol{A}(t)$ 具有如下表示的对角线矩阵

$$\boldsymbol{A}(t)=\begin{bmatrix} a_{11}(t) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22}(t) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn}(t) \end{bmatrix} \tag{3.32}$$

式中，$a_{ii}(t)(i=1,2,\cdots,n)$ 为标量函数，则 $\boldsymbol{A}(t)$ 的状态转移矩阵 $\boldsymbol{\Phi}(t,t_0)$ 为如下对角线矩阵：

$$\boldsymbol{\Phi}(t,t_0)=\begin{bmatrix} \varphi_{11}(t,t_0) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \varphi_{22}(t,t_0) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \varphi_{nn}(t,t_0) \end{bmatrix} \tag{3.33}$$

式中，$\varphi_{ii}(t,t_0)(i=1,2,\cdots,n)$ 为

$$\varphi_{ii}(t,t_0)=\exp\left[\int_{t_0}^{t}a_{ii}(\tau)\mathrm{d}\tau\right] \tag{3.34}$$

(5) 块对角矩阵的状态转移矩阵：如果时变的系统矩阵 $\boldsymbol{A}(t)$ 具有如下表示的块对角矩阵

$$\boldsymbol{A}(t)=\begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_1(t) & \boldsymbol{0} & \cdots & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}_2(t) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \cdots & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}_l(t) \end{bmatrix} \tag{3.35}$$

式中，$\boldsymbol{A}_i(t)(i=1,2,\cdots,l)$ 为 $m_i\times m_i$ 分块矩阵函数，则 $\boldsymbol{A}(t)$ 的状态转移矩阵 $\boldsymbol{\Phi}(t,t_0)$ 为如下

块对角矩阵：

$$\boldsymbol{\Phi}(t,t_0)=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\Phi}_1(t,t_0) & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\Phi}_2(t,t_0) & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \boldsymbol{\Phi}_l(t,t_0)\end{bmatrix} \tag{3.36}$$

式中，$\boldsymbol{\Phi}_i(t,t_0)(i=1,2,\cdots,l)$为满足如下矩阵微分方程的状态转移矩阵：

$$\dot{\boldsymbol{\Phi}}_i(t,t_0)=\boldsymbol{A}_i(t)\boldsymbol{\Phi}_i(t,t_0),\quad \boldsymbol{\Phi}_i(t_0,t_0)=\boldsymbol{I},\quad i=1,2,\cdots,l \tag{3.37}$$

例 3-4 已知

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & t\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix},\quad t_0=0$$

则

$$\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{A}(\tau)\mathrm{d}\tau=\int_0^t\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & \tau\end{bmatrix}\mathrm{d}\tau=\begin{bmatrix}0 & t\\ 0 & \dfrac{t^2}{2}\end{bmatrix}$$

$$\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{A}(\tau)\left[\int_{t_0}^{\tau}\boldsymbol{A}(\lambda)\mathrm{d}\lambda\right]\mathrm{d}\tau=\int_0^t\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & \tau\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & \tau\\ 0 & \dfrac{\tau^2}{2}\end{bmatrix}\mathrm{d}\tau=\begin{bmatrix}0 & \dfrac{t^3}{6}\\ 0 & \dfrac{t^4}{8}\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\Phi}(t,t_0)=\begin{bmatrix}1 & t+\dfrac{t^3}{6}+\cdots\\ 0 & 1+\dfrac{t^2}{2}+\dfrac{t^4}{8}+\cdots\end{bmatrix}$$

例 3-5 已知

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & t\\ 0 & \mathrm{e}^{-at}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix},\quad t_0=0$$

则

$$\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{A}(\tau)\mathrm{d}\tau=\int_0^t\begin{bmatrix}0 & \tau\\ 0 & \mathrm{e}^{-a\tau}\end{bmatrix}\mathrm{d}\tau=\begin{bmatrix}0 & \dfrac{t^2}{2}\\ 0 & -\dfrac{1}{a}\mathrm{e}^{-at}\end{bmatrix}$$

$$\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{A}(\tau)\left[\int_{t_0}^{\tau}\boldsymbol{A}(\lambda)\mathrm{d}\lambda\right]\mathrm{d}\tau=\int_0^t\begin{bmatrix}0 & \tau\\ 0 & \mathrm{e}^{-a\tau}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & \dfrac{\tau^2}{2}\\ 0 & -\dfrac{1}{a}\mathrm{e}^{-a\tau}\end{bmatrix}\mathrm{d}\tau=\begin{bmatrix}0 & \dfrac{1}{a^3}(at+1)\\ 0 & \dfrac{1}{2a^2}\mathrm{e}^{-2at}\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\Phi}(t,t_0)=\begin{bmatrix}1 & \dfrac{1}{2}t^2+\dfrac{1}{a^3}(at+1)+\cdots\\ 0 & 1-\dfrac{1}{a}\mathrm{e}^{-at}+\dfrac{1}{2a^2}\mathrm{e}^{-2at}+\cdots\end{bmatrix}$$

例 3-6 已知

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & \dfrac{1}{(t+2)^2}\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$$

由于

$$\boldsymbol{A}(t_1)\boldsymbol{A}(t_2)=\begin{bmatrix}0 & \dfrac{1}{(t_1+2)^2}\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & \dfrac{1}{(t_2+2)^2}\\ 0 & 0\end{bmatrix}=\boldsymbol{0}$$

$$\boldsymbol{A}(t_2)\boldsymbol{A}(t_1)=\begin{bmatrix}0 & \dfrac{1}{(t_2+2)^2}\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & \dfrac{1}{(t_1+2)^2}\\ 0 & 0\end{bmatrix}=\boldsymbol{0}$$

$$\boldsymbol{A}(t_1)\boldsymbol{A}(t_2)=\boldsymbol{A}(t_2)\boldsymbol{A}(t_1),\quad \forall\, t_1,t_2$$

满足可交换条件,故有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Phi}(t,t_0)&=\exp\left[\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{A}(\tau)\mathrm{d}\tau\right]\\&=\boldsymbol{I}+\int_{t_0}^{t}\begin{bmatrix}0 & \dfrac{1}{(\tau+2)^2}\\ 0 & 0\end{bmatrix}\mathrm{d}\tau+\frac{1}{2!}\left[\int_{t_0}^{t}\begin{bmatrix}0 & \dfrac{1}{(\tau+2)^2}\\ 0 & 0\end{bmatrix}\mathrm{d}\tau\right]^2+\cdots\end{aligned}$$

又由于

$$\int_{t_0}^{t}\begin{bmatrix}0 & \dfrac{1}{(\tau+2)^2}\\ 0 & 0\end{bmatrix}\mathrm{d}\tau=\begin{bmatrix}0 & \dfrac{t-t_0}{(t+2)(t_0+2)}\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

而$\begin{bmatrix}0 & \dfrac{t-t_0}{(t+2)(t_0+2)}\\ 0 & 0\end{bmatrix}^k=\boldsymbol{0}(k=2,3,4,\cdots)$,于是

$$\boldsymbol{\Phi}(t,t_0)=\begin{bmatrix}1 & \dfrac{t-t_0}{(t+2)(t_0+2)}\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

例 3-7 已知

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & \dfrac{1}{(t+2)^2}\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ t+2\end{bmatrix}u$$

$$\begin{bmatrix}x_1(0)\\ x_2(0)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix},\quad u=1(t)$$

根据例 3-6,有

$$\boldsymbol{\Phi}(t,t_0)=\begin{bmatrix}1 & \dfrac{t-t_0}{(t+2)(t_0+2)}\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

则

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}(t)&=\boldsymbol{\Phi}(t,t_0)x_0+\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{\Phi}(t,\tau)\boldsymbol{B}(\tau)\boldsymbol{u}(\tau)\mathrm{d}\tau\\&=\begin{bmatrix}1 & \dfrac{t}{2(t+2)}\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}+\int_{0}^{t}\begin{bmatrix}1 & \dfrac{t-\tau}{(t+2)(\tau+2)}\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ \tau+2\end{bmatrix}\mathrm{d}\tau\end{aligned}$$

$$= \begin{bmatrix} 1+\dfrac{t}{2(t+2)} \\ 1 \end{bmatrix} + \int_0^t \begin{bmatrix} \dfrac{t-\tau}{t+2} \\ \tau+2 \end{bmatrix} \mathrm{d}\tau$$

$$= \begin{bmatrix} \dfrac{t^2+3t+4}{2(t+2)} \\ \dfrac{t^2+4t+2}{2} \end{bmatrix}$$

由于时变系统的数学模型较复杂，且不易于系统分析、控制和优化，因此只要实际工程允许，都可将慢时变系统在一定范围内近似地作为定常系统处理。但对控制目标要求较高的高精度控制系统，仍需作为时变系统处理。

3.3 线性离散系统状态方程的解

本节先介绍连续系统的离散化方法，然后重点介绍定常离散系统的解。

3.3.1 连续系统的离散化

对于连续系统：

$$\left.\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{x}}(t) &= \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}(t)\boldsymbol{u}(t) \\ \boldsymbol{y}(t) &= \boldsymbol{C}(t)\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{D}(t)\boldsymbol{u}(t) \end{aligned}\right\} \tag{3.38}$$

离散化后形成如下差分方程：

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{x}((k+1)T) &= \boldsymbol{G}(kT)\boldsymbol{x}(kT) + \boldsymbol{H}(kT)\boldsymbol{u}(kT) \\ \boldsymbol{y}(kT) &= \boldsymbol{C}(kT)\boldsymbol{x}(kT) + \boldsymbol{D}(kT)\boldsymbol{u}(kT) \end{aligned}\right\} \tag{3.39}$$

根据状态方程解的知识，很容易得出 $\boldsymbol{G}(kT)$（即系统一步状态转移矩阵）：

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{G}(kT) &= \boldsymbol{\Phi}((k+1)T, kT) \\ \boldsymbol{H}(kT) &= \int_{kT}^{(k+1)T} \boldsymbol{\Phi}((k+1)T, \tau)\boldsymbol{B}(\tau)\,\mathrm{d}\tau \end{aligned}\right\} \tag{3.40}$$

MATLAB 控制系统工具箱中提供了系统离散化的函数，其调用格式为

[G,H]=c2d(A,B,Ts)

其中，Ts 为采样周期，s。

例 3-8 对于下列系统：

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

采用命令

```
A=[0 1;0 -2]; B=[0;1];
[G,H]=c2d(A,B,0.01)
```

运算显示结果如下：

```
G =
      1.0000        0.0099
           0        0.9802
```

```
H =
    0.0000
    0.0099
```

即
$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0.0099 \\ 0 & 0.9802 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0.0099 \end{bmatrix} u(k)$$

3.3.2 定常离散系统的解

对于线性定常系统，有

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{x}((k+1)T) &= \boldsymbol{G}\boldsymbol{x}(kT) + \boldsymbol{H}\boldsymbol{u}(kT) \\ \boldsymbol{y}(kT) &= \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(kT) + \boldsymbol{D}\boldsymbol{u}(kT) \end{aligned}\right\} \tag{3.41}$$

很容易写出

$$\begin{aligned} \boldsymbol{G} &= \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}T} \\ \boldsymbol{H} &= \left(\int_0^T \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}\,\mathrm{d}t\right)\boldsymbol{B} \end{aligned} \tag{3.42}$$

例 3-9 对于系统

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

有

$$s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 0 & s+2 \end{bmatrix}$$

$$(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1} = \frac{\operatorname{adj}(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})}{|s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}|} = \frac{\begin{bmatrix} s+2 & 1 \\ 0 & s \end{bmatrix}}{s(s+2)} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{s} & \dfrac{1}{s(s+2)} \\ 0 & \dfrac{1}{s+2} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{G} = \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}T} = \boldsymbol{L}^{-1}\left[(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\right]_{t=T} = \begin{bmatrix} 1 & \dfrac{1}{2}(1 - \mathrm{e}^{-2T}) \\ 0 & \mathrm{e}^{-2T} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{H} = \left[\int_0^T \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}\,\mathrm{d}t\right]\boldsymbol{B} = \left[\int_0^T \begin{bmatrix} 1 & \dfrac{1}{2}(1 - \mathrm{e}^{-2t}) \\ 0 & \mathrm{e}^{-2t} \end{bmatrix} \mathrm{d}t\right] \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{2}T + \dfrac{1}{4}\mathrm{e}^{-2T} - \dfrac{1}{4} \\ -\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-2T} + \dfrac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} &= \boldsymbol{G} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \boldsymbol{H}u(k) \\ &= \begin{bmatrix} 1 & \dfrac{1}{2}(1 - \mathrm{e}^{-2T}) \\ 0 & \mathrm{e}^{-2T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dfrac{1}{2}T + \dfrac{1}{4}\mathrm{e}^{-2T} - \dfrac{1}{4} \\ -\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-2T} + \dfrac{1}{2} \end{bmatrix} u(k) \\ &= \begin{bmatrix} x_1(k) + \dfrac{1}{2}(1 - \mathrm{e}^{-2T})x_2(k) + \left(\dfrac{1}{2}T + \dfrac{1}{4}\mathrm{e}^{-2T} - \dfrac{1}{4}\right)u(k) \\ \mathrm{e}^{-2T}x_2(k) + \left(-\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-2T} + \dfrac{1}{2}\right)u(k) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

已知离散状态空间方程，用递推法就可以求出离散状态方程的解：

$$\boldsymbol{x}(1) = \boldsymbol{G}\boldsymbol{x}(0) + \boldsymbol{H}\boldsymbol{u}(0)$$