第 1 章

行列式及其应用

行列式是一种特定的算式，它作为数学工具在数学的许多分支中有着广泛的应用.本章通过对二元线性方程组和三元线性方程组求解的结论，引入二阶行列式、三阶行列式，并推广到 n 阶行列式.

1.1 n 阶行列式的定义

1.1.1 二阶和三阶行列式

1. 二元线性方程组与二阶行列式

从消元法解二元线性方程组入手，引入二阶行列式.

设有二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \end{cases} \tag{1.1}$$

为消去未知数 x_2，分别以 a_{22} 与 a_{12} 乘上列两方程的两端，然后两个方程相减，得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = a_{22}b_1 - a_{12}b_2;$$

类似地消去 x_1，得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = a_{11}b_2 - a_{21}b_1.$$

当 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$ 时，求得方程组(1.1)的解为

$$x_1 = \frac{a_{22}b_1 - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \quad x_2 = \frac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}. \tag{1.2}$$

从式(1.2)可以看出，x_1，x_2 的分母都等于 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$，它是由方程组(1.1)的 4 个系数确定的，把这 4 个数按它们在方程组(1.1)中的位置，排成 2 行 2 列(横排称行，竖排称列)的数表

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{matrix} \tag{1.3}$$

表达式 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$ 称为数表(1.3)所确定的二阶行列式，并记作

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}, \tag{1.4}$$

其中,数 $a_{ij}(i=1,2;j=1,2)$称为二阶行列式的元素.它的第1个下标 i 称为行标,表明该元素位于第 i 行,第2个下标 j 称为列标,表明该元素位于第 j 列.位于第 i 行第 j 列的元素称为行列式(1.4)的(i,j)元.称 D 为方程组(1.1)的系数行列式.

二阶行列式的定义(1.4)可用对角线法则来记忆.从行列式的左上角元素 a_{11} 到右下角元素 a_{22} 作连线,该连线称为行列式的主对角线;而行列式的左下角元素 a_{21} 到右上角元素 a_{12} 作连线,该连线称为行列式的副对角线,于是二阶行列式便是主对角线上两元素之积减去副对角线上两元素之积所得之差.

利用二阶行列式的概念,式(1.2)中 x_1,x_2 的分子也可写成二阶行列式,即

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}=a_{22}b_1-a_{12}b_2,\quad D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}=b_2a_{11}-b_1a_{21}.$$

显然,$D_i(i=1,2)$即为 D 中的第 i 列换成方程组(1.1)的常数项所得到的行列式.于是,当 $D\neq 0$ 时,二元线性方程组(1.1)的解可唯一地表示为

$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}},\quad x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}. \tag{1.5}$$

例 1.1 求解二元线性方程组

$$\begin{cases} x_1-3x_2=5, \\ 2x_1+4x_2=0. \end{cases}$$

解 系数行列式 $D=\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}=10\neq 0$,方程组有唯一解.

由于

$$D_1=\begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 0 & 4 \end{vmatrix}=20-0=20,\quad D_2=\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}=0-10=-10,$$

因此 $x_1=\dfrac{D_1}{D}=\dfrac{20}{10}=2,x_2=\dfrac{D_2}{D}=\dfrac{-10}{10}=-1.$

2. 三阶行列式

定义 1.1 设有9个数 $a_{ij}(i=1,2,3;j=1,2,3)$排成3行3列的数表,

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix} \tag{1.6}$$

记

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}, \tag{1.7}$$

式(1.7)称为数表(1.6)所确定的三阶行列式.

上述定义表明,三阶行列式含 6 项,每项均为不同行不同列的三个元素的乘积再冠以正负号,其规律如图 1.1 所示:图中三条实线看作是平行于主对角线的连线,实线上三个元素的乘积冠以正号,三条虚线看作是平行于副对角线的连线,虚线上三个元素的乘积冠以负号.

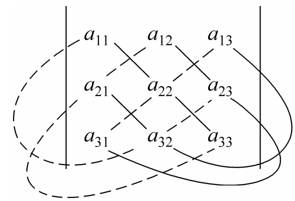

图 1.1

例 1.2　计算三阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & -2 \end{vmatrix}.$$

解　按对角线法则,有

$$\begin{aligned} D &= 2\times 2\times(-2) + (-1)\times 1\times 4 + 3\times(-1)\times 1 \\ &\quad - 3\times 2\times 4 - (-1)\times(-1)\times(-2) - 2\times 1\times 1 \\ &= -8-4-3-24+2-2 = -39. \end{aligned}$$

类似地,可以用三阶行列式解三元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases} \tag{1.8}$$

记

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix},$$

其中 D 称为方程组(1.8)的系数行列式,D_j 是以常数项 b_1, b_2, b_3 分别替换系数行列式中的第 j 列的 a_{1j}, a_{2j}, a_{3j}(未知数 x_j 的系数)所得的行列式. 于是当行列式 $D \neq 0$ 时,方程组(1.8)有唯一解,可表示为

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}, \quad x_3 = \frac{D_3}{D}.$$

上述用行列式解线性方程组的方法称为克莱姆法则,以后还将介绍 n 元线性方程组的克莱姆法则.

例 1.3 求解方程组

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = -2, \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 1, \\ -x_1 + x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$$

解 因为系数行列式 $D = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -1+2-6+1+3-4 = -5 \neq 0$,从而

计算

$$D_1 = \begin{vmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 2+1+0-0-6-2 = -5,$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -1+0-6+1-0-4 = -10,$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0-4+2-2-1-0 = -5,$$

得方程组的唯一解为 $x_1 = \frac{D_1}{D} = 1, x_2 = \frac{D_2}{D} = 2, x_3 = \frac{D_3}{D} = 1$.

对角线法则只适用于二阶及三阶行列式,为研究 4 阶及更高阶行列式,下面先介绍有关 n 元排列的知识,再引出 n 阶行列式的概念.

1.1.2 n 元排列

1. 排列与逆序

定义 1.2 由 n 个自然数 $1,2,\cdots,n$ 组成的一个无重复的有序数组 $i_1,i_2,\cdots,i_n$ 称为一个 ***n* 元排列**.

如由自然数 1,2,3,4 组成的不同排列有 $4!=24$ 种,那么由互异元素 $p_1,p_2,\cdots,p_n$ 构成的不同排列有多少种?

首先从 n 个元素中选取 1 个有 n 种取法;再从剩余 $n-1$ 个元素中选取 1 个有 $n-1$ 种取法;这样继续下去,直到最后只剩 1 个元素放在第 n 个位置上,只有 1 种取法. 于是由 $p_1,p_2,\cdots,p_n$ 组成的不同排列有 $n\cdot(n-1)\cdot\cdots\cdot3\cdot2\cdot1=n!$ 种.

对于 n 个不同的元素,先规定各元素之间有一个标准次序(例如 n 个不同的自然数,可规定由小到大为标准次序).

定义 1.3 在 n 个不同的元素的任一排列中,当某两个元素的次序与标准次序不同时,称这两个数构成一个**逆序**. 一个排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 中所有逆序的总数,称为这个排列的**逆序数**,

记为 $\tau(p_1p_2\cdots p_n)$.

逆序数为奇数的排列称为**奇排列**,逆序数为偶数的排列称为**偶排列**.

下面给出计算一个 n 元排列的逆序数的方法:在一个 n 元排列 $p_1p_2\cdots p_t\cdots p_s\cdots p_n$ 中,如果一个较大的数排在一个较小的数之前,即若 $p_t>p_s$,则称这两个数 p_t,p_s 构成一个逆序.排在 p_s 前比 p_s 大的数的个数称为 p_s 的逆序数,记为 $\tau(p_s)$.

$$\tau(p_1p_2\cdots p_n)=\tau(p_1)+\tau(p_2)+\cdots+\tau(p_n).$$

例 1.4 求排列 436251 的逆序数,并确定其奇偶性.

解 在排列 436251 中:

4 排在首位,逆序数为 0;

3 的前面比 3 大的数有 1 个(4),故逆序数为 1;

6 是最大数,故逆序数为 0;

2 前面比 2 大的数有 3 个(4、3、6),故逆序数为 3;

5 前面比 5 大的数有 1 个(6),故逆序数为 1;

1 前面比 1 大的数有 5 个(4、3、6、2、5),故逆序数为 5,于是这个排列的逆序数为 $\tau=\tau_1+\cdots+\tau_6=0+1+0+3+1+5=10$,故该排列为偶排列.

例 1.5 求排列 $1\ 3\ 5\ \cdots(2n-1)2\ 4\ 6\ \cdots(2n)$ 的逆序数,并确定其奇偶性.

解
$$\begin{aligned}&\tau(1\ 3\ 5\ \cdots(2n-1)2\ 4\ 6\ \cdots(2n))\\&=(n-1)+(n-2)+(n-3)+\cdots+2+1\\&=\frac{n(n-1)}{2},\end{aligned}$$

而 $\frac{n(n-1)}{2}$ 的奇偶性由 n 确定,讨论如下:

当 $n=4k$ 时,$\frac{n(n-1)}{2}=2k(4k-1)$ 是偶数;

当 $n=4k+1$ 时,$\frac{n(n-1)}{2}=2k(4k+1)$ 是偶数;

当 $n=4k+2$ 时,$\frac{n(n-1)}{2}=(2k+1)(4k+1)$ 是奇数;

当 $n=4k+3$ 时,$\frac{n(n-1)}{2}=(2k+1)(4k+3)$ 是奇数.

所以,当 $n=4k$ 或 $4k+1$ 时,为偶排列;当 $n=4k+2$ 或 $n=4k+3$ 时,为奇排列.

2. 对换

出于研究 n 阶行列式的需要,我们先讨论对换的概念以及它与排列奇偶性的关系.

定义 1.4 在排列 $p_1p_2\cdots p_t\cdots p_s\cdots p_n$ 中将任意两个数 p_t,p_s 的位置互换,而其余的数不动,就得到另一个排列,这种作出新排列的手续叫做**对换**.将相邻两个元素对换,称为**相邻对换**.

定理 1.1 一个排列中任意两个元素对换,排列改变奇偶性.

证 先证相邻对换:设排列为 $a_1\cdots a_l abb_1\cdots b_m$,对换 a 与 b,变为 $a_1\cdots a_l bab_1\cdots b_m$,显然 $a_1,\cdots,a_l;b_1,\cdots,b_m$ 的逆序数经过对换并不改变,而 a 与 b 的逆序数的改变为

若 $a<b$,对换后 a 的逆序数增加 1,b 的逆序数不变;

若 $a>b$,对换后 a 的逆序数不变,b 的逆序数减少 1.

因此,无论是增加 1 还是减少 1,排列 $a_1\cdots a_l abb_1\cdots b_m$ 与排列 $a_1\cdots a_l bab_1\cdots b_m$ 的奇偶性改变.

再证一般对换:设(1)$a_1\cdots a_l ab_1\cdots b_m bc_1\cdots c_n$;(2)$a_1\cdots a_l b_1\cdots b_m abc_1\cdots c_n$;(3)$a_1\cdots a_l bb_1\cdots b_m ac_1\cdots c_n$.

由(1)变为(2)经过 m 次相邻对换;由(2)变为(3)经过 $m+1$ 次相邻对换;则由(1)变成(3)经过 $2m+1$ 次相邻对换,所以排列 $a_1\cdots a_l ab_1\cdots b_m bc_1\cdots c_n$ 与排列 $a_1\cdots a_l bb_1\cdots b_m ac_1\cdots c_n$ 的奇偶性相反.

推论 奇排列变为标准排列的对换次数为奇数,偶排列变为标准排列的对换次数为偶数.

证 由定理 1.1 知对换的次数就是排列奇偶性的变化次数,而标准排列是偶排列(逆序数为 0),因此结论成立.

1.1.3 n 阶行列式的定义

为了给出 n 阶行列式的定义,先来研究三阶行列式的结构.三阶行列式定义为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}. \tag{1.9}$$

容易看出:

(1) 三阶行列式是一些项的代数和,而每一项都是行列式中位于不同行、不同列的 3 个元素的乘积.

(2) 这个代数和的总项数是由 1,2,3 构成的排列的总数 $3!=6$.

(3) 式(1.9)右端的任一项除正负号外均可以写成 $a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}$.这里第 1 个下标(行标)排成标准次序,而第 2 个下标(列标)排成 $p_1p_2p_3$,它是 1,2,3 三个数的某个排列.

(4) 每一项的符号与列标排列的逆序数的奇偶性有关,各项的正负号与列标的排列对照表如下:

带正号的 3 项列标排列是 123、231、312;

带负号的 3 项列标排列是 132、213、321.

经计算可知前 3 个排列都是偶排列,后 3 个排列都是奇排列.因此各项所带的正负号可

以表示为$(-1)^{\tau}$,其中τ为列标排列的逆序数.

因此,三阶行列式的定义又可写成

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum (-1)^{\tau} a_{1p_1} a_{2p_2} a_{3p_3},$$

其中,τ为排列$p_1p_2p_3$的逆序数,$\sum$表示对所有 3 元排列$p_1p_2p_3$求和.

仿此,可以把行列式推广到一般情形,于是有下面n阶行列式的定义.

定义 1.5　设有n^2个数$a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$,排成n行n列的数表

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{matrix}$$

作出表中位于不同行不同列的n个元素的乘积,并冠以符号$(-1)^{\tau}$,得到$n!$个形如$(-1)^{\tau}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$的项,其中$p_1,p_2,\cdots,p_n$为自然数$1,2,\cdots,n$的一个排列,$\tau$为这个排列的逆序数.所有这$n!$项的代数和$(-1)^{\tau}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$称为 **$n$ 阶行列式**,记作

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum (-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)} a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n},$$

简记作$\det(a_{ij})$,其中a_{ij}为行列式D的(i,j)元.

显然,按此定义的二阶、三阶行列式与前面用对角线法则定义的二阶、三阶行列式是一致的.特别要注意当$n=1$时,一阶行列式$|a|=a$,不要与绝对值记号相混淆.

例 1.6　计算 4 阶行列式$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 0 \\ 9 & 2 & 6 & 5 \end{vmatrix}$.

解　考虑非零项,第 2 行中仅有a_{21}不为零,第 3 行中仅有a_{31}不为零,从而$D=0$.

例 1.7　计算n阶行列式

$$D_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix},\quad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,n-1} & \\ \vdots & ⋰ & & \\ a_{n1} & & & \end{vmatrix}.$$

行列式D_1的主对角线下方的元素全为 0(省略),称为**上三角行列式**(主对角线上方的元素全为 0,称之为**下三角行列式**).

解 D_1 中只有一项 $a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$ 不显含 0，且列标构成排列的逆序数为 $\tau(12\cdots n)=0$，故 $D_1=(-1)^{\tau}a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$.

D_2 中只有一项 $a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}$ 不显含 0，且列标构成排列的逆序数为

$$\tau(n\cdots 21)=0+1+2+\cdots+(n-1)=\frac{n(n-1)}{2},$$

故 $D_2=(-1)^{\tau}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}$.

结论：以主对角线为分界线的上(下)三角行列式的值等于主对角线上元素的乘积.

特别地，对角线以外的元素全为 0 的行列式，称为**对角行列式**. 如：

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{vmatrix}=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n,\quad \begin{vmatrix} & & & \lambda_1 \\ & & \lambda_2 & \\ & \iddots & & \\ \lambda_n & & & \end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n.$$

应当指出，n 阶行列式的定义有多种形式.

例如，把 n 阶行列式每项的列下标按自然顺序排列，而行下标是 n 元排列的某个排列 $q_1q_2\cdots q_n$，则有行列式的另一种定义形式.

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum(-1)^{\tau(q_1q_2\cdots q_n)}a_{q_1 1}a_{q_2 2}\cdots a_{q_n n}.$$

若 n 阶行列式每项的行下标按 n 元排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 排列，而列下标按 n 元排列 $q_1q_2\cdots q_n$ 排列，则上式还可定义为

$$D=\sum(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)+\tau(q_1q_2\cdots q_n)}a_{p_1q_1}a_{p_2q_2}\cdots a_{p_nq_n}.$$

1.2 行列式的性质

由 n 阶行列式的定义可知，要计算 n 阶行列式，需要计算 $n!$ 个乘积项，显然比较麻烦. 为此，我们先研究行列式的性质，利用这些性质来简化行列式的计算.

考虑 n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

把 D 的行列互换，得到一个新的行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

称为 D 的转置行列式,记为 D^{T}.

例如,设 $D=\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -1 \end{vmatrix}$,则 $D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}$. 由对角线法则可知 $D=5$,$D^{\mathrm{T}}=5$,即 $D^{\mathrm{T}}=D$. 一般地,有以下性质成立.

性质 1 行列式与它的转置行列式相等.

证 记 $D=\det(a_{ij})$的转置行列式为

$$D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}.$$

则 $b_{ij}=a_{ji}(i,j=1,2,\cdots,n)$,按定义

$$\begin{aligned} D^{\mathrm{T}} &= \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix} = \sum (-1)^{\tau(p_1 p_2 \cdots p_n)} b_{1p_1} b_{2p_2} \cdots b_{np_n} \\ &= \sum (-1)^{\tau(p_1 p_2 \cdots p_n)} a_{p_1 1} a_{p_2 2} \cdots a_{p_n n}, \end{aligned}$$

而由行列式的定义知,

$$D=\sum (-1)^{\tau(p_1 p_2 \cdots p_n)} a_{p_1 1} a_{p_2 2} \cdots a_{p_n n},$$

故

$$D^{\mathrm{T}}=D.$$

由此性质可知,行列式中行与列地位相等. 因此,行列式的性质凡是对行成立的,对列同样成立,反之亦然.

性质 2 互换行列式的两行(或两列),行列式变号.

证 设

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad D_1=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

其中,行列式 D_1 是由行列式 D 交换其 i,j 两行得到的.

记

$$D_1=\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{j1} & b_{j2} & \cdots & b_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix},$$

当 $l\neq i,j$ 时,$b_{lk}=a_{lk}$;当 $l=i,j$ 时,$b_{ik}=a_{jk}$,$b_{jk}=a_{ik}$,于是

$$\begin{aligned} D_1 &= \sum (-1)^{\tau}(b_{1p_1}\cdots b_{ip_i}\cdots b_{jp_j}\cdots b_{np_n}) \\ &= \sum (-1)^{\tau}(a_{1p_1}\cdots a_{jp_i}\cdots a_{ip_j}\cdots a_{np_n}) \\ &= \sum (-1)^{\tau}(a_{1p_1}\cdots a_{ip_j}\cdots a_{jp_i}\cdots a_{np_n}) \end{aligned}$$

其中行标 $1\cdots i\cdots j\cdots n$ 为自然排列,τ 为列标排列 $p_1\cdots p_i\cdots p_j\cdots p_n$ 的逆序数. 设排列 $p_1\cdots p_j\cdots p_i\cdots p_n$ 的逆序数为 τ_1,则 $(-1)^{\tau}=-(-1)^{\tau_1}$,故

$$D_1=-\sum (-1)^{\tau_1}(a_{1p_1}\cdots a_{ip_j}\cdots a_{jp_i}\cdots a_{np_n})=-D.$$

以 r_i 表示行列式的第 i 行,以 c_i 表示行列式的第 i 列,交换 i,j 两行记作 $r_i\leftrightarrow r_j$,交换 i,j 两列记作 $c_i\leftrightarrow c_j$.

推论 如果行列式有两行(列)完全相同,则此行列式等于零.

证 因为对调此两行(列)后,D 的形式不变,所以 $D=-D$,故 $D=0$.

性质3 用一个数 k 乘行列式,等于行列式某一行(列)的所有元素都乘以 k. 即

$$k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

第 i 行(或列)乘以 k,记作 $r_i\times k$(或 $c_i\times k$).

推论 行列式某一行(列)的所有元素的公因子可以提到行列式记号的外面.

第 i 行(或列)提出公因子 k,记作 $r_i\div k$(或 $c_i\div k$).

性质4 行列式中如果有两行(列)元素对应成比例,则此行列式等于零.

性质5 若行列式的某一行(列)的元素都可以表示为两项之和,则这个行列式可以表示为两个行列式的和.

即若

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & (a_{1i}+b_{1i}) & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & (a_{2i}+b_{2i}) & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & (a_{ni}+b_{ni}) & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

则 D 等于下列两个行列式之和：

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & b_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & b_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

若 n 阶行列式的每个元素都可表示为两数之和，则它可分解成 2^n 个行列式之和. 如

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} a+x & c+m \\ b+y & d+n \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} a & c+m \\ b & d+n \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} x & c+m \\ y & d+n \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} x & c \\ y & d \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a & m \\ b & n \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} x & m \\ y & n \end{vmatrix}.\end{aligned}$$

性质 6　把行列式的某一行(列)的各元素乘以同一个数 k 后加到另一行(列)对应的元素上去，行列式的值不变.

例如，以数 k 乘第 i 行后加到第 j 行上(记作 r_j+kr_i)，有

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \xlongequal{r_j+kr_i} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1}+ka_{i1} & a_{j2}+ka_{i2} & \cdots & a_{jn}+ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad (i\neq j).$$

性质 2,3,6 介绍了行列式关于行和关于列的 3 种运算，即 $r_i\leftrightarrow r_j$，$r_i\times k$，r_j+kr_i 和 $c_i\leftrightarrow c_j$，$c_i\times k$，c_j+kc_i，利用这些运算可简化行列式的计算，特别是利用运算 r_j+kr_i(或 c_j+kc_i)可以把行列式中的许多元素化为 0. 计算行列式常用的一种方法就是利用运算 r_j+kr_i 把行列式化为上三角(或下三角)行列式，从而得行列式的值.

把行列式化为上三角行列式的步骤是：如果 $a_{11}\neq 1$，可利用性质 2 或性质 6 将其化为 1，然后把第 1 行分别乘以适当的数加到其他各行，使得第 1 列除 a_{11} 外其余元素全为 0.

再用同样的方法处理除去第 1 行和第 1 列后余下的低一阶行列式，如此继续下去，直至使它成为上三角行列式，此时主对角线上元素的乘积就是所求行列式的值.

例 1.8 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix}1&2&-3&-4\\-1&-2&5&-8\\0&-1&2&-1\\1&3&-5&10\end{vmatrix}.$$

解 $D=\begin{vmatrix}1&2&-3&-4\\-1&-2&5&-8\\0&-1&2&-1\\1&3&-5&10\end{vmatrix}\xlongequal[r_4-r_1]{r_2+r_1}\begin{vmatrix}1&2&-3&-4\\0&0&2&-12\\0&-1&2&-1\\0&1&-2&14\end{vmatrix}$

$$\xlongequal[r_3+r_2]{r_2\leftrightarrow r_4}-\begin{vmatrix}1&2&-3&-4\\0&1&-2&14\\0&0&0&13\\0&0&2&-12\end{vmatrix}\xlongequal{r_3\leftrightarrow r_4}\begin{vmatrix}1&2&-3&-4\\0&1&-2&14\\0&0&2&-12\\0&0&0&13\end{vmatrix}=26.$$

例 1.9 计算行列式 $D=\begin{vmatrix}a&b&b&b\\b&a&b&b\\b&b&a&b\\b&b&b&a\end{vmatrix}$.

解法一 这个行列式的特点是行列式每一列(行)4 个元素之和都等于 $a+3b$,连续用性质 6,将第 2,3,4 行同时加到第 1 行,提出公因子 $a+3b$ 后各行减去第 1 行:

$$D=\begin{vmatrix}a&b&b&b\\b&a&b&b\\b&b&a&b\\b&b&b&a\end{vmatrix}\xlongequal{r_1+r_2+r_3+r_4}\begin{vmatrix}a+3b&a+3b&a+3b&a+3b\\b&a&b&b\\b&b&a&b\\b&b&b&a\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_1\div(a+3b)}(a+3b)\begin{vmatrix}1&1&1&1\\b&a&b&b\\b&b&a&b\\b&b&b&a\end{vmatrix}.$$

再把行列式的第 1 行乘以$(-b)$分别加到其余各行,得

$$D=(a+3b)\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&a-b&0&0\\0&0&a-b&0\\0&0&0&a-b\end{vmatrix}=(a+3b)(a-b)^3.$$

解法二　$D=\begin{vmatrix} a & b & b & b \\ b & a & b & b \\ b & b & a & b \\ b & b & b & a \end{vmatrix} \overset{\substack{r_2-r_1\\ r_3-r_1\\ r_4-r_1}}{=\!=\!=} \begin{vmatrix} a & b & b & b \\ b-a & a-b & 0 & 0 \\ b-a & 0 & a-b & 0 \\ b-a & 0 & 0 & a-b \end{vmatrix}$

$$\overset{c_1+c_2+c_3+c_4}{=\!=\!=\!=\!=} \begin{vmatrix} a+3b & b & b & b \\ 0 & a-b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a-b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a-b \end{vmatrix} = (a+3b)(a-b)^3.$$

例 1.10　计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a & a+b & a+b+c & a+b+c+d \\ a & 2a+b & 3a+2b+c & 4a+3b+2c+d \\ a & 3a+b & 6a+3b+c & 10a+6b+3c+d \end{vmatrix}.$$

解　从第 4 行开始，后行减前行，

$$D=\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 0 & a & a+b & a+b+c \\ 0 & a & 2a+b & 3a+2b+c \\ 0 & a & 3a+b & 6a+3b+c \end{vmatrix} \overset{\substack{r_4-r_3\\ r_3-r_2}}{=\!=\!=} \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 0 & a & a+b & a+b+c \\ 0 & 0 & a & 2a+b \\ 0 & 0 & a & 3a+b \end{vmatrix}$$

$$\overset{r_4-r_3}{=\!=\!=} \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 0 & a & a+b & a+b+c \\ 0 & 0 & a & 2a+b \\ 0 & 0 & 0 & a \end{vmatrix} = a^4.$$

上面例题中都用到把几个运算写在一起的省略写法，要注意各运算的次序一般不能颠倒，这是由于后一次运算是作用在前一次运算结果上的缘故.

例如，

$$\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} \overset{r_2+r_1}{=\!=\!=} \begin{vmatrix} a & c \\ b+a & d+c \end{vmatrix} \overset{r_1-r_2}{=\!=\!=} \begin{vmatrix} -b & -d \\ b+a & d+c \end{vmatrix}.$$

$$\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} \overset{r_1-r_2}{=\!=\!=} \begin{vmatrix} a-b & c-d \\ b & d \end{vmatrix} \overset{r_2+r_1}{=\!=\!=} \begin{vmatrix} a-b & c-d \\ a & c \end{vmatrix}.$$

可见两次运算当次序不同时结果亦不同. 此外，还要注意运算 r_i+r_j 与 r_j+r_i 的区别，记号 r_i+r_j 表示把行列式第 j 行上的元素加到第 i 行的对应元素上，是第 i 行改变；而记号 r_j+r_i 表示把行列式第 i 行上的元素加到第 j 行的对应元素上，是第 j 行改变.

例 1.11 计算 $n+1$ 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix},\quad 其中\ a_i\neq 0, i=1,2,\cdots,n.$$

解 将 D 化成上三角行列式.

因为 $a_i\neq 0, i=1,2,\cdots,n$,故将第 2 列的 $\left(-\frac{1}{a_1}\right)$倍,第 3 列的 $\left(-\frac{1}{a_2}\right)$倍,…,第 $n+1$ 列的 $\left(-\frac{1}{a_n}\right)$倍分别加到第 1 列,则

$$D=\begin{vmatrix} a_0-\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i} & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}=\left(a_0-\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\right)a_1a_2\cdots a_n.$$

例 1.12 解方程

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 1 & x+1 & 3 & \cdots & n \\ 1 & 2 & x+1 & \cdots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & x+1 \end{vmatrix}=0.$$

解 先计算方程左侧的行列式,把第 1 行乘以 -1 依次加到第 2 行、第 3 行直至第 n 行,得

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 1 & x+1 & 3 & \cdots & n \\ 1 & 2 & x+1 & \cdots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & x+1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 0 & x-1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & x-2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x-n+1 \end{vmatrix}$$
$$=(x-1)(x-2)\cdots(x-n+1),$$

所以,方程为

$$(x-1)(x-2)\cdots(x-n+1)=0.$$

由此得到方程的解为:$x=1$,或 $x=2$,…,或 $x=n-1$.

当有些方程是以行列式的形式给出的,就需要先计算行列式,后解方程.

1.3 行列式按行列展开

对于三阶行列式来说，容易验证

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}.$$

由此可见，三阶行列式的计算可以归结为二阶行列式的计算.

一般来说，低阶行列式的计算比高阶行列式的计算要简便. 于是，我们自然地考虑用低阶行列式来表示高阶行列式的问题. 为此，首先引入余子式和代数余子式的概念.

在 n 阶行列式中，把 (i,j) 元 a_{ij} 所在的第 i 行与第 j 列划去后，留下来的 $n-1$ 阶行列式叫做 (i,j) 元 a_{ij} 的**余子式**，记作 M_{ij}；记

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij},$$

A_{ij} 叫做 (i,j) 元 a_{ij} 的**代数余子式**.

例如在 4 阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

中，$(2,3)$ 元 a_{23} 的余子式和代数余子式分别为

$$M_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix},$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3}M_{23} = -M_{23}.$$

定理 1.2 一个 n 阶行列式 D，如果其中第 i 行所有元素除 (i,j) 元 a_{ij} 外都为零，则这个行列式等于 a_{ij} 与它的代数余子式的乘积，即

$$D = a_{ij}A_{ij}.$$

证 先假定第 1 行的元素除 a_{11} 外都是 0 的情形. 此时，

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

根据行列式的定义

$$D=\sum_{1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(1j_2\cdots j_n)}a_{11}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

$$=a_{11}\sum_{j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_2\cdots j_n)}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

$$=a_{11}\begin{vmatrix}a_{22}&a_{23}&\cdots&a_{2n}\\a_{32}&a_{33}&\cdots&a_{3n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n2}&a_{n3}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}=a_{11}M_{11}.$$

由 $A_{11}=(-1)^{1+1}M_{11}=M_{11}$,得 $D=a_{11}A_{11}$.

再证一般情形,设

$$D=\begin{vmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1j}&\cdots&a_{1n}\\\vdots&&\vdots&&\vdots\\0&\cdots&a_{ij}&\cdots&0\\\vdots&&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&\cdots&a_{nj}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}.$$

为了利用前面的结果,将行列式 D 进行对换,把 a_{ij} 调至行列式的第1行第1列的位置.

首先把 D 的第 i 行依次与第 $i-1$ 行、第 $i-2$ 行、…、第1行对调,这样元素 a_{ij} 就调到第1行上,调换的次数为 $i-1$. 再把第 j 列依次与第 $j-1$ 列、第 $j-2$ 列、…、第1列对调,这样元素 a_{ij} 就调到第1行第1列的位置,调换的次数为 $j-1$. 总之经过 $i+j-2$ 次调换,元素 a_{ij} 调到第1行第1列的位置时所得行列式记为 D_1,显然 $D=(-1)^{i+j-2}D_1=(-1)^{i+j}D_1$,而元素 a_{ij} 在 D_1 中的余子式仍然是 a_{ij} 在 D 中的余子式 M_{ij}.

由于

$$D_1=a_{ij}M_{ij},$$

于是

$$D=(-1)^{i+j}D_1=(-1)^{i+j}a_{ij}M_{ij}=a_{ij}A_{ij}.$$

定理1.3 行列式等于它的任一行(列)的各元素与其对应的代数余子式乘积之和,即

$$D=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in},\quad i=1,2,\cdots,n,$$

或

$$D=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj},\quad j=1,2,\cdots,n.$$

证

$$D=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{i1}&a_{i2}&\cdots&a_{in}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}$$

$$
=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+0+\cdots+0 & 0+a_{i2}+\cdots+0 & \cdots & 0+0+\cdots+a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}
$$

$$
=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{i2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\cdots+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},
$$

由定理 1.2，$D=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}$，$i=1,2,\cdots,n$.

类似地，按列证明可得 $D=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj}$，$j=1,2,\cdots,n$.

这个定理叫做**行列式按行（列）展开法则**. 利用这一法则并结合行列式的性质可以简化行列式的计算.

例 1.13　计算行列式

$$
D=\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}.
$$

解　保留 a_{44}，把第 4 行其余元素变为 0，然后按第 4 行展开，

$$
D=\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \xlongequal[c_2-c_4]{c_1-2c_2} \begin{vmatrix} -5 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ -1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{4+4}\begin{vmatrix} -5 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ -1 & -2 & 1 \end{vmatrix}
$$

$$
=3\times(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} -5 & -1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix}=(-3)\times(10-1)=-27.
$$

例 1.14　计算行列式

$$
D_n=\begin{vmatrix} x & y & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & y & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & y \\ y & 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix}.
$$

解　将行列式按第 1 列展开得

$$D_n=(-1)^{1+1}x\begin{vmatrix} x & y & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & y & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & y \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix}+(-1)^{n+1}y\begin{vmatrix} y & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ x & y & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & y \end{vmatrix}.$$

上面两个行列式分别为 $n-1$ 阶上三角行列式和 $n-1$ 阶下三角行列式,故

$$D_n=x\cdot x^{n-1}+(-1)^{n+1}y\cdot y^{n-1}=x^n+(-1)^{n+1}y^n.$$

例 1.15 计算 n 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}.$$

解 由性质 5 将 D_n 的第 1 列的各元素看成两元素之和,得

$$D_n=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$+\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}.$$

第 1 个行列式按第 1 列展开,第 2 个行列式从第 1 行开始依次加到下一行,得到

$$D_n=D_{n-1}+\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=D_{n-1}+1,$$

从而有递推公式

$$D_n = D_{n-1} + 1 = D_{n-2} + 2 = \cdots = D_1 + n - 1 = 2 + n - 1 = n + 1.$$

此处是将行列式的计算归结为形式相同而阶数较低的行列式的计算，此方法称为递推法，所得关系式 $D_n = D_{n-1} + 1$ 称为递推式.

例 1.16　证明范德蒙德(Vandermonde)行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_{n-1} & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_{n-1}^2 & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_{n-1}^{n-1} & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leqslant j < i \leqslant n} (x_i - x_j), \tag{1.10}$$

其中记号“$\prod$”表示全体同类因子的乘积.

证　用数学归纳法. 因为

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix} = x_2 - x_1 = \prod_{1 \leqslant j < i \leqslant 2} (x_i - x_j),$$

所以当 $n=2$ 时，式(1.10)成立. 现假设式(1.10)对 $n-1$ 阶范德蒙德行列式成立，要证式(1.10)对 n 阶范德蒙德行列式也成立.

为此，设法将 D_n 降阶：从第 n 行开始，后行减去前行的 x_1 倍，得

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & x_2 - x_1 & x_3 - x_1 & \cdots & x_n - x_1 \\ 0 & x_2(x_2 - x_1) & x_3(x_3 - x_1) & \cdots & x_n(x_n - x_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & x_2^{n-2}(x_2 - x_1) & x_3^{n-2}(x_3 - x_1) & \cdots & x_n^{n-2}(x_n - x_1) \end{vmatrix},$$

再按第 1 列展开，并把每列的公因子$(x_i - x_1)$提出，就有

$$D_n = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)\cdots(x_n - x_1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_2^{n-2} & x_3^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} \end{vmatrix},$$

上式右端的行列式是 $n-1$ 阶范德蒙德行列式，按归纳法假设，它等于所有$(x_i - x_j)$因子的乘积，其中 $2 \leqslant j < i \leqslant n$，故

$$D_n = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)\cdots(x_n - x_1) \prod_{2 \leqslant j < i \leqslant n} (x_i - x_j) = \prod_{1 \leqslant j < i \leqslant n} (x_i - x_j).$$

例 1.17　计算行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & -2 & 4 & -8 \end{vmatrix}.$$

解 D 是4阶范德蒙德行列式的转置,利用行列式的性质 $D=D^{\mathrm{T}}$,所以

$$D=(-1-1)(3-1)(-2-1)(3+1)(-2+1)(-2-3)=240.$$

定理 1.4 行列式某一行(列)的元素与另一行(列)的对应元素的代数余子式乘积之和等于零. 即

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=0,\quad i\neq j,$$

或

$$a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+\cdots+a_{ni}A_{nj}=0,\quad i\neq j.$$

证 $$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix} \xlongequal{r_j+r_i} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{j1}+a_{i1} & a_{j2}+a_{i2} & \cdots & a_{jn}+a_{in}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn}\end{vmatrix}.$$

上述两个行列式都按第 j 行展开,得

$$\sum_{k=1}^{n}a_{jk}A_{jk}=\sum_{k=1}^{n}(a_{ik}+a_{jk})A_{jk},$$

移项化简,得

$$\sum_{k=1}^{n}a_{ik}A_{jk}=0,\quad i\neq j.$$

同理可证另一式.

综合定理1.3与定理1.4,可得关于代数余子式的重要性质:

$$\sum_{k=1}^{n}a_{ki}A_{kj}=D\delta_{ij}=\begin{cases}D, & i=j,\\ 0, & i\neq j,\end{cases}$$

或

$$\sum_{k=1}^{n}a_{ik}A_{jk}=D\delta_{ij}=\begin{cases}D, & i=j,\\ 0, & i\neq j,\end{cases}$$

其中

$$\delta_{ij}=\begin{cases}1, & i=j,\\ 0, & i\neq j.\end{cases}$$

例 1.18 设行列式

$$D_4=\begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 & 0\\ 2 & 2 & 2 & 2\\ 0 & -7 & 0 & 0\\ 5 & 3 & -2 & 2\end{vmatrix},$$