第 3 章 矩阵及其运算

矩阵是一张表，以表格的形式呈现数据更能一目了然. 矩阵在讨论线性方程组解的理论中发挥着重要的作用，因此有必要进一步研究矩阵的运算.

3.1 矩阵的运算

1. 内容要点与评注

数域 F 上两个矩阵称为**同型**，如果它们的行数、列数分别相等.

定义 1 数域 F 上两个矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$，$\boldsymbol{B}=(b_{ij})$ 称为**相等**，如果它们同型，且所有对应元素满足 $a_{ij}=b_{ij}$，$i=1,2,\cdots,m$，$j=1,2,\cdots,n$，其中 m,n 分别是同型矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 的行数、列数.

定义 2 设数域 F 上同型矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$，$\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{m\times n}$，令矩阵 $\boldsymbol{C}=(a_{ij}+b_{ij})_{m\times n}$，则称 $\boldsymbol{C}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的**和**，记作 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$.

注 只有同型矩阵才可以相加，和阵 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 仍是与 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 同型的矩阵.

定义 3 设数域 F 上矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$，$k\in F$，令矩阵 $\boldsymbol{C}=(ka_{ij})_{m\times n}$，则称 $\boldsymbol{C}$ 为 k 与 $\boldsymbol{A}$ 的**数量乘积**，记作 $\boldsymbol{C}=k\boldsymbol{A}$.

注 数量乘法并非是用数去乘矩阵的某一行或某一列，而是用数去乘矩阵的每一行（列）.

设数域 F 上矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$，称矩阵 $(-a_{ij})_{m\times n}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的**负矩阵**，记作 $-\boldsymbol{A}$，即 $-\boldsymbol{A}=(-a_{ij})_{m\times n}$.

设数域 F 上同型矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$，$\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{m\times n}$，则 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{B})$.

容易验证，矩阵的加法和数量乘法满足类似于 n 维向量空间的加法和数量乘法所满足的 8 条运算法则：对于数域 F 上任意 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$，任意数 $k,l\in F$，有

(1) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$（加法交换律）；

(2) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})$（加法结合律）；

(3) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{0}+\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}$，其中 $\boldsymbol{0}$ 是与 $\boldsymbol{A}$ 同型的零矩阵；

(4) $\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{A})=(-\boldsymbol{A})+\boldsymbol{A}=\boldsymbol{0}$，其中 $-\boldsymbol{A}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的负矩阵；

(5) $1\cdot\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}$；

(6) $(kl)\boldsymbol{A}=k(l\boldsymbol{A})$；

(7) $(k+l)\boldsymbol{A}=k\boldsymbol{A}+l\boldsymbol{A}$；

(8) $k(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=k\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{B}$.

定义 4 设数域 F 上矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times s}$，$\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{s\times n}$，令矩阵 $\boldsymbol{C}=(c_{ij})_{m\times n}$，其中

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{is}b_{sj},\quad i=1,2,\cdots,m,\ j=1,2,\cdots,n,$$

则称 $\boldsymbol{C}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的**乘积**，记作 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AB}$，其中 c_{ij} 称为矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的 (i,j) 元.

注

(1) 左阵的列数必须等于右阵的行数时两个矩阵才可以相乘；

(2) 乘积阵的 (i,j) 元等于左阵的第 i 行与右阵的第 j 列对应元素的乘积之和；

(3) 乘积阵的行数取左阵的行数，乘积阵的列数取右阵的列数.

矩阵乘法满足如下运算法则：对于数域 F 上任意矩阵 $\boldsymbol{A}_{m\times s}$，$\boldsymbol{B}_{s\times t}$，$\boldsymbol{C}_{t\times n}$，$\boldsymbol{T}_{s\times t}$，任意数 k，$l\in F$，有

(1) $(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})$(乘法结合律)；

(2) $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{T})=\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{AT}$(乘法对加法的左分配律)；

(3) $(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{T})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{BC}+\boldsymbol{TC}$(乘法对加法的右分配律)；

(4) $k(\boldsymbol{AB})=(k\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}(k\boldsymbol{B})$.

注

(1) 矩阵的乘法不满足交换律：一般地，$\boldsymbol{TP}\neq\boldsymbol{PT}$，其中 $\boldsymbol{P}$ 是 $t\times s$ 矩阵.

(2) 矩阵的乘法不满足消去律：一般地，

若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{0}$ 且 $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{0}\nRightarrow\boldsymbol{B}=\boldsymbol{0}$；若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{AT}$ 且 $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{0}\nRightarrow\boldsymbol{B}=\boldsymbol{T}$.

主对角线上元素都为 1，其余元素都为 0 的 n 阶矩阵称为 n 阶**单位矩阵**，记作 $\boldsymbol{E}_n$ 或 $\boldsymbol{E}$，显然 $\boldsymbol{E}_m\boldsymbol{A}_{m\times n}=\boldsymbol{A}_{m\times n}$，$\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{E}_n=\boldsymbol{A}_{m\times n}$，因此单位矩阵在矩阵乘法运算中所起的作用类似于“1”在数的乘法运算中所起的作用.

主对角线上元素都为同一个数 k，其余元素都为 0 的 n 阶矩阵称为 n 阶**数量矩阵**，记作 $k\boldsymbol{E}_n$ 或 $k\boldsymbol{E}$. 显然 $(k\boldsymbol{E}_m)\boldsymbol{A}_{m\times n}=k\boldsymbol{A}_{m\times n}$，$\boldsymbol{A}_{m\times n}(k\boldsymbol{E}_n)=k\boldsymbol{A}_{m\times n}$，因此数量矩阵左(右)乘矩阵 $\boldsymbol{A}$ 所得的乘积阵相当于数 k 与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 作数量乘积.

如果两个矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$，则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 是**可交换**的.

显然 n 阶数量矩阵与任一 n 阶矩阵都是可交换的.

因矩阵乘法满足结合律，因此可以定义 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的非负整数次**幂**：

$$\boldsymbol{A}^n=\underbrace{\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}\cdot\cdots\cdot\boldsymbol{A}}_{n\text{个}},\quad n\in\mathbb{Z}^+,\quad \boldsymbol{A}^0=\boldsymbol{E}.$$

容易验证，对于任意自然数 k，l，有

$$\boldsymbol{A}^k\cdot\boldsymbol{A}^l=\boldsymbol{A}^{k+l},\quad (\boldsymbol{A}^k)^l=\boldsymbol{A}^{kl}.$$

注 由于矩阵乘法不满足交换律，一般地，有

$$(\boldsymbol{AB})^k\neq\boldsymbol{A}^k\cdot\boldsymbol{B}^k,(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^2\neq\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{B}^2.$$

如果矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 可交换，则 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^k$ 依二项展开式定理，有

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^k=\boldsymbol{A}^k+\mathrm{C}_k^1\boldsymbol{AB}^{k-1}+\mathrm{C}_k^2\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B}^{k-2}+\cdots+\mathrm{C}_k^{k-1}\boldsymbol{A}^{k-1}\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}^k.$$

设数域 F 上 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$，多项式

$$f(x)=a_mx^m+a_{m-1}x^{m-1}+\cdots+a_1x+a_0,a_i\in F,\quad i=0,\cdots,m,$$

用 $\boldsymbol{A}$ 替换 x 代入，得

$$f(\boldsymbol{A})=a_m\boldsymbol{A}^m+a_{m-1}\boldsymbol{A}^{m-1}+\cdots+a_1\boldsymbol{A}+a_0\boldsymbol{E},$$

称矩阵 $f(\boldsymbol{A})$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的**多项式**.

注

(1) $f(\boldsymbol{A})$ 的末项是 $a_0\boldsymbol{E}$ 而非 a_0；

(2) $f(\boldsymbol{A})$ 是与 $\boldsymbol{A}$ 同阶的矩阵.

(3) $f(\boldsymbol{A})g(\boldsymbol{A}) = g(\boldsymbol{A})f(\boldsymbol{A})$，其中矩阵 $g(\boldsymbol{A})$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的多项式，而

$$g(x) = b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0, b_i \in F,\ i = 0,1,\cdots,n.$$

设数域 F 上矩阵 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{m\times n}$，则称矩阵 $(a_{ji})_{n\times m}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的**转置矩阵**，记作 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$，即

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = (a_{ji})_{n\times m},$$

$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 的 (i,j) 元是 $\boldsymbol{A}$ 的 (j,i) 元. $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 为把 $\boldsymbol{A}$ 的行看成同序号的列所得到的矩阵.

和矩阵、数量矩阵、乘积矩阵的转置矩阵满足如下运算法则：设数域 F 上矩阵 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$，$\boldsymbol{B}_{m\times n}$，$\boldsymbol{C}_{n\times s}$，$\forall k \in F$，则：

(1) $(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{A}$；

(2) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$，推广有 $(\boldsymbol{A}_1 + \boldsymbol{A}_2 + \cdots + \boldsymbol{A}_m)^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{A}_1^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{A}_2^{\mathrm{T}} + \cdots + \boldsymbol{A}_m^{\mathrm{T}}$；

(3) $(k\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}} = k\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$；

(4) $(\boldsymbol{BC})^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$，推广有 $(\boldsymbol{B}_1\cdots\boldsymbol{B}_{m-1}\boldsymbol{B}_m)^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{B}_m^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}_{m-1}^{\mathrm{T}}\cdots\boldsymbol{B}_1^{\mathrm{T}}$.

注　一般地，$(\boldsymbol{BC})^{\mathrm{T}} \neq \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}$.

设数域 F 上 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$，以 $\boldsymbol{A}$ 的元素按原来排列组成的 n 阶行列式称为 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式，记作 $|\boldsymbol{A}|$，即 $|\boldsymbol{A}| = \det(a_{ij})$.

n 阶矩阵的行列式满足如下运算法则：设数域 F 上 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$，$\forall k \in F$，则

(1) $|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}| = |\boldsymbol{A}|$；

(2) $|k\boldsymbol{A}| = k^n|\boldsymbol{A}|$；

(3) $|\boldsymbol{AB}| = |\boldsymbol{A}|\cdot|\boldsymbol{B}|$，推广有 $|\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2\cdots\boldsymbol{A}_m| = |\boldsymbol{A}_1|\cdot|\boldsymbol{A}_2|\cdot\cdots\cdot|\boldsymbol{A}_m|$.

下面证明性质 3.

证　设 $|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$，$|\boldsymbol{B}| = \begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$，依拉普拉斯定理，有

$$D_{2n} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & \cdots & 0 & b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & -1 & b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix} = |\boldsymbol{A}|\ |\boldsymbol{B}|,$$

同时利用行列式性质，将 D_{2n} 的第 1 列乘以 b_{11}、第 2 列乘以 b_{21}、……、第 n 列乘以 b_{n1} 都加到第 $n+1$ 列，再将行列式的第 1 列乘以 b_{12}、第 2 列乘以 b_{22}、……、第 n 列乘以 b_{n2} 都加到第 $n+2$ 列，依次下去，……，将行列式的第 1 列乘以 b_{1n}、第 2 列乘以 b_{2n}、……、第 n 列乘以 b_{nn} 都加到第 $2n$ 列，依行列式的性质，有

$$D_{2n}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+\cdots+a_{1n}b_{n1} & \cdots & a_{11}b_{1n}+a_{12}b_{2n}+\cdots+a_{1n}b_{nn} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}+\cdots+a_{2n}b_{n1} & \cdots & a_{21}b_{1n}+a_{22}b_{2n}+\cdots+a_{2n}b_{nn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & a_{n1}b_{11}+a_{n2}b_{21}+\cdots+a_{nn}b_{n1} & \cdots & a_{n1}b_{1n}+a_{n2}b_{2n}+\cdots+a_{nn}b_{nn} \\ -1 & & & & 0 & \cdots & 0 \\ & -1 & & & 0 & \cdots & 0 \\ & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ & & & -1 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}.$$

将上述行列式的第 1 行与第 $n+1$ 行互换，第 2 行与第 $n+2$ 行互换，依次下去，……，第 n 行与第 $2n$ 行互换，依行列式性质，有

$$D_{2n}=(-1)^n\begin{vmatrix} -1 & & & 0 & \cdots & 0 \\ & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ & & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{11} & \cdots & a_{1n} & a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+\cdots+a_{1n}b_{n1} & \cdots & a_{11}b_{1n}+a_{12}b_{2n}+\cdots+a_{1n}b_{nn} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & a_{n1}b_{11}+a_{n2}b_{21}+\cdots+a_{nn}b_{n1} & \cdots & a_{n1}b_{1n}+a_{n2}b_{2n}+\cdots+a_{nn}b_{nn} \end{vmatrix}.$$

依拉普拉斯定理，有

$$\begin{aligned} D_{2n}&=(-1)^n\begin{vmatrix} -1 & & \\ & \ddots & \\ & & -1 \end{vmatrix}\cdot \\ &\quad \begin{vmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+\cdots+a_{1n}b_{n1} & \cdots & a_{11}b_{1n}+a_{12}b_{2n}+\cdots+a_{1n}b_{nn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}b_{11}+a_{n2}b_{21}+\cdots+a_{nn}b_{n1} & \cdots & a_{n1}b_{1n}+a_{n2}b_{2n}+\cdots+a_{nn}b_{nn} \end{vmatrix} \\ &=(-1)^n(-1)^n\,|\boldsymbol{AB}|=|\boldsymbol{AB}|, \end{aligned}$$

从而 $|\boldsymbol{AB}|=|\boldsymbol{A}|\cdot|\boldsymbol{B}|$.

注 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是数域 F 上 n 阶矩阵，$k\in F$，则：

(1) $|k\boldsymbol{A}|\neq k\,|\boldsymbol{A}|$；

(2) 尽管 $\boldsymbol{AB}\neq\boldsymbol{BA}$，但是 $|\boldsymbol{AB}|=|\boldsymbol{A}|\cdot|\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{B}|\cdot|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{BA}|$.

如果 n 元线性方程组的系数矩阵为 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$，常数项组成的列向量为 $\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$，未知元组成的列向量为 $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$，那么依矩阵的乘法定义，线性方程组可表示成 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$，其导出组可表示成 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$，于是列向量 $\boldsymbol{\gamma}$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 的解当且仅当 $\boldsymbol{A\gamma}=\boldsymbol{\beta}$，列向量 $\boldsymbol{\xi}$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解当且仅当 $\boldsymbol{A\xi}=\boldsymbol{0}$.

2. 典型例题

例 3.1.1　设 n 维列向量

$$\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}_{n\times 1},\quad \boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}b_{11}&b_{12}&\cdots&b_{1s}\\b_{21}&b_{22}&\cdots&b_{2s}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\b_{n1}&b_{n2}&\cdots&b_{ns}\end{pmatrix},$$

计算 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}$；$\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$；$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}$；$\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}$.

分析　依矩阵的乘法定义实施计算.

解　$\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=(1,1,\cdots,1)\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}=(n).$

$$\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}(1,1,\cdots,1)=\begin{pmatrix}1&1&\cdots&1\\1&1&\cdots&1\\\vdots&\vdots&&\vdots\\1&1&\cdots&1\end{pmatrix}_{n\times n}.$$

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}+a_{12}+\cdots+a_{1n}\\a_{21}+a_{22}+\cdots+a_{2n}\\\vdots\\a_{m1}+a_{m2}+\cdots+a_{mn}\end{pmatrix}.$$

$$\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}=(1,1,\cdots,1)\begin{pmatrix}b_{11}&b_{12}&\cdots&b_{1s}\\b_{21}&b_{22}&\cdots&b_{2s}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\b_{n1}&b_{n2}&\cdots&b_{ns}\end{pmatrix}=(b_{11}+b_{21}+\cdots+b_{n1},\cdots,b_{1s}+b_{2s}+\cdots+b_{ns}).$$

注　$\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}$ 是 1×1 矩阵，即表中只有一个数，可以不用括号；$\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$ 是 $n\times n$ 矩阵；$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}$ 是 $m\times 1$ 矩阵；$\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}$ 是 $1\times s$ 矩阵；$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}$ 相当于以 $\boldsymbol{A}$ 的各行元素之和为元素的 m 维列向量；$\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}$ 相当于以 $\boldsymbol{B}$ 的各列元素之和为元素的 s 维行向量.

评　$\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$ 不等，例证了矩阵乘法不满足交换律.

例 3.1.2　设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\lambda&1\\0&\lambda\end{pmatrix}$，计算 $\boldsymbol{A}^m\,(m\in\mathbb{Z}^+)$.

分析　$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\lambda&1\\0&\lambda\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda&0\\0&\lambda\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}=\lambda\boldsymbol{E}+\boldsymbol{B}$，再依二项展开式定理求 $\boldsymbol{A}^m$.

解　$\boldsymbol{A}=\lambda\boldsymbol{E}+\boldsymbol{B}$，其中 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$，且 $\boldsymbol{B}^2=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$，显然 $\boldsymbol{B}^3=\cdots=\boldsymbol{B}^m=\boldsymbol{0}$，依二项展开式定理，有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}^m&=(\lambda\boldsymbol{E}+\boldsymbol{B})^m=(\lambda\boldsymbol{E})^m+\mathrm{C}_m^1(\lambda\boldsymbol{E})^{m-1}\boldsymbol{B}+\mathrm{C}_m^2(\lambda\boldsymbol{E})^{m-2}\boldsymbol{B}^2+\cdots\\&=\lambda^m\boldsymbol{E}+m\lambda^{m-1}\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\lambda^m&0\\0&\lambda^m\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&m\lambda^{m-1}\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda^m&m\lambda^{m-1}\\0&\lambda^m\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

注 $E^m=E, B^m=0 (m\geqslant 2)$.

评 因为矩阵 B 与单位矩阵 E 是可交换的,因此适用于二项展开式:

$$(\lambda E+B)^m=(\lambda E)^m+C_m^1(\lambda E)^{m-1}B+C_m^2(\lambda E)^{m-2}B^2+\cdots+C_m^{m-1}(\lambda E)B^{m-1}+B^m.$$

议 设 $A=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$,则 $A^2=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$,$A^m=0 (m\geqslant 3)$,$m\in\mathbb{Z}^+$.

设 n 阶矩阵 $A=\begin{pmatrix}0&1&0&\cdots&0\\0&0&1&\cdots&0\\0&0&0&\ddots&\vdots\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&1\\0&0&0&\cdots&0\end{pmatrix}$,利用数学归纳法可以证明,

$$A^m=\begin{cases}B, & m<n,\\ 0, & m\geqslant n,\end{cases}(m\in\mathbb{Z}^+),\text{其中 } B=\begin{array}{l}\overbrace{\hphantom{0\quad\cdots\quad 0}}^{m\text{个列}}\\ \begin{pmatrix}0&\cdots&0&1&0&\cdots&0\\0&0&\cdots&0&1&\cdots&0\\0&&0&\cdots&0&\ddots&\vdots\\0&&&0&\cdots&\ddots&1\\0&&&&0&\cdots&0\\\vdots&&&&&\ddots&\vdots\\0&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&0\end{pmatrix}\end{array}\left.\begin{matrix}\\ \\ \\ \end{matrix}\right\}m\text{ 个行}.$$

例 3.1.3 设 $A=\begin{pmatrix}1&1\\-1&-1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}2&-2\\-2&2\end{pmatrix}$, 计算 AB, AC, $B-C$.

解 依矩阵的乘法定义,有

$$AB=\begin{pmatrix}1&1\\-1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}, AC=\begin{pmatrix}1&1\\-1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&-2\\-2&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}.$$

$$B-C=\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2&-2\\-2&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&1\\1&-1\end{pmatrix}.$$

评 $A\neq 0, B\neq 0$, 但 $AB=0$; 又 $AB=AC$, 且 $A\neq 0$, 但是 $B\neq C$. 例证了矩阵乘法不满足消去律.

例 3.1.4 在数域 F 中,求所有与 $A=\begin{pmatrix}\lambda&1&0\\0&\lambda&1\\0&0&\lambda\end{pmatrix}$ 可交换的矩阵.

分析 $A=\lambda E+B$, 再依两矩阵可交换定义求解.

解 由题设, $A=\begin{pmatrix}\lambda&1&0\\0&\lambda&1\\0&0&\lambda\end{pmatrix}=\lambda E+B$, 其中 E 是三阶单位矩阵, $B=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$, 设矩阵 $X=(x_{ij})_{3\times 3}$ 与 A 可交换,则

$$AX=(\lambda E+B)X=\lambda X+BX, XA=X(\lambda E+B)=\lambda X+XB,$$

所以，$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{XA}\Leftrightarrow\boldsymbol{BX}=\boldsymbol{XB}$，即

$$\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_{11}&x_{12}&x_{13}\\x_{21}&x_{22}&x_{23}\\x_{31}&x_{32}&x_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_{11}&x_{12}&x_{13}\\x_{21}&x_{22}&x_{23}\\x_{31}&x_{32}&x_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}x_{21}&x_{22}&x_{23}\\x_{31}&x_{32}&x_{33}\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&x_{11}&x_{12}\\0&x_{21}&x_{22}\\0&x_{31}&x_{32}\end{pmatrix},$$

依矩阵相等的定义，解之得 $x_{21}=x_{31}=x_{32}=0, x_{22}=x_{11}=x_{33}, x_{23}=x_{12}$，因此

$$\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}x_{11}&x_{12}&x_{13}\\0&x_{11}&x_{12}\\0&0&x_{11}\end{pmatrix},\ \forall x_{11},x_{12},x_{13}\in F.$$

注　与 $\boldsymbol{A}$ 可交换的矩阵不唯一.

评　依 $\boldsymbol{A}=\lambda\boldsymbol{E}+\boldsymbol{B}$，从而与 $\boldsymbol{A}$ 可交换的矩阵等价于与 $\boldsymbol{B}$ 可交换的矩阵.

例 3.1.5　设数域 F 上 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&2\\0&3&4\\-1&5&3\end{pmatrix}$，$f(x)=x^2-2x+3$，求 $f(\boldsymbol{A})$.

分析　$f(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{A}^2-2\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{E}$.

解　依矩阵多项式的定义，有

$$f(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{A}^2-2\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}1&0&2\\0&3&4\\-1&5&3\end{pmatrix}^2-2\begin{pmatrix}1&0&2\\0&3&4\\-1&5&3\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}0&10&4\\-4&26&16\\-2&20&24\end{pmatrix}.$$

注　矩阵的多项式仍是一个矩阵.

例 3.1.6　设 $\boldsymbol{\alpha}=(1,2,-1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}=(1,2,3)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha\beta}^{\mathrm{T}}$，计算 $\boldsymbol{A}^n(n\in\mathbb{Z}^+)$.

分析　利用矩阵幂的定义及乘法运算规则计算.

解　由题设，$\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=2$，依矩阵幂的定义及乘法运算规则，有

$$\boldsymbol{A}^n=\underbrace{(\boldsymbol{\alpha\beta}^{\mathrm{T}})(\boldsymbol{\alpha\beta}^{\mathrm{T}})\cdots(\boldsymbol{\alpha\beta}^{\mathrm{T}})}_{n\text{个}}=\boldsymbol{\alpha}\underbrace{(\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha})(\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha})\cdots(\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha})}_{n-1\text{个}}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}=2^{n-1}\boldsymbol{\alpha\beta}^{\mathrm{T}}$$

$$=2^{n-1}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}(1,2,3)=2^{n-1}\begin{pmatrix}1&2&3\\2&4&6\\-1&-2&-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2^{n-1}&2^n&3\times2^{n-1}\\2^n&2^{n+1}&3\times2^n\\-2^{n-1}&-2^n&-3\times2^{n-1}\end{pmatrix}.$$

注　$\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=2$.

评　本例巧妙地利用了矩阵乘法的结合律以使计算简化.

议　设 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&-1&2\\2&-2&4\\-1&1&-2\end{pmatrix}$，计算 $\boldsymbol{B}^n(n\in\mathbb{Z}^+)$.

解 因为 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}(1,-1,2)$，令 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=-3$，于是

$$\boldsymbol{B}^n=\underbrace{(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})\cdots(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})}_{n个}=\boldsymbol{\alpha}\underbrace{(\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha})(\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha})\cdots(\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha})}_{n-1个}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}=(-3)^{n-1}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$$

$$=(-3)^{n-1}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}(1,-1,2)=(-3)^{n-1}\begin{pmatrix}1&-1&2\\2&-2&4\\-1&1&-2\end{pmatrix}$$

$$=(-1)^{n-1}\begin{pmatrix}3^{n-1}&-3^{n-1}&2\times3^{n-1}\\2\times3^{n-1}&-2\times3^{n-1}&4\times3^{n-1}\\-3^{n-1}&3^{n-1}&-2\times3^{n-1}\end{pmatrix}.$$

如果矩阵可以拆分成列向量与行向量的乘积，同样可以利用结合律简化计算.

例 3.1.7 利用矩阵乘法计算 $n\,(n\geqslant3)$ 阶行列式

$$\Delta_n=\begin{vmatrix}1+x_1y_1&1+x_1y_2&\cdots&1+x_1y_n\\1+x_2y_1&1+x_2y_2&\cdots&1+x_2y_n\\\vdots&\vdots&&\vdots\\1+x_ny_1&1+x_ny_2&\cdots&1+x_ny_n\end{vmatrix}.$$

分析 依矩阵乘法的定义，有

$$\begin{pmatrix}1+x_1y_1&1+x_1y_2&\cdots&1+x_1y_n\\1+x_2y_1&1+x_2y_2&\cdots&1+x_2y_n\\\vdots&\vdots&&\vdots\\1+x_ny_1&1+x_ny_2&\cdots&1+x_ny_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&x_1&0&\cdots&0\\1&x_2&0&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\1&x_n&0&\cdots&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&1&\cdots&1\\y_1&y_2&\cdots&y_n\\0&0&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&0\end{pmatrix}.$$

解 依矩阵的乘法，有

$$\begin{pmatrix}1+x_1y_1&1+x_1y_2&\cdots&1+x_1y_n\\1+x_2y_1&1+x_2y_2&\cdots&1+x_2y_n\\\vdots&\vdots&&\vdots\\1+x_ny_1&1+x_ny_2&\cdots&1+x_ny_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&x_1&0&\cdots&0\\1&x_2&0&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\1&x_n&0&\cdots&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&1&\cdots&1\\y_1&y_2&\cdots&y_n\\0&0&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&0\end{pmatrix},$$

依矩阵行列式的性质，有

$$\Delta_n=\begin{vmatrix}1&x_1&0&\cdots&0\\1&x_2&0&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\1&x_n&0&\cdots&0\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1\\y_1&y_2&\cdots&y_n\\0&0&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&0\end{vmatrix}=0.$$

注 含零行(零列)的行列式为零.

评 利用矩阵乘法计算行列式的技巧值得借鉴.

习题 3-1

1. 如果矩阵 $\boldsymbol{X}$ 满足 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}-2\boldsymbol{B}$, 其中 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 1 & -2\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$,求 $\boldsymbol{X}$.

2. 计算

(1) $\begin{pmatrix}3 & -2 & 1\\ 1 & -1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & -1\\ -3 & 2\end{pmatrix}$；　(2) $\begin{pmatrix}1\\ -1\\ 0\end{pmatrix}(1\quad 2\quad 3)$；

(3) $(1\quad -2\quad 1)\begin{pmatrix}-1 & 2 & 0\\ 0 & 1 & -1\\ 3 & -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 2\end{pmatrix}$.

3. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 2 & 0\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2 & 3\\ -4 & 1\end{pmatrix}$,求 $\boldsymbol{AB}$;$\boldsymbol{BA}$;$\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{BA}$.

4. 在数域 F 上,求与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可交换的所有矩阵,其中 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$.

5. 设 $f(x)=x^2-5x+2$, 矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 0\\ 3 & 1 & 2\\ 0 & 4 & 1\end{pmatrix}$,求 $f(\boldsymbol{A})$.

6. 计算下述各题,其中 $n(n\geqslant 2)$ 为正整数:

(1) $\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}^2$；　(2) $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}^n$；　(3) $\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}^n$；

(4) $\begin{pmatrix}1 & -1 & -1 & -1\\ -1 & 1 & -1 & -1\\ -1 & -1 & 1 & -1\\ -1 & -1 & -1 & 1\end{pmatrix}^n$.

7. 设 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}1\\ -1\\ 2\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}2\\ 3\\ 0\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 3 & 0 & -1\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A\alpha\beta}^{\mathrm{T}}$, 计算 $\boldsymbol{B}^n(n\in\mathbb{Z}^+)$.

8. 证明:如果 $\boldsymbol{A}=\dfrac{1}{2}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{E})$,则 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$ 当且仅当 $\boldsymbol{B}^2=\boldsymbol{E}$.

9. 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a & b & c & d\\ -b & a & -d & c\\ -c & d & a & -b\\ -d & -c & b & a\end{pmatrix}$, (1)计算 $\boldsymbol{AA}^{\mathrm{T}}$; (2)利用(1)的结果,求 $|\boldsymbol{A}|$.

3.2　几种特殊矩阵

矩阵中有几种特型矩阵,有必要研究它们的性质.

1. 内容要点与评注

定义 1 主对角线之外的元素都等于零的方阵称为**对角矩阵**,记作

$$\begin{pmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{pmatrix},\ 简记作\ \mathrm{diag}(a_1,a_2,\cdots,a_n),$$

其中 $a_i(i=1,2,\cdots,n)$ 称为对角矩阵的**主对角元**.

对角矩阵的性质:设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是数域 F 上的 n 阶对角矩阵,则:

(1) 和 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$, 数量乘积 $k\boldsymbol{A}(k\in F)$ 仍为 n 阶对角矩阵.

(2) 乘积 $\boldsymbol{AB}$ 仍为 n 阶对角矩阵,且 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$.

用对角矩阵左(右)乘矩阵 $\boldsymbol{B}$,相当于用其主对角元分别去乘 $\boldsymbol{B}$ 的相应各行(列),

$$\begin{pmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{\beta}_1 \\ \boldsymbol{\beta}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{\beta}_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_1\boldsymbol{\beta}_1 \\ a_2\boldsymbol{\beta}_2 \\ \vdots \\ a_n\boldsymbol{\beta}_n \end{pmatrix},\ 其中\ \boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n\ 为\ \boldsymbol{B}\ 的行向量组,$$

$$(\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\cdots,\boldsymbol{\gamma}_n)\begin{pmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{pmatrix}=(a_1\boldsymbol{\gamma}_1,a_2\boldsymbol{\gamma}_2,\cdots,a_n\boldsymbol{\gamma}_n),\ 其中\ \boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\cdots,\boldsymbol{\gamma}_n\ 为\ \boldsymbol{B}\ 的列向$$

量组.

定义 2 主对角线下(上)方的元素都为零的方阵称为**上(下)三角矩阵**.

$\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 为上(下)三角矩阵的充分必要条件是 $a_{ij}=0,\ i>j(i<j)$.

上(下)三角矩阵的性质:设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是数域 F 上 n 阶上(下)三角矩阵,则:

(1) 和 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$, 数量乘积 $k\boldsymbol{A}(k\in F)$ 仍为 n 阶上(下)三角矩阵.

(2) 乘积 $\boldsymbol{AB}$ 仍为 n 阶上(下)三角矩阵,并且 $\boldsymbol{AB}$ 的主对角元等于 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 的主对角线上对应元素的乘积.

证 设 n 阶上三角矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij}),\boldsymbol{B}=(b_{ij})$,当 $k>l$ 时,$a_{kl}=0=b_{kl}$,依矩阵乘法,$\boldsymbol{AB}$ 的 (i,j) 元为 $c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{in}b_{nj}$,当 $i>j$ 时,$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+\cdots+a_{i,j-1}b_{j-1,j}+a_{ij}b_{jj}+a_{i,j+1}b_{j+1,j}+\cdots+a_{in}b_{nj}=0$,其中

$a_{i1}=\cdots=a_{i,j-1}=a_{ij}=0=b_{j+1,j}=\cdots=b_{nj}$,所以 $\boldsymbol{AB}$ 为一上三角矩阵;

当 $i=j$ 时,$c_{ii}=a_{i1}b_{1i}+\cdots+a_{i,i-1}b_{i-1,i}+a_{ii}b_{ii}+a_{i,i+1}b_{i+1,i}+\cdots+a_{in}b_{ni}=a_{ii}b_{ii}$,

其中 $a_{i1}=\cdots=a_{i,i-1}=0=b_{i+1,i}=\cdots=b_{ni}$,所以 $\boldsymbol{AB}$ 主对角线上的元素分别为

$$a_{ii}b_{ii},\quad i=1,2,\cdots,n.$$

定义 3 如果矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$,则称 $\boldsymbol{A}$ 为**对称矩阵**.对称矩阵一定是方阵.

数域 F 上 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为对称矩阵的充分必要条件是

$$a_{ij}=a_{ji},\quad i,j=1,2,\cdots,n.$$

对称矩阵的性质:设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是数域 F 上 n 阶对称矩阵,则:

(1) 和 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$, 数量乘积 $k\boldsymbol{A}(k\in F)$ 仍为 n 阶对称矩阵.