CHAPTER

1

# 第 1 章

# 常用几何辅助线添加方法

# 1.1 连　　接

## 方法说明

如图 1.1.1 所示,将图中两个点用线段连接起来的辅助线添加方法叫作连接.连接是最简单、最常用的辅助线添加方法之一.通过连接这种辅助线来构造我们需要的图形的方法有很多,需要平时多积累,多应用,才能达到熟能生巧的境界.

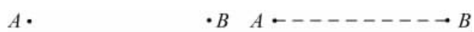


图　1.1.1

## 方法归纳

1. 如图 1.1.2 所示,通过连接构建全等三角形.

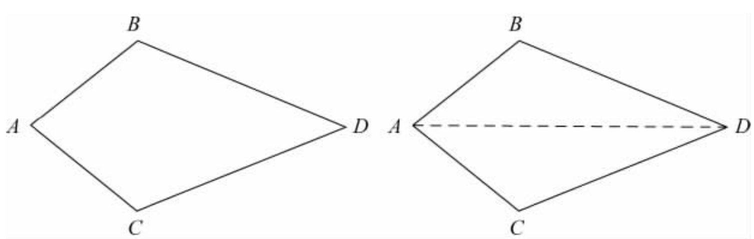


图　1.1.2

2. 如图 1.1.3 所示,通过连接构建角平分线.

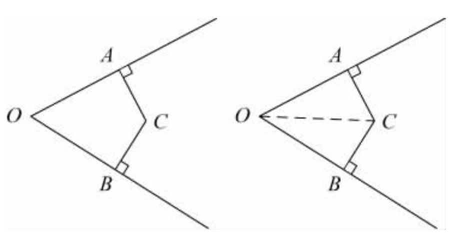


图　1.1.3

3. 如图 1.1.4 所示,通过连接构建相等的线段.

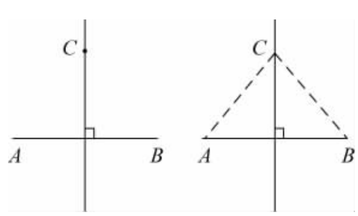


图　1.1.4

4. 如图 1.1.5 所示,连接三角形顶点和对边中点构建中线.

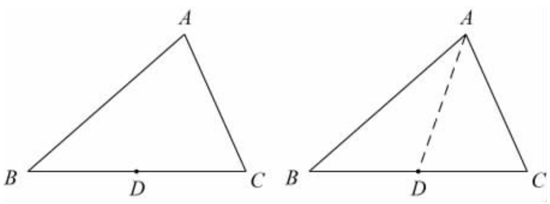


图 1.1.5

5. 如图 1.1.6 所示,连接三角形相邻边的中点构建中位线.

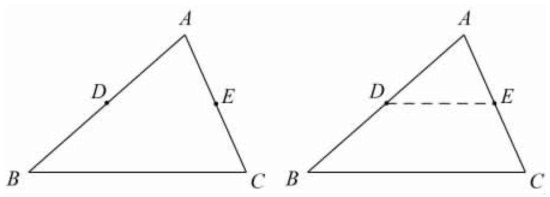


图 1.1.6

6. 如图 1.1.7 所示,通过连接圆心和圆上的两个点构建圆心角.

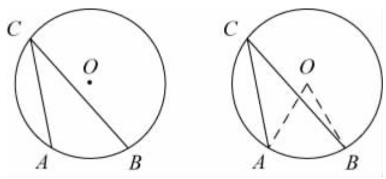


图 1.1.7

7. 如图 1.1.8 所示,通过连接圆上的一个点和其他两个点构建圆周角,特别是有直径的时候.

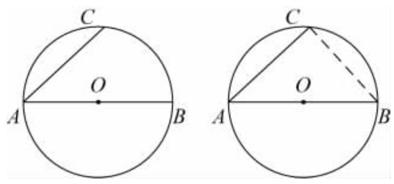


图 1.1.8

8. 如图 1.1.9 所示,连接切点和圆心构建切线的垂线.

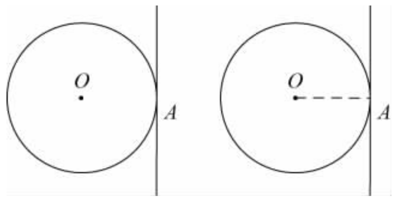


图 1.1.9

## 典型例题

一位同学拿了两块全等的等腰直角三角形的三角尺$\triangle ABC$、$\triangle MNK$做了一个探究活动：将$\triangle MNK$的直角顶点$M$放在$\triangle ABC$的斜边$AB$的中点处，将图1.1.10中的$\triangle MNK$绕顶点$M$逆时针旋转，得到图1.1.11，设$AC=BC=4$.

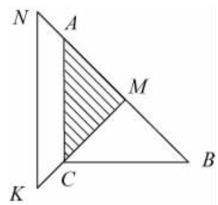


图 1.1.10

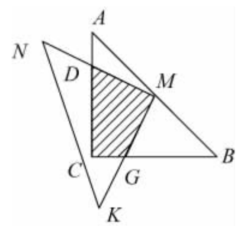


图 1.1.11

（1）当$AD=1$时，求重叠部分$MDCG$的面积.

（2）$\triangle MNK$在绕定点旋转的过程中，保持$MN$与$AC$有交点$D$，$MK$与$BC$有交点$G$，四边形$MDCG$的面积是否会改变？请说明理由.

（3）$\triangle MNK$在绕定点旋转的过程中，保持$MN$与$AC$有交点$D$，$MK$与$BC$有交点$G$，$DG$两点间的距离最小值是多少？试求出此时重叠部分$MDCG$的周长.

### 思路点拨

（1）① 先读题，再把已知条件（角度、长度）标记在图中.

② 想象图形旋转过程中的变化情况，并观察图1.1.11. $M$为斜边$AB$的中点，联想“三线合一”模型，并连接$MC$，如图1.1.12所示.

③ 观察图中的三角形，$\triangle ADM$与$\triangle CGM$，$\triangle DCM$与$\triangle GBM$，猜想：$\triangle ADM\cong\triangle CGM$，$\triangle DCM\cong\triangle GBM$. 通过寻找边角之间的关系证明结论.

④ 因此$S_{四边形MDCG}=S_{\triangle DCM}+S_{\triangle CGM}=S_{\triangle DCM}+S_{\triangle ADM}=S_{\triangle ACM}=\frac{1}{2}S_{\triangle ABC}$.

（2）由（1）得旋转的过程中，四边形$MDCG$的面积是不会改变的，且等于$\frac{1}{2}S_{\triangle ABC}$.

（3）① 如图1.1.13所示，求$DG$的最小值，要先用一个变量表示出$DG$的长度.

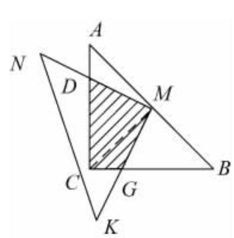


图 1.1.12

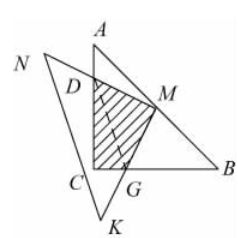


图 1.1.13

② 设 $CG=x$，则 $CD=BG=4-x$，在 $\mathrm{Rt}\triangle DCG$ 中，$DG^2=CD^2+CG^2=(4-x)^2+x^2$.

③ 用配方法或者二次函数顶点式求出 $DG$ 的最小值，并求出四边形 $MDCG$ 的周长即可.

## 解题过程

**解**：(1) 连接 $MC$，如图 1.1.14 所示，则 $AM=CM$，$\angle AMC=\angle DMG=90^\circ$，

$\therefore \angle AMD=\angle CMG$. $\because \angle A=\angle MCG=45^\circ$，$\therefore \triangle ADM\cong\triangle CGM$(ASA).

$$\therefore S_{\text{四边形}MDCG}=S_{\triangle DCM}+S_{\triangle CGM}=S_{\triangle DCM}+S_{\triangle ADM}=S_{\triangle ACM}=\frac{1}{2}S_{\triangle ABC}$$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times 4\times 4=4.$$

(2) 四边形 $MDCG$ 的面积不会改变，理由如下.

**【方法一】**

同(1)，略.

**【方法二】**

分别过点 $M$ 作 $ME\perp AC$ 于 $E$，$MF\perp BC$ 于 $F$，如图 1.1.15 所示.

由(1)可得 $ME=MF$，$\angle EMF=90^\circ$，$\angle NMK=90^\circ$，

$\therefore \angle DME+\angle EMG=\angle EMG+\angle GMF$，$\therefore \angle DME=\angle GMF$，

$\therefore \triangle DME\cong\triangle GMF$(ASA)，$S_{\triangle DME}=S_{\triangle GMF}$，

$\therefore S_{\text{四边形}MDCG}=S_{\triangle DME}+S_{\text{四边形}EMGC}=S_{\triangle GMF}+S_{\text{四边形}EMGC}=S_{\text{四边形}EMFC}=4$.

(3)**【方法一】**

连接 $DG$，如图 1.1.16 所示，由(2)得 $AD=CG$.

设 $CG=x$，则 $CD=4-x$.

$\therefore \mathrm{Rt}\triangle DCG$ 中，$DG^2=CD^2+CG^2=(4-x)^2+x^2=2(x-2)^2+8$，

$\therefore$ 当 $x=2$ 时，$DG^2$ 有最小值 8，此时 $DG$ 的最小值为 $2\sqrt{2}$，且 $D$、$G$ 分别为 $AC$、$BC$ 的中点，重叠部分 $MDCG$ 的周长＝正方形 $DMGC$ 的周长＝$2\times4=8$.

**【方法二】**

如图 1.1.16 所示，连接 $DG$，由(1)可得 $DM=GM$，

$\therefore$ 在 $\mathrm{Rt}\triangle DMG$ 中，$DG^2=DM^2+GM^2=2DM^2$，

$\therefore$ 当 $MD\perp AC$ 时，根据垂线段最短得 $MD$ 长度最小为 $\frac{1}{2}AC$，即 $MD=2$，

$\therefore DG^2=2DM^2=8$，即 $DG=2\sqrt{2}$.

$\because \angle C=\angle DMG=\angle MDC=90^\circ$，$MD=MG$，$\therefore$ 四边形 $MDCG$ 为正方形，

$\therefore$ 重叠部分 $MDCG$ 的周长＝$4MD=8$.

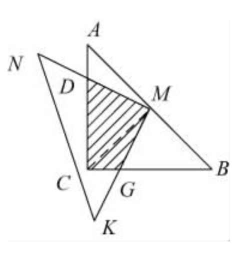


图　1.1.14

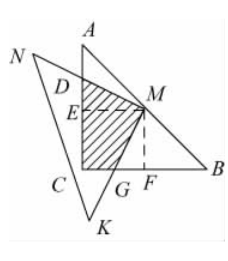


图　1.1.15

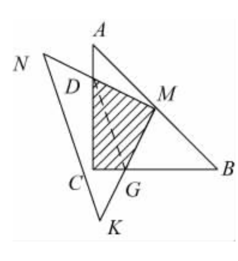


图　1.1.16

## 举一反三

1.(09鸡西)已知Rt$\triangle ABC$中,$AC=BC$,$\angle C=90°$,$D$为$AB$边的中点,$\angle EDF=90°$,$\angle EDF$绕$D$点旋转,它的两边分别交$AC$、$CB$(或它们的延长线)于$E$、$F$.当$\angle EDF$绕$D$点旋转到$DE\perp AC$于$E$时(见图1.1.17),易证$S_{\triangle DEF}+S_{\triangle CEF}=\frac{1}{2}S_{\triangle ABC}$.当$\angle EDF$绕$D$点旋转到$DE$和$AC$不垂直时,在图1.1.18和图1.1.19这两种情况下,上述结论是否成立?若成立,请给予证明;若不成立,$S_{\triangle DEF}$、$S_{\triangle CEF}$、$S_{\triangle ABC}$又有怎样的数量关系?请写出你的猜想,并证明你的结论.

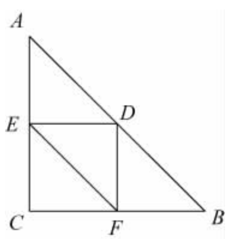

图 1.1.17

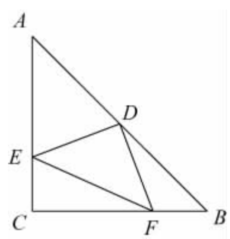

图 1.1.18

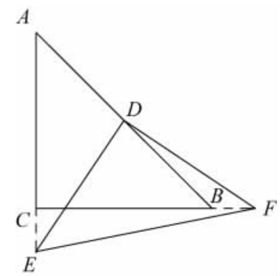

图 1.1.19

2.如图1.1.20所示,$AB$是$\odot O$的直径,$AB=6\sqrt{2}$,$M$是弧$AB$的中点,$OC\perp OD$,$\triangle COD$绕点$O$旋转与$\triangle AMB$的两边分别交于$E$、$F$(点$E$、$F$与点$A$、$B$、$M$均不重合),与$\odot O$分别交于$P$、$Q$两点.

(1)求证:$OE=OF$.

(2)连接$PM$、$QM$,试探究:在$\triangle COD$绕点$O$旋转的过程中,$\angle PMQ$是否为定值?若是,求出$\angle PMQ$的大小;若不是,请说明理由.

(3)连接$EF$,试探究:在$\triangle COD$绕点$O$旋转的过程中,$\triangle EFM$的周长是否存在最小值?若存在,求出其最小值;若不存在,请说明理由.

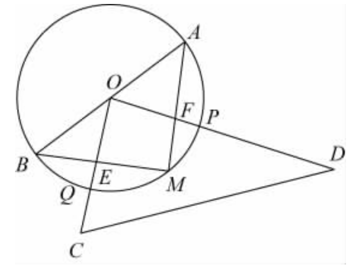

图 1.1.20

# 1.2　延　　长

## 方法说明

如图 1.2.1 所示，把一条线段往一个方向延长一定长度的辅助线添加方法叫作延长．通过延长来构造我们需要的图形也是最常用的辅助线添加方法之一，其中最具代表性的有“截长补短”和“倍长中线”两类（这两个部分的内容请看后面章节的详述）．通常，延长之后还要用连接来组成一个完整的图形．


图　1.2.1

## 方法归纳

1．如图 1.2.2 所示，通过延长构建邻补角．

2．如图 1.2.3 所示，通过延长构建三角形．

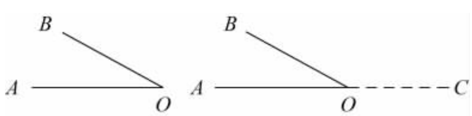


图　1.2.2

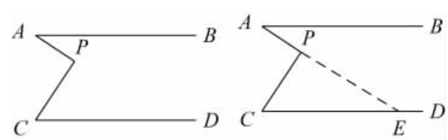


图　1.2.3

3．如图 1.2.4 所示，通过延长构建三角形的外角．

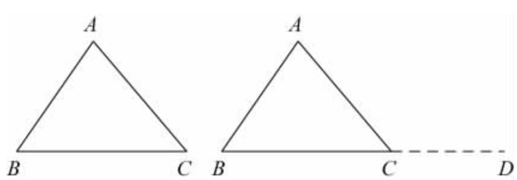


图　1.2.4

4．如图 1.2.5 所示，梯形中延长两条腰来构建三角形．

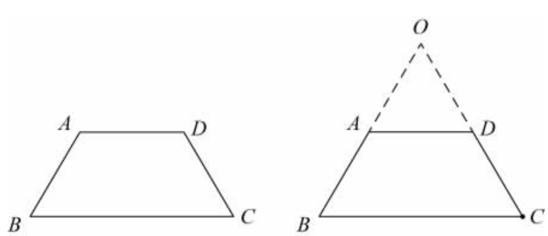


图　1.2.5

5. 如图 1.2.6 所示，通过延长半径得到直径并连接成圆周角.

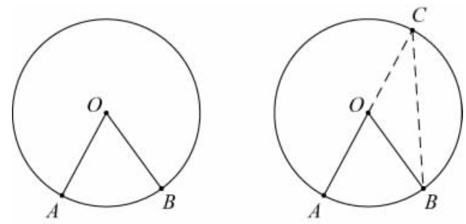


图 1.2.6

6. 如图 1.2.7 所示，对角互补（$\angle ABC+\angle ADC=180^{\circ}$）的四边形，可以延长一边构建全等三角形，实现边和角的转化.

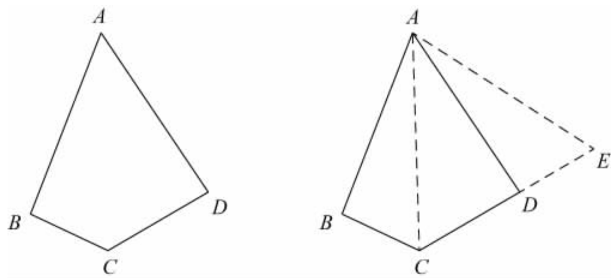


图 1.2.7

7. 如图 1.2.8 所示，图中若有连接两平行线之间的线段的中点时，可以在一条直线上任取一点，与中点连接并延长至与另一平行线相交构建全等三角形.

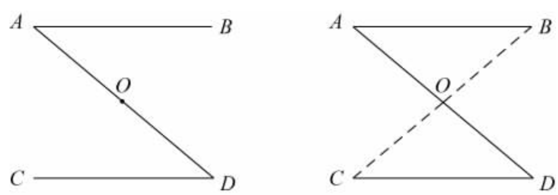


图 1.2.8

## 典型例题

如图 1.2.9 所示，在▱$ABCD$ 中，$AB=5$，$BC=10$，$F$ 为 $AD$ 的中点，$CE\perp AB$ 于 $E$，设$\angle ABC=\alpha$（$60^{\circ}\leqslant\alpha<90^{\circ}$）.

（1）当 $\alpha=60^{\circ}$时，求 $CE$ 的长.

（2）当 $60^{\circ}<\alpha<90^{\circ}$时，

① 是否存在正整数 $k$，使得$\angle EFD=k\angle AEF$？若存在，求出 $k$ 的值；若不存在，请说明理由.

② 连接 $CF$，当 $CE^2-CF^2$ 取最大值时，求 $\tan\angle DCF$ 的值.

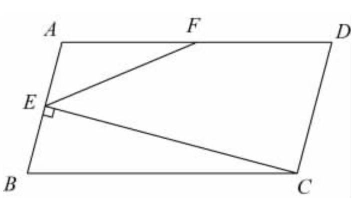


图 1.2.9

## 思路点拨

（1）① 先读题，再把已知条件（角度、长度）标记在图中.

② 要求 $CE$ 的长，可以发现 $CE$ 在 Rt△$BCE$ 中，根据三角函数“知二求三”，就可以求出来.

③ 把已知条件 $\alpha=60°$，$BC=10$ 代入即可求出 $CE$ 的长.

（2）① 观察问题“是否存在正整数 $k$，使得∠$EFD=k$∠$AEF$”.

② 遇到这类问题，需要先进行猜测. 首先，存在性问题通常都是存在的，其次，观察图形可以猜测 $k$ 的值. 怎么猜测？一种方法是用量角器直接量；另一种方法是取特殊情况，当 $\alpha=90°$等特殊情况求出相应的角度值，再判定其中 $k$ 的值. 因此，很容易就可以得到 $k=3$.

③ 那接下来应该怎么添加辅助线帮助解答问题呢？第一种方法，通过观察发现题目中一个重要的条件就是 $F$ 为 $AD$ 的中点，而且 $AB∥CD$，此时，只需延长线段 $EF$ 与线段 $CD$ 交于点 $G$，并连接 $CF$ 即可，如图 1.2.10 所示. 然后证明∠$EFD$＝∠$EFC$＋∠$CFD$＝3∠$AEF$. 当然，如图 1.2.11 所示，先连接 $CF$ 并延长至与线段 $BA$ 的延长线交于一点 $G$ 也可以，方法类似.

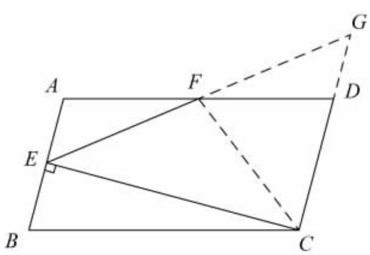


图 1.2.10

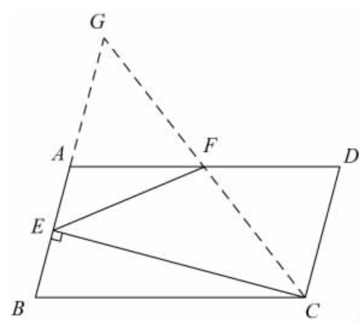


图 1.2.11

④ 第二小问的条件是“当 $CE^2-CF^2$ 取最大值时”，看到“$CE^2-CF^2$”就可以联想到勾股定理，看到“最大值”就可以联想到二次函数. 因此本题的突破口在于表示出 $CE^2-CF^2$ 的值.

⑤ 根据未知数设小不设大的原则，可以设 $BE=x$，并表示出其他所有变化的边，然后表示出 $CE^2-CF^2$ 即可. 当求出 $BE$ 取具体某个值时，$CE^2-CF^2$ 取最大值，我们才可以继续进行最后的问题，求 tan∠$DCF$ 的值.

⑥ 由于∠$DCF$ 不在一个直角三角形内，因此需要进行转化，观察发现∠$DCF$＝∠$G$，在 Rt△$CEG$ 中求出 tan∠$G$ 的值，那么 tan∠$DCF$ 的值就出来了.

## 解题过程

**解**：（1）∵$\alpha=60°$，$BC=10$，∴$\sin\alpha=\dfrac{CE}{BC}$，即 $\sin 60°=\dfrac{CE}{10}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，解得 $CE=5\sqrt{3}$.

(2)【方法一】

① 当 $60^\circ<\alpha<90^\circ$ 时，存在 $k=3$，使得 $\angle EFD=3\angle AEF$. 理由如下.

如图 1.2.12 所示，延长 $EF$ 交 $CD$ 的延长线于点 $G$，并连接 $CF$.

$\because F$ 为 $AD$ 的中点，$\therefore AF=FD$. $\because$ 在 $\square ABCD$ 中，$AB\parallel CD$，$\therefore \angle G=\angle AEF$.

又 $\because \angle AFE=\angle DFG$，$\therefore \triangle AEF\cong\triangle DGF$(AAS)，$\therefore EF=GF$，$AE=GD$.

$\because CE\perp AB$，$AB\parallel CD$，$\therefore \angle DCE=\angle BEC=90^\circ$，

$\therefore CF=EF=GF=\dfrac{1}{2}EG$，$\therefore \angle FCD=\angle G$，$\therefore \angle EFC=\angle FCD+\angle G=2\angle G$.

$\because AB=5$，$BC=10$，点 $F$ 是 $AD$ 的中点，

$\therefore CD=AB=5$，$DF=\dfrac{1}{2}AD=\dfrac{1}{2}BC=5$，$\therefore DF=DC$，$\therefore \angle CFD=\angle FCD=\angle G$，

$\therefore \angle EFD=\angle EFC+\angle CFD=2\angle G+\angle G=3\angle G=3\angle AEF$，

$\therefore$ 存在正整数 $k=3$，使得 $\angle EFD=3\angle AEF$.

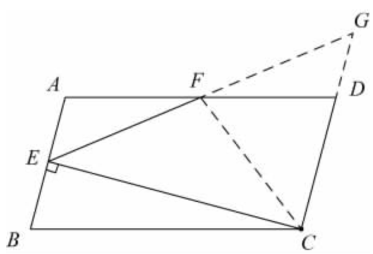


图 1.2.12

② 设 $BE=x$，$\because CD=AB=5$，$\therefore CG=CD+DG=CD+AE=5+5-x=10-x$.

在 Rt$\triangle BCE$ 中，$CE^2=BC^2-BE^2=100-x^2$.

在 Rt$\triangle CEG$ 中，$EG^2=CG^2+CE^2=(10-x)^2+100-x^2=200-20x$.

$\because$ 由①知 $CF=\dfrac{1}{2}EG$，$\therefore CF^2=\left(\dfrac{1}{2}EG\right)^2=\dfrac{1}{4}EG^2=\dfrac{1}{4}(200-20x)=50-5x$，

$\therefore CE^2-CF^2=100-x^2-50+5x=-x^2+5x+50=-\left(x-\dfrac{5}{2}\right)^2+50+\dfrac{25}{4}$.

当 $x=\dfrac{5}{2}$，即点 $E$ 是 $AB$ 的中点时，$CE^2-CF^2$ 取最大值.

此时，$CG=10-x=10-\dfrac{5}{2}=\dfrac{15}{2}$，$CE=\sqrt{100-x^2}=\sqrt{100-\dfrac{25}{4}}=\dfrac{5\sqrt{15}}{2}$，

$$\therefore \tan\angle DCF=\tan\angle G=\frac{CE}{CG}=\frac{\dfrac{5\sqrt{15}}{2}}{\dfrac{15}{2}}=\frac{\sqrt{15}}{3}.$$

【方法二】

① 当 $60^\circ<\alpha<90^\circ$ 时，存在 $k=3$，使得 $\angle EFD=3\angle AEF$. 理由如下.

如图 1.2.13 所示，连接 $CF$ 并延长交 $BA$ 的延长线于点 $G$.