

第3章 连续时间信号与系统的傅里叶分析

本章开始由时域分析转入变换域分析。在变换域分析中,首先讨论傅里叶变换(Fourier Transform, FT)。傅里叶变换是在傅里叶级数(Fourier Series, FS)正交函数展开的基础上发展而产生的,这方面的问题也称为傅里叶分析。

傅里叶分析的研究与应用至今已近二百年。1822年法国数学家傅里叶在研究热传导理论时发表了著作《热的分析理论》,提出并证明了将周期函数展开为正弦级数的原理。傅里叶的两个主要论点是:

- (1) 周期信号都可表示为成谐波关系的正弦信号的加权和;
- (2) 非周期信号都可用正弦信号的加权积分表示。

这两个论点奠定了傅里叶级数的理论基础。其后,泊松(Simeon Denis Poisson, 1781~1840)、高斯(Johann Carl Friedrich Gauss, 1777~1855)等人把这一成果应用到电学中去。在电力工程中,伴随着电机制造、交流电的产生与传输等实际问题的需要,三角函数、指数函数以及傅里叶分析等数学工具早已得到广泛的应用;但是,在通信系统中普遍应用这些数学工具还经历了一段过程,因为当时要找到简便而实用的方法来产生、传输、分离和变换各种频率的正弦信号还有一定的困难。直到19世纪末,人们才制造出用于工程实际的电容器。进入20世纪后,谐振电路、滤波器、正弦振荡器等一系列具体问题的解决为傅里叶分析的进一步应用开辟了广阔的前景。人们逐渐认识到,在通信与控制系统的理论研究和实际应用中,采用频率域(频域)的分析方法比经典的时间域(时域)方法有许多突出的优点。当今,傅里叶分析方法已经成为信号分析与系统设计不可缺少的重要工具。

20世纪70年代以来,随着计算机、数字集成电路技术的发展,人们对各种二值正交函数(如沃尔什函数)的研究产生了兴趣,它为通信、数字信号处理等技术领域的研究提供了多种途径和手段。虽然,人们认识到傅里叶分析绝不是信息科学与技术领域中唯一的变换域方法,但也不得不承认,在此领域中,傅里叶分析始终有着极其广泛的应用,是研究其他变换方法的基础。而且由于计算机技术的应用,在傅里叶分析方法中出现了所谓“快速傅里叶变换”(Fast Fourier Transform, FFT),它为这一数学工具赋予了新的生命力。目前,快速傅里叶变换的研究与应用已相当成熟,而且仍在不断发展。

傅里叶分析方法不仅应用于电力工程、通信和控制领域之中,而且在软科学、光学、量子物理和各种线性系统分析等许多有关数学、物理和工程技术领域中都得到了广泛而普遍的应用。

第2章中连续时间线性时不变系统时域分析的要点是:以单位冲激函数为基本信号,将任意输入信号 $x(t)$ 分解为一系列移位冲激函数的加权积分;而系统对输入信号 $x(t)$ 的响应 $y(t)$ 是输入信号 $x(t)$ 与系统单位冲激响应 $h(t)$ 的卷积,即 $y(t) = x(t) * h(t)$ 。

本章将以正余弦信号和虚指数信号 $e^{j\omega t}$ 为基本信号,将任意输入信号分解为一系列不同频率的正弦信号或虚指数信号的加权和或加权积分。

由于本章进行系统分析的独立变量是频率,故称为频域分析。

3.1 连续周期信号的傅里叶级数表示

在讨论周期信号的傅里叶级数前,先介绍正交函数与正交函数集的概念。若两个定义在实数域的复函数 $g_1(t)$ 、 $g_2(t)$ 在区间 (t_1, t_2) 内满足

$$\begin{cases} \int_{t_1}^{t_2} g_1(t) g_2^*(t) dt = \int_{t_1}^{t_2} g_1^*(t) g_2(t) dt = 0 \\ \int_{t_1}^{t_2} |g_i(t)|^2 dt = k_i \quad i = 1, 2 \end{cases} \quad (3-1)$$

则说这两个函数在区间 (t_1, t_2) 正交,或它们是区间 (t_1, t_2) 上的正交函数。若复函数集 $\{g_i(t)\}$ 定义在实数区间 (t_1, t_2) 内且函数 $g_1(t), \dots, g_n(t)$ 满足

$$\begin{cases} \int_{t_1}^{t_2} |g_i(t)|^2 dt = k_i \quad i = 1, 2, \dots, n \\ \int_{t_1}^{t_2} g_i(t) g_j^*(t) dt = 0 \quad i, j = 1, 2, \dots, n, \text{ 且 } i \neq j \end{cases} \quad (3-2)$$

则这个函数集就是正交函数集,当 $k_i = 1$ ($i = 1, 2, \dots, n$) 时该函数集为归一化正交函数集。

满足一定条件的信号可以分解为正交函数的线性组合。即任意信号 $f(t)$ 在区间 (t_1, t_2) 内可由组成信号空间的 n 个正交函数的线性组合近似表示为

$$f(t) \approx c_1 g_1(t) + c_2 g_2(t) + \dots + c_n g_n(t) \quad (3-3)$$

若正交函数集是完备的,则

$$f(t) = c_1 g_1(t) + c_2 g_2(t) + \dots + c_n g_n(t) + \dots \quad (3-4)$$

正交函数集 $\{g_i(t)\}$ 的完备性是指,对于一个在区间 (t_1, t_2) 内的正交函数集中的所有函数,不可能另外再找得到一个非零函数在同一区间内与所有的 $g_i(t)$ 正交。即不存在这样一个函数 $x(t)$,使之能满足

$$\int_{t_1}^{t_2} x(t) g_i^*(t) dt = 0, \quad i = 1, 2, \dots \quad (3-5)$$

如果 $x(t)$ 能在区间 (t_1, t_2) 内与它们正交,则 $x(t)$ 本身必属于这个正交函数集。若 $\{g_i(t)\}$ 不包括 $x(t)$,那么这个正交函数集 $\{g_i(t)\}$ 也就不完备。

包含正、余弦函数的三角函数集是最重要的完备正交函数集。它具有以下优点:

- (1) 三角函数是基本函数;
- (2) 用三角函数表示信号,建立了时间与频率两个基本物理量之间的联系;
- (3) 单频三角函数是简谐信号,简谐信号容易产生、传输、处理;
- (4) 三角函数信号通过线性时不变系统后,仍为同频三角函数信号,仅幅度和相位有变化,计算更方便。

由于三角函数的上述优点,周期信号通常被表示(分解)为无穷多个正弦信号之和。利用欧拉公式还可以将三角函数表示为复指数函数,因此周期函数还可以展开成无穷多个复指数函数之和,其优点与三角函数级数相同。用这两种基本函数表示的级数,分别称为三角形式傅里叶级数和指数形式傅里叶级数。它们是傅里叶级数中两种不同的表达形式,也简称为傅氏级数。本节利用傅氏级数表示信号的方法,研究周期信号的频域特性,建立信号频谱的概念。

3.1.1 三角形式的傅里叶级数

三角函数集 $\{\cos(n\omega_0 t), \sin(n\omega_0 t) | n=0, 1, 2, \dots\}$ 是一个完备的正交函数集, 正交区间为 $(t_0, t_0 + T)$ 。这里 $T=2\pi/\omega_0$ 是各个函数 $\cos(n\omega_0 t), \sin(n\omega_0 t)$ 的公共周期, t_0 为任意实数。三角函数集正交性的证明可利用如下公式

$$\int_{t_0}^{t_0+T} \cos(n\omega_0 t) \cdot \cos(m\omega_0 t) dt = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ \frac{T}{2} & m = n \end{cases} \quad (3-6a)$$

$$\int_{t_0}^{t_0+T} \sin(n\omega_0 t) \cdot \sin(m\omega_0 t) dt = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ \frac{T}{2} & m = n \end{cases} \quad (3-6b)$$

$$\int_{t_0}^{t_0+T} \cos(n\omega_0 t) \cdot \sin(m\omega_0 t) dt = 0 \quad (3-6c)$$

上述正交三角函数集中, 当 $n=0$ 时, $\cos 0=1, \sin 0=0$, 而 0 不应包含在此正交函数集中, 故正交三角函数集可具体写为

$$\{1, \cos\omega_0 t, \cos 2\omega_0 t, \dots, \sin\omega_0 t, \sin 2\omega_0 t, \dots\}$$

设周期信号 $f(t)$ 的周期为 T , 当 $f(t)$ 满足如下狄里赫利 (Peter Gustav Lejeune Dirichlet, 1805~1859) 条件时:

- (1) 信号在一个周期内有有限个间断点;
- (2) 信号在一个周期内有有限个极值点;
- (3) 信号在一个周期内能量有限, 即 $\int_{t_0}^{t_0+T} |f(t)|^2 dt < +\infty$ 。

则信号 $f(t)$ 可分解为如下三角级数——称为 $f(t)$ 的傅里叶级数 (Fourier Series, FS)

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(n\omega_0 t) + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin(n\omega_0 t) \quad (3-7)$$

式中, $\omega_0=2\pi/T$ 称为基波角频率, $a_0/2, a_n$ 和 b_n 为加权系数。只有满足狄里赫利条件的周期信号才可展开为傅里叶级数, 而绝大多数常见的周期信号都满足狄里赫利条件。式(3-7)就是周期信号 $f(t)$ 在 (t_0, t_0+T) 区间的三角形式傅里叶级数展开式。由于 $f(t)$ 为周期信号, 且其周期 T 与三角函数集中各函数的周期 T 相同, 故上述展开式在 $(-\infty, +\infty)$ 区间也是成立的。系数 a_n, b_n 称为傅里叶系数, 它们与 $f(t)$ 的关系为

$$a_n = \frac{\int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \cos(n\omega_0 t) dt}{\int_{t_0}^{t_0+T} \cos^2(n\omega_0 t) dt} = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \cos(n\omega_0 t) dt \quad (3-8a)$$

$$b_n = \frac{\int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \sin(n\omega_0 t) dt}{\int_{t_0}^{t_0+T} \sin^2(n\omega_0 t) dt} = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \sin(n\omega_0 t) dt \quad (3-8b)$$

当 $n=0$ 时, $a_0 = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) dt$ 。而 $f(t)$ 的直流分量为

$$\overline{f(t)} = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) dt = \frac{a_0}{2} \quad (3-9)$$

显然, a_n 为 $n\omega_0$ 的偶函数, b_n 为 $n\omega_0$ 的奇函数, 即

$$\left. \begin{aligned} a_n &= a_{-n} \\ b_n &= -b_{-n} \end{aligned} \right\} \quad (3-10)$$

将 $a_n \cos(n\omega_0 t)$ 和 $b_n \sin(n\omega_0 t)$ 合成为一个正弦分量

$$a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t) = c_n \cos(n\omega_0 t + \varphi_n) \quad (3-11a)$$

$$a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t) = d_n \sin(n\omega_0 t + \theta_n) \quad (3-11b)$$

则式(3-7)可改写成为

$$f(t) = \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} c_n \cos(n\omega_0 t + \varphi_n) \quad (3-12a)$$

$$f(t) = \frac{d_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} d_n \sin(n\omega_0 t + \theta_n) \quad (3-12b)$$

其中

$$a_0 = c_0 = d_0 \quad (3-13a)$$

$$c_n = d_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \quad (3-13b)$$

$$\tan \varphi_n = -\frac{b_n}{a_n} \quad (3-13c)$$

$$\tan \theta_n = \frac{a_n}{b_n} \quad (3-13d)$$

$$a_n = c_n \cos \varphi_n = d_n \sin \theta_n \quad (3-13e)$$

$$b_n = -c_n \sin \varphi_n = d_n \cos \theta_n \quad (3-13f)$$

3.1.2 指数形式的傅里叶级数

三角形式的傅里叶级数含义比较明确, 但运算不便, 因而经常采用指数形式的傅里叶级数。

形如 $e^{jn\omega_0 t}$ ($n \in \mathbf{Z}$) 的复指数函数集, 它们是相互正交的, 即有

$$\int_{t_0}^{t_0+T} e^{jn\omega_0 t} \cdot e^{-jm\omega_0 t} dt = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ T & m = n \end{cases} \quad (3-14)$$

式中, $T=2\pi/\omega_0$ 为指数函数公共周期, m, n 为整数, t_0 为任意实数。

对于周期为 T 的任意函数 $f(t)$, 利用欧拉公式

$$\begin{cases} \cos x = \frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2} \\ \sin x = \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j} \end{cases} \quad (3-15)$$

可从 $f(t)$ 在区间 (t_0, t_0+T) 内傅里叶级数的三角形式推出指数形式

$$f(t) = F_0 + F_1 e^{j\omega_0 t} + F_2 e^{j2\omega_0 t} + \cdots + F_{-1} e^{-j\omega_0 t} + F_{-2} e^{-j2\omega_0 t} + \cdots = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_n e^{jn\omega_0 t} \quad (3-16)$$

式中, 系数 F_n 为

$$F_n = \frac{\int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \cdot (e^{jn\omega_0 t})^* dt}{\int_{t_0}^{t_0+T} (e^{jn\omega_0 t}) \cdot (e^{jn\omega_0 t})^* dt} = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \quad (3-17)$$

若记 F_n 为模和相角的形式, 即 $F_n = |F_n| e^{j\varphi_n}$, 则模 $|F_n|$ 为 n 的偶函数, 相角 φ_n 为 n 的奇函数, 即

$$\begin{cases} |F_{-n}| = |F_n| \\ \varphi_{-n} = -\varphi_n \end{cases} \quad (3-18)$$

指数形式傅里叶级数与三角形式傅里叶级数的系数之间关系为

$$\left. \begin{aligned} F_0 &= \frac{a_0}{2} = \frac{c_0}{2} \\ F_n &= |F_n| e^{j\varphi_n} = \frac{1}{2}(a_n - jb_n) = \frac{1}{2}c_n e^{j\varphi_n} \\ F_{-n} &= \frac{1}{2}(a_n + jb_n) = \frac{1}{2}c_n e^{-j\varphi_n} \\ |F_n| &= \frac{1}{2}c_n = |F_{-n}| \\ \varphi_n &= -\arctan \frac{b_n}{a_n} \\ F_n + F_{-n} &= 2\operatorname{Re}(F_n) = a_n \\ j(F_n - F_{-n}) &= 2j\operatorname{Im}(F_n) = b_n \end{aligned} \right\} \quad (3-19)$$

式(3-13)和式(3-19)描述的三角形式和复指数形式的傅里叶级数各系数之间的关系如图 3-1 所示。

由上述讨论可知,同一个信号,既可以展开成三角形式的傅里叶级数,又可展开成指数形式的傅里叶级数。二者形式虽不同,实质是完全一致的。指数形式傅里叶级数中有负频率项,这只是数学运算的结果,并不真正存在以负频率进行振荡的分量,负频率项与相应的正频率项合起来才代表一个振荡分量

$$\frac{F_n}{2}e^{jn\omega_0 t} + \frac{F_{-n}}{2}e^{-jn\omega_0 t} = |F_n| \cos(n\omega_0 t + \varphi_n) \quad (3-20)$$

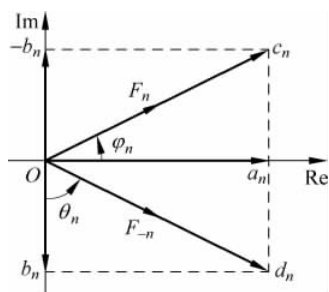


图 3-1 三角形式和复指数形式傅里叶级数各系数之间的几何关系

3.1.3 周期信号的波形对称性与谐波特性的关系

周期信号的波形与其谐波特性是对应的。将信号 $f(t)$ 展开成傅里叶级数时,如果 $f(t)$ 为实函数,且其波形具有某些对称性,则在傅里叶级数中某些系数等于零,即其谐波特性将变得简单。波形的对称性有两类,一类是整周期对称,如偶函数和奇函数;另一类是半周期对称,如奇谐函数和偶谐函数。整周期对称的波形其傅里叶级数展开式中只含有余弦项或正弦项;半周期对称的波形其级数展开式中只含有奇次谐波项或偶次谐波项。

1. 偶函数

若信号波形相对于纵轴对称,即满足 $f(t) = f(-t)$,则 $f(t)$ 为偶函数。如图 3-2 所示的周期三角信号就是偶函数。

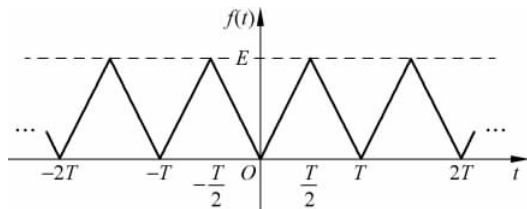


图 3-2 偶函数举例

对于偶函数 $f(t)$, 式(3-8a)中的 $f(t)\cos(n\omega_0 t)$ 为偶函数, 而式(3-8b)中的 $f(t)\sin(n\omega_0 t)$ 为奇函数, 于是级数中各系数为

$$\left. \begin{aligned} a_0 &= \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) dt \\ a_n &= \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) \cos(n\omega_0 t) dt \\ b_n &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3-21)$$

可见, 偶函数的傅里叶级数中不含有正弦分量, 只可能含有直流分量和余弦分量。注意, 并不是所有的偶函数都存在直流分量。波形是否含有直流分量, 可从波形直观地判断。以横坐标为界, 其波形的上下面积若相等, 则无直流分量, 否则有直流分量。后面介绍偶谐函数时, 也是如此。例如对如图 3-2 所示的周期三角信号, 它的傅里叶级数为

$$f(t) = \frac{E}{2} - \frac{4E}{\pi^2} \left(\cos(\omega_0 t) + \frac{1}{3^2} \cos(3\omega_0 t) + \frac{1}{5^2} \cos(5\omega_0 t) + \dots \right)$$

显然不含正弦分量, 而只含有直流分量和余弦分量。

2. 奇函数

若信号波形对称于原点, 即满足 $f(t) = -f(-t)$, 则 $f(t)$ 为奇函数。如图 3-3 所示的周期锯齿信号就是奇函数。

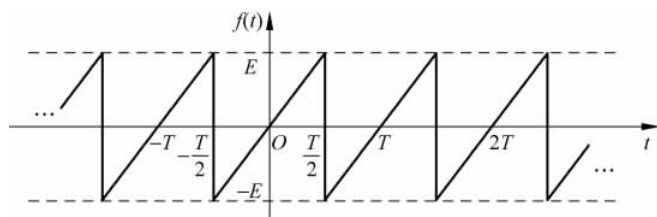


图 3-3 奇函数举例

对于奇函数 $f(t)$, 式(3-8a)中的 $f(t)\cos(n\omega_0 t)$ 为奇函数, 而式(3-8b)中的 $f(t)\sin(n\omega_0 t)$ 为偶函数, 于是级数中的各系数为

$$\left. \begin{aligned} a_n &= 0 \\ b_n &= \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) \sin(n\omega_0 t) dt \end{aligned} \right\} \quad (3-22)$$

所以, 在奇函数的傅里叶级数中不会含有直流分量和余弦分量, 只可能含有正弦分量。

对于如图 3-3 所示的锯齿信号, 其傅里叶级数为

$$f(t) = \frac{2E}{\pi} \left(\sin(\omega_0 t) - \frac{1}{2} \sin(2\omega_0 t) + \frac{1}{3} \sin(3\omega_0 t) + \dots \right)$$

它显然不含有直流分量和余弦分量, 只含有正弦分量。

还需指出, 若将奇函数加上非零直流分量, 则它不再是奇函数, 但在它的级数中仍然不会含有余弦项。

3. 奇谐函数

如果信号波形沿时间轴向左或向右平移半个周期, 并作上下翻转后得出的波形与原波形重合, 即满足

$$f(t) = -f\left(t \pm \frac{T}{2}\right) \quad (3-23)$$

则称此函数为奇谐函数,或称半波对称函数。图 3-4 是奇谐函数的一个例子。

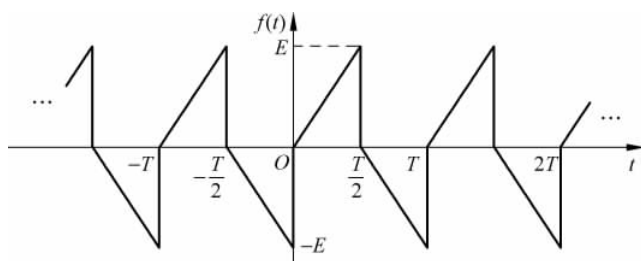


图 3-4 奇谐函数举例

对于奇谐函数,利用三角函数的周期性和奇谐函数的对称性,可计算得其傅里叶级数为

$$\left. \begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos(n\omega_0 t) dt = \begin{cases} \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) \cos(n\omega_0 t) dt & n \text{ 为奇数} \\ 0 & n \text{ 为偶数} \end{cases} \\ b_n &= \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \sin(n\omega_0 t) dt = \begin{cases} \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) \sin(n\omega_0 t) dt, & n \text{ 为奇数} \\ 0, & n \text{ 为偶数} \end{cases} \end{aligned} \right\} \quad (3-24)$$

由式(3-24)可以看出,奇谐函数的傅里叶展开式中将只含有奇次谐波分量,而不含直流及偶次谐波分量。

注意: 不要将奇函数与奇谐函数相混淆,前者只可能包含正弦分量,而后者只可能包含奇次谐波的正弦、余弦分量。

4. 偶谐函数

与奇谐函数相对应,如果信号波形沿时间轴向左或向右平移半个周期后得到的波形与原波形重合,即满足

$$f(t) = f\left(t \pm \frac{T}{2}\right) \quad (3-25)$$

则称此函数为偶谐函数。偶谐函数的一个例子是经过全波整流后所得的电流,如图 3-5 所示。

实际上,当偶谐函数的周期缩减为 $\frac{T}{2}$ 时就是

周期函数,即基波频率实际上已是 $\frac{2\pi}{T/2} = 2 \frac{2\pi}{T} =$

$2\omega_0$ 。也就是说,以 T 为周期,即以 $\omega_1 = 2\omega_0$ 为基

频进行谐波分析,当然就不会存在奇次谐波分量,所以偶谐函数的傅里叶展开式中将只可能含有直流分量和偶次谐波分量。

如图 3-5 所示的信号既是偶函数,又是偶谐函数,所以其傅里叶展开式中只含有直流分量以及偶次谐波的余弦分量。

熟悉了函数的奇、偶性和奇谐、偶谐等对称性后,对于一些波形所包含的谐波分量常可

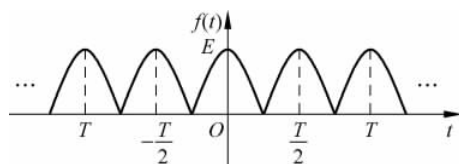


图 3-5 偶谐函数举例

迅速作出判断,便于迅速计算傅里叶级数的分量系数。

3.1.4 典型周期信号的傅里叶级数

1. 周期矩形脉冲信号

1) 周期矩形脉冲信号的傅里叶级数

设周期矩形脉冲信号 $f(t)$ 的脉冲宽度为 τ 、幅度为 E 、周期为 T ,基波角频率 $\omega_0 = 2\pi/T$,如图 3-6 所示。

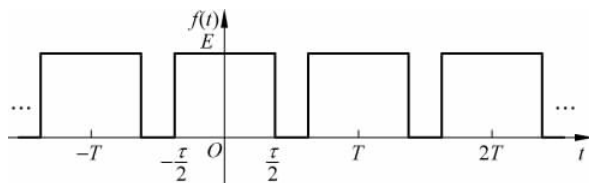


图 3-6 周期矩形脉冲信号的波形

该信号在一个周期内可表示为

$$f_1(t) = E \left[u\left(t + \frac{\tau}{2}\right) - u\left(t - \frac{\tau}{2}\right) \right]$$

根据式(3-7),可以把周期矩形脉冲信号展开成三角形式的傅里叶级数,即式(3-7)

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(n\omega_0 t) + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin(n\omega_0 t)$$

根据式(3-8)可以求出各系数。由于 $f(t)$ 是偶函数,所以

$$b_n = 0 \quad (3-26)$$

其中直流分量

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) dt = \frac{E\tau}{T} \quad (3-27)$$

余弦分量的幅度为

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} E \cos(n\omega_0 t) dt = \frac{2E}{n\omega_0 T} \left[\sin\left(\frac{n\omega_0 \tau}{2}\right) - \sin\left(-\frac{n\omega_0 \tau}{2}\right) \right] \\ &= \frac{2E\tau}{T} \frac{\sin\left(\frac{n\omega_0 \tau}{2}\right)}{\frac{n\omega_0 \tau}{2}} = \frac{2E\tau}{T} \text{Sa}\left(\frac{n\omega_0 \tau}{2}\right) \end{aligned} \quad (3-28)$$

从而,周期矩形脉冲信号的三角形式傅里叶级数为

$$f(t) = \frac{E\tau}{T} + \frac{2E\tau}{T} \sum_{n=1}^{+\infty} \text{Sa}\left(\frac{n\omega_0 \tau}{2}\right) \cos(n\omega_0 t) \quad (3-29)$$

若将 $f(t)$ 分解为复指数形式的傅里叶级数,根据式(3-17)可得

$$F_n = \frac{2E}{T} \frac{\sin\left(\frac{n\omega_0 \tau}{2}\right)}{n\omega_0} = \frac{E\tau}{T} \text{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) \Big|_{\omega=n\omega_0} \quad (3-30)$$

所以,周期矩形脉冲信号复指数形式的傅里叶级数为

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_n e^{jn\omega_0 t} = \frac{E\tau}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \text{Sa}\left(\frac{n\omega_0 \tau}{2}\right) e^{jn\omega_0 t} \quad (3-31)$$

2) 周期矩形脉冲信号的频谱

根据式(3-26)、式(3-27)、式(3-28)、式(3-30)可以画出周期矩形脉冲信号三角形式和指数形式表示的频谱图。由于 c_n 、 F_n 均为实数, 因此可将幅度谱与相位谱合画在一起, 也可将幅度谱与相位谱分开画, 如图 3-7 所示。

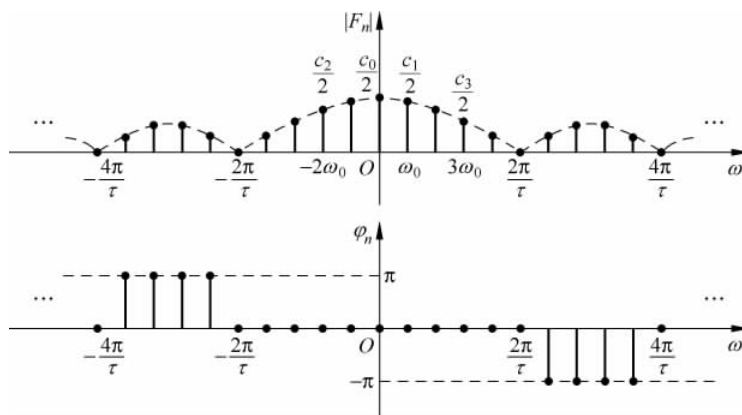


图 3-7 周期矩形脉冲信号的频谱

从频谱图可看出如下几点:

(1) 周期矩形脉冲信号的频谱是离散的, 谱线只出现在基波频率 ω_0 的整数倍频率(即各次谐波频率)上, 相邻两谱线的间隔为 ω_0 , 谱线间隔与脉冲重复周期 T 成反比, 脉冲周期 T 越长, 谱线间隔越小。

(2) 直流分量、基波及各次谐波分量的大小正比于脉冲幅度 E 和脉冲宽度 τ , 反比于信号周期 T 。谱线的幅度包络按抽样函数 $\text{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$ 的规律变化。当 $\frac{\omega\tau}{2}$ 为 π 的整数倍, 即 $\omega = m \frac{2\pi}{\tau} (m \in \mathbf{Z})$ 时, 谱线的包络线经过零点。

(3) 谱线包络任意两个相邻的零值点之间的谱线条数与信号的脉宽 τ 与周期 T 的比值有关。若 $\frac{\tau}{T} = \frac{1}{n}$, 则谱线包络任意两个相邻的零值点之间就有 $n-1$ 条谱线。

(4) 周期矩形脉冲信号包含无穷多条谱线, 即它可以分解成无穷多个频率分量。随着频率的增高, 谱线幅度变化的总趋势收敛于零, 信号的主要能量集中在第一个零点以内。在允许一定失真的条件下, 可以要求通信系统只把 $\omega \leq \frac{2\pi}{\tau}$ 频率范围内的各个频谱分量传送过去而舍弃其他频谱分量。通常把 $\frac{2\pi}{\tau}$ 称为矩形信号的频带宽度, 记作 B_ω 。

$$B_\omega = \frac{2\pi}{\tau} \quad (3-32)$$

而把 $\omega = 0 \sim \frac{2\pi}{\tau}$ 这段频率范围称为矩形信号的主频带。显然, 频带宽度 B_ω 只与脉冲宽度 τ 有关, 而且两者成反比关系。信号的频带宽度与时宽成反比的性质是信号分析中最基本的特性, 它将贯穿于信号与系统分析的全过程。

3) 周期矩形脉冲信号的频谱结构与波形参数(τ, T)之间的关系

为了说明在不同脉冲宽度 τ 、不同周期 T 的情况下周期矩形脉冲信号频谱的变化规律, 图 3-8 画出了 $(\tau_1 = \tau/2, T_1 = T)$ 、 $(\tau_2 = \tau, T_2 = T)$ 、 $(\tau_3 = \tau, T_3 = 2T)$ 三种参数组合时周期矩形脉冲信号及其频谱图。

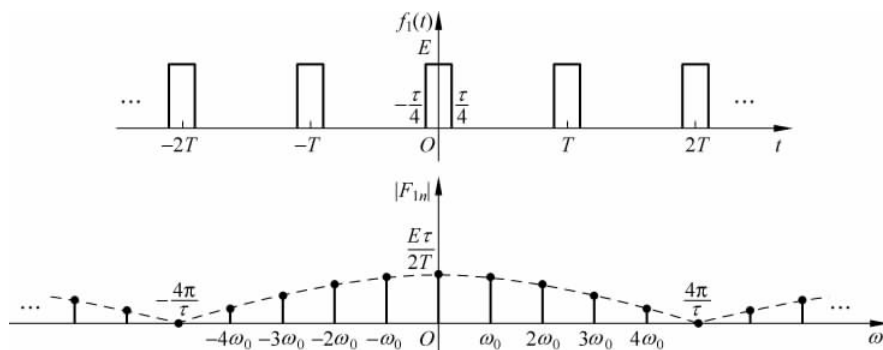
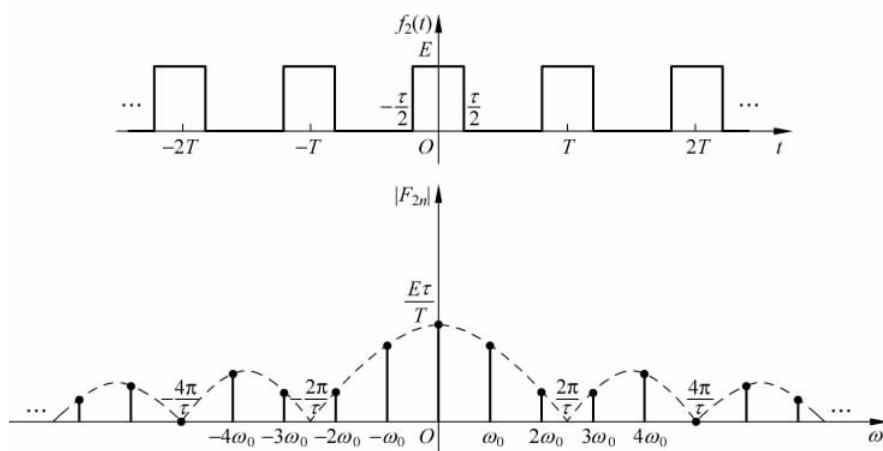
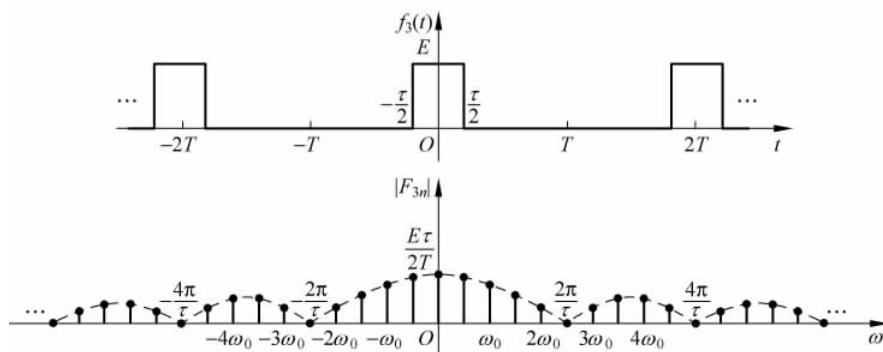
(a) $\tau_1 = \tau/2, T_1 = T$ 时周期矩形脉冲信号 $f_1(t)$ 及其频谱(b) $\tau_2 = \tau, T_2 = T$ 时周期矩形脉冲信号 $f_2(t)$ 及其频谱(c) $\tau_3 = \tau, T_3 = 2T$ 时周期矩形脉冲信号 $f_3(t)$ 及其频谱

图 3-8 不同波形参数时周期矩形信号的频谱

以周期矩形脉冲信号 $f_2(t)$ 为参考信号, 比较图 3-8(a)、(b) 可见, 当周期矩形信号的周期不变 ($T_1 = T_2 = T$) 而脉冲宽度减半 ($\tau_1 = \tau_2/2 = \tau/2$) 时, 频谱的谱线间隔不变 ($\Delta\omega_1 = \Delta\omega_2 = \omega_0$), 谱线强度减小一倍 (如, $2c_{10} = c_{20} = E\tau/T$), 频带宽度扩展一倍 ($B_{1\omega} = 2B_{2\omega} = 4\pi/\tau$); 比较图 3-8(b)、(c) 可见, 当周期矩形信号的脉冲宽度不变 ($\tau_3 = \tau_2 = \tau$) 而周期扩展一倍 ($T_3 = 2T_2 = 2T$) 时, 频带宽度不变 ($B_{3\omega} = B_{2\omega} = 2\pi/\tau$), 谱线强度也减小一倍 (如, $2c_{30} = c_{20} = E\tau/T$), 但谱线间隔减小一倍 ($2\Delta\omega_3 = \Delta\omega_2 = \omega_0$)。更一般地, 若不同周期矩形信号的周期相同而脉冲宽度不同, 它们频谱的谱线间隔相同, 但频带宽度不同; 若不同周期矩形信号的周期不同而脉冲宽度相同时, 它们频谱的谱线间隔不同, 但频带宽度相同。

2. 周期锯齿脉冲信号

周期锯齿脉冲信号如图 3-9 所示, 它是奇函数, 因而 $a_0 = 0, a_n = 0$ 。由式 (3-8b) 可以求出傅里叶系数 b_n 。这样便可得到该信号的傅里叶级数

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{2E}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} \sin(n\omega_0 t) \\ &= \frac{2E}{\pi} \left(\sin(\omega_0 t) - \frac{1}{2} \sin(2\omega_0 t) + \frac{1}{3} \sin(3\omega_0 t) - \frac{1}{4} \sin(4\omega_0 t) + \cdots \right) \end{aligned}$$

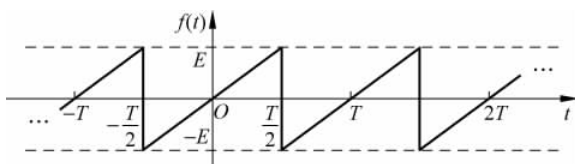


图 3-9 周期锯齿脉冲信号

周期锯齿脉冲信号只包含正弦分量, 谐波的幅度以 $\frac{1}{n}$ 的规律收敛。

3. 周期三角脉冲信号

周期三角脉冲信号如图 3-10 所示。它是偶函数, 因而 $b_n = 0$ 。由式 (3-8a) 可求出傅里叶系数 a_0 和 a_n , 这样就可得到该信号的傅里叶级数

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{E}{2} + \frac{4E}{\pi^2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \sin^2\left(\frac{n\pi}{2}\right) \cos(n\omega_0 t) \\ &= \frac{E}{2} + \frac{4E}{\pi^2} \left(\cos(\omega_0 t) + \frac{1}{3^2} \cos(3\omega_0 t) + \frac{1}{5^2} \cos(5\omega_0 t) + \cdots \right) \end{aligned}$$

周期三角脉冲信号的频谱只包含直流、奇次谐波的余弦分量, 谐波的幅度以 $\frac{1}{n^2}$ 的规律收敛。如果将该信号沿纵坐标向下平移 $E/2$, 则新信号 $f(t) - E/2$ 就将是奇谐函数。

4. 周期半波余弦信号

周期半波余弦信号如图 3-11 所示。它是偶函数, 因而 $b_n = 0$, 由式 (3-8a) 可以求出傅里叶系数 a_0 和 a_n 。这样便可得到该信号的傅里叶级数

$$f(t) = \frac{E}{\pi} - \frac{2E}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 - 1} \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) \cos(n\omega_0 t)$$

$$= \frac{E}{\pi} + \frac{E}{2} \left(\cos(\omega_0 t) + \frac{4}{3\pi} \cos(2\omega_0 t) - \frac{4}{15\pi} \cos(4\omega_0 t) + \dots \right)$$

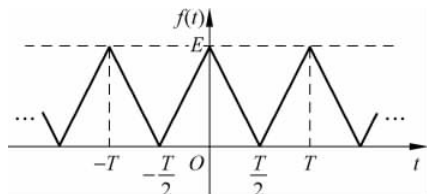


图 3-10 周期三角脉冲信号

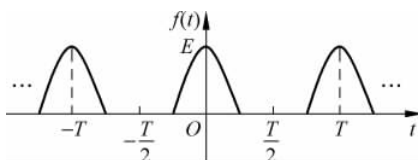


图 3-11 周期半波余弦信号

周期半波余弦信号只含有直流、基波和偶次谐波的余弦分量,谐波幅度以 $\frac{1}{n^2}$ 规律收敛。

5. 周期全波余弦信号

若余弦信号为 $f_1(t) = E \cos(\omega_0 t)$, 其中 $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$, 则全波余弦信号 $f(t)$ 为

$$f(t) = |f_1(t)| = E |\cos(\omega_0 t)|$$

如图 3-12 所示,周期全波余弦信号 $f(t)$ 是偶函数,因而 $b_n = 0$ 。而且 $f(t)$ 的周期 T_1 是 $f_1(t)$ 的周期 T 的一半,即 $T_1 = \frac{T}{2}$, 同时频率 $\omega_1 = \frac{2\pi}{T_1} = 2\omega_0$, 以全波余弦信号的参数 ω_1 , 求出傅里叶级数为

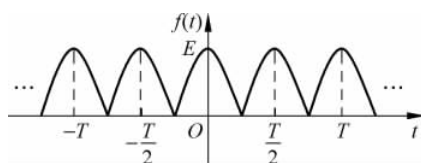


图 3-12 周期全波余弦信号

$$f(t) = \frac{2E}{\pi} + \frac{4E}{\pi} \left(\frac{1}{3} \cos(\omega_1 t) - \frac{1}{15} \cos(2\omega_1 t) + \frac{1}{35} \cos(3\omega_1 t) - \dots \right)$$

若用余弦信号 $f_1(t)$ 的参数 ω_0 表示,则周期全波余弦信号的傅里叶级数为

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{2E}{\pi} + \frac{4E}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{4n^2 - 1} \cos(2n\omega_0 t) \\ &= \frac{2E}{\pi} + \frac{4E}{\pi} \left(\frac{1}{3} \cos(2\omega_0 t) - \frac{1}{15} \cos(4\omega_0 t) + \frac{1}{35} \cos(6\omega_0 t) - \dots \right) \end{aligned}$$

可见,周期全波余弦信号包含直流分量及 ω_1 的基波和各次谐波分量;或者说,只包含直流分量和 ω_0 的偶次谐波分量。谐波的幅度以 $\frac{1}{n^2}$ 的规律收敛。

3.1.5 关于傅里叶级数的有关结论

(1) 随着 n 绝对值增加, a_n 、 b_n 、 c_n 、 d_n 、 F_n 的绝对值总体趋势是衰减的(但不一定单调衰减);

(2) 对于有限项傅里叶级数,随着迭加项数的增加,傅里叶级数与原信号的均方差逐渐减小,但在间断点处的误差仍然较大,存在 Gibbs 现象;

(3) 高频分量为信号中变化快的部分,主要影响信号跳变沿;低频分量为信号中变化慢的部分,主要影响信号峰、谷强度的高低;

(4) 若信号 $f(t)$ 为偶函数, 则级数中只有 a_n 项, 所有 $b_n=0$; 若信号 $f(t)$ 为奇函数, 则级数中只有 b_n 项, 所有 $a_n=0$;

(5) 若信号 $f(t)$ 半波奇对称, 即 $f(t) = -f\left(t \pm \frac{nT}{2}\right)$ (n 为奇数), 则傅里叶级数偶次谐波的系数为 0; 若信号 $f(t)$ 半波偶对称, 即 $f(t) = f\left(t \pm \frac{nT}{2}\right)$ (n 为奇数), 则傅里叶级数奇次谐波的系数为 0 (此时信号的实际周期为 $T/2$);

(6) 所有周期信号都不满足绝对可积的条件, 即信号在 $(-\infty, +\infty)$ 内的绝对积分均发散。但在任何一个周期内信号平方的积分都是有限的, 定义信号的平均功率 P 为

$$P = \overline{f^2(t)} = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} |f(t)|^2 dt \quad (3-33)$$

而且, 有

$$P = \left(\frac{a_0}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n^2 + b_n^2) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |F_n|^2 \quad (3-34)$$

3.1.6 周期信号的频谱及其特点

1. 周期信号的频谱

由上述讨论已知, 任意周期信号可用傅里叶级数来表示。这种级数或为式(3-7)和式(3-12)的三角形式的级数, 或为式(3-16)的指数形式的级数。在求取代表各次谐波的各级数项时, 只利用式(3-8)和式(3-13)求得各分量的幅度和相位, 或者利用式(3-17)求得各分量的复振幅, 则各项也就完全确定了。这样一种数学表示式, 虽然详尽而确切地表示了信号分解的结果, 但往往不够直观, 不能一目了然。为了能既方便又明白地表示一个信号中含有哪些频率分量以及各分量所占的比重, 通常会采用一种称为频谱图的表示方法。

对于式(3-12a)的三角形式的傅里叶级数, c_n 表示了 n 次谐波的幅度, φ_n 表示了 n 次谐波的相位。如果以频率为横轴, 以幅度或相位为纵轴, 绘出 c_n 或 φ_n 随频率 $n\omega_0$ 的变化关系, 便可直观地看出各频率分量的相对大小和相位情况, 这样的图就称为三角形式表示的信号幅度频谱(简称幅度谱)和相位频谱(简称相位谱)。例如, 图 3-7 画出了周期矩形信号的幅度谱与相位谱, 其中每条线代表一个频率分量的幅度或相位, 叫做谱线。连接各谱线顶点的曲线(图中虚线)称为频谱包络, 这是各频率分量的幅度、相位变化的轮廓。同理, 对于式(3-16)所示的指数形式的傅里叶级数, 也可以画出指数形式的信号频谱。因为 F_n 一般是复函数, 所以称这种频谱为复数频谱。根据 $F_n = |F_n| e^{j\varphi_n}$ 可以画出幅度谱 $|F_n| \sim \omega$ 与相位谱 $\varphi_n \sim \omega$ 。

2. 周期信号频谱的特点

通过上述分析, 我们可以总结出任何周期信号的频谱都具有如下特点:

- (1) 离散性——频谱是离散的而不是连续的, 这种频谱称为离散频谱。
- (2) 谐波性——谱线出现在基波频率 ω_0 的整数倍上(奇谐函数的谱线出现在基波频率的奇数倍上)。
- (3) 收敛性——幅度谱的谱线幅度随着 n 增大而逐渐衰减到零。

3.2 连续非周期信号的傅里叶变换

3.1 节的讨论对象为周期性信号,它们可分解为一系列离散谐波的加权和即傅里叶级数。本节的讨论对象为非周期性信号,将讨论非周期性信号的傅里叶变换(Fourier Transform, FT)。

3.2.1 傅里叶变换及傅里叶逆变换

对于脉冲宽度为 τ 、幅度 $E=1$ 、周期为 T 的周期矩形信号,根据式(3-30)可写出其傅里叶系数为

$$F_n = \frac{2}{T} \frac{\sin\left(\frac{n\omega_0\tau}{2}\right)}{n\omega_0} = \frac{\tau}{T} \text{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) \Big|_{\omega=n\omega_0} \quad (3-35)$$

由图 3-8(b)、3-8(c) 的比较已知,保持矩形脉冲的宽度不变而周期加大一倍后,其频谱包络线的过零点频率不变,而相邻谱线间距减小一倍。如果继续保持矩形脉冲的宽度不变,而将其周期 T 不断增大以至于 T 趋于无穷大时,由式(3-35)知 F_n 将趋于零,但 TF_n 却是与 T 无关的量;而且此时相邻谱线的间距 ω_0 将趋于无穷小,原本离散的谱线将逐步演变成连续的频谱。考虑单位频率宽度内的谱线强度

$$\frac{F_n}{\frac{\omega_0}{2\pi}} = \frac{\frac{\tau}{T} \text{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) \Big|_{\omega=n\omega_0}}{\frac{2\pi}{T}/2\pi} = \tau \text{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) \Big|_{\omega=n\omega_0}$$

可见,周期矩形信号单位频率宽度内的谱线强度是一个与信号周期 T 无关的量。

对于任意周期信号 $f(t)$,记其傅里叶级数的系数 F_n 为 $F(n\omega)$,式(3-17)可以改写为

$$F(n\omega_0) = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$$

取 $f(t)$ 在区间 $(-T/2, T/2)$ 中的部分为 $f_1(t)$,并令 $f_1(t)$ 在区间 $(-T/2, T/2)$ 以外的函数值为 0,则 $f_1(t)$ 可以看成是周期信号 $f(t)$ 在区间 $(-T/2, T/2)$ 中保持不变而周期 T 趋于无穷大极限时的“周期”函数,因此,对于“周期”信号 $f_1(t)$,有

$$\begin{aligned} \lim_{T \rightarrow +\infty} T \cdot F(n\omega_0) &= \lim_{T \rightarrow +\infty} T \cdot \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt = \lim_{T \rightarrow +\infty} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_1(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t) e^{-j\omega t} dt \end{aligned}$$

记

$$F(j\omega) = \lim_{T \rightarrow +\infty} T \cdot F(n\omega_0)$$

则有

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t) e^{-j\omega t} dt$$

由于信号 $f_1(t)$ 的周期为无穷大,它其实就是非周期信号,所以上式就是任意非周期信号 $f_1(t)$ 的傅里叶变换。更一般地,用 $f(t)$ 表示任意非周期信号,则上式可以改写为

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \quad (3-36)$$

这就是任意非周期信号 $f(t)$ 的傅里叶变换。

根据式(3-16),对于任意非周期信号 $f(t)$,有

$$\begin{aligned} f(t) &= \lim_{T \rightarrow +\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_n e^{jn\omega_0 t} = \lim_{T \rightarrow +\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{jn\omega_0 t} \cdot \frac{F(n\omega_0)}{\omega_0} \cdot \omega_0 \\ &= \lim_{T \rightarrow +\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{jn\omega_0 t} \cdot \frac{T \cdot F(n\omega_0)}{2\pi} \cdot [(n+1)\omega_0 - n\omega_0] \\ &= \frac{1}{2\pi} \lim_{T \rightarrow +\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{j\omega t} \cdot F(j\omega) \cdot \Delta\omega \big|_{\omega=n\omega_0} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \end{aligned}$$

即任意非周期信号 $f(t)$ 的傅里叶逆变换为

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (3-37)$$

式(3-36)和式(3-37)就构成了任意非周期信号的傅里叶变换对,有时简记为

$$F(j\omega) = FT\{f(t)\} \quad (3-38a)$$

$$f(t) \xleftrightarrow{FT} F(j\omega) \quad (3-38b)$$

若 $f(t)$ 为因果信号,则其傅里叶变换式即式(3-36)可改写为

$$F(j\omega) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \quad (3-39)$$

它的逆变换仍为式(3-37)。

根据傅里叶变换对式(3-36)和式(3-37),当 $t=0$ 或 $\omega=0$ 时,存在一对特殊的等式

$$\left. \begin{aligned} F(j0) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt \\ f(0) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(j\omega) d\omega \end{aligned} \right\} \quad (3-40)$$

3.2.2 傅里叶变换的物理意义

1. $F(j\omega)$ 是密度函数

从式(3-36)的推导过程可见, $F(j\omega)$ 并不是在频率 ω 处的谱线强度,而是在 ω 处单位频率宽度内的谱线平均强度,故 $F(j\omega)$ 是一个密度函数,非周期信号可以表示成 $F(j\omega)$ 的连续傅里叶积分。

对于任意周期信号,由于其非零谱线仅在其基频的整数倍上(成谐波关系),而在其他频率上的谱线强度均为零,所以周期信号可以表示成离散的傅里叶级数和。

2. $F(j\omega)$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$

从式(3-37)可见,傅里叶积分的范围为 $(-\infty, +\infty)$,即 $F(j\omega)$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$ 。这表明,非周期信号的频谱包含了从零频率(直流分量)到无限高频率的所有频率分量,分量的频率之间不成谐波关系。

需要再次指出的是, $F(j\omega)$ 中有负频率项,这只是数学运算的结果,并不真正存在以负

频率进行振荡的分量,负频率项与相应的正频率项合起来才代表一个振荡。

3. $F(j\omega)$ 一般为复函数

与周期信号的复指数傅里叶级数系数 F_n 相似, $F(j\omega)$ 一般是 ω 的复函数,可记为

$$F(j\omega) = |F(j\omega)| e^{j\varphi(\omega)}$$

从而,傅里叶逆变换积分可改写为

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |F(j\omega)| e^{j(\omega t + \varphi(\omega))} d\omega \quad (3-41)$$

如果信号 $f(t)$ 是实信号,则幅频 $|F(j\omega)|$ 为 ω 的偶函数,相频 $\varphi(\omega)$ 为 ω 的奇函数,此时式(3-41)可简化为

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |F(j\omega)| \cos(\omega t + \varphi(\omega)) d\omega \quad (3-42)$$

4. 傅里叶变换的存在条件

在傅里叶变换式即式(3-36)的推导过程中,有一假设成立的前提条件,即极限 $\lim_{T \rightarrow +\infty} T \cdot F(n\omega_0)$ 对所有的 n 均存在,否则 $F(j\omega)$ 可能在某些频率处成为无穷大。与周期信号需要满足狄里赫利条件才能展开成傅里叶级数相类似,非周期信号 $f(t)$ 存在傅里叶变换也需要满足一定的条件,这些条件也称为狄里赫利条件,即:

(1) 信号在无限区间内绝对可积,即

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt < +\infty \quad (3-43)$$

(2) 信号在任何有限区间内有有限个极值点;

(3) 信号在任何有限区间内有有限个不连续点,而且每个不连续点的值必须是有限的。

对于存在不连续点的时域信号,傅里叶逆变换在不连续点处收敛于该不连续点左极限、右极限的平均值。如果采用广义函数的概念,允许奇异函数也满足上述条件,则冲激函数、阶跃函数等也可以存在傅里叶变换。

信号的时间函数 $f(t)$ 和它的傅里叶变换即频谱 $F(j\omega)$ 是同一信号的两种不同的表现形式。不过, $f(t)$ 显示了时间信息而隐藏了频率信息; $F(j\omega)$ 显示了频率信息而隐藏了时间信息。信号的时域波形可通过示波器进行观察,而信号的频域特性则可通过频谱仪进行观察。

3.2.3 典型非周期信号的傅里叶变换

1. 单边指数信号

单边指数信号的表示式为

$$f(t) = \begin{cases} e^{-at}, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

其中 $a > 0$ 。它的傅里叶变换为

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{a + j\omega}$$

所以,单边指数信号的幅度谱和相位谱分别为

$$|F(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{a^2 + \omega^2}}$$

$$\varphi(\omega) = -\arctan\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

单边指数信号的时域波形 $f(t)$ 、幅度谱 $|F(j\omega)|$ 和相位谱 $\varphi(\omega)$ 如图 3-13 所示。

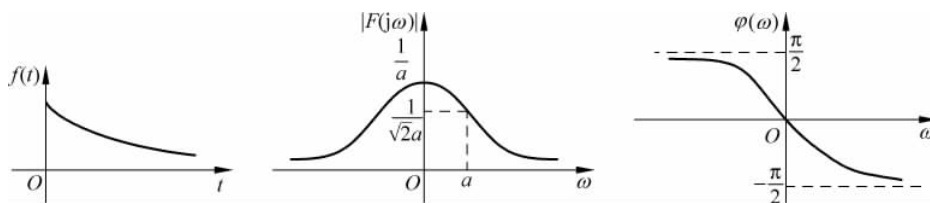


图 3-13 单边指数信号及其频谱

2. 双边指数信号

双边指数信号的表示式为

$$f(t) = e^{-a|t|}, \quad -\infty < t < +\infty$$

其中 $a > 0$ 。它的傅里叶变换为

$$F(j\omega) = \frac{2a}{a^2 + \omega^2}$$

从而

$$|F(j\omega)| = \frac{2a}{a^2 + \omega^2}$$

$$\varphi(\omega) = 0$$

双边指数信号的波形 $f(t)$ 、频谱 $F(j\omega)$ 如图 3-14 所示。

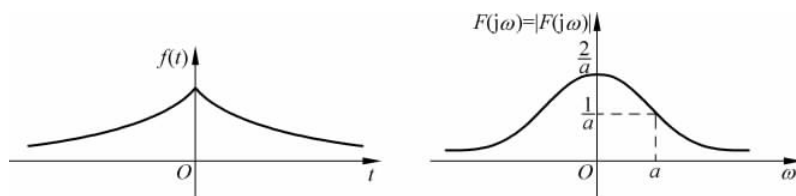


图 3-14 双边指数信号及其频谱

3. 对称矩形脉冲信号

对称矩形脉冲信号的表示式为

$$f(t) = \begin{cases} E, & |t| \leq \frac{\tau}{2} \\ 0, & |t| > \frac{\tau}{2} \end{cases}$$

式中, E 为脉冲幅度, τ 为脉冲宽度。它的傅里叶变换为

$$F(j\omega) = \int_{-\tau/2}^{\tau/2} E e^{-j\omega t} dt = \frac{2E}{\omega} \sin \frac{\omega\tau}{2} = E\tau \cdot \frac{\sin\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)}{\frac{\omega\tau}{2}} = E\tau \text{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$$

从而

$$|F(j\omega)| = E\tau \left| \text{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) \right|$$

$$\varphi(\omega) = \begin{cases} 0, & \frac{4|n|\pi}{\tau} < |\omega| < \frac{2(2|n|+1)\pi}{\tau} \\ -\pi, & \frac{2(2n+1)\pi}{\tau} < \omega < \frac{4(n+1)\pi}{\tau}, \quad n \geq 0 \\ \pi, & \frac{4n\pi}{\tau} < \omega < \frac{2(2n+1)\pi}{\tau}, \quad n < 0 \end{cases}$$

矩形脉冲的波形 $f(t)$ 及频谱图如图 3-15 所示。其中图 3-15(a) 为波形；图 3-15(b) 为幅度谱 $|F(j\omega)|$ ，图形对称于纵轴，它为 ω 的偶函数；图 3-15(c) 为相位谱 $\varphi(\omega)$ ，它为 ω 的奇函数；图 3-15(d) 将 $F(j\omega)$ 用一条曲线同时表示幅度谱 $|F(j\omega)|$ 与相位谱 $\varphi(\omega)$ ，即相位为 π 时，将模量改为负值。显然， $F(j\omega)$ 曲线具有抽样函数的形状。

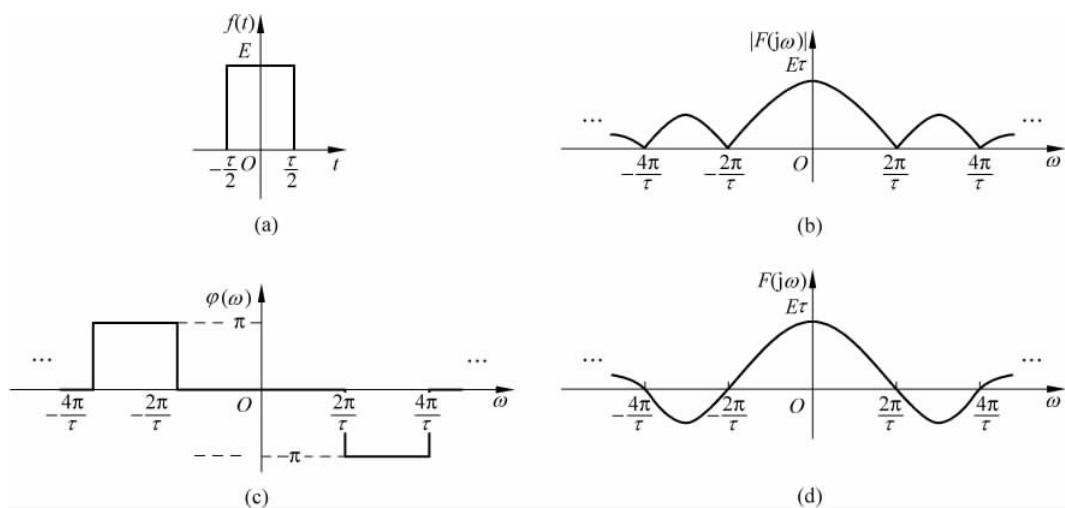


图 3-15 矩形脉冲的波形 $f(t)$ 及频谱

比较图 3-15(d) 与图 3-7 可以看出，非周期矩形单脉冲的频谱函数曲线与周期矩形脉冲离散频谱的包络线形状完全相同，都具有抽样函数的形状。与周期脉冲的频带宽度 B_ω 分析相类似（见式 (3-32)），单脉冲信号的频谱也具有收敛性，信号的绝大部分能量集中在 $0 \sim \frac{1}{\tau}$ 频率范围内。因而，通常认为这种信号占有频率范围（即频带宽度） B_f 近似为 $\frac{1}{\tau}$ ，即

$$B_f \approx \frac{1}{\tau} \quad (3-44)$$

4. 符号函数

符号函数的表示式为

$$f(t) = \text{sgn}(t) = \begin{cases} +1, & t > 0 \\ -1, & t < 0 \end{cases}$$

显然，符号函数不满足狄里赫利条件中的绝对可积条件，它应该不存在傅里叶变换。将符号函数与双边指数函数 $e^{-a|t|}$ 相乘后，先求出乘积信号 $f_1(t)$ 的频谱，然后取 a 趋于 0 的极限，就可以得出符号函数 $f(t)$ 的频谱。

双边指数函数 $f(t)$ 的表示式为

$$f(t) = e^{-a|t|} = e^{at}u(-t) + e^{-at}u(t)$$

式中, $a > 0$ 。取乘积信号 $f_1(t)$

$$f_1(t) = \text{sgn}(t)f(t) = -e^{at}u(-t) + e^{-at}u(t)$$

由于 $a > 0$, 所以 $f_1(t)$ 绝对可积, $f_1(t)$ 满足狄里赫利条件, 因而可根据傅里叶变换的定义求得

$$F_1(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t)e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^0 (-e^{at})e^{-j\omega t} dt + \int_0^{+\infty} e^{-at}e^{-j\omega t} dt = \frac{-2j\omega}{a^2 + \omega^2}$$

符号函数 $\text{sgn}(t)$ 可看作是当 $a \rightarrow 0$ 时 $f_1(t)$ 的极限, 因此 $\text{sgn}(t)$ 的频谱函数也是 $f_1(t)$ 的频谱函数 $F_1(j\omega)$ 在 $a \rightarrow 0$ 时的极限。所以

$$F(j\omega) = \lim_{a \rightarrow 0} F_1(j\omega) = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{-2j\omega}{a^2 + \omega^2} = \frac{2}{j\omega}$$

从而

$$|F(j\omega)| = \frac{2}{|\omega|}$$

$$\varphi(\omega) = \begin{cases} -\frac{\pi}{2}, & \omega > 0 \\ \frac{\pi}{2}, & \omega < 0 \end{cases}$$

可见, 符号函数的傅里叶变换的定义域为 $\omega \neq 0$ 。符号函数的波形和频谱如图 3-16 所示。

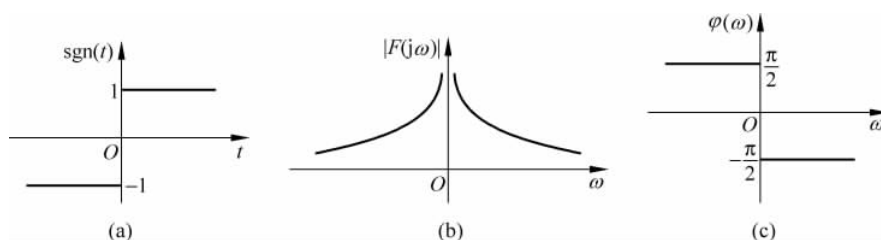


图 3-16 符号函数 $\text{sgn}(t)$ 的波形及频谱

5. 冲激函数

1) 时域冲激函数的傅里叶变换

根据傅里叶变换的定义式即式(3-36)以及冲激函数的取样性质, 可求得单位冲激函数的频谱为

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)e^{-j\omega t} dt = 1$$

冲激函数的频谱函数为常数 1, 表明冲激函数在整个频谱范围内的频谱强度均匀分布, 带宽为无穷大, 这样的频谱也称白色谱。冲激函数的波形和频谱如图 3-17 所示。

根据傅里叶逆变换的定义式(3-37), 可以写出冲激函数的傅里叶逆变换表达式为

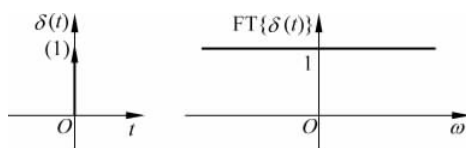


图 3-17 冲激函数的波形及频谱

$$\delta(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\omega t} d\omega \quad (3-45)$$

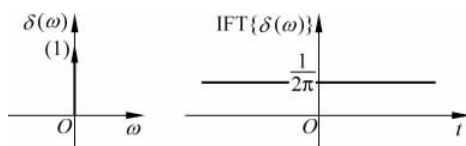
2) 频域冲激函数的傅里叶逆变换

由傅里叶逆变换的定义式(3-37)可得

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi}$$

此结果表明,直流信号的频谱是冲激函数。若某信号包含直流分量,则该信号的频谱中包含冲激函数。反过来说,若某信号的频谱中包含冲激函数,则该信号中必定包含直流分量。

频域冲激函数 $\delta(\omega)$ 及其原函数如图 3-18 所示。



3) 冲激偶函数的傅里叶变换

冲激偶函数是冲激函数的一阶导数,即

$$\delta'(t) = \frac{d}{dt} \delta(t) \quad (3-46)$$

图 3-18 频域冲激函数 $\delta(\omega)$ 及其原函数

因此,对冲激函数的傅里叶逆变换式(3-45)两边求一阶导数,就得到冲激偶函数的傅里叶逆变换,即

$$\delta'(t) = \frac{d}{dt} \delta(t) = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\omega t} d\omega \right) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} j\omega \cdot e^{j\omega t} d\omega$$

比较上式与式(3-37)可见,上式最后一等式中的被积函数 $j\omega$ 就是式(3-37)中的函数 $F(j\omega)$,即事实上有

$$\text{FT} \left\{ \frac{d}{dt} \delta(t) \right\} = j\omega$$

一般地,对于更高阶的冲激偶函数,有

$$\text{FT} \left\{ \frac{d^n}{dt^n} \delta(t) \right\} = (j\omega)^n$$

而对于频域的冲激偶函数,则有

$$\text{FT} \{t^n\} = 2\pi(j)^n \frac{d^n}{d\omega^n} [\delta(\omega)]$$

6. 阶跃信号

与符号函数一样,阶跃信号 $u(t)$ 也不满足绝对可积的条件。通过在频域引入奇异函数,阶跃信号 $u(t)$ 也可进行傅里叶变换。将阶跃信号 $u(t)$ 表示成符号函数的形式

$$u(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \text{sgn}(t) \quad (3-47)$$

对上式两边取傅里叶变换,得

$$\text{FT}\{u(t)\} = \frac{1}{2} \cdot 2\pi\delta(\omega) + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{j\omega} = \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} = \pi\delta(\omega) + \frac{1}{| \omega |} e^{-j\frac{\pi}{2} \text{sgn}(\omega)} \quad (3-48)$$

分析式(3-47)和式(3-48)可知,阶跃函数中的非零直流分量贡献了其频谱中的冲激谱 $\pi\delta(\omega)$,而 0^- 到 0^+ 时刻的不连续跳变则产生了其频谱中的所有非零频率分量。阶跃函数的波形、幅度谱 $|F(j\omega)|$ 、相位谱 $\varphi(\omega)$ 如图 3-19 所示。

由以上常见信号的傅里叶变换可见,在引入奇异(冲激)函数概念之后,许多不满足绝对可积条件的函数,如阶跃函数、符号函数等都可以进行傅里叶变换,并有确切的频谱函数表示式。

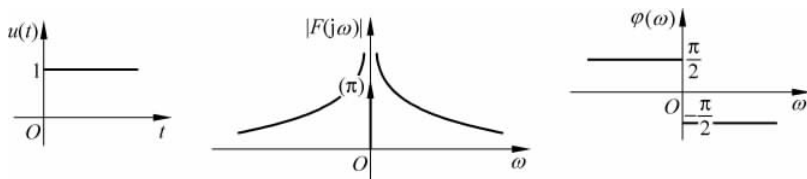


图 3-19 阶跃函数的波形及其频谱

3.3 傅里叶变换的性质

傅里叶变换有许多重要的性质,熟练地利用这些性质对求取 $f(t)$ 的傅里叶变换或从 $F(j\omega)$ 求取逆变换将带来很大的方便,同时在分析信号通过线性系统时也可大大简化运算。

如下讨论傅里叶变换的性质时,均假设任意信号 $f(t)$ 的傅里叶变换为 $F(j\omega)$, 即有 $F(j\omega) = \text{FT}\{f(t)\}$ 。

3.3.1 对偶性

$f(t)$ 与 $F(j\omega)$ 构成傅里叶变换对,则 $F(jt)$ 与 $f(\omega)$ 间有如下变换关系

$$F(jt) \xleftrightarrow{\text{FT}} 2\pi f(-\omega) \quad (3-49)$$

傅里叶变换的对偶性还可以用来确定或提示傅里叶变换的其他性质。例如,如果时间函数的一些特点有傅里叶变换方面的推论,则同样的一些特点与频率函数相联系时在时域中将有对偶的推论。例如,在 3.3.6 节将看到,时域中对 t 的微分对应于频域中乘以 $j\omega$ 。根据上面的讨论,于是可以推测,在时域中乘以 jt 大致对应于频域中对 ω 的微分。

【例 3-1】 求时域信号 $\frac{1}{a+jt}$ ($a>0$) 的傅里叶变换。

解 如果直接采用傅里叶变换的定义式(3-36),积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{a+jt} e^{-j\omega t} dt$ 非常难求,因此需要尝试其他方法。

在 3.2.3 节中已知单边指数衰减信号 $f_1(t) = e^{-at}u(t)$ 的傅里叶变换为 $F_1(j\omega) = \frac{1}{a+j\omega}$ 。将 $F_1(j\omega)$ 中的自变量 ω 换成 t ,利用傅里叶变换的时域与频域之间的对偶性,可以求得信号 $\frac{1}{a+jt}$ 的傅里叶变换为

$$F(j\omega) = 2\pi f_1(-\omega) = 2\pi e^{+a\omega} u(-\omega)$$

3.3.2 线性

时域多个信号的线性组合的傅里叶变换是各信号傅里叶变换的线性组合,即

$$\text{FT}\left\{\sum_{i=1}^n a_i f_i(t)\right\} = \sum_{i=1}^n a_i F_i(j\omega) \quad (3-50)$$

上式中 n 个系数 a_i 为任意复常数。

利用傅里叶变换的线性特性,对于复杂信号可以先将其分解为若干基本信号或常见信

号的线性组合,然后再求取其傅里叶变换。如在 3.2.3 节将阶跃信号分解为直流信号与符号函数之和。

3.3.3 奇偶虚实性

无论 $f(t)$ 是实函数还是复函数,下面两式均成立

$$\text{FT}\{f^*(-t)\} = F^*(j\omega) \quad (3-51a)$$

$$\text{FT}\{f^*(t)\} = F^*(-j\omega) \quad (3-51b)$$

对于任意实函数 $f(t)$,记其傅里叶变换 $F(j\omega)$ 的实部、虚部、幅频、相频分别为 $R(\omega)$ 、 $X(\omega)$ 、 $|F(j\omega)|$ 、 $\varphi(\omega)$,则有

$$\left. \begin{aligned} R(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos(\omega t) dt = R(-\omega) \\ X(\omega) &= -\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin(\omega t) dt = -X(-\omega) \\ |F(j\omega)| &= \sqrt{R^2(\omega) + X^2(\omega)} \\ \varphi(\omega) &= \arctan \frac{X(\omega)}{R(\omega)} = -\varphi(-\omega) \end{aligned} \right\} \quad (3-52)$$

即,实函数 $f(t)$ 的傅里叶变换 $F(j\omega)$ 的实部 $R(\omega)$ 是 ω 的偶函数,虚部 $X(\omega)$ 是 ω 的奇函数,幅频 $|F(j\omega)|$ 是 ω 的偶函数,相频 $\varphi(\omega)$ 是 ω 的奇函数。

特别地,如果实函数 $f(t)$ 关于 t 偶对称,则它的傅里叶变换 $F(j\omega)$ 的虚部 $X(\omega) \equiv 0$,即此时 $F(j\omega)$ 为 ω 的实偶函数

$$X(\omega) = -\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin \omega t dt \equiv 0 \quad (3-53a)$$

$$F(j\omega) = R(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos \omega t dt \quad (3-53b)$$

如果实函数 $f(t)$ 关于 t 奇对称,则它的傅里叶变换 $F(j\omega)$ 的实部 $R(\omega) \equiv 0$,即此时 $F(j\omega)$ 为 ω 的虚奇函数

$$R(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos \omega t dt \equiv 0 \quad (3-54a)$$

$$F(j\omega) = jX(\omega) = -j \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin \omega t dt \quad (3-54b)$$

反之,根据 $F(j\omega)$ 的实、虚、偶、奇特性也可以判断的 $f(t)$ 的偶、奇、实、虚特性。一般地,对于傅里叶变换对 $f(t)$ 与 $F(j\omega)$, $f(t)$ 或 $F(j\omega)$ 的实部对应于 $F(j\omega)$ 或 $f(t)$ 的共轭偶对称分量, $f(t)$ 或 $F(j\omega)$ 的虚部对应于 $F(j\omega)$ 或 $f(t)$ 的共轭奇对称分量; $f(t)$ 或 $F(j\omega)$ 的共轭偶对称分量对应于 $F(j\omega)$ 或 $f(t)$ 的实部, $f(t)$ 或 $F(j\omega)$ 的共轭奇对称分量对应于 $F(j\omega)$ 或 $f(t)$ 的虚部。上述结论可以简述为实部对共轭偶对称分量、虚部对共轭奇对称分量。

【例 3-2】 已知两个实信号 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$,试仅通过一次傅里叶变换运算求得它们各自的傅里叶变换 $F_1(j\omega)$ 和 $F_2(j\omega)$ 。

解 首先,将两实信号 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ 组合成一个复信号

$$f(t) = f_1(t) + j f_2(t)$$

通过一次傅里叶变换运算可求得复信号 $f(t)$ 的傅里叶变换 $F(j\omega)$ 。由于 $f_1(t)$ 是 $f(t)$ 的实部,因此 $f_1(t)$ 的傅里叶变换 $F_1(j\omega)$ 必定是 $F(j\omega)$ 中的偶对称分量,而虚部 $f_2(t)$ 的傅里叶变

换 $F_2(j\omega)$ 必定是 $F(j\omega)$ 中的奇对称分量,即

$$F_1(j\omega) = \text{FT}\{f_1(t)\} = \frac{F(j\omega) + F^*(-j\omega)}{2}$$

$$F_2(j\omega) = \text{FT}\{f_2(t)\} = \frac{F(j\omega) - F^*(-j\omega)}{2j}$$

因此,通过将两个实信号组合成一个复信号后,仅进行一次傅里叶变换运算就可以求得两个信号各自的傅里叶变换。该方法在信号处理领域得到了广泛的应用。

3.3.4 尺度变换特性

如果对时域信号 $f(t)$ 进行时域尺度变换,则

$$\text{FT}\{f(at)\} = \frac{1}{|a|} F\left(j\frac{\omega}{a}\right) \quad (3-55)$$

特别地,当 $a=-1$ 时, $\text{FT}\{f(-t)\}=F(-j\omega)$,即将信号在时域进行反褶后新信号的傅里叶变换为反褶前原信号傅里叶变换的频域反褶。尺度变换特性说明,信号在时域中被压缩,信号在频域中就被扩展;如果信号在时域中被扩展,则它的频谱在频域中就一定被压缩。简言之,就是信号的时域持续时间与其频谱宽度有反比的关系。

对于一般有限时长的信号,其非零频谱一直扩展到无穷大,即频宽实为无限大,其傅里叶逆变换中的积分区间为 $(-\infty, +\infty)$ 。由于任意有限时长信号经傅里叶变换后其频谱都占据了区间 $(-\infty, +\infty)$,以无穷大作为其频带宽度并没有实际用处,因此在实际工程应用中通常以信号频谱中能量比较集中的那一部分频带所占据的范围作为信号的频宽。利用式(3-40),可定义信号的等效脉冲宽度和等效频带宽度为

$$\left. \begin{aligned} \tau &= \frac{F(j0)}{f(0)} \\ B_\omega &= 2\pi \frac{f(0)}{F(j0)} \end{aligned} \right\} \quad (3-56)$$

由于信号在时域被压缩(扩展)时,其能量成比例地减少(增加),因此其频谱幅度要相应乘以系数 $1/|a|$ 。也可以这样来理解:如果信号波形被压缩(扩展) a 倍,信号随时间的变化也加快(变慢)了 a 倍,所以信号所包含的频率分量增加(减少) a 倍,频谱展宽(压缩) a 倍。又因信号的能量没有增加,因此各频率分量的大小必须相应地减小(增加) a 倍。图 3-20 表示矩形脉冲及频谱的扩展与压缩情况。

3.3.5 时移特性和频移特性

根据傅里叶变换的定义,可得傅里叶变换的时移特性

$$\text{FT}\{f(t-t_0)\} = F(j\omega)e^{-j\omega t_0} \quad (3-57)$$

【例 3-3】 已知对称矩形脉冲信号 $f_1(t) = E\left[u\left(t+\frac{\tau}{2}\right) - u\left(t-\frac{\tau}{2}\right)\right]$ 的傅里叶变换为 $F_1(j\omega) = E\tau \text{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$,求矩形脉冲信号 $f(t) = E[u(t) - u(t-\tau)]$ 的频谱函数 $F(j\omega)$ 并画出频谱图。

解 易知,将对称矩形脉冲信号 $f_1(t)$ 右移 $\tau/2$ 后即可得到信号 $f(t)$,即有

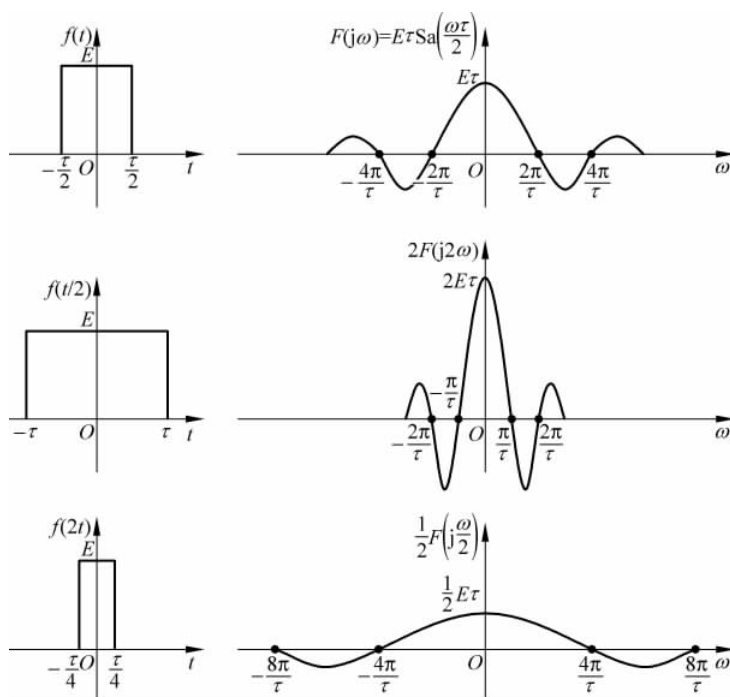


图 3-20 不同宽度的矩形脉冲波形及其频谱

$$f(t) = f_1\left(t - \frac{\tau}{2}\right)$$

因此,利用傅里叶变换的时移特性,有

$$F(j\omega) = F_1(j\omega)e^{-j\omega\frac{\tau}{2}} = E\tau \text{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)e^{-j\frac{\omega\tau}{2}}$$

$F(j\omega)$ 的幅频、相频分别为

$$|F(j\omega)| = E\tau \left| \text{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) \right| = |F_1(j\omega)|$$

$$\varphi(\omega) = \varphi_1(\omega) - \frac{\omega\tau}{2}$$

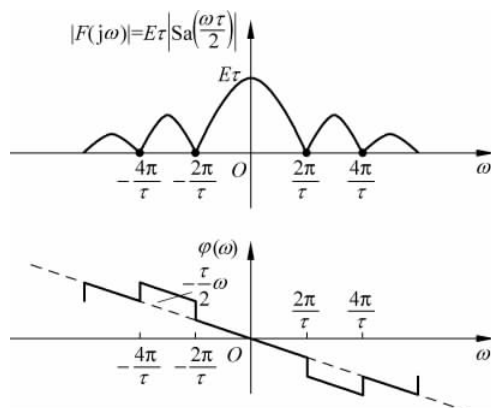
可见,经过时移后, $f(t)$ 与 $f_1(t)$ 的幅频特性完全相同,它们的相频特性仅相差一个与 ω 成线性关系的因子。 $f(t)$ 的频谱幅频、相频曲线见图 3-21。

【例 3-4】 已知对称矩形脉冲信号 $f_1(t) = E\left[u\left(t + \frac{\tau}{2}\right) - u\left(t - \frac{\tau}{2}\right)\right]$ 的傅里叶变换为 $F_1(j\omega) = E\tau \text{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$, 求矩形脉冲信号 $f(t) = f_1(t+T) + f_1(t) + f_1(t-T)$ ($T \neq \tau$) 的频谱函数 $F(j\omega)$ 。

解 根据傅里叶变换的时移特性,可写出

$$F(j\omega) = F_1(j\omega)(e^{j\omega T} + 1 + e^{-j\omega T}) = E\tau \text{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)[1 + 2\cos(\omega T)]$$

如果对信号 $f(t)$ 不仅进行了时移,还同时进行了尺度变换,则带有尺度变换的时移特性为

图 3-21 $f(t)$ 的频谱

$$\text{FT}\{f(at - t_0)\} = \frac{1}{|a|} F\left(j\frac{\omega}{a}\right) e^{-j\frac{\omega t_0}{a}} \quad (3-58)$$

根据傅里叶变换的定义,可得傅里叶变换的频移特性

$$\text{FT}\{f(t)e^{j\omega_0 t}\} = F(j(\omega - \omega_0)) \quad (3-59a)$$

$$\text{FT}\{f(t)e^{-j\omega_0 t}\} = F(j(\omega + \omega_0)) \quad (3-59b)$$

频移特性表明信号在时域中与复因子 $e^{j\omega_0 t}$ 相乘,则在频域中将使整个频谱向右平移 ω_0 。综合式(3-59a)和式(3-59b),并利用欧拉公式,可得到

$$\text{FT}\{f(t)\cos(\omega_0 t)\} = \frac{1}{2}[F(j(\omega - \omega_0)) + F(j(\omega + \omega_0))] \quad (3-60a)$$

$$\text{FT}\{f(t)\sin(\omega_0 t)\} = \frac{1}{2j}[F(j(\omega - \omega_0)) - F(j(\omega + \omega_0))] \quad (3-60b)$$

3.3.6 微分和积分特性

如果 $f(t)$ 与 $F(j\omega)$ 构成一对傅里叶变换,则 $f(t)$ 的高阶微分的傅里叶变换为

$$\text{FT}\left\{\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right\} = (j\omega)^n F(j\omega) \quad (3-61)$$

如果 $\omega=0$ 时 $\left|\frac{F(j\omega)}{\omega}\right| < +\infty$, 或 $F(j0)=0$, 则 $f(t)$ 的积分的傅里叶变换为

$$\text{FT}\left\{\int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau\right\} = \frac{F(j\omega)}{j\omega} \quad (3-62a)$$

如果 $F(j0) \neq 0$, 则 $f(t)$ 的积分的傅里叶变换为

$$\text{FT}\left\{\int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau\right\} = \frac{F(j\omega)}{j\omega} + \pi F(j0)\delta(\omega) \quad (3-62b)$$

【例 3-5】 已知单位冲激信号 $\delta(t)$ 的傅里叶变换为 1, 求单位阶跃信号 $u(t)$ 的傅里叶变换。

解 由于

$$u(t) = \int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau$$

$$F(j\omega) = \text{FT}\{\delta(t)\} \equiv 1$$

利用式(3-62b),得

$$\text{FT}\{u(t)\} = \text{FT}\left\{\int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau\right\} = \frac{F(j\omega)}{j\omega} + \pi F(j0)\delta(\omega) = \frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)$$

将上式与式(3-48)比较可见,两式完全相同。

【例 3-6】 利用傅里叶变换的积分特性求三角脉冲信号 $f(t) = E\left(1 - \frac{2}{\tau}|t|\right)\left[u\left(t + \frac{\tau}{2}\right) - u\left(t - \frac{\tau}{2}\right)\right]$ 的傅里叶变换。

解 首先,依次求取 $f(t)$ 的一阶和二阶导数

$$f_1(t) = \frac{d}{dt}f(t) = \frac{2E}{\tau}\left[u\left(t + \frac{\tau}{2}\right) - u(t)\right] - \frac{2E}{\tau}\left[u(t) - u\left(t - \frac{\tau}{2}\right)\right]$$

$$f_2(t) = \frac{d^2}{dt^2}f(t) = \frac{2E}{\tau}\left[\delta\left(t + \frac{\tau}{2}\right) - 2\delta(t) + \delta\left(t - \frac{\tau}{2}\right)\right]$$

求得 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ 的傅里叶变换分别为

$$F_1(j\omega) = ESa\left(\frac{\omega\tau}{4}\right)(e^{j\frac{\omega\tau}{4}} - e^{-j\frac{\omega\tau}{4}}) = 2jESa\left(\frac{\omega\tau}{4}\right)\sin\left(\frac{\omega\tau}{4}\right)$$

$$F_2(j\omega) = \frac{2E}{\tau}(e^{j\omega\frac{\tau}{2}} - 2 + e^{-j\omega\frac{\tau}{2}}) = \frac{8E}{\tau}j^2 \sin^2\left(\frac{\omega\tau}{4}\right)$$

由于 $f(t)$ 是 $f_2(t)$ 的二重积分,且 $F_1(j\omega)|_{\omega=0}=0, F_2(j\omega)|_{\omega=0}=0$,故利用傅里叶变换的积分特性,得

$$F(j\omega) = \frac{F_2(j\omega)}{(j\omega)^2} = \frac{E\tau}{2}Sa^2\left(\frac{\omega\tau}{4}\right)$$

$f(t)$ 、 $f_1(t)$ 、 $f_2(t)$ 的图形见图 3-22。

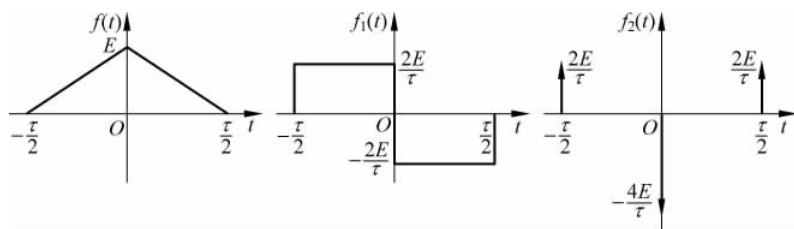


图 3-22 $f(t)$ 、 $f_1(t)$ 、 $f_2(t)$ 曲线

3.3.7 帕斯瓦尔定理

如果 $f(t)$ 与 $F(j\omega)$ 构成一对傅里叶变换,则

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |F(j\omega)|^2 d\omega \quad (3-63)$$

一般来说,非周期信号 $f(t)$ 不是功率信号,其平均功率为零,但其能量为有限量,因而是一个能量信号。非周期信号的总能量 W 为

$$W = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt \quad (3-64)$$

可见,式(3-63)的左边就是信号的总能量 W 。非周期信号是由无限多个振幅为无穷小的频率分量组成的,各频率分量的能量也为无穷小量,但单位频率宽度内的能量 $|F(j\omega)|^2/2\pi$ 却

不是无穷小量。为了表明信号能量在频率分量上的分布情况,与频谱密度函数 $F(j\omega)$ 相似,引入能量密度频谱函数 $|F(j\omega)|^2$, 简称为**能量谱**。因此,信号 $f(t)$ 的总能量既可通过计算单位时间的能量 $|f(t)|^2$ 并在所有时间上的积分来确定,也可通过计算单位频率宽度内的能量 $|F(j\omega)|^2/2\pi$ 并在所有频率上的积分来确定。式(3-63)被称为非周期信号的帕斯瓦尔定理,该定理表明,对非周期信号,在时域中求得的信号能量与频域中求得的信号能量相等。由于 $|F(j\omega)|^2$ 是 ω 的偶函数,因而式(3-63)还可写为

$$W = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |F(j\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} |F(j\omega)|^2 d\omega \quad (3-65)$$

由于周期信号的能量是无限的,因而式(3-63)不适用于周期信号。但是,对于周期信号 $f(t)$ 而言存在一个类似的关系式

$$\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} |f(t)|^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |F_n|^2 \quad (3-66)$$

即,周期信号在一个周期内的能量(即其平均功率)等于它各阶谐波的傅里叶级数系数的模平方和。因此, $|F_n|^2$ 可理解为由第 n 阶谐波所提供的那部分功率。式(3-66)也被称为是周期信号的帕斯瓦尔定理。

3.4 连续周期信号的傅里叶变换

3.4.1 周期信号傅里叶变换的存在性

对于周期信号,当满足狄里赫利条件时,信号可以分解为傅里叶级数。对于非周期的信号,当信号满足狄里赫利条件(绝对可积)时,信号可以进行傅里叶变换。

显然,周期信号不满足绝对可积的条件,应该不存在傅里叶变换,或者说不能进行常规意义下的傅里叶变换。由 3.2.3 节可知,直流信号的频谱为冲激函数,而直流信号可以看成周期是无穷大的周期信号。所以,如果允许频域存在冲激函数并认为有意义的前提下,绝对可积条件成为傅里叶变换不必要的限制,周期有限的周期信号也可以进行傅里叶变换。

3.4.2 正弦、余弦信号的傅里叶变换

根据傅里叶变换的频移特性,有

$$\text{FT}\{f(t)e^{j\omega_0 t}\} = F(j\omega - j\omega_0) \quad (3-59a)$$

如上式中取 $f(t) \equiv 1$, 在 3.2.3 节中已求得 $f(t)$ 的傅里叶变换为

$$\text{FT}\{1\} = 2\pi\delta(\omega)$$

从而有

$$\text{FT}\{1 \cdot e^{j\omega_0 t}\} = F(j\omega - j\omega_0) = 2\pi\delta(\omega - \omega_0)$$

即 $e^{j\omega_0 t}$ 与 $2\pi\delta(\omega - \omega_0)$ 构成一对傅里叶变换对。同理

$$\text{FT}\{e^{-j\omega_0 t}\} = 2\pi\delta(\omega + \omega_0)$$

根据欧拉公式,正弦、余弦函数可以表示为复指数函数的线性组合,再根据傅里叶变换的线性特性,可得到

$$\begin{aligned} \text{FT}\{\cos(\omega_0 t)\} &= \pi[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)] \\ \text{FT}\{\sin(\omega_0 t)\} &= -j\pi[\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)] \end{aligned}$$

正弦、余弦信号的频谱示意图如图 3-23 所示。

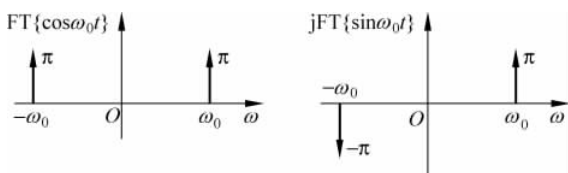


图 3-23 正弦、余弦信号的频谱

3.4.3 一般周期信号的傅里叶变换

利用复指数函数的傅里叶变换,还可以进一步求得其他周期有限的周期信号的傅里叶变换。对于一般周期信号 $f(t)$,先将它展开为傅里叶级数

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_n e^{jn\omega_0 t} \quad (3-16)$$

其中

$$F_n = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \quad (3-17)$$

利用式(3-16)求 $f(t)$ 的傅里叶变换,可得

$$\text{FT}\{f(t)\} = \text{FT}\left\{\sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_n e^{jn\omega_0 t}\right\} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_n \cdot \text{FT}\{e^{jn\omega_0 t}\} = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_n \delta(\omega - n\omega_0) \quad (3-67)$$

可见,一般周期信号的频谱是以 ω_0 为基频的一系列不等强度谐波的冲激串,各冲激的强度正比于周期信号在该谐波处傅里叶级数的系数。

【例 3-7】 求如图 3-6 所示对称周期矩形信号的傅里叶变换。

解 根据 3.1.4 节的推导,如图 3-6 所示对称周期矩形脉冲信号的傅里叶级数为

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_n e^{jn\omega_0 t} = \frac{E\tau}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \text{Sa}\left(\frac{n\omega_0 \tau}{2}\right) e^{jn\omega_0 t}$$

由式(3-67)得

$$\text{FT}\{f(t)\} = 2\pi \frac{E\tau}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \text{Sa}\left(\frac{n\omega_0 \tau}{2}\right) \delta(\omega - n\omega_0)$$

$f(t)$ 及其幅度谱如图 3-24 所示。

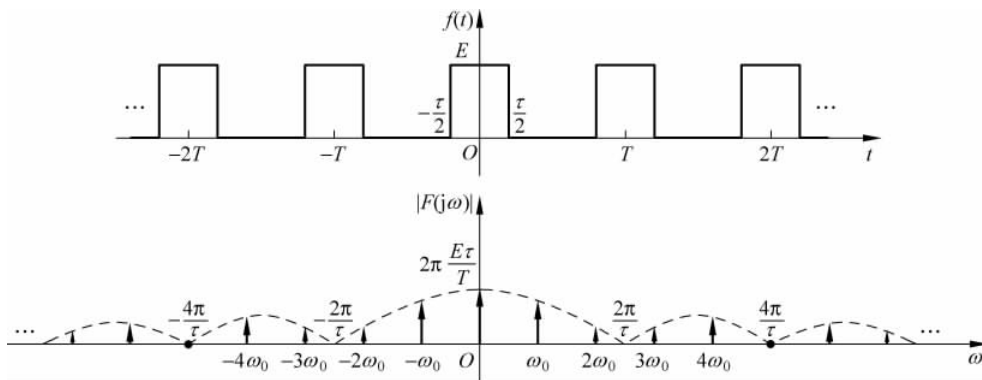


图 3-24 周期矩形脉冲信号及其频谱

3.4.4 周期信号的傅里叶变换与脉冲信号的傅里叶变换关系

从周期信号 $f(t)$ 中取 $\left(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right)$ 间一个周期的一段信号,称为单脉冲信号 $f_0(t)$,它的傅里叶变换为

$$F_0(j\omega) = \text{FT}\{f_0(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} f_0(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-j\omega t} dt \quad (3-68)$$

比较式(3-68)与式(3-17)可见

$$F_n = \frac{1}{T} F_0(j\omega) \big|_{\omega=n\omega_0} \quad (3-69)$$

式(3-69)表明,周期信号 $f(t)$ 的傅里叶级数系数 F_n 等于单脉冲信号 $f_0(t)$ 的傅里叶变换 $F_0(j\omega)$ 在 $n\omega_0$ 频点上的值乘以 $\frac{1}{T}$ 。

【例 3-8】 求周期冲激信号 $\delta_T(t)$ 的傅里叶变换。

解 由 3.2.3 节知,单位冲激信号 $\delta(t)$ 的傅里叶变换为

$$\text{FT}\{\delta(t)\} = 1$$

周期冲激信号 $\delta_T(t)$ 可看作是对 $\delta(t)$ 以 T 为间隔进行周期性的时域平移后组合而成的周期信号,即

$$\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT)$$

根据式(3-69),可得周期冲激信号 $\delta_T(t)$ 的傅里叶级数系数为

$$F_n = \frac{1}{T} \text{FT}\{\delta(t)\} \big|_{\omega=n\omega_0} = \frac{1}{T}$$

故 $\delta_T(t)$ 还可以用傅里叶级数表示为

$$\delta_T(t) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{jn\omega_0 t}$$

由式(3-67)可以直接写出

$$\text{FT}\{\delta_T(t)\} = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_n \delta(\omega - n\omega_0) = \frac{2\pi}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - n\omega_0) = \omega_0 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - n\omega_0)$$

可见,周期冲激信号 $\delta_T(t)$ 的频谱是在频域内的等间隔周期性冲激串。周期冲激信号 $\delta_T(t)$ 及其频谱见图 3-25。

仔细分析 $\delta(t)$ 、 $\delta_T(t)$ 与它们的傅里叶变换之间的关系,并适当推广到一般非周期、周期信号的傅里叶变换,有如下结论:

由于信号 $f(t)$ 的时域非周期性,其频谱具有连续性,即 $\omega \in (-\infty, +\infty)$ 。

由于信号 $f(t)$ 的时域周期性,其频谱具有离散性,即 $\omega = n\omega_0, n \in \mathbb{Z}$ 。

由于信号 $f(t)$ 的时域连续性,其频谱具有频域非周期性。

由于信号 $x[n]$ 的时域离散性,其频谱具有频域的周期性。

上述结论可以简单地作成表 3-1。

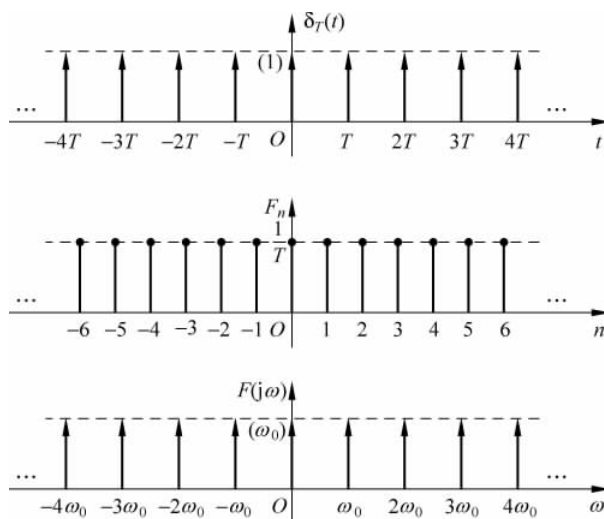
图 3-25 周期冲激信号 $\delta_T(t)$ 及其频谱

表 3-1 时域与频域的特性对应关系

时域	频域	时域	频域
非周期	连续	连续	非周期
周期	离散	离散	周期

在第 4 章将会看到,对于所有的离散时间序列 $x[n]$,其频谱都具有以 2π 为周期的周期性。

3.5 卷积定理

3.5.1 时域卷积定理

若任意信号 $f_1(t)$ 、 $f_2(t)$ 的傅里叶变换分别为 $F_1(j\omega)$ 、 $F_2(j\omega)$, 即 $F_1(j\omega) = \text{FT}\{f_1(t)\}$ 、 $F_2(j\omega) = \text{FT}\{f_2(t)\}$, 则信号 $f_1(t)$ 、 $f_2(t)$ 的卷积的傅里叶变换为 $F_1(j\omega)F_2(j\omega)$, 即

$$\text{FT}\{f_1(t) * f_2(t)\} = F_1(j\omega) \cdot F_2(j\omega) \quad (3-70)$$

证明:

$$\begin{aligned} \text{FT}\{f_1(t) * f_2(t)\} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau \right] e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f_2(t - \tau) e^{-j\omega t} dt \right] d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) F_2(j\omega) e^{-j\omega \tau} d\tau = F_1(j\omega) \cdot F_2(j\omega) \end{aligned}$$

可见,两个时间函数卷积的傅里叶变换等于各个时间函数傅里叶变换的乘积,或者说在时域中两信号的卷积等效于在频域中两信号的频谱相乘。

卷积定理的实质,在于复指数函数 $e^{j\omega t}$ 是连续时间 LTI 系统的特征函数。如果我们把 $f_1(t)$ 看成是某连续时间 LTI 系统的输入信号 $x(t)$, 把 $f_2(t)$ 看成是该系统的单位冲激响应 $h(t)$, 则 LTI 系统的响应 $y(t) = x(t) * h(t)$ 。根据式(3-37),将 $x(t)$ 理解为无穷多个复指

数函数的线性组合,即

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega = \lim_{\omega_0 \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \omega_0 X(jn\omega_0) \cdot e^{jn\omega_0 t}$$

其中, $\frac{1}{2\pi} \omega_0 X(jn\omega_0)$ 是复指数函数 $e^{jn\omega_0 t}$ 的加权系数。记连续时间 LTI 系统的单位冲激响应 $h(t)$ 的傅里叶变换为 $H(j\omega)$, 即

$$H(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) e^{-j\omega t} dt$$

由于复指数函数 $e^{j\omega t}$ 是 LTI 系统的特征函数, 故该 LTI 系统对复指数函数 $e^{jn\omega_0 t}$ 的响应必为 $H(jn\omega_0) e^{jn\omega_0 t}$ 。根据 LTI 系统的线性特性, 当输入信号 $x(t)$ 为 $e^{jn\omega_0 t}$ 的线性组合时, 系统的响应 $y(t)$ 必为 $H(jn\omega_0) e^{jn\omega_0 t}$ 的线性组合, 即

$$y(t) = \lim_{\omega_0 \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \omega_0 X(jn\omega_0) \cdot H(jn\omega_0) e^{jn\omega_0 t} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega) H(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (3-71)$$

比较式(3-71)与式(3-37)可见, $X(j\omega)H(j\omega)$ 就是 $y(t)$ 的傅里叶变换, 即

$$Y(j\omega) = X(j\omega)H(j\omega) \quad (3-72)$$

式(3-72)正是式(3-70)所导出的结论。

从时域卷积定理的上述推导可见, 连续时间 LTI 系统单位冲激响应 $h(t)$ 的傅里叶变换 $H(j\omega)$ 描述了频率为 ω 的复指数信号 $e^{j\omega t}$ 通过 LTI 系统时的复振幅的变化。函数 $H(j\omega)$ 称为连续时间 LTI 系统的频率响应, 它在系统的频域分析中起着非常重要的作用。由于 $h(t)$ 在时域完全表征了连续时间 LTI 系统, 所以 $H(j\omega)$ 在频域也完全表征了连续时间 LTI 系统。而且, 连续时间 LTI 系统的许多性质能用 $H(j\omega)$ 方便地解释。例如, 多个 LTI 子系统级联后总系统的频率响应 $H(j\omega)$ 与各子系统的级联次序无关。由于总系统的频率响应 $H(j\omega)$ 是各个 LTI 子系统频率响应 $H_i(j\omega)$ 的乘积, 交换级联次序相当于交换 $H_i(j\omega)$ 的排列顺序, 而乘法运算的交换律则保证不论怎样排列 $H_i(j\omega)$ 的顺序, 积 $H(j\omega)$ 都保持不变, 故总系统的频率响应不变。

在利用傅里叶分析研究 LTI 系统时, 将始终局限于具有频率响应的系统。为了采用变换法去研究那些没有有限值频率的不稳定 LTI 系统, 必须考虑连续时间傅里叶变换的推广——拉普拉斯变换, 这将在第 6 章讨论。

3.5.2 频域卷积定理

若任意信号 $f_1(t)$ 、 $f_2(t)$ 的傅里叶变换分别为 $F_1(j\omega)$ 、 $F_2(j\omega)$, 即 $F_1(j\omega) = \text{FT}\{f_1(t)\}$ 、 $F_2(j\omega) = \text{FT}\{f_2(t)\}$, 则信号 $f_1(t)$ 、 $f_2(t)$ 的乘积的傅里叶变换为

$$\text{FT}\{f_1(t) \cdot f_2(t)\} = \frac{1}{2\pi} F_1(j\omega) * F_2(j\omega) \quad (3-73)$$

证明:

$$\begin{aligned} \text{IFT}\left\{\frac{1}{2\pi} F_1(j\omega) * F_2(j\omega)\right\} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F_1(ju) F_2(j\omega - ju) du \right] e^{j\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F_1(ju) \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F_2(j\omega - ju) e^{j\omega t} d\omega \right] du \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F_1(ju) f_2(t) e^{jut} du \end{aligned}$$

$$= f_1(t) \cdot f_2(t)$$

即两时间函数傅里叶变换的卷积的傅里叶逆变换等于两时间函数的乘积,或者说在频域中两信号的卷积等效于在时域中信号相乘。显然,时域与频域卷积定理是对偶的,这是由傅里叶变换的对偶性所决定的。

3.5.3 卷积定理的应用

【例 3-9】 利用卷积定理求三角脉冲信号 $f(t) = E\left(1 - \frac{2}{\tau}|t|\right)\left[u\left(t + \frac{\tau}{2}\right) - u\left(t - \frac{\tau}{2}\right)\right]$ 的傅里叶变换。

解 脉宽为 τ 、高为 E 的三角脉冲信号可以看成是两个脉宽均为 $\frac{\tau}{2}$ 、高均为 $\sqrt{\frac{2E}{\tau}}$ 的偶对称矩形脉冲 $f_1(t)$ 的卷积,依此可写出该矩形的傅里叶变换为

$$F_1(j\omega) = \sqrt{\frac{2E}{\tau}} \cdot \frac{\tau}{2} \cdot \text{Sa}\left(\frac{\omega}{2} \cdot \frac{\tau}{2}\right) = \sqrt{\frac{E\tau}{2}} \text{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{4}\right)$$

因此,根据卷积定理,三角脉冲信号的傅里叶变换为

$$F(j\omega) = F_1(j\omega) \cdot F_1(j\omega) = \frac{E\tau}{2} \text{Sa}^2\left(\frac{\omega\tau}{4}\right)$$

与例 3-6 比较可见,通过两种不同的方法求得三角脉冲信号的傅里叶变换完全相同。

【例 3-10】 利用卷积定理求升余弦脉冲信号 $f(t) = \frac{E}{2}\left[1 + \cos\left(\frac{\pi t}{\tau}\right)\right][u(t + \tau) - u(t - \tau)]$ 的傅里叶变换。

解 该升余弦脉冲信号可以看成是周期性升余弦信号 $f_1(t) = \frac{1}{2}\left[1 + \cos\left(\frac{\pi t}{\tau}\right)\right]$ 与矩形脉冲信号 $f_2(t) = E[u(t + \tau) - u(t - \tau)]$ 的时域乘积,因此它的傅里叶变换可以通过频域卷积定理来求。参考 3.2.3 节冲激函数和对称矩形脉冲信号的傅里叶变换,3.4.2 节余弦信号的傅里叶变换,可分别求得 $f_1(t)$ 、 $f_2(t)$ 的傅里叶变换为

$$F_1(j\omega) = \pi\delta(\omega) + \frac{\pi}{2}\left[\delta\left(\omega - \frac{\pi}{\tau}\right) + \delta\left(\omega + \frac{\pi}{\tau}\right)\right]$$

$$F_2(j\omega) = 2E\tau \text{Sa}(\omega\tau)$$

依据频域卷积定理式(3-73),得

$$\begin{aligned} F(j\omega) &= \frac{1}{2\pi} F_1(j\omega) * F_2(j\omega) \\ &= \frac{1}{2\pi} \cdot 2E\tau \text{Sa}(\omega\tau) * \left\{ \pi\delta(\omega) + \frac{\pi}{2}\left[\delta\left(\omega - \frac{\pi}{\tau}\right) + \delta\left(\omega + \frac{\pi}{\tau}\right)\right] \right\} \\ &= E\tau \text{Sa}(\omega\tau) + \frac{E\tau}{2} \text{Sa}(\omega\tau - \pi) + \frac{E\tau}{2} \text{Sa}(\omega\tau + \pi) \\ &= \frac{E\tau \text{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)}{1 - \left(\frac{\omega\tau}{\pi}\right)^2} \end{aligned}$$

升余弦脉冲信号的一个实例及其频谱如图 3-26 所示。

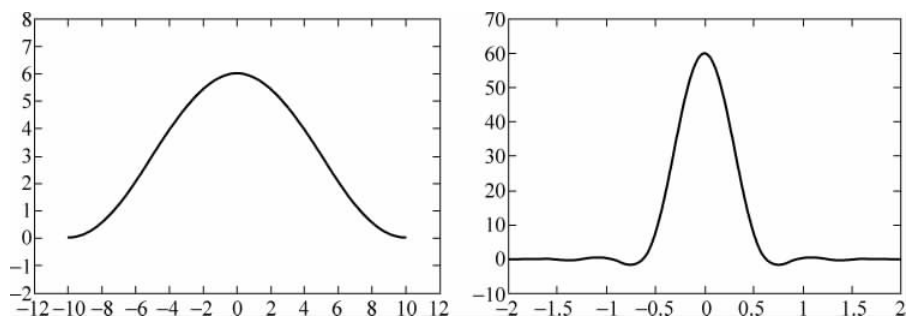


图 3-26 升余弦脉冲信号的一个实例及其频谱

从上面例子可见,灵活运用时域或频域的卷积定理在求解部分复杂信号的傅里叶变换时非常简便。前两例中,由于三角脉冲信号、升余弦脉冲信号都是实信号且具有偶对称的特性,因此它们的傅里叶变换也就具有偶对称、纯实函数的特性,与表 3-1 的结论相符。

为便于将来的应用,下面将常见傅里叶变换对及傅里叶变换的性质汇总于表 3-2 和表 3-3。

表 3-2 常见的傅里叶变换对

$f(t)$	$F(j\omega)$	$f(t)$	$F(j\omega)$
$e^{-\alpha t}u(t) (\alpha > 0)$	$\frac{1}{\alpha + j\omega}$	1	$2\pi\delta(\omega)$
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-\alpha t}u(t) (\alpha > 0)$	$\frac{1}{(\alpha + j\omega)^n}$	$u(t)$	$\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$
$e^{-\alpha t } (\alpha > 0)$	$\frac{2\alpha}{\alpha^2 + \omega^2}$	$\frac{d^n}{dt^n}\delta(t)$	$(j\omega)^n$
$E\left[u\left(t + \frac{\tau}{2}\right) - u\left(t - \frac{\tau}{2}\right)\right]$	$E\tau \text{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$	t^n	$2\pi(j)^n \frac{d^n}{d\omega^n}[\delta(\omega)]$
$E\text{Sa}\left(\frac{\omega_0 t}{2}\right)$	$\frac{2\pi E}{\omega_0} \left[u\left(\omega + \frac{\omega_0}{2}\right) - u\left(\omega - \frac{\omega_0}{2}\right) \right]$	$e^{j\omega_0 t}$	$2\pi\delta(\omega - \omega_0)$
$\text{sgn}(t)$	$\frac{2}{j\omega}$	$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT)$	$\frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{T}\right)$
$\delta(t)$	1	$\cos(\omega_0 t)$	$\pi[\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)]$
$\delta(t - t_0)$	$e^{-j\omega t_0}$	$\sin(\omega_0 t)$	$j\pi[\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0)]$

表 3-3 傅里叶变换的性质

性 质 名 称	时 域	频 域
对偶	$F(jt)$	$2\pi f(-\omega)$
线性	$\sum_{i=1}^n a_i f_i(t)$	$\sum_{i=1}^n a_i F_i(j\omega)$
奇偶虚实性	$f^*(-t)$	$F^*(j\omega)$
	$f^*(t)$	$F^*(-j\omega)$
尺度变换	$f(at)$	$\frac{1}{ a } F\left(j\frac{\omega}{a}\right)$

续表

性 质 名 称	时 域	频 域
时移	$f(t-t_0)$	$F(j\omega)e^{-j\omega t_0}$
频移	$f(t)e^{j\omega_0 t}$	$F(j(\omega-\omega_0))$
时域微分	$\frac{d^n f(t)}{dt^n}$	$(j\omega)^n F(j\omega)$
时域积分	$\int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau$	$\frac{F(j\omega)}{j\omega} + \pi F(j0)\delta(\omega)$
频域微分	$(-jt)^n f(t)$	$\frac{d^n}{d\omega^n} F(j\omega)$
频域积分	$\frac{f(t)}{-jt} + \pi f(0)\delta(t)$	$\int_{-\infty}^{\omega} F(ju) du$
时域卷积定理	$f_1(t) * f_2(t)$	$F_1(j\omega) \cdot F_2(j\omega)$
频域卷积定理	$f_1(t) \cdot f_2(t)$	$\frac{1}{2\pi} F_1(j\omega) * F_2(j\omega)$
帕斯瓦尔定理	$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) ^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(j\omega) ^2 d\omega$	

3.6 连续 LTI 系统的频率响应与理想滤波器

3.6.1 连续 LTI 系统对复指数信号的响应

在第 2 章已学过, LTI 系统对任意输入信号 $x(t)$ 的响应 $y(t)$ 是 $x(t)$ 与系统单位冲激响应 $h(t)$ 的卷积, 即

$$y(t) = x(t) * h(t) \quad (3-74)$$

当输入复指数信号 $x(t) = e^{j\omega t}$ 时, 系统的响应为

$$\begin{aligned} y(t) &= x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t-\tau)h(\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\omega(t-\tau)}h(\tau)d\tau \\ &= e^{j\omega t} \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau = e^{j\omega t}H(j\omega) \end{aligned}$$

其中

$$H(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau = |H(j\omega)|e^{j\varphi(\omega)}$$

$H(j\omega)$ 是系统在零状态下单位冲激响应 $h(t)$ 的傅里叶变换, 它表征了系统的频域特性, 称为系统的频率响应函数, 简称频响函数。可见, 连续时间 LTI 系统对复指数信号的响应是同频率的复指数信号, 但对信号的幅度和相位按系统的频响函数进行调整和延迟。

3.6.2 系统的频响函数

设激励是 $x(t)$, 连续时间 LTI 系统的单位冲激响应是 $h(t)$, 若系统的起始状态为零, 则系统的零状态响应为

$$y(t) = y_{zs}(t) = x(t) * h(t) \quad (3-75)$$

对式(3-75)两边取傅里叶变换,由卷积定理可得

$$Y(j\omega) = X(j\omega) \cdot H(j\omega) \quad (3-76)$$

可见,系统响应的频谱是激励信号的频谱与系统频响函数的乘积。即,任意激励 $x(t)$ 输入连续时间 LTI 系统后,系统对 $x(t)$ 的不同频率分量按系统的频响函数进行调整,在输出端合成为具有不同于激励信号频谱的新信号。

式(3-76)还可以表示为

$$H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = |H(j\omega)| e^{j\varphi(\omega)} \quad (3-77)$$

式中, $|H(j\omega)|$ 是系统的幅(模)频特性, $\varphi(\omega)$ 是系统的相频特性。式(3-77)表明, $H(j\omega)$ 不仅是系统单位冲激响应 $h(t)$ 的傅里叶变换,同时也是系统零状态响应的傅里叶变换与输入信号的傅里叶变换之商。由系统不同的表示形式,可以用不同的方法得到频响函数。

1. 由 $h(t)$ 求频响函数

当已知系统的冲激响应 $h(t)$ 时,由于 $h(t)$ 与 $H(j\omega)$ 构成傅里叶变换对,所以可通过求 $h(t)$ 的傅里叶变换得到频响函数 $H(j\omega)$ 。

【例 3-11】 已知系统的单位冲激响应 $h(t) = 5[u(t) - u(t-2)]$, 求频响函数。

解 $u(t-2)$ 是 $u(t)$ 向右移位 2 个单位,而 $u(t)$ 的傅里叶变换已在 3.2.3 节求得,故可利用傅里叶变换的时移特性,求得 $h(t)$ 的傅里叶变换为

$$H(j\omega) = 5 \left[\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} - \left(\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} \right) e^{-j2\omega} \right] = \frac{5}{j\omega} (1 - e^{-j2\omega}) = 10e^{-j\omega} \text{Sa}(\omega)$$

【例 3-12】 求如图 3-27 所示零阶保持电路的频响函数 $H(j\omega)$ 。

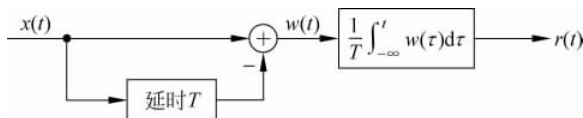


图 3-27 零阶保持电路

解 (1) 解法一: 先求出系统的单位响应 $h(t)$, 再求频响函数 $H(j\omega)$ 。

当零阶保持电路的输入 $x(t) = \delta(t)$ 时, 有

$$w(t) = \delta(t) - \delta(t - T)$$

从而可写出系统的单位冲激响应为

$$h(t) = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^t [\delta(\tau) - \delta(\tau - T)] d\tau = \frac{1}{T} [u(t) - u(t - T)]$$

对上式求傅里叶变换, 得

$$H(j\omega) = \text{FT}\{h(t)\} = \text{FT}\left\{\frac{1}{T}[u(t) - u(t - T)]\right\} = \frac{1}{T} \cdot \frac{1}{j\omega} (1 - e^{-j\omega T}) = \text{Sa}\left(\frac{\omega T}{2}\right) e^{-j\frac{\omega T}{2}}$$

(2) 解法二: 利用系统各部分的傅里叶变换, 从变换域直接求解。

电路中第一部分是加法器, 其输出为

$$W(j\omega) = X(j\omega)(1 - e^{-j\omega T})$$

电路第二部分是积分器, 由傅里叶变换的积分性质, 有

$$Y(j\omega) = \frac{1}{T} \cdot \frac{1}{j\omega} \cdot W(j\omega) = \frac{1}{j\omega T} (1 - e^{-j\omega T}) X(j\omega)$$

根据式(3-77),可得到

$$H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = \frac{1}{j\omega T}(1 - e^{-j\omega T}) = \text{Sa}\left(\frac{\omega T}{2}\right)e^{-j\frac{\omega T}{2}}$$

可见两种方法得到的结果相同。 $h(t)$ 与 $|H(j\omega)|$ 如图 3-28 所示。

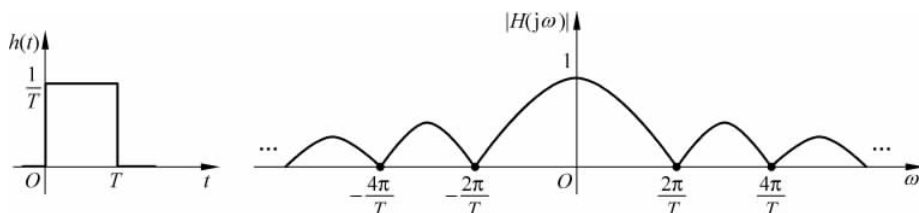


图 3-28 例 3-12 系统的 $h(t)$ 与 $|H(j\omega)|$

2. 由微分方程求频响函数

N 阶连续时间 LTI 系统的微分方程一般可表示为

$$\begin{aligned} & \frac{d^N y(t)}{dt^N} + a_{N-1} \frac{d^{N-1} y(t)}{dt^{N-1}} + \cdots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) \\ &= b_M \frac{d^M x(t)}{dt^M} + b_{M-1} \frac{d^{M-1} x(t)}{dt^{M-1}} + \cdots + b_1 \frac{dx(t)}{dt} + b_0 x(t) \end{aligned} \quad (3-78)$$

假设系统处于零起始状态,对两边取傅里叶变换,并利用傅里叶变换的微分性质,得

$$\begin{aligned} & [(j\omega)^N + a_{N-1}(j\omega)^{N-1} + \cdots + a_1(j\omega) + a_0]Y(j\omega) \\ &= [b_M(j\omega)^M + b_{M-1}(j\omega)^{M-1} + \cdots + b_1(j\omega) + b_0]X(j\omega) \end{aligned}$$

进一步整理得到系统的频率响应函数为

$$H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = \frac{b_M(j\omega)^M + b_{M-1}(j\omega)^{M-1} + \cdots + b_1(j\omega) + b_0}{(j\omega)^N + a_{N-1}(j\omega)^{N-1} + \cdots + a_1(j\omega) + a_0} \quad (3-79)$$

系统微分方程描述了系统的特性,其系数与输入信号无关,这表明 $H(j\omega)$ 也只与系统本身有关,与激励无关。

【例 3-13】 已知某系统的微分方程为 $\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 3 \frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = \frac{dx(t)}{dt} + 3x(t)$, 求频响函数 $H(j\omega)$ 。

解 令系统为零起始状态,对微分方程两边同时取傅里叶变换,得到

$$[(j\omega)^2 + 3(j\omega) + 2]Y(j\omega) = [(j\omega) + 3]X(j\omega)$$

整理得

$$H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = \frac{j\omega + 3}{(j\omega)^2 + 3j\omega + 2}$$

3. 利用输入 $x(t) = e^{j\omega t}$ 时的系统响应求频响函数

当连续时间 LTI 系统的输入信号 $x(t) = e^{j\omega t}$ 时,根据系统响应的时域方法,有

$$\begin{aligned} y(t) &= x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t-\tau)h(\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\omega(t-\tau)}h(\tau)d\tau \\ &= e^{j\omega t} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega\tau}h(\tau)d\tau = e^{j\omega t} H(j\omega) \end{aligned}$$

从而有

$$H(j\omega) = \frac{y(t)}{e^{j\omega t}}$$

【例 3-14】 已知系统的微分方程为 $y''(t) + 5y'(t) + 6y(t) = x(t)$, 求频响函数 $H(j\omega)$ 。

解 设输入信号 $x(t) = e^{j\omega t}$, 由于 $e^{j\omega t}$ 是连续时间 LTI 系统的特征信号, 所以输出信号亦为 $e^{j\omega t}$ 形式的信号, 设输出 $y(t) = He^{j\omega t}$, 则有

$$\left. \begin{aligned} 6y(t) &= 6He^{j\omega t} \\ 5y'(t) &= 5H \cdot j\omega \cdot e^{j\omega t} \\ y''(t) &= H \cdot (j\omega)^2 \cdot e^{j\omega t} \end{aligned} \right\}$$

将上述三式相加, 并结合系统的微分方程, 得到

$$e^{j\omega t} = x(t) = y''(t) + 5y'(t) + 6y(t) = H \cdot [(j\omega)^2 + 5(j\omega) + 6] \cdot e^{j\omega t}$$

因此频响函数为

$$H(j\omega) = \frac{y(t)}{e^{j\omega t}} = H = \frac{1}{(j\omega)^2 + 5(j\omega) + 6}$$

例 3-14 的方法实际上是频响函数的测量方法, 即分别用不同频率的稳态正弦信号输入到 LTI 系统, 根据输出信号计算出系统在相应频率处的幅度放大倍数 $|H|$ 和相位延迟 φ 。只要测量的频点间隔足够小, 就可以足够精确地得到系统的频率响应。

3.6.3 理想滤波器

经典的滤波概念往往与选频有关, 因为在实际应用中系统需要保留(选取)信号的部分频率分量, 抑制另一部分频率分量, 用以提取所需信号。例如, 收听无线广播或收看电视节目都需要利用滤波器(选频器)选出所需要频率的信号。现代滤波的概念更加广泛, 经过系统处理后, 凡是信号频谱发生了改变, 都可认为进行了滤波。LTI 系统滤波的数学基础实际上就是, 系统输出信号的傅里叶变换等于输入信号的傅里叶变换乘以系统的频率响应。只要系统的频率响应不是常数, 输出信号就具有与输入信号不同的频谱。理想的滤波器具有这样的特性: 它能在一段或数段频率范围内完整地通过复指数信号而完全抑制其余频率范围内的复指数信号。根据滤波器幅频特性的形状, 通常把滤波器分成低通滤波器(Low Pass Filter, LPF)、高通滤波器(High Pass Filter, HPF)、带通滤波器(Band Pass Filter, BPF)和带阻滤波器(Band Stop Filter, BSF)四种类型, 这几种滤波器的理想幅频特性见图 3-29。

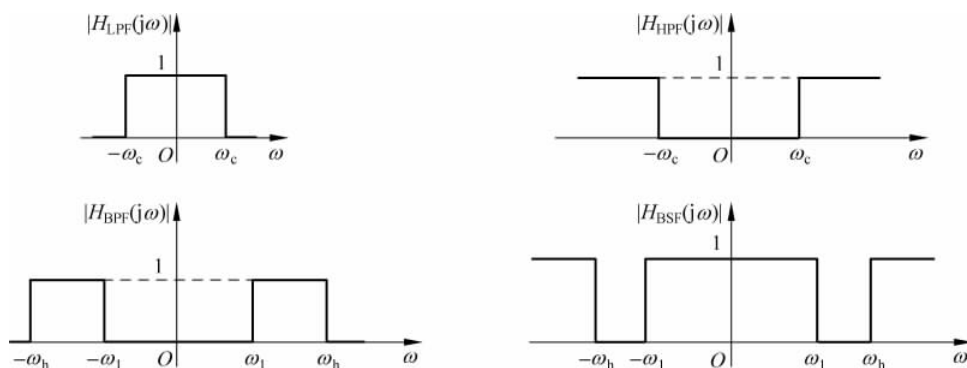


图 3-29 理想滤波器的幅频特性

需要注意的是,即使频谱的幅度保持不变,相位的改变也会导致信号形状的严重失真。

1. 理想低通滤波器及其时域响应

具有线性相位特性的理想低通滤波器的幅频与相频特性曲线如图 3-30 所示,其频响应函数可表示为

$$H(j\omega) = |H(j\omega)| e^{j\varphi(\omega)} = \begin{cases} e^{-j\omega t_0} & |\omega| < \omega_c \\ 0 & |\omega| > \omega_c \end{cases} \quad (3-80)$$

式中, ω_c 是通带截止频率; $-t_0$ 是相位斜率(或群时延)。该理想低通滤波器的频带宽度等于通带截止频率 ω_c 。由于具有线性相位,激励信号中低于 ω_c 的频率分量被延时 t_0 后无失真地通过系统(幅度均匀放大),而高于 ω_c 的频率分量则被完全抑制。

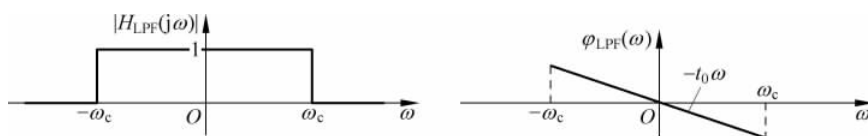


图 3-30 线性相位特性的理想低通滤波器

该理想低通滤波器的单位冲激响应和单位阶跃响应分别为

$$\begin{aligned} h(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{-j\omega t_0} e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{j(t-t_0)} e^{j\omega(t-t_0)} \Big|_{-\omega_c}^{\omega_c} \\ &= \frac{\omega_c}{\pi} \text{Sa}[\omega_c(t-t_0)] \end{aligned} \quad (3-81a)$$

$$\begin{aligned} g(t) &= \int_{-\infty}^t h(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^t \frac{\omega_c}{\pi} \text{Sa}[\omega_c(\tau-t_0)] d\tau \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^y \frac{\sin x}{x} dx \Big|_{y=\omega_c(t-t_0)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \text{Si}(y) \Big|_{y=\omega_c(t-t_0)} \end{aligned} \quad (3-81b)$$

对于 $t=0$ 时刻的激励 $\delta(t)$,单位冲激响应 $h(t)$ 在 t_0 时刻才出现响应的最大值,说明系统建立响应需要时间。由图 3-31 还可见,响应不仅延时了 t_0 ,并且响应脉冲建立的前后出现了延伸到 $\pm\infty$ 的起伏振荡,这是由于信号幅度失真造成的,因为 $|\omega| > \omega_c$ 的高频分量被完全抑制了。 $t < 0$ 时存在非零响应表明系统是非因果的,因而是物理不可实现的。

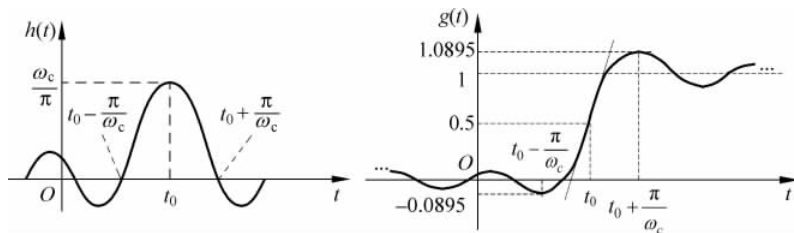


图 3-31 线性相位特性理想低通滤波器的单位冲激响应和单位阶跃响应

对于单位阶跃响应 $g(t)$, 式(3-81b)中的函数 $\text{Si}(y)$ 定义为

$$\text{Si}(y) = \int_0^y \frac{\sin x}{x} dx \quad (3-82)$$

这是一个超越积分, 其最大值出现在 $y=\pi$ 时, $\text{Si}(y)_{\max} \approx 1.8514$ 。因此, 理想低通滤波器的单位阶跃响应将出现一个与截止频率 ω_c 无关的最大值 $g(t)_{\max} = \frac{1}{2} + \frac{\text{Si}(y)_{\max}}{\pi} \approx 1.0895$, 即响应将出现约 9% 的过冲。

从频域的角度看, 理想滤波器就像一个频域“矩形窗”。“矩形窗”的宽度不同, 截取信号频谱的频率分量就不同。利用矩形窗滤取信号频谱时, 在时域的不连续点处会出现过冲。虽然阶跃响应的上升时间与系统的截止频率(带宽)成反比, 增加 ω_c 可以使 $g(t)$ 的上升段变得更陡峭, 但却无法改变近 9% 的过冲值。该现象首先由吉布斯(Josiah Willard Gibbs, 1839~1903)从数学上进行了理论解释, 因此被称为吉布斯现象。

【例 3-15】 试证明具有式(3-80)所给定频响函数的理想低通滤波器对信号 $x_1(t) = \frac{\pi}{\omega_c} \delta(t)$ 和 $x_2(t) = \text{Sa}(\omega_c t)$ 具有完全相同的响应。

证明 首先求式(3-80)的傅里叶逆变换, 得到理想低通滤波器的单位冲激响应为

$$h(t) = \frac{\omega_c}{\pi} \text{Sa}(\omega_c(t-t_0))$$

从而理想低通滤波器对信号 $x_1(t) = \frac{\pi}{\omega_c} \delta(t)$ 的响应为

$$y_1(t) = x_1(t) * h(t) = \frac{\pi}{\omega_c} \delta(t) * \frac{\omega_c}{\pi} \text{Sa}(\omega_c(t-t_0)) = \text{Sa}(\omega_c(t-t_0))$$

由于信号 $x_2(t) = \text{Sa}(\omega_c t)$ 的频带为 $-\omega_c < \omega < \omega_c$, 而理想低通滤波器对 $|\omega| < \omega_c$ 的信号延时 t_0 后无失真传输, 因此对 $x_2(t)$ 的响应为

$$y_2(t) = x_2(t-t_0) = \text{Sa}(\omega_c(t-t_0))$$

故二者响应一致。

2. 滤波器的物理可实现性

通过对理想低通滤波器单位冲激响应与单位阶跃响应的分析可知, 理想低通滤波器在物理上是不可实现的。LTI 系统是否物理可实现, 时域与频域各有判断准则。

物理可实现的 LTI 系统, 时域的准则是系统的单位冲激响应必须满足因果性要求, 即

$$h(t) = h(t)u(t) \quad (3-83a)$$

物理可实现的 LTI 系统, 频域的准则是系统的幅频特性 $|H(j\omega)|$ 必须平方可积, 即

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |H(j\omega)|^2 d\omega < +\infty \quad (3-83b)$$

根据佩利-维纳给出的频域准则为: 系统物理可实现的必要条件是

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\ln |H(j\omega)||}{1+\omega^2} d\omega < +\infty \quad (3-84)$$

如果幅频特性不满足佩利-维纳准则, 其系统必为非因果的。佩利-维纳准则既限制了因果系统的幅频特性不能在某一频带内为零, 也限制了幅频特性的衰减速度。如果 $|H(j\omega)|$ 在 $\omega_1 < \omega < \omega_2$ 为零, 则 $\ln |H(j\omega)| \rightarrow +\infty$, 从而式(3-84)不收敛。所以, 佩利-维纳准则只允许

频响应函数在某些不连续频点的幅值为零,但不允许某个频带的幅值为零,而且幅频特性衰减太快的频响应函数也是物理不可实现的。

【例 3-16】 讨论具有钟形幅频特性 $|H(j\omega)| = e^{-\omega^2}$ 的系统的物理可实现性。

解 先考虑模平方函数的积分,有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |H(j\omega)|^2 d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\omega^2} d\omega = 2 \int_0^{+\infty} e^{-2\omega^2} d\omega = \sqrt{\frac{\pi}{2}} < +\infty$$

幅频特性模平方函数的积分收敛,似乎可以找到物理可实现的系统。下面再用佩利-维纳准则来检验。

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\ln |H(j\omega)||}{1+\omega^2} d\omega &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\ln(e^{-\omega^2})|}{1+\omega^2} d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{\omega^2 + 1}\right) d\omega \\ &= \lim_{B \rightarrow +\infty} (\omega - \arctan \omega) \Big|_{-B}^B \\ &= \lim_{B \rightarrow +\infty} 2(B - \arctan B) = 2 \left(\lim_{B \rightarrow +\infty} B - \frac{\pi}{2} \right) \end{aligned}$$

显然上式不收敛,所以具有钟形幅频特性 $|H(j\omega)| = e^{-\omega^2}$ 的系统是物理不可实现的。

由佩利-维纳准则可以判断,所有的理想滤波器都是物理不可实现的。研究理想滤波器的意义在于:所有物理可实现的系统,总是按照一定的规律去逼近理想滤波器。逼近的数学模型不同,可以得到不同的滤波器。如巴特沃斯滤波器、切比雪夫滤波器等,都是采用某种函数在一定的程度上逼近理想滤波器的设计结果。

一般地,由有理多项式函数构成的幅频特性都满足佩利-维纳准则。然而,即使满足佩利-维纳准则的幅频特性,也并非就可以搭配任意的相频特性都能构成物理可实现系统。佩利-维纳准则或关于幅频特性的准则只是一个物理可实现系统的必要条件,还必须有合适的相频特性与之匹配。物理可实现系统的频响应函数实部与虚部之间、幅频与相频之间存在式(3-85)、式(3-86)所示的希尔伯特变换关系

$$\begin{cases} R(\omega) = \frac{1}{\pi} X(\omega) * \frac{1}{\omega} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{X(\lambda)}{\omega - \lambda} d\lambda \\ X(\omega) = -\frac{1}{\pi} R(\omega) * \frac{1}{\omega} = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{R(\lambda)}{\omega - \lambda} d\lambda \end{cases} \quad (3-85)$$

$$\begin{cases} \ln |H(j\omega)| = \frac{1}{\pi} \varphi(\omega) * \frac{1}{\omega} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(\lambda)}{\omega - \lambda} d\lambda \\ \varphi(\omega) = -\frac{1}{\pi} \ln |H(j\omega)| * \frac{1}{\omega} = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\ln |H(j\lambda)|}{\omega - \lambda} d\lambda \end{cases} \quad (3-86)$$

3.7 连续时间 LTI 系统的频域求解

3.7.1 连续时间 LTI 系统的频域分析

求解连续时间 LTI 系统的时域响应时,在经典的求解微分方程的方法外,利用频响应函数,通过卷积定理可以得到响应的频谱,从频域的角度得到系统响应的特性。连续时间 LTI 系统的频域分析法示意于图 3-32,其一般性的求解步

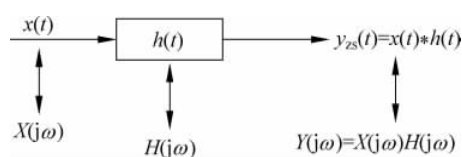


图 3-32 频域分析法示意框图

骤是:

- (1) 求激励信号 $x(t)$ 的傅里叶变换 $X(j\omega)$ (通常将激励信号分解为常见信号的线性组合);
- (2) 求频响函数 $H(j\omega)$;
- (3) 求系统响应的频谱 $Y(j\omega) = X(j\omega)H(j\omega)$;
- (4) 求 $Y(j\omega)$ 的傅里叶逆变换 (可通过将 $Y(j\omega)$ 分解为常见信号频谱的线性组合来简化运算)。

下面将通过几个实例介绍连续时间 LTI 系统的频域分析方法。

1. 周期正弦信号的响应

假设连续时间 LTI 系统的单位冲激响应 $h(t)$ 为实函数, 根据式(3-51b), 有

$$H(-j\omega) = H^*(j\omega)$$

对于正弦激励信号 $\sin(\omega_0 t)$, 由于

$$\sin(\omega_0 t) \xleftrightarrow{\text{FT}} -j\pi[\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)]$$

因此系统响应的频谱为

$$\begin{aligned} Y(j\omega) &= X(j\omega)H(j\omega) = -j\pi[\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)]H(j\omega) \\ &= -j\pi[H(j\omega_0)\delta(\omega - \omega_0) - H(-j\omega_0)\delta(\omega + \omega_0)] \\ &= -j\pi |H(j\omega_0)| [e^{j\varphi(\omega_0)}\delta(\omega - \omega_0) - e^{-j\varphi(\omega_0)}\delta(\omega + \omega_0)] \end{aligned}$$

从而响应为

$$\begin{aligned} y(t) &= \text{IFT}\{Y(j\omega)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} Y(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \\ &= -\frac{j}{2} |H(j\omega_0)| [e^{j\varphi(\omega_0)} e^{j\omega_0 t} - e^{-j\varphi(\omega_0)} e^{-j\omega_0 t}] \\ &= |H(j\omega_0)| \frac{1}{2j} [e^{j(\omega_0 t + \varphi(\omega_0))} - e^{-j(\omega_0 t + \varphi(\omega_0))}] \\ &= |H(j\omega_0)| \sin(\omega_0 t + \varphi(\omega_0)) \end{aligned} \quad (3-87a)$$

类似地, 对于余弦激励信号 $\cos(\omega_0 t)$, 响应为

$$y(t) = |H(j\omega_0)| \cos(\omega_0 t + \varphi(\omega_0)) \quad (3-87b)$$

可见, 连续时间 LTI 系统对正弦或余弦信号的响应仍是同频的正弦或余弦信号, 仅幅度、相位有所改变。这种响应是稳态响应, 可以利用正弦稳态分析方法进行计算。所以正弦周期激励信号 $x(t) = A\sin(\omega_0 t + \phi)$ 通过频率响应为 $|H(j\omega)| e^{j\varphi(\omega)}$ 的系统后, 其稳态响应可以直接表示为

$$y(t) = A |H(j\omega_0)| \sin[\omega_0 t + \varphi(\omega_0) + \phi] \quad (3-88)$$

【例 3-17】 已知某系统频率响应为 $H(j\omega) = \frac{1}{a + j\omega}$, 求系统对激励 $x(t) = \sin(\omega_0 t)$ 的稳态响应。

解 在 $\omega = \omega_0$ 处系统的频率响应为

$$H(j\omega_0) = \frac{1}{a + j\omega_0} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + \omega_0^2}} e^{-j\arctan \frac{\omega_0}{a}}$$

依据式(3-87a), 可直接写出系统对 $x(t) = \sin(\omega_0 t)$ 的响应为

$$y(t) = \frac{1}{\sqrt{a^2 + \omega_0^2}} \sin\left(\omega_0 t - \arctan \frac{\omega_0}{a}\right)$$

2. 非正弦周期信号的响应

对于非正弦周期激励信号, 可以先将信号展开为复指数形式的傅里叶级数, 然后再取傅里叶变换。根据式(3-67)可以写出

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_n e^{jn\omega_0 t} \xrightarrow{\text{FT}} X(j\omega) = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_n \delta(\omega - n\omega_0) \quad (3-89)$$

随后的处理方法与正弦周期信号的响应求解方法相相似。先求出稳态响应的频谱

$$Y(j\omega) = X(j\omega)H(j\omega) = 2\pi H(j\omega) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_n \delta(\omega - n\omega_0) = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_n H(jn\omega_0) \delta(\omega - n\omega_0)$$

然后可求得稳态响应为

$$y(t) = \text{IFT}\{Y(j\omega)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} Y(j\omega) e^{j\omega t} d\omega = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_n H(jn\omega_0) e^{jn\omega_0 t}$$

如果将非正弦周期信号分解为三角函数形式的傅里叶级数

$$x(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n \cos(n\omega_0 t + \varphi_n) \quad (3-11a)$$

则应用傅里叶变换的线性特性, 根据式(3-88)可求出最后的稳态响应为

$$y(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n |H(jn\omega_0)| \cos(n\omega_0 t + \varphi_n + \varphi(n\omega_0)) \quad (3-90)$$

【例 3-18】 若系统频率特性 $H(j\omega) = \frac{1}{j\omega + 1}$, 激励信号 $x(t) = \cos t + \cos(3t) + \cos(20t)$, 试求系统的稳态响应 $y(t)$ 。

解 首先求出在各频点频响函数的幅值与相位

$$H(j\omega) \big|_{\omega=1} = \frac{1}{j+1} = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-j\frac{\pi}{4}}$$

$$H(j\omega) \big|_{\omega=3} = \frac{1}{j3+1} = \frac{1}{\sqrt{10}} e^{-j\arctan 3}$$

$$H(j\omega) \big|_{\omega=20} = \frac{1}{j20+1} = \frac{1}{\sqrt{401}} e^{-j\arctan 20}$$

然后依据式(3-87a)写出稳态响应为

$$y(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cos\left(t - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{\sqrt{10}} \cos(3t - \arctan 3) + \frac{1}{\sqrt{401}} \cos(20t - \arctan 20)$$

非正弦周期信号通过线性时不变系统求解稳态响应的计算步骤可归纳为:

- (1) 将激励 $x(t)$ 分解为无穷多个正弦分量之和——展开为傅氏级数;
- (2) 求出频响函数在各频点的幅值与相位 $\{H(0), H(j\omega), H(j2\omega), \dots\}$;
- (3) 依据式(3-87)求出第 n 次谐波的响应;
- (4) 各谐波分量的瞬时值相加, 得到形如式(3-90)所示的结果。

在实际处理时, 可根据激励信号的收敛情况、系统带宽等因素, 从第(2)步就只取有限项。如在例 3-18 中, 就可以只保留 $\cos t$ 和 $\cos(3t)$ 两项而不会引入太大的误差。

3. 非周期信号的响应

求解非周期信号通过线性时不变系统的响应,基本上需要按前述一般性的求解步骤,先求输入信号的傅里叶变换及系统的频率响应,然后根据卷积定理将两者相乘得到输出信号的傅里叶变换,最后经傅里叶逆变换得到时域响应。

【例 3-19】 已知频响函数 $H(j\omega) = \frac{j\omega+3}{(j\omega+1)(j\omega+2)}$, 激励 $x(t) = e^{-3t}u(t)$, 求响应 $y(t)$ 。

解 首先求激励信号的傅里叶变换

$$x(t) = e^{-3t}u(t) \xleftrightarrow{\text{FT}} X(j\omega) = \frac{1}{j\omega+3}$$

由于已知频响函数,因此可以直接求输出信号的频谱

$$Y(j\omega) = \frac{1}{(j\omega+1)(j\omega+2)} = -\frac{1}{j\omega+2} + \frac{1}{j\omega+1}$$

求输出信号频谱的傅里叶逆变换,得到时域响应

$$y(t) = \text{IFT}\{Y(j\omega)\} = (-e^{-2t} + e^{-t})u(t)$$

由例 3-19 可见,利用频域分析法可以非常简便地求解 LTI 系统的零状态响应。频域分析法的优点是将时域的卷积运算变为频域的代数运算,代价是正、逆两次傅里叶变换。与周期信号的稳态响应不同,例 3-19 的激励信号是非周期信号,系统的响应中必有暂态响应。

3.7.2 电路系统的频域求解

对于电路系统,可以根据基尔霍夫(Gustav Robert Kirchhoff, 1824-1887)电压、电流定理建立电路的时域微分方程。如果电路的 L 、 C 元件无起始储能(即系统处于零起始状态),则可以利用频域电路模型简化运算。无起始储能的 L 、 C 元件时域与频域电压电流关系为

$$\begin{aligned} v_L(t) &= L \frac{d}{dt} i_L(t) \xleftrightarrow{\text{FT}} V_L(j\omega) = j\omega L \cdot I_L(j\omega) \\ v_C(t) &= \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i_C(\tau) d\tau \xleftrightarrow{\text{FT}} V_C(j\omega) = \frac{1}{j\omega C} I_C(j\omega) \end{aligned} \quad (3-91)$$

利用式(3-91),可以根据电路的串、并联关系直接从频域建立电路的频响函数。

【例 3-20】 求如图 3-33 所示 RC 电路对矩形脉冲信号 $v_1(t) = E[u(t) - u(t-\tau)]$ 的零状态响应。

解 这是由 R 、 C 构成的阻抗分压电路,因此可写出系统频率响应为

$$H(j\omega) = \frac{V_2(j\omega)}{V_1(j\omega)} = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{\alpha}{j\omega + \alpha}$$

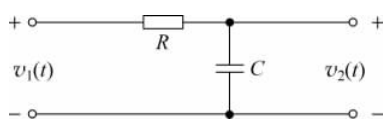


图 3-33 RC 滤波电路

式中 $\alpha = \frac{1}{RC}$, 而激励信号 $v_1(t)$ 的傅里叶变换为

$$V_1(j\omega) = E\tau e^{-j\frac{\omega\tau}{2}} \text{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) = \frac{E}{j\omega} (1 - e^{-j\omega\tau})$$

因此响应 $v_2(t)$ 的傅里叶变换为

$$V_2(j\omega) = \frac{\alpha}{j\omega + \alpha} \cdot \frac{E}{j\omega} (1 - e^{-j\omega\tau}) = \frac{E}{j\omega} (1 - e^{-j\omega\tau}) - \frac{E}{j\omega + \alpha} (1 - e^{-j\omega\tau})$$

求上式的傅里叶逆变换,得

$$\begin{aligned} V_2(t) &= E[u(t) - u(t - \tau)] - E[e^{-at}u(t) - e^{-a(t-\tau)}u(t - \tau)] \\ &= E(1 - e^{-at})u(t) - E(1 - e^{-a(t-\tau)})u(t - \tau) \end{aligned}$$

【例 3-21】如图 3-34(a)所示电路,输入是激励电压 $x(t)$,输出是电容电压 $y(t)$,求频响函数 $H(j\omega)$ 。

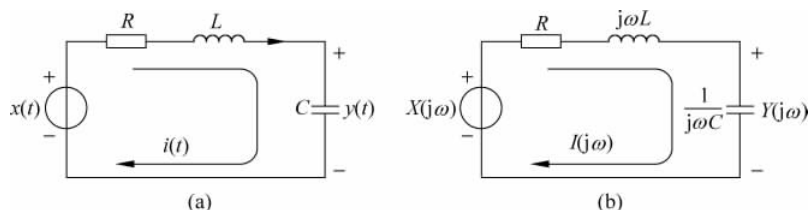


图 3-34 RLC 串联谐振电路

解 依据式(3-91),将各元件都用频域阻抗表示,得到等效的频域电路,如图 3-34(b)所示。根据基尔霍夫定律列方程,得

$$\begin{cases} X(j\omega) = I(j\omega) \left(R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} \right) \\ Y(j\omega) = I(j\omega) \frac{1}{j\omega C} \end{cases}$$

因此,频响函数为

$$H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{1}{(j\omega)^2 LC + j\omega RC + 1}$$

小 结

1. 连续周期信号的傅里叶级数

当周期信号 $f(t)$ 满足狄里赫利条件时,信号 $f(t)$ 可分解为三角函数形式或指数形式的傅里叶级数。

如果周期信号 $f(t)$ 为实函数,且其波形具有某些对称性,则在傅里叶级数中某些系数等于零,即其谐波特性将变得简单。具体有

- (1) 偶实函数的傅里叶级数中不含有正弦分量,只可能含有直流分量和余弦分量。
- (2) 奇实函数的傅里叶级数中不会含有直流分量和余弦分量,只可能含有正弦分量。
- (3) 奇谐实函数的傅里叶展开式中只含有奇次谐波分量,而不含直流及偶次谐波分量。
- (4) 偶谐函数的傅里叶展开式中只可能含有直流分量和偶次谐波分量。

2. 傅里叶变换

当任意非周期信号 $f(t)$ 满足狄里赫利条件时,存在式(3-36)和式(3-37)构成的傅里叶变换对。

当任意周期信号 $f(t)$ 满足狄里赫利条件而可以展开成式(3-16)复指数形式的傅里叶级数时,它存在式(3-67)和式(3-37)构成的傅里叶变换对。

3. 傅里叶变换的性质

傅里叶变换有许多有用的性质,这些性质主要有:对偶性、线性、奇偶虚实性、尺度变换特性、时移(频移)特性、微分(积分)特性、帕斯瓦尔定理、时域(频域)卷积定理。灵活应用这些性质可有效减轻求解复杂信号傅里叶变换的运算量。

4. 傅里叶变换应用于连续时间 LTI 系统的分析

连续时间 LTI 系统单位冲激响应 $h(t)$ 的傅里叶变换表征了系统的频域特性,称为系统的频率响应函数,简称频响函数。

如果已知描述 N 阶连续时间 LTI 系统的微分方程如式(3-78),则频响函数 $H(j\omega)$ 为式(3-79)。系统微分方程描述了系统的特性,其系数与输入信号无关,这表明 $H(j\omega)$ 也只与系统本身有关,与激励无关。

求解连续时间 LTI 系统的时域响应时,在经典的求解微分方程的方法外,利用频响函数,通过卷积定理可以得到响应的频谱,从频域的角度得到系统响应的特性。连续时间 LTI 系统的频域分析法一般性的求解步骤是:

(1) 求激励信号 $x(t)$ 的傅里叶变换 $X(j\omega)$ (通常将激励信号分解为常见信号的线性组合);

(2) 求频响函数 $H(j\omega)$;

(3) 求系统响应的频谱 $Y(j\omega) = X(j\omega)H(j\omega)$;

(4) 求 $Y(j\omega)$ 的傅里叶逆变换(可通过将 $Y(j\omega)$ 分解为常见信号频谱的线性组合来简化运算)。

利用频域分析法可以非常简便地求解连续时间 LTI 系统的零状态响应。频域分析法的优点是将时域的卷积运算变为频域的代数运算,代价是正、逆两次傅里叶变换。

对于电路系统,可以根据基尔霍夫电压、电流定理建立电路的时域微分方程,然后根据前述方法对系统进行分析。如果电路的 L 、 C 元件无起始储能(即系统处于零起始状态),则可以利用频域电路模型简化运算。

习 题

3-1 求下列信号的三角函数形式傅里叶级数表示式:

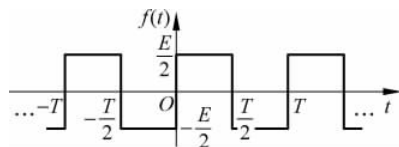
(1) $f(t) = e^{j100t}$

(2) $f(t) = \sin\left(\frac{\pi}{4}(t-2)\right)$

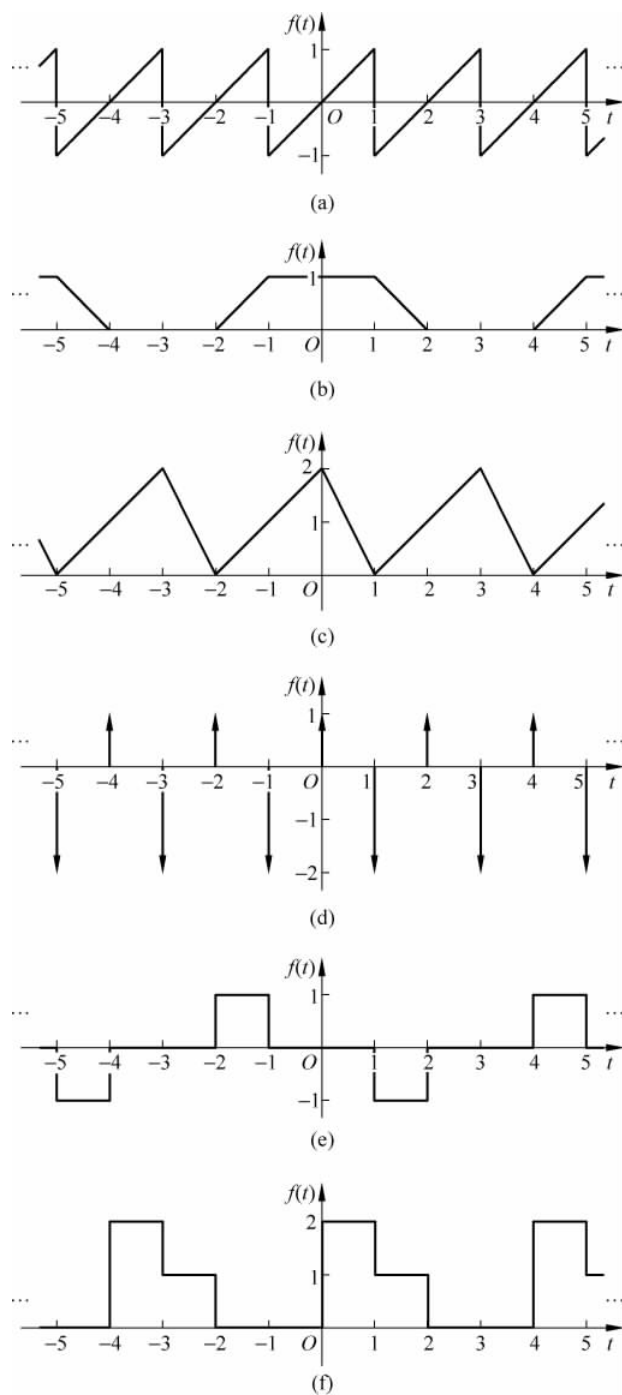
(3) $f(t)$ 的周期为 2,且在区间 $[-1,1]$ 内 $f(t) = e^{-t}$ 。

3-2 求如题图 3-2 所示对称周期矩形信号的三角形式与指数形式傅里叶级数。

3-3 求题图 3-3 中各信号的复指数形式傅里叶级数的系数。



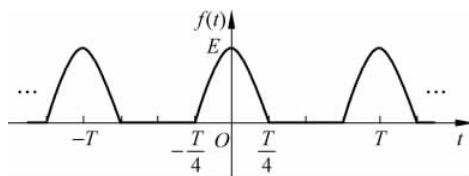
题图 3-2



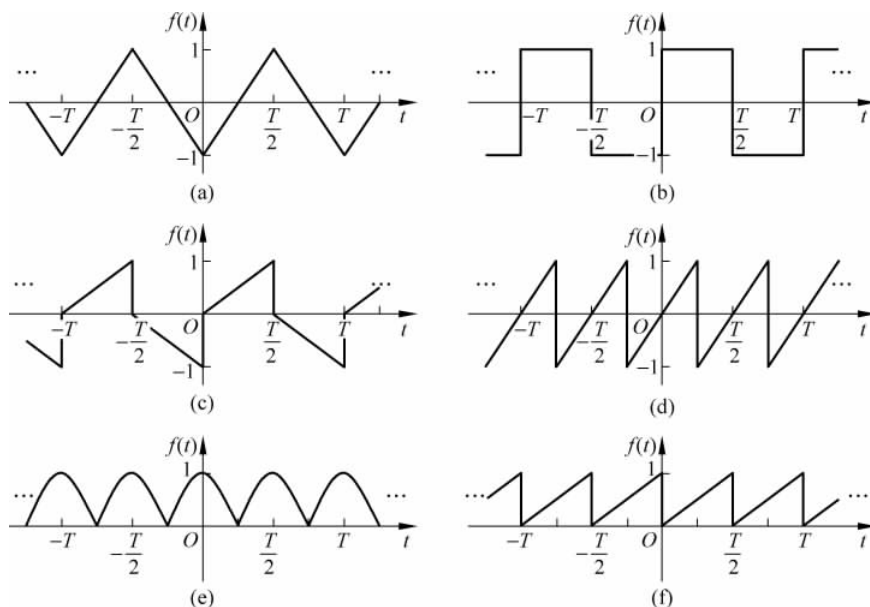
题图 3-3

3-4 求题图 3-4 中半波余弦信号的傅里叶级数。若 $E=10\text{V}$, $f=10\text{kHz}$, 大致画出幅度谱。

3-5 利用信号 $f(t)$ 的对称性, 定性判断题图 3-5 中各周期信号的傅里叶级数中所含有的频率分量。



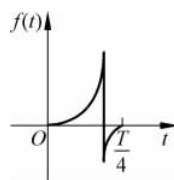
题图 3-4



题图 3-5

3-6 已知周期函数 $f(t)$ 前四分之一周期的波形如题图 3-6 所示。根据下列各种情况的要求画出 $f(t)$ 在一个周期 $(0 < t < T)$ 的波形。

- (1) $f(t)$ 是偶函数, 只含有偶次谐波;
- (2) $f(t)$ 是偶函数, 只含有奇次谐波;
- (3) $f(t)$ 是偶函数, 含有偶次和奇次谐波;
- (4) $f(t)$ 是奇函数, 只含有偶次谐波;
- (5) $f(t)$ 是奇函数, 只含有奇次谐波;
- (6) $f(t)$ 是奇函数, 含有偶次和奇次谐波。

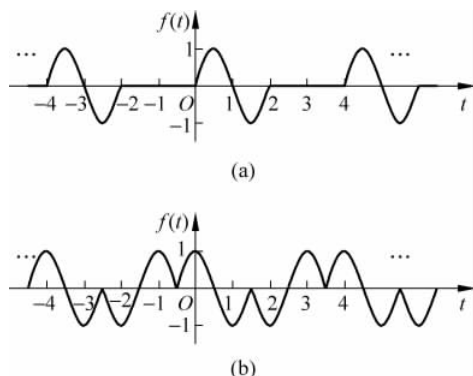


题图 3-6

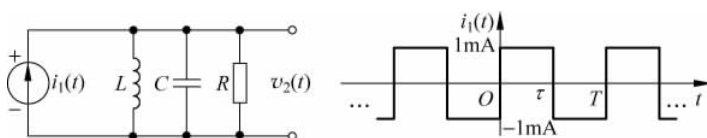
3-7 求如题图 3-7 所示周期信号的傅里叶级数的系数, (a) 题求 a_n, b_n , (b) 题求 F_n 。

3-8 如题图 3-8 所示 RLC 并联电路和电流源 $i_1(t)$ 都是理想模型。已知电路的频率为 $f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = 100\text{kHz}$, $R = 100\text{k}\Omega$, 谐振电路品质因数 Q 足够高(可滤除邻近频率成分)。 $i_1(t)$ 为周期矩形波, 幅度为 1mA 。当 $i_1(t)$ 的参数 (τ, T) 为下列情况时, 粗略地画出输出电压 $v_2(t)$ 的波形, 并注明幅度值。

- (1) $\tau = 5\mu\text{s}, T = 10\mu\text{s}$;
- (2) $\tau = 10\mu\text{s}, T = 20\mu\text{s}$;
- (3) $\tau = 15\mu\text{s}, T = 30\mu\text{s}$ 。



题图 3-7

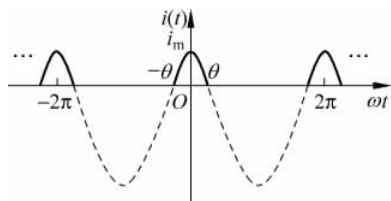


题图 3-8

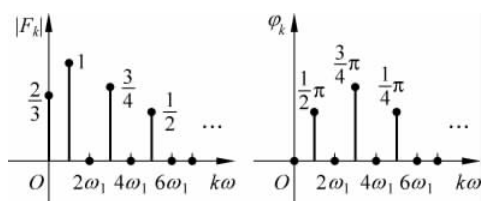
3-9 求如题图 3-9 所示周期余弦切顶脉冲波的傅里叶级数,并求直流分量 I_0 以及基波和 k 次谐波的幅度 (I_1 和 I_k)。

- (1) $\theta =$ 任意值;
- (2) $\theta = 60^\circ$;
- (3) $\theta = 90^\circ$;

3-10 已知周期信号 $f(t)$ 的幅度 $|F_k|$ 、相位 φ_k 分别如题图 3-10 所示,求该周期信号 $f(t)$ 的表达式。



题图 3-9



题图 3-10

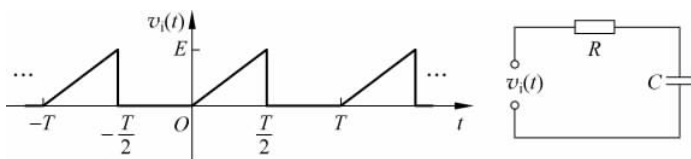
3-11 在全波整流电路中,若输入交流电压信号 $x(t)$,则输出电压信号 $y(t) = |x(t)|$ 。当 $x(t) = \cos t$ 时:

- (1) 概略画出输出电压信号 $y(t)$ 的波形并求其傅里叶系数;
- (2) 输入信号 $x(t)$ 、输出信号 $y(t)$ 中的直流分量、基频分量的幅度各为多少?

3-12 如题图 3-12 所示周期信号 $v_i(t)$ 加到 RC 低通滤波电路。已知 $v_i(t)$ 的重复频率 $f_1 = 1/T = 1\text{kHz}$,电压幅度 $E = 1\text{V}$, $R = 1\text{k}\Omega$, $C = 0.1\mu\text{F}$ 。分别求:

- (1) 稳态时电容两端电压之直流分量、基波和五次谐波之幅度;
- (2) 求上述各分量与 $v_i(t)$ 相应分量的比值,讨论此电路对各频率分量响应的特点。

(提示:利用电路课所学正弦稳态交流电路的计算方法分别求各频率分量的响应。)



题图 3-12

3-13 求下列信号的傅里叶变换:

- (1) $e^{-at} \cos(\omega_0 t) u(t), a > 0$;
- (2) $e^{-3t} [u(t+2) - u(t-3)]$;
- (3) $e^{2+t} u(-t+1)$;
- (4) $\sum_{k=0}^{+\infty} a^k \delta(t - kT), |a| < 1$.

3-14 已知 $F_1(j\omega) = \text{FT}\{f(t)\}$, 利用傅里叶变换的性质求 $F_2(j\omega) = \text{FT}\{f(6-2t)\}$ 。

3-15 利用微分定理求半波正弦脉冲 $f(t) = \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right) \left[u(t) - u\left(t - \frac{T}{2}\right)\right]$ 及其二阶导数 $\frac{d^2}{dt^2} f(t)$ 的傅里叶变换。

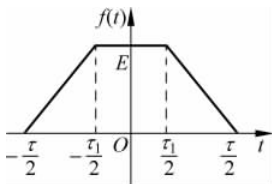
3-16 利用微分定理求如题图 3-16 所示梯形脉冲的傅里叶变换, 并大致画出 $\tau = 2\tau_1$ 时该脉冲的频谱图。

3-17 已知矩形脉冲信号 $f(t)$ 如题图 3-17 所示。

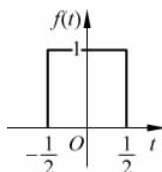
- (1) 写出 $f(t)$ 的时域表达式;
- (2) 求 $f(t)$ 的频谱;
- (3) 绘制 $f(t)$ 的频谱图。

3-18 记题图 3-18 所示信号的傅里叶变换为 $F(j\omega) = |F(j\omega)| e^{j\varphi(\omega)}$, 试求:

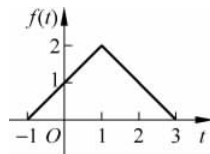
- (1) $\varphi(\omega)$;
- (2) $F(j0)$;
- (3) $\int_{-\infty}^{+\infty} F(j\omega) d\omega$;
- (4) $\text{IFT}\{\text{Re}(F(j\omega))\}$ 的图形。



题图 3-16



题图 3-17



题图 3-18

3-19 已知信号 $x(t)$ 的频谱为 $X(j\omega)$, 试求信号 $y(t) = x(t) * \delta(t)$ 的频谱。

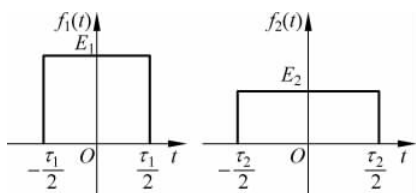
3-20 若已知 $\text{FT}[f(t)] = F(j\omega)$, 利用傅里叶变换的性质确定下列信号的傅里叶变换:

- (1) $tf(2t)$;
- (2) $(t-2)f(t)$;

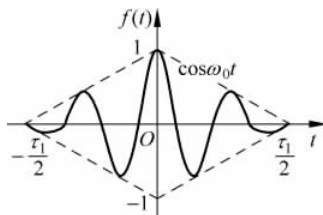
- (3) $(t-2)f(-2t)$; (4) $t \frac{d}{dt}f(t)$;
 (5) $f(1-t)$; (6) $(1-t)f(1-t)$;
 (7) $f(2t-5)$ 。

3-21 已知题图 3-21 中两矩形脉冲 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ 的傅里叶变换分别为 $F_1(j\omega) = E_1\tau_1 \text{Sa}\left(\frac{\omega\tau_1}{2}\right)$, $F_2(j\omega) = E_2\tau_2 \text{Sa}\left(\frac{\omega\tau_2}{2}\right)$ 。

- (1) 画出 $f_1(t) * f_2(t)$ 的图形;
 (2) 求 $f_1(t) * f_2(t)$ 的频谱, 并与题 3-16 所用方法进行比较。
 3-22 求如题图 3-22 所示三角形调幅信号的频谱。



题图 3-21



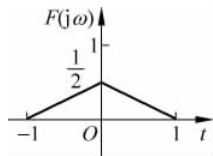
题图 3-22

3-23 若 $\text{FT}\{f(t)\} = F(j\omega)$, 周期信号 $p(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n e^{jn\omega_0 t}$ 的基波频率为 ω_0 。

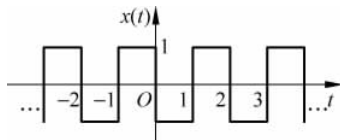
- (1) 令 $f_p(t) = f(t)p(t)$, 求相乘信号 $f_p(t)$ 的傅里叶变换表达式 $F_p(j\omega) = \text{FT}\{f_p(t)\}$;
 (2) 若 $F(j\omega)$ 图形如题图 3-23 所示, 当 $p(t)$ 函数表达式分别为以下各小题时, 分别求 $F_p(j\omega)$ 的表达式, 并画出频谱图:

- ① $p(t) = \cos\left(\frac{t}{2}\right)$; ② $p(t) = \cos(t)$; ③ $p(t) = \cos(2t)$; ④ $p(t) = \sin(t)\sin(2t)$;
 ⑤ $p(t) = \cos(2t) - \cos(t)$; ⑥ $p(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - \pi n)$; ⑦ $p(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - 2\pi n)$; ⑧ $p(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - 2\pi n) - \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - \pi n)$ 。

3-24 已知周期信号 $x(t)$ 波形如题图 3-24 所示, 当该信号通过截止频率 $\omega_c = 4\pi$ 弧度/秒的理想低通滤波器时, 试计算输出信号的频率成分, 并绘出输出信号 $y(t)$ 的频谱 $Y(j\omega)$ 图。



题图 3-23



题图 3-24

3-25 已知描述系统的时域数学模型为 $\frac{d^2}{dt^2}y(t) + 6 \frac{d}{dt}y(t) + 8y(t) = 2x(t)$ 。

- (1) 利用频域分析方法求频响函数 $H(j\omega)$, 并确定系统的冲激响应 $h(t)$;
 (2) 若激励 $x(t) = te^{-2t}u(t)$, 利用频域分析方法求系统的 $Y(j\omega)$ 和时域响应 $y(t)$ 。