

第 12 章 静 电 场

“风雨交加,电闪雷鸣”是一种自然现象,因此闪电应该是人类最早看到的电磁现象,但因为不理解,因而将其视为天神发怒。人类真正开始理解电现象是从摩擦生电开始的。从这一章开始我们将研究电磁现象和电磁运动。电磁运动与我们周围的几乎一切物质都密切相关,原子结构、分子结构和固体的形成都是电磁力作用的结果。许多材料的性质,如固体的弹性、液体的表面张力、弹簧的弹力、摩擦力、支撑力等实际上都源自原子之间的电磁力。

现代生活的各个角落都离不开电磁运动。每当你按下房间的电灯开关,发电厂就会产生燃料消耗,驱动两个磁极间的导线线圈旋转,于是燃料燃烧的一部分能量就转变成电能传输给电路中的电子,最终电子的运动转变成光能。

当你在计算机或手机键盘上键入一个命令时,就会在电子线路中产生一个传输你的指令的电子流,在计算机或手机中,有成千上万个电子流动通道,但都是被关闭的,只有你通过键盘按钮打开的那个门允许这个电子流通过,到达你的指令目标并被执行。

每当你按动电视机遥控器上的频道选择按钮时,一束电磁波就从遥控器发射出去,并到达电视机中的接收器,然后,接收器就会调谐电视机,以便接收另一个来自地球上空轨道上的卫星发射出来的电磁波信号,这个新的电磁波信号会给电视机指令,电磁力将聚焦和偏转显像管中的电子束,产生视觉图像。

在所有上述不同的现象中,一个共同之处是,他们都必须依赖于电磁力来控制 and 导引电子或电磁能的流动。这些力形成了我们研究电磁学的基础。我们将看到,所有电磁现象,都可以由四个基本的方程——“麦克斯韦方程”来解释。这些方程,就是我们后面将逐一讨论到的电磁学定理或定律。

12.1 电荷与静电力

12.1.1 电荷

物质的电性质来源于物质的微观结构,宏观物体都是由分子、原子组成的。众所周知,原子由带正电的原子核和带负电并绕原子核运动的电子组成。用丝绸摩擦过的玻璃棒和用毛皮摩擦过的橡胶棒都能吸引轻小的物体,图 12-1 所示的就是橡胶梳子与头发摩擦后,吸引碎纸屑的现象,这是因为梳子带电了。

大量的实验表明,自然界中只存在两种电荷:正电荷和负电荷。人们约定玻璃棒与丝绸摩擦后所带电荷为“正电荷”,橡胶棒与毛皮摩擦后所带电荷为“负电荷”。



图 12-1 与头发摩擦过的梳子能吸引碎纸屑

物体之所以能带上电荷,是因为由于摩擦或其他原因,会得到或失去一些电荷,定量描述物体所带电量的物理量称为**电荷量**,在国际单位制中,电荷量的单位为 C(库仑)。

实验发现,电荷有下列一些重要性质:

(1) 电子所带电量是实验测得的最小电量单位,其绝对值为

$$e = (1.6021892 \pm 0.0000046) \times 10^{-19} \text{ (C)}$$

因此,电子电量被称为**基本电荷量**。物质的微观结构决定了物体得到或失去的电荷量总是电子电量的整数倍,即物体所带电荷量是不连续变化的,物体所带电荷量的不连续性称为**电荷的量子化**。

虽然理论上预言组成原子核的夸克的带电量为 $\pm e/3$ 或 $\pm 2e/3$,但实验上至今尚未发现独立存在的夸克,即使将来实验证实了理论预言,电荷量仍是量子化的。由于宏观物体通常所带电荷量相对于基本电荷量都是巨大的,因此,讨论宏观电磁现象时,通常可以认为电荷是连续分布在带电体上的。

(2) 电子是非常稳定的基本粒子。因此,对于一个孤立系统,如果没有净余电荷出入系统边界,则该系统正负电荷的代数和将保持不变,这一规律被称为**电荷守恒定律**。

(3) 实验还表明,带点粒子的电荷量与其运动状态无关,即在不同惯性系中,带点粒子的电荷量是相同的,这个特性被称为**电荷的相对论不变性**。

12.1.2 库仑定律

1785年,法国物理学家库仑利用如图 12-2 所示的扭秤实验,直接测量了两个带电体之间的相互作用力,并在实验基础上总结归纳出著名的库仑定律:真空中两个静止的点电荷之间的相互作用力的大小与它们的电荷量 q_1 和 q_2 的乘积成正比,与它们之间距离 r 的平方成反比;作用力的方向沿着两电荷的连线,同号电荷相斥,异号电荷相吸。如图 12-3 所示,该定律可以用矢量式表达为

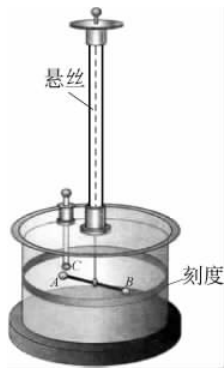


图 12-2 库仑扭秤实验

$$\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21} = k \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \hat{\mathbf{r}}_{12} \quad (12-1-1)$$

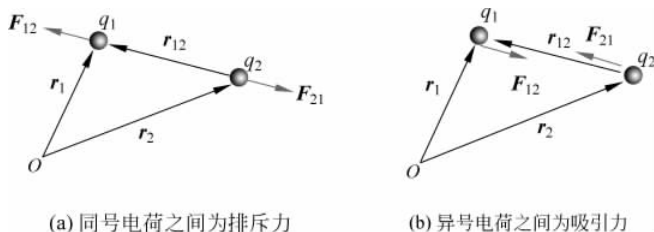


图 12-3 库仑定律

式中, \hat{r}_{12} 表示两个点电荷间相对位置矢量 r_{12} 的单位矢量, 即 $\hat{r}_{12} = r_{12}/r_{12}$; k 为比例系数, 在国际单位制中, $k = 8.9880 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{C}^{-2} \approx 9 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{C}^{-2}$ 。这种相互作用力称为静电力或库仑力。

为了使以后的电磁学公式形式简化, 引入真空电容率 ϵ_0 。令

$$\epsilon_0 = \frac{1}{4\pi k} = 8.85 \times 10^{-12} \text{ C}^2 \cdot \text{N}^{-1} \cdot \text{m}^{-2}$$

于是, 库仑定律又可表示为

$$\mathbf{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \quad (12-1-2)$$

温馨提示: 库仑定律只适用于“点电荷”。“点电荷”是人们在实践中抽象出来的一个理想模型, 点电荷占有空间位置, 带有电量, 但不计电荷尺寸或大小。如同我们曾经用过的质点、刚体、理想气体等模型一样, 是为了突出问题的主要矛盾对具体带电体的一个简化。实际应用过程中, 和质点概念一样, 点电荷也是一个相对概念, 当两个带电体之间的距离比带电体本身的尺度大很多时, 带电体就可以视为一个点电荷。若两个带电体不能视为点电荷时, 不能直接用库仑定律表达式计算它们之间的相互作用力。

12.1.3 静电力叠加原理

实际问题中, 我们研究的系统可能有多个点电荷, 或者带电体不能视为点电荷, 如何计算它们之间的相互作用力呢?

实验发现, 当空间存在两个以上的静止点电荷时, 任意两个点电荷间的相互作用力仍然遵循库仑定律, 两个点电荷之间的相互作用力不会因为其他点电荷的存在而改变, 任一点电荷受到的静电力等于空间所有其他点电荷单独存在时对该点电荷作用力的矢量和, 这就是静电力叠加原理, 如图 12-4 所示。即

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \cdots + \mathbf{F}_n \quad (12-1-3)$$

库仑定律和静电力叠加原理是关于静止电荷间相互作用的两个基本实验定律, 是静电学的基础。

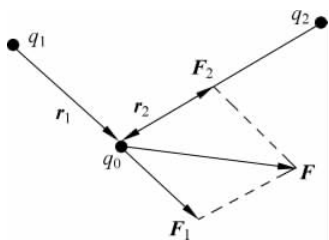


图 12-4 静电力叠加原理

例 12-1 图 12-5 中有三个点电荷 q_1 , q_2 和 q_0 , 分别放在图示的位置上, 求点电荷 q_0 受到的静电力。

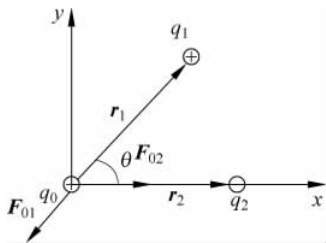


图 12-5 例 12-1 用图

解 由库仑定律可知, q_1 和 q_0 之间为排斥力, q_2 和 q_0 之间为吸引力, 如图 12-5 所示。利用静电力叠加原理可得 q_0 所受合力为

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \mathbf{F}_{01} + \mathbf{F}_{02} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_0 q_1}{r_1^2} \hat{\mathbf{r}}_1 + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_0 q_2}{r_2^2} \hat{\mathbf{r}}_2 \\ &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_0 q_1}{r_1^2} \cos\theta \hat{\mathbf{i}} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_0 q_1}{r_1^2} \sin\theta \hat{\mathbf{j}} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_0 q_2}{r_2^2} \hat{\mathbf{i}} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q_0 q_2}{r_2^2} - \frac{q_0 q_1}{r_1^2} \cos\theta \right) \hat{\mathbf{i}} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_0 q_1}{r_1^2} \sin\theta \hat{\mathbf{j}} \end{aligned}$$

当两个带电体中的一个不能视为点电荷时,我们可以首先采用微元分析法,将该带电体看作为许多点电荷元组成的,其中任意一个电荷元与点电荷之间的作用力遵从库仑定律,再利用静电力叠加原理,计算点电荷所受静电力。

例 12-2 如图 12-6(a)所示,一正点电荷 q_0 置于长度为 L ,带电量为 $+q$ 的线状带电体的垂直平分线上,若 q_0 到带电线的垂直距离为 d ,求 q_0 所受静电力。

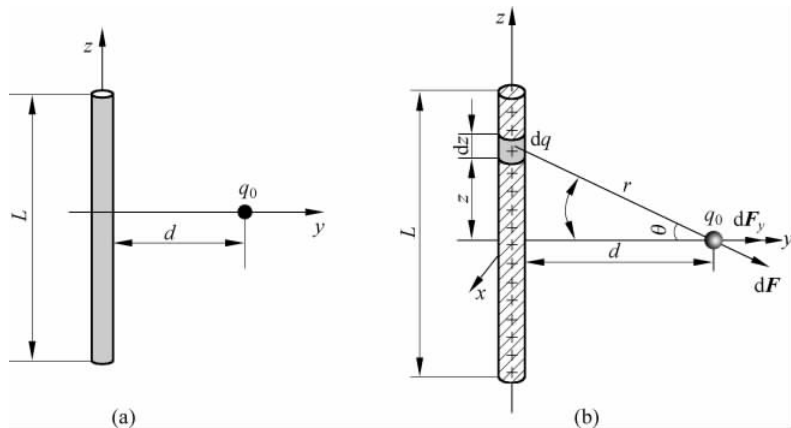


图 12-6 例 12-2 用图

解 将带电细线分成可视为点电荷的许多长度为 dz ,电荷量为 dq 的微元电荷,其中任意一个电荷元 dq 对 q_0 的作用力为 $d\mathbf{F}$,方向如图 12-6(b)所示。按图示坐标,电荷元 $dq=qdz/L$ 。由库仑定律, $d\mathbf{F}$ 的大小为

$$dF = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_0 dq}{r^2}$$

由电荷分布的对称性可知,所有电荷元对 q_0 的作用力,在 z 轴方向的投影相互抵消,必有 $F_z = \int dF_z = 0$ 。因此, q_0 所受合力沿 y 轴正向,其大小为

$$\begin{aligned} F_y &= \int dF_y = \int \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_0 dq}{r^2} \cos\theta = \int_{-L/2}^{L/2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_0 q dz}{L(d^2 + z^2)} \frac{d}{\sqrt{d^2 + z^2}} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_0 q}{d\sqrt{d^2 + L^2/4}} \end{aligned}$$

如果 q_0 距离带电线很远,满足 $d \gg L$,则上面的结果变为

$$F_y = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_0 q}{d^2}$$

这正是两个点电荷之间的作用力,可见只要电荷之间的间距比带电体本身尺度大很多,就可将其视为点电荷。

12.1.4 静电力的壳定理

壳定理 1: 一个均匀带电的球壳作用在球壳外任意一点处的点电荷上的静电力等于将球壳上所有电荷集中于球心处的点电荷所施加的静电力。

壳定理 2: 置于一个均匀带电的球壳内任何一点处的点电荷, 所受静电力为零。

例 12-3 证明上述两个定理。

证明 如图 12-7 所示, 设带电球壳厚度为 t 、半径为 R , 带有电量 $-Q$, 电荷体密度为 ρ 。将球壳分割成许多半径不同的圆环, 假设圆环带电量为 dQ 。再将圆环分割成许多微小的点电荷 dq_A 、 dq_B 、……。对称性分析不难发现, 圆环对点电荷 q 的作用力沿球壳半径指向球心。由库仑定律可知, 圆环上 A 点处的点电荷 dq_A 对 q 的作用力在半径方向的投影为

$$df_{Ar} = -\frac{qdq_A}{4\pi\epsilon_0 x^2} \cos\alpha \hat{r} \quad (1)$$

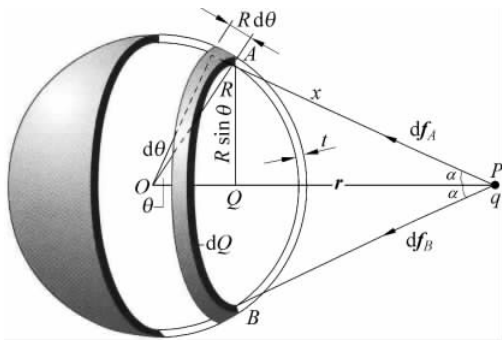


图 12-7 例 12-3 用图

由静电力叠加原理可得整个圆环作用在点电荷 q 上的作用力为

$$dF = \int df_{Ar} = \int -\frac{qdq_A}{4\pi\epsilon_0 x^2} \cos\alpha \hat{r} = -\frac{qdQ}{4\pi\epsilon_0 x^2} \cos\alpha \hat{r} \quad (2)$$

其中 $dQ = \int_{\text{圆环}} dq_A = \rho 2\pi R \sin\theta \cdot R d\theta \cdot t = 2\pi R^2 \rho t \sin\theta d\theta$ 。利用

$$\cos\alpha = \frac{r - R\cos\theta}{x}, \quad r\cos\theta = \frac{r^2 + R^2 - x^2}{2r}, \quad \sin\theta d\theta = \frac{x}{rR} dx$$

可得圆环作用在点电荷 q 上的静电力大小为

$$dF = \frac{\rho t R q}{4\epsilon_0 r^2} \left(\frac{r^2 - R^2}{x^2} + 1 \right) dx \quad (3)$$

再次利用静电力叠加原理可得整个球壳作用在点电荷 q 上的作用力大小为

$$F = \int dF = \frac{\rho t R q}{4\epsilon_0 r^2} \int_{r-R}^{r+R} \left(\frac{r^2 - R^2}{x^2} + 1 \right) dx = \frac{q\rho 4\pi R^2 t}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (4)$$

静电力方向指向球心。

若点电荷 q 位于球壳内部, 距离球心为 r 处, 如图 12-8 所示, 则积分式(4)上下限将变为

$$F = \int dF = \frac{\rho t R q}{4\epsilon_0 r^2} \int_{R-r}^{r+R} \left(\frac{r^2 - R^2}{x^2} + 1 \right) dx = 0$$

实际上,只要电荷在球壳上的分布具有球对称性,也就是说,电荷体密度可以随球壳半径 r 变化,壳定理都成立。

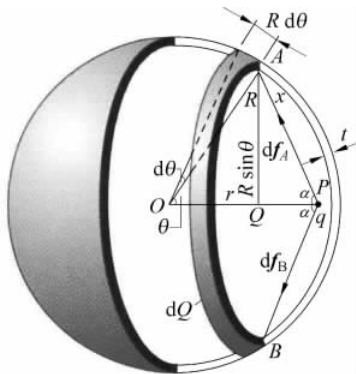


图 12-8 例 12-3 用图

! 温馨提示: 叠加原理和微元分析方法将是电磁学部分分析和解决问题的重要方法,也是大家必须掌握的一种基本方法。后面我们还会学习电场和磁场的矢量叠加问题,电势、电势能和矢量场通量等的标量叠加问题,注意它们的区别与联系。

12.2 真空中的静电场 电场强度

12.2.1 什么是场

在你所坐的房间里,空间每一点都有确定的温度,你可以用温度计测量出每一点的温度,然后建立一个房间的直角坐标系,标识出每一点的温度,或用数学函数 $T(x, y, z)$ 表示出空间各点的场分布,温度的分布称为**温度场**。完全类似的方法,你还可以表示出房间各点的**压强场**。

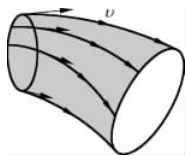


图 12-9 流体速度场

但是,如果你想测量一个弯曲的管道中各点流体的速度,你不但需要表示出各空间点速度的大小,还必须表示出方向。最后,你也可以把空间各点速度的大小和方向用一张图表示出来,如图 12-9 所示;或用一个数学函数 $\boldsymbol{v}(x, y, z)$ 表示出来。

如果场分布不随时间变化,则称这种场为**静场**。反之,如果场分布随时间变化,则称这种场为**时变场**。

! 温馨提示: “场”是一个抽象的概念,在数学上通常用一个空间点函数来表达。但需要注意的是,如同物理量分为矢量和标量一样,场也分标量场和矢量场。若所研究的物理量为标量,则对应的场就是标量场,例如温度场,由于空间各点温度只需要一个温度计读数就能确定,因此,表示一个热辐射物体周围空间不同点的温度函数 $T(x, y, z)$ 是一个标量函数。但一个管道中气流或水流的速度场则是一个矢量场,因为,空间不同点,流体各部分的流速函数 $\boldsymbol{v}(x, y, z)$ 是矢量,每一点速度的大小和方向不同。

12.2.2 真空中的静电场

真空中,电荷可以在很大的空间距离上与另一个电荷发生相互作用,那么,电荷间是如何传递这种相互作用的呢?一种观点认为,静电力的传递不需要任何媒介,也不需要传递时间,称为超距作用。可表示为

$$\text{电荷} \Leftrightarrow \text{电荷}$$

另一种观点,是英国物理学家法拉第首先提出的,他认为电荷周围存在一种场,电荷之间的相互作用就是通过场这个媒介来传递的,即

$$\text{电荷} \Leftrightarrow \text{电场} \Leftrightarrow \text{电荷}$$

现代科学已经证实,场是物质存在的一种形态,因为其具有物质的属性,其物质属性表现在场对处于其中的带电体有力的作用,带电体在场中移动时,电场力会对它做功,即场具有能量和动量。相对于观察者静止的点电荷所激发的电场称为**静电场**。

12.2.3 电场强度

电荷周围空间各点存在电场,场的存在可以用另一个电荷受力来检验,若产生场的电荷 q 称为**场源电荷**,则检验场的电荷 q_0 称为**检验电荷**,而把所讨论的空间点称为**场点**。场源电荷可以是点电荷、点电荷系或者是具有某种电荷分布的带电体。而检验电荷必须满足两个条件:第一,它的几何线度要小到可以被视为点电荷,以便检测各场点的特性;第二,它的电量要足够小,以致可以忽略它所引起的场源电荷分布的变化。

实验发现:(1)对于如图 12-10 所示的任意带电体周围空间的任意一点 P ,检验电荷所受静电力 F_P 与检验电荷 q_0 的电量成正比,因此比值 F_P/q_0 与 q_0 无关。(2)带电体周围空间不同场点,检验电荷 q_0 所受静电力大小和方向不同,即 F/q_0 不同。显然,比值 F/q_0 反映了场源电荷空间不同场点的性质,即电场本身的性质,而与检验电荷无关。所以定义这个比值为**电场强度**,简称**场强**,用矢量符号 E 表示:

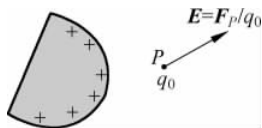


图 12-10 电场强度

$$\mathbf{E} = \lim_{q_0 \rightarrow 0} \frac{\mathbf{F}}{q_0} \quad (12-2-1)$$

式(12-2-1)表明,在电场中,对于确定的场点,就有一个确定的电场强度;电场中某点的电场强度在数值上等于单位电量检验电荷在该点受到的电场力的大小;其方向与正检验电荷在该点所受电场力的方向相同。

综上所述,电场强度是空间矢量点函数,它描述各场点对置于该处的检验电荷施力的强弱和方向特性,反映了电场的空间分布。在国际单位制中,电场强度的单位是 N/C (牛[顿]/库[仑])或 V/m (伏特/米)。定量研究静电场,就是要计算各种场源电荷的电场强度随空间坐标变化的函数关系 $\mathbf{E}(x, y, z)$ 。显然,电场是一个矢量场,空间各点电场大小和方向一般情况下不同。当空间各点电场大小和方向相同时,称为**均匀电场**。

12.2.4 点电荷电场与场强叠加原理

如果场源电荷为点电荷 q ,在以 q 为参考,相对于 q 的位置矢量为 \mathbf{r} 处,检验电荷 q_0 受

到的库仑力为

$$\mathbf{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_0 q}{r^3} \hat{\mathbf{r}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_0 q}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \quad (12-2-2)$$

由定义可得该点电场强度为

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}}{q_0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \quad (12-2-3)$$

显然,该结果表示出了点电荷 q 周围空间所有点的电场强度。式(12-2-3)表明,(1)点电荷的电场强度方向与点电荷 q 的符号有关,正点电荷 q 的电场方向沿以 q 为参考的位置矢量 \mathbf{r} 的方向,远离电荷 q ; 负电荷的电场方向则指向电荷 q ,如图 12-11 所示;(2)与 q 的距离相同的球面上各点,电场强度的大小相同,方向垂直于球面。

如图 12-12 所示,在场点 $P(x, y, z)$ 处,电场强度 $\mathbf{E}(x, y, z)$ 可用分量表示为

$$\begin{cases} E_x = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{x}{r^3} \\ E_y = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{y}{r^3} \\ E_z = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{z}{r^3} \end{cases} \quad (12-2-4)$$

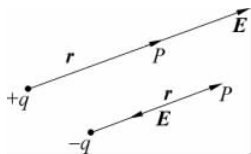


图 12-11 点电荷电场强度

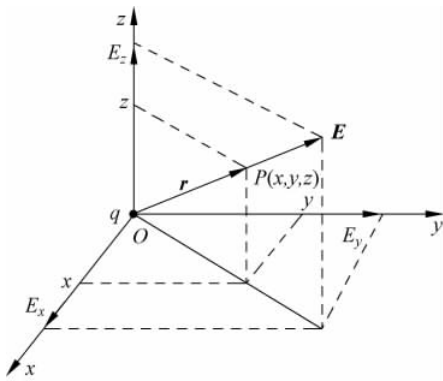


图 12-12 点电荷电场强度的直角坐标分量

当空间同时存在多个点电荷 q_1, q_2, \dots, q_n 时,由静电力叠加原理可知,检验电荷 q_0 在场点 P 处受到的电场力 \mathbf{F} 等于各个场源点电荷单独存在时作用于 q_0 的静电力的矢量和,即

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \dots + \mathbf{F}_n$$

由电场强度定义, P 点的电场强度为

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}_1}{q_0} + \frac{\mathbf{F}_2}{q_0} + \dots + \frac{\mathbf{F}_n}{q_0} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 + \dots + \mathbf{E}_n = \sum_i \mathbf{E}_i \quad (12-2-5)$$

式(12-2-5)中的 $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \dots, \mathbf{E}_n$ 分别为 q_1, q_2, \dots, q_n 单独存在时在 P 点的电场强度。所以,点电荷系的电场中,任意一点的电场强度等于各点电荷单独存在时在该点产生的电场强度的矢量和,这个结论称为场强叠加原理。

如果带电体既不是点电荷,也不是点电荷系,而是电荷连续分布的带电体,我们可以将带电体视为由无限多个微小的点电荷元组成,由点电荷电场强度式(12-2-3)可知,任意一个电量为 dq 的点电荷元在空间任一点 P 的电场强度为

$$d\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r^3} \mathbf{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \quad (12-2-6)$$

其中, \mathbf{r} 为由点电荷元 dq 指向 P 点的位置矢量, 如图 12-13 所示。利用场强叠加原理可知, 整个带电体在 P 点处的电场强度应为

$$\mathbf{E} = \int d\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \quad (12-2-7)$$

通常的带电体电荷分布不外乎体分布、面分布和线分布, 因此, 点电荷元的电量可以分别表示为

$$dq = \begin{cases} \rho dV \\ \sigma dA \\ \lambda ds \end{cases} \quad (12-2-8)$$

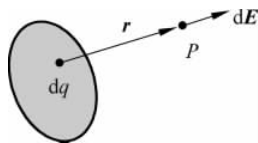


图 12-13 连续分布电荷的电场

其中, $\rho = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta V} = \frac{dq}{dV}$ 表示带电体单位体积中的电荷, $\sigma = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta A} = \frac{dq}{dA}$ 表示带电体单位面积上的电荷, $\lambda = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta s} = \frac{dq}{ds}$ 表示带电体单位长度上的电荷。由于宏观带电体电荷分布不一定均匀, 即相同体积或面积、长度上的电荷量不一定相同, 所以, 这种表示方法可以更精确地描述带电体电荷分布的宏观不均匀性。

12.2.5 电场强度的计算

由于电场强度是矢量, 实际进行电场强度的空间分布计算时, 式(12-2-7)中每一个电荷元 dq 的电场强度大小和方向都不同, 因此无法直接进行积分运算, 通常是通过分量积分进行。即由

$$d\mathbf{E} = dE_x \hat{\mathbf{i}} + dE_y \hat{\mathbf{j}} + dE_z \hat{\mathbf{k}} \quad (12-2-9)$$

其中

$$\begin{cases} E_x = \int dE_x \\ E_y = \int dE_y \\ E_z = \int dE_z \end{cases} \quad (12-2-10)$$

通过分别积分计算 E_x, E_y, E_z , 最后得到

$$\mathbf{E} = E_x \hat{\mathbf{i}} + E_y \hat{\mathbf{j}} + E_z \hat{\mathbf{k}} \quad (12-2-11)$$

下面通过几个典型例题来说明如何从已知的电荷分布求场强分布函数。

例 12-4 电偶极子的电场。

如图 12-14 所示, 我们把两个相距很近(两者间的距离 d 比它们到观测点的距离小得多)的等量异号点电荷 $+q$ 和 $-q$ 组成电荷系统称为**电偶极子**。从 $-q$ 到 $+q$ 的位矢 \mathbf{d} 称为电偶极子的**极轴**, 电荷 q 与极轴 \mathbf{d} 的乘积称为**电偶极矩**, 即

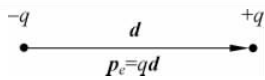


图 12-14 电偶极子

$$\mathbf{p}_e = q\mathbf{d} \quad (12-2-12)$$

我们下面来求电偶极子电场中两个特殊点的电场:

(1) 电偶极子极轴垂直平分线上的任意一点 P 点的场

解 如图 12-15 所示,由场强叠加原理, P 点的场等于两个点电荷的电场的矢量叠加, $\mathbf{E} = \mathbf{E}_+ + \mathbf{E}_-$ 。两个电场的大小分别为

$$E_+ = E_- = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{[x^2 + (d/2)^2]}$$

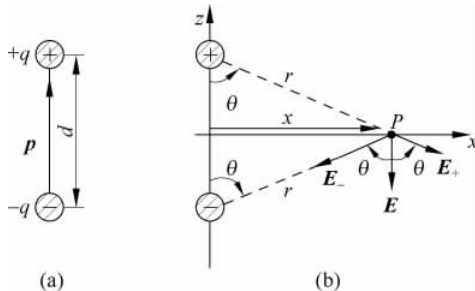


图 12-15 例 12-4(1)用图

由于两个电荷电场的大小相等,由对称性可知,两个电场矢量和垂直于 x 轴沿 z 轴负方向。大小为

$$\begin{aligned} E &= E_+ \cos\theta + E_- \cos\theta = 2E_+ \cos\theta \\ &= 2 \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{x^2 + (d/2)^2} \frac{d/2}{\sqrt{x^2 + (d/2)^2}} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p_e}{[x^2 + (d/2)^2]^{3/2}} \end{aligned} \quad (12-2-13)$$

当场点 P 距离电偶极子很远, $x \gg d$ 时,利用二项式定理

$$(1+y)^n = 1 + ny + \frac{n(n-1)}{2!}y^2 + \dots \quad (12-2-14)$$

式(12-2-13)可写为

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p_e}{x^3} [1 + (d/2x)^2]^{-3/2} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p_e}{x^3} \left[1 + \left(-\frac{3}{2}\right) \left(\frac{d}{2x}\right)^2 + \dots \right] \end{aligned} \quad (12-2-15)$$

$x \gg d$ 时,只保留第一项,得

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p_e}{x^3} \quad (12-2-16)$$

(2) 电偶极子极轴延长线上的任意一点 P 点的场

解 如图 12-16 所示,选择电偶极子中心为 z 轴坐标原点,由场强叠加原理, P 点的场强等于两个点电荷的电场矢量叠加, $\mathbf{E} = \mathbf{E}_+ + \mathbf{E}_-$ 。由于两个电场方向相反,所以电场强度的大小

$$\begin{aligned} E &= E_+ - E_- = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r_+^2} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r_-^2} \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 z^2} \left[\left(1 - \frac{d}{2z}\right)^{-2} - \left(1 + \frac{d}{2z}\right)^{-2} \right] \end{aligned} \quad (12-2-17)$$

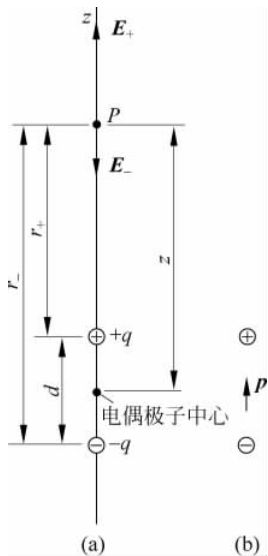


图 12-16 例 12-4(2)用图