

第3章 双曲型方程的有限差分方法

本章主要讨论双曲型方程及双曲型方程组的差分方法. 从简单的一阶线性双曲型方程开始, 构造差分格式, 分析其稳定性及其他性质. 然后推广到一阶线性双曲型方程组. 对于二阶双曲型方程的差分方法仅以波动方程为例, 讨论了各种求解方法, 分析了其性质, 最后对初边值问题、二维问题以及非线性方程进行了讨论.

1 一阶线性常系数双曲型方程

首先考虑常系数方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \quad (1.1)$$

其中 a 为给定常数. 这是最简单的双曲型方程, 一般称其为对流方程. 虽然(1.1)式非常简单, 但是其差分格式的构造以及差分格式性质的讨论是讨论复杂的双曲型方程和方程组的基础. 它的差分格式可以推广到变系数方程, 方程组以及拟线性方程和方程组.

对于方程(1.1)附以初始条件

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad (1.2)$$

在第1章中讨论了初值问题(1.1), (1.2)式的解, 其解沿方程(1.1)的特征线

$$x - at = \xi \quad (1.3)$$

是常数, 并可表示为

$$u(x, t) = u_0(\xi) = u_0(x - at).$$

下面讨论双曲型方程的一些常用格式.

1.1 迎风格式

迎风格式在实际计算中引起了普遍的重视, 从而产生了很多好的方法和技巧. 迎风格式的基本思想是简单的, 就是在双曲型方程中关于空间偏导数用在特征线方向一侧的单边差商来代替, (1.1)式的迎风格式是

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + a \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{h} = 0, \quad a > 0, \quad (1.4)$$

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + a \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{h} = 0, \quad a < 0, \quad (1.5)$$

其中 τ, h 分别为时间步长和空间步长.

在第2章中,我们曾用 Fourier 方法讨论了差分格式(1.4)的稳定性. 当 $a\lambda \leq 1$, $\lambda = \frac{\tau}{h}$, 时差分格式(1.4)是稳定的. 同样分析可知, 差分格式(1.5)的稳定性条件为 $|a|\lambda \leq 1$. 由此可以看出, 差分格式(1.4), (1.5)都是条件稳定的, 如果我们采用差分格式

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + a \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{h} = 0, \quad a > 0, \quad (1.6)$$

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + a \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{h} = 0, \quad a < 0, \quad (1.7)$$

来代替(1.4)式和(1.5)式, 容易看出, 它们都是一阶精度的差分格式. 可以用 Fourier 方法来讨论(1.6)式和(1.7)式的稳定性. 对于(1.6)式, 容易求出其增长因子为

$$G(\tau, k) = 1 + a\lambda - a\lambda e^{ikh},$$

由此有

$$\begin{aligned} |G(\tau, k)|^2 &= [1 + a\lambda(1 - \cos kh)]^2 + a^2 \lambda^2 \sin^2 kh \\ &= 1 + 4a\lambda(1 + a\lambda) \sin^2 \frac{kh}{2}. \end{aligned}$$

取 $\sin \frac{kh}{2} \neq 0$. 由于 $a > 0$. 所以有 $|G(\tau, k)| > 1$. 从而破坏了 von Neumann 条件, 因此得出差分格式(1.6)是绝对不稳定的. 同样可证, 差分格式(1.7)也是绝对不稳定的.

我们注意到, 差分格式(1.4)与差分格式(1.7)在形式上是一样的. 但前者是条件稳定的, 后者是绝对不稳定的. 分析其差别主要是 a 的符号不同. 相应地, 与微分方程的特征线走向有关. 从而我们可以得出如下结论: 如果差分格式(所用的网格点)与微分方程的特征线走向一致, 那么网格比满足一定条件下是稳定的, 否则, 差分格式不稳定. 迎风格式的节点分布图见图 3.1(a), (b).

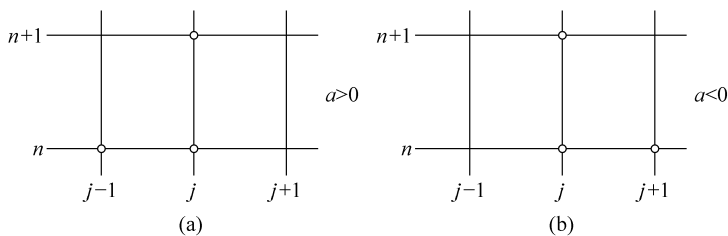


图 3.1

1.2 Lax-Friedrichs 格式

在第2章中, 给出了逼近对流方程(1.1)的一个中心差分格式

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + a \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2h} = 0, \quad (1.8)$$

其截断误差为 $O(\tau + h^2)$, 并用 Fourier 方法讨论了它的稳定性, 它是绝对不稳定的差分格式.

1954 年, Lax 和 Friedrichs 为克服上述格式的不稳定性, 提出了逼近 (1.1) 式的一个差分格式

$$\frac{u_j^{n+1} - \frac{1}{2}(u_{j+1}^n + u_{j-1}^n)}{\tau} + a \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2h} = 0. \quad (1.9)$$

差分格式 (1.9) 一般称为 **Lax-Friedrichs 格式**, 也称为 **Lax 格**

式, 从差分格式构造看出, (1.9) 式是用 $\frac{1}{2}(u_{j+1}^n + u_{j-1}^n)$ 来代替 (1.8) 式中的 u_j^n 而得到的. 容易求出, Lax-Friedrichs 的截断误差是 $O(\tau + h^2) + O\left(\frac{h^2}{\tau}\right)$. 在双曲型方程的差分格式计算

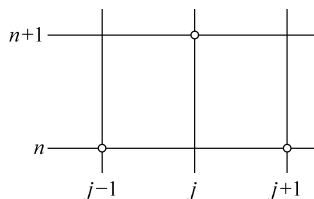


图 3.2

中, 一般取网格比 $\lambda = \frac{\tau}{h} = \text{const.}$ 所以 Lax-Friedrichs 格式是

一阶精度的差分格式. 节点分布见图 3.2.

下面讨论 Lax-Friedrichs 格式的稳定性. 令 $u_j^n = v^n e^{ikjh}$, 代入 (1.9) 式有

$$v^{n+1} = \left[\frac{1}{2}(e^{ikh} + e^{-ikh}) - \frac{a\lambda}{2}(e^{ikh} - e^{-ikh}) \right] v^n.$$

因此增长因子为

$$G(\tau, k) = \frac{1}{2}(e^{ikh} + e^{-ikh}) - \frac{a\lambda}{2}(e^{ikh} - e^{-ikh}) = \cos kh - ia\lambda \sin kh,$$

从而有

$$|G(\tau, k)|^2 = \cos^2 kh + a^2 \lambda^2 \sin^2 kh = 1 - (1 - a^2 \lambda^2) \sin^2 kh.$$

所以当

$$|a|\lambda \leq 1 \quad (1.10)$$

时有 $|G(\tau, k)| \leq 1$. 因此 Lax-Friedrichs 格式的稳定性条件为 (1.10) 式.

我们注意到, Lax-Friedrichs 格式和迎风格式都是一阶精度的差分格式. 在实际应用中, Lax-Friedrichs 格式可以不考虑对应的微分方程的特征线的走向, 前面讨论的迎风格式则要顾及对应的微分方程的特征线的走向. 如果我们把迎风格式写成统一形式

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + \frac{1}{2}(a + |a|) \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{h} + \frac{1}{2}(a - |a|) \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{h} = 0, \quad (1.11)$$

那么也可以不考虑微分方程的特征线的走向而直接应用. 这两个格式的稳定性条件都是 (1.10) 式. 由此看来, 它们有很多相似之处, 但是它们还是有很大的区别. 我们仅从这两个格式的截断误差来考虑. 不失一般性, 可设 $a > 0$. 此时迎风格式可以写为

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + a \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2h} = \frac{ah}{2} \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{h^2}, \quad (1.12)$$

而 Lax-Friedrichs 格式可以写为

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + a \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2h} = \frac{h}{2\lambda} \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{h^2}. \quad (1.13)$$

由此看出, (1.12) 式和 (1.13) 式的左边是相同的, 它们都以 $O(\tau + h^2)$ 趋近于对流方程. 因此 Lax-Friedrichs 格式和迎风格式的截断误差的比较取决于 (1.12) 式和 (1.13) 式的右端项的大小. 我们把 Lax-Friedrichs 格式 (1.13) 的右端项改写为

$$\frac{1}{a\lambda} \cdot \frac{ah}{2} \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{h^2}.$$

注意到, 由稳定性的限制就要求有 $a\lambda \leq 1$. 如果取 $a\lambda = 1$, 则 (1.13) 恒等于 (1.12), 即 Lax-Friedrichs 与迎风格式一样. 但在实际的计算中总是取 $a\lambda < 1$. 所以, 一般来说 Lax-Friedrichs 格式的截断误差比迎风格式的截断误差大.

1.3 Lax-Wendroff 格式

前面讨论的迎风格式和 Lax-Friedrichs 格式是一阶精度的差分格式. 1960 年 Lax 和 Wendroff 构造出一个二阶精度的二层格式, 这个差分格式在实际计算中得到了充分的重视. 这个格式的构造与前面格式的推导稍有不同, 采用 Taylor 级数展开之外, 还用到微分方程本身.

设 $u(x, t)$ 是微分方程 (1.1) 的光滑解, 将 $u(x_j, t_{n+1})$ 在点 (x_j, t_n) 处做 Taylor 展开

$$u(x_j, t_{n+1}) = u(x_j, t_n) + \tau \left[\frac{\partial u}{\partial t} \right]_j^n + \frac{\tau^2}{2} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right]_j^n + O(\tau^3).$$

利用微分方程 (1.1) 有

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= -a \frac{\partial u}{\partial x}, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial t} \left(-a \frac{\partial u}{\partial x} \right) = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \end{aligned}$$

把这两式代入前式有

$$u(x_j, t_{n+1}) = u(x_j, t_n) - a\tau \left[\frac{\partial u}{\partial x} \right]_j^n + \frac{a^2 \tau^2}{2} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right]_j^n + O(\tau^3).$$

再采用中心差商逼近上式中的导数项, 有

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial u}{\partial x} \right]_j^n &= \frac{1}{2h} [u(x_{j+1}, t_n) - u(x_{j-1}, t_n)] + O(h^2), \\ \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right]_j^n &= \frac{1}{h^2} [u(x_{j+1}, t_n) - 2u(x_j, t_n) + u(x_{j-1}, t_n)] + O(h^2). \end{aligned}$$

因此得到

$$\begin{aligned}
u(x_j, t_{n+1}) &= u(x_j, t_n) - \frac{a}{2} \frac{\tau}{h} [u(x_{j+1}, t_n) - u(x_{j-1}, t_n)] + O(\tau h^2) \\
&\quad + \frac{a^2}{2} \frac{\tau^2}{h^2} [u(x_{j+1}, t_n) - 2u(x_j, t_n) \\
&\quad + u(x_{j-1}, t_n)] + O(\tau^2 h^2) + Q(\tau^3).
\end{aligned}$$

略去高阶项,可以得到如下的差分格式

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{a}{2} \frac{\tau}{h} (u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) + \frac{a^2}{2} \frac{\tau^2}{h^2} (u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n). \quad (1.14)$$

从差分格式的构造可以看出(1.14)是二阶精度的差分格式,其节点分布如图 3.3.

差分格式(1.14)称为 **Lax-Wendroff 格式**. 容易求出差分格式(1.14)的增长因子为

$$\begin{aligned}
G(\tau, k) &= 1 - 2a^2 \lambda^2 \sin^2 \frac{kh}{2} - ia\lambda \sin kh, \\
|G(\tau, k)|^2 &= 1 - 4a^2 \lambda^2 (1 - a^2 \lambda^2) \sin^4 \frac{kh}{2}.
\end{aligned}$$

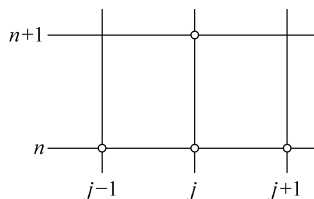


图 3.3

于是,如果满足条件

$$|a|\lambda \leq 1, \quad (1.15)$$

那么有 $|G(\tau, k)| \leq 1$, 所以 Lax-Wendroff 格式的稳定性条件为(1.15)式.

1.4 Courant-Friedrichs-Lewy 条件

先分析差分格式的解的依赖区域. 然后从差分格式解的依赖区域和对流方程初值问题解的依赖区域的关系推导出差分格式收敛的一个必要条件. 这个条件称为 **Courant-Friedrichs-Lewy 条件**, 或称 **C. F. L 条件**, 也有称 **Courant 条件**.

为确定起见, 令微分方程(1.1)中的常数 $a > 0$. 差分格式采用 Lax-Wendroff 格式作为例子进行分析. 为了计算 u_j^n , 要用到 $u_{j-1}^{n-1}, u_j^{n-1}, u_{j+1}^{n-1}$; 而为计算这 3 个值, 又要用到

$u_{j-2}^{n-2}, u_{j-1}^{n-2}, u_j^{n-2}, u_{j+1}^{n-2}, u_{j+2}^{n-2}$. 如此递推下去, 为

了计算 u_j^n , 就要用到 $u_{j-n}^0, u_{j-(n-1)}^0, \dots, u_j^0, \dots,$

$u_{j+(n-1)}^0, u_{j+n}^0$, 见图 3.4. 这说明计算 u_j^n 仅依赖于

微分方程(1.1)的初值(1.2) $u(x, 0) = u_0(x)$ 在区间 $[x_{j-n}, x_{j+n}]$ 上的网格点 $x_{j-n}, x_{j-n+1}, \dots,$

$x_j, \dots, x_{j+n-1}, x_{j+n}$ 上的值 $u_0(x_i), i =$

$j-n, j-n+1, \dots, j, \dots, j+n-1, j+n$. 称区间

$[x_{j-n}, x_{j+n}]$ 上所有网格点为差分格式的解在点

$P(x_j, t_n)$ 的依赖区域.

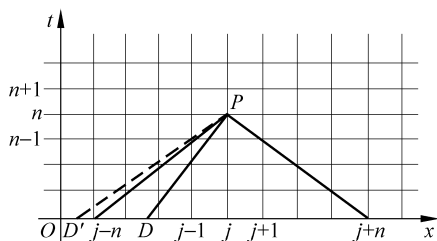


图 3.4

过点 P , 微分方程 (1.1) 的特征线 $x - at = x_j - at_n$ 与 x 轴的交点为 D , 对于微分方程初值问题 (1.1) 式、(1.2) 式来说, D 是其解在 P 点的依赖区域. 如果 D 在区间 $[x_{j-n}, x_{j+n}]$ 之外, 那么用 Lax-Wendroff 格式计算出来的解 u_j^n 就与初值问题 (1.1) 式、(1.2) 式的解毫无关系, 因此差分格式的解就不可能收敛到微分方程初值问题的解. 于是, 要求差分格式的解收敛到微分方程初值问题的解的必要条件为 $D \in [x_{j-n}, x_{j+n}]$, 即差分格式解的依赖区域端点构成的区间必须包含相应的偏微分方程初值问题的依赖区域. 简单地说, 差分格式的依赖区域包含偏微分方程初值问题的依赖区域. 这个条件称为 **Courant-Friedrichs-Lewy 条件**.

下面来推导 C. F. L 条件的表达式, 过点 $P(x_j, t_n)$ 的 (1.1) 的特征线 $x - at = x_j - at_n$ 与 x 轴的交点 D 的横坐标为 $x_j - at_n$. 因此 C. F. L 条件可以表示为

$$x_{j-n} \leq x_j - at_n \leq x_{j+n}.$$

由于 $x_j = jh, t_n = n\tau$, 因此上面不等式等价于

$$|a|\lambda \leq 1,$$

其中 $\lambda = \frac{\tau}{h}$ 为网格比.

由上面讨论知道, C. F. L 条件为差分格式收敛的必要条件. 自然要问, 这个条件是否充分? 对于这个问题, 不同的差分格式有不同的答案. 以 Lax-Wendroff 格式来说, 这是线性偏微分方程初值问题 (1.1) 式、(1.2) 式的相容的差分格式, 而 C. F. L 条件正是 Lax-Wendroff 格式的稳定性条件. 利用 Lax 等价定理知 L. F. C 条件也是格式收敛的充分条件. 我们考虑差分格式 (1.8). 其 C. F. L 条件也是 $|a|\lambda \leq 1$. 但在此条件下, (1.8) 式不稳定, 因而也不收敛. 所以 C. F. L 条件不是格式 (1.8) 的充分条件.

1.5 利用偏微分方程的特征线来构造有限差分格式

特征线概念在双曲型方程中有很重要作用. 借助于双曲型方程的解在特征线上为常数这一事实, 可以构造出 (1.1) 式、(1.2) 式的各种差分格式. 为确定起见, 假定 $a > 0$.

设在 $t = t_n$ 时间层上网格点 A, B, C 和 D 上 u 的值已给定 (已计算出的近似值或初值). 要计算出在 $t = t_{n+1}$ 时间层上的网格点 P 上的 u 值, 见图 3.5. 假定 C. F. L 条件成立.

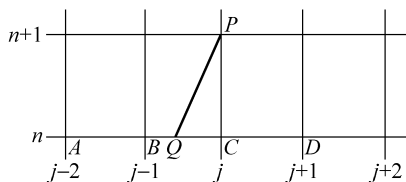


图 3.5

那么过 P 点特征线与 BC 交于点 Q . 由微分方程解的性质知 $u(P) = u(Q)$. 但当 Q 不是网格点时, $u(Q)$ 是未知的. 由于 $u(A), u(B), u(C)$ 和 $u(D)$ 为 $t = t_n$ 时间层上网格点上值已给定, 因此可用插值方法给出 $u(Q)$ 的近似值. 利用 B, C 两点上的值进行线性插值就可以得到

$$u(P) = u(Q) = (1 - a\lambda)u(C) + a\lambda u(B).$$

由此可推导出差分格式

$$u_j^{n+1} = u_j^n - a\lambda(u_j^n - u_{j-1}^n),$$

其中 $\lambda = \frac{\tau}{h}$. 这就是迎风格式. 如果改用 B, D 两点进行线性插值. 则有

$$u(P) = u(Q) = \frac{1}{2}(1 - a\lambda)u(D) + \frac{1}{2}(1 + a\lambda)u(B).$$

由此得到

$$u_j^{n+1} = \frac{1}{2}(1 - a\lambda)u_{j+1}^n + \frac{1}{2}(1 + a\lambda)u_{j-1}^n.$$

我们可以把此式改写为

$$u_j^{n+1} = \frac{1}{2}(u_{j-1}^n + u_{j+1}^n) - \frac{a\lambda}{2}(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n).$$

立即可以看出, 这是 Lax-Friedrichs 格式.

上面都是采用线性插值, 当然我们也可以采用二次插值. 如果使用 B, C 和 D 三个点进行抛物插值, 则就得到

$$\begin{aligned} u(P) &= u(Q) \\ &= u(C) - a\lambda[u(C) - u(B)] \\ &\quad - \frac{1}{2}a\lambda(1 - a\lambda)[u(B) - 2u(C) + u(D)]. \end{aligned}$$

由此得出差分格式

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{1}{2}a\lambda(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) + \frac{1}{2}a^2\lambda^2(u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n),$$

这就是 Lax-Wendroff 格式.

如果我们不用 B, C, D 三点进行插值, 而是采用 A, B, C 三点来进行抛物插值, 可以得到

$$u_j^{n+1} = u_j^n - a\lambda(u_j^n - u_{j-1}^n) - \frac{a\lambda}{2}(1 - a\lambda)(u_j^n - 2u_{j-1}^n + u_{j-2}^n), \quad (1.16)$$

此格式是二阶精度的. 此格式由 R. M. Beam 和 R. F. Warming 于 1976 年引入. 因此一般称其为 **Beam-Warming 格式**. 这是二阶迎风格式.

为讨论格式(1.16)的稳定性. 先求增长因子.

$$\begin{aligned} G(\tau, k) &= 1 - 2a\lambda \sin^2 \frac{kh}{2} - \frac{a\lambda}{2}(1 - a\lambda) \left[4\sin^4 \frac{kh}{2} - \sin^2 kh \right] \\ &\quad - ia\lambda \sin kh \left[1 + 2(1 - a\lambda) \sin^2 \frac{kh}{2} \right], \\ |G(\tau, k)|^2 &= 1 - 4a\lambda(1 - a\lambda)^2(2 - a\lambda) \sin^4 \frac{kh}{2}. \end{aligned}$$

于是,当 $a\lambda \leq 2$ 时有 $|G(\tau, k)| \leq 1$, 由此推出, 当 $a\lambda \leq 2$ 时 Beam-Warming 格式(1.16)是稳定的.

对于 Beam-Warming 格式, 当 $a < 0$ 时, 格式变成

$$u_j^{n+1} = u_j^n + a\lambda(u_{j+1}^n - u_j^n) - \frac{a\lambda}{2}(1 - a\lambda)(u_{j+2}^n - 2u_{j+1}^n + u_j^n). \quad (1.17)$$

仿上推导, (1.17)式的稳定性条件为 $|a|\lambda \leq 2$.

由稳定性条件可以看出, 对于固定空间步长, 时间步长限制较宽. 这有利于实际计算.

1.6 蛙跳格式

下面考虑逼近对流方程(1.1)的一个三层格式

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2\tau} + a \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2h} = 0, \quad (1.18)$$

此格式的节点分布如图 3.6. 这个差分格式称为**蛙跳格式**. 容易看出这是一个二阶精度的格式. 可以把(1.18)式写成便于计算的形式

$$u_j^{n+1} = u_j^{n-1} - a\lambda(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n). \quad (1.18)'$$

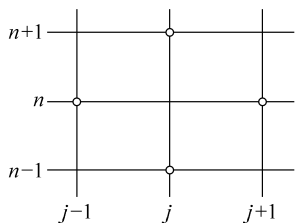


图 3.6

其中 $\lambda = \frac{\tau}{h}$. 在计算时, 除初值(1.2)的离散外, 还要用一个二层格式计算出 $t = \tau$ 那一层的值 u_j^1 . 由于(1.18)式是二阶精度的, 二层格式一般取为二阶格式为宜. 可以看出, (1.18)式比 Lax-Wendroff 格式, Beam-Warming 格式要简单.

下面来讨论蛙跳格式的稳定性. 由于(1.18)式是三层格式, 因此首先必须把它化成等价的二层差分方程组

$$\begin{cases} u_j^{n+1} = v_j^n - a\lambda(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n), \\ v_j^{n+1} = u_j^n. \end{cases}$$

令 $\mathbf{u} = [u, v]^T$, 那么可以把这个方程组写成向量形式

$$\mathbf{u}_j^{n+1} = \begin{bmatrix} -a\lambda & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{u}_{j+1}^n + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{u}_j^n + \begin{bmatrix} a\lambda & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{u}_{j-1}^n.$$

令 $\mathbf{u}_j^n = \mathbf{v}^n e^{ikjh}$, 把它代入上式就可以得到增长矩阵

$$\mathbf{G}(\tau, k) = \begin{bmatrix} -2a\lambda i \sin kh & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$\mathbf{G}(\tau, k)$ 的特征值为

$$\mu_{1,2} = -a\lambda i \sin kh \pm \sqrt{1 - a^2 \lambda^2 \sin^2 kh}.$$

如果 $|a|\lambda \leq 1$, 则有 $|\mu_{1,2}| = 1$, 因此, 当 $|a|\lambda \leq 1$ 时, 蛙跳格式满足 von Neumann 条件. 如当 $|a|\lambda < 1$, 那么 $\mathbf{G}(\tau, k)$ 有两个互不相同的特征值, 利用第 2 章定理 3.7 知, 蛙跳格式是稳定的.

当 $|a|\lambda = 1$ 时, 为方便起见, 取 $a\lambda = 1, kh = \frac{\pi}{2}$, 那么增长矩阵

$$\mathbf{G}(\tau, k) = \begin{bmatrix} -2i & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

容易计算得出

$$\mathbf{G}(\tau, k)^2 = \begin{bmatrix} -3 & -2i \\ -2i & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G}(\tau, k)^4 = \begin{bmatrix} 5 & 4i \\ 4i & -3 \end{bmatrix}.$$

用归纳法可推得

$$\mathbf{G}(\tau, k)^{2^n} = \begin{bmatrix} 2^n + 1 & 2^n i \\ 2^n i & 1 - 2^n \end{bmatrix}, \quad n \geq 2.$$

由此得出

$$\|\mathbf{G}(\tau, k)^{2^n}\|_{\infty} = 2^{n+1} + 1.$$

从而知, 当 $|a|\lambda = 1$ 时, 蛙跳格式不稳定.

1.7 数值例子

考虑初值问题

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0, & x \in \mathbb{R} \quad t \in [0, T], \\ u(x, 0) = u_0(x), \end{cases}$$

其中

$$u_0(x) = \begin{cases} 1, & x \leq 0, \\ 0, & x > 0. \end{cases}$$

取 $h = 0.01, \lambda = \frac{1}{2}$, 用 Lax-Friedrichs 格式、迎风格式、Lax-Wendroff 格式以及 Beam-Warming 格式, 计算至 $t_n = 0.5$ 时, 计算结果与初值问题的解析解见图 3.7^[17]. 对于前两个格式 (Lax-Friedrichs 格式和迎风格式) 把解抹平了. 而后两个格式 (Lax-Wendroff 格式和 Beam-Warming 格式) 出现了振荡. 这些现象的出现是这些格式的正常现象. 在拟线双曲型方程组的间断解计算中为消去此类现象已研究出了很多良好的方法.

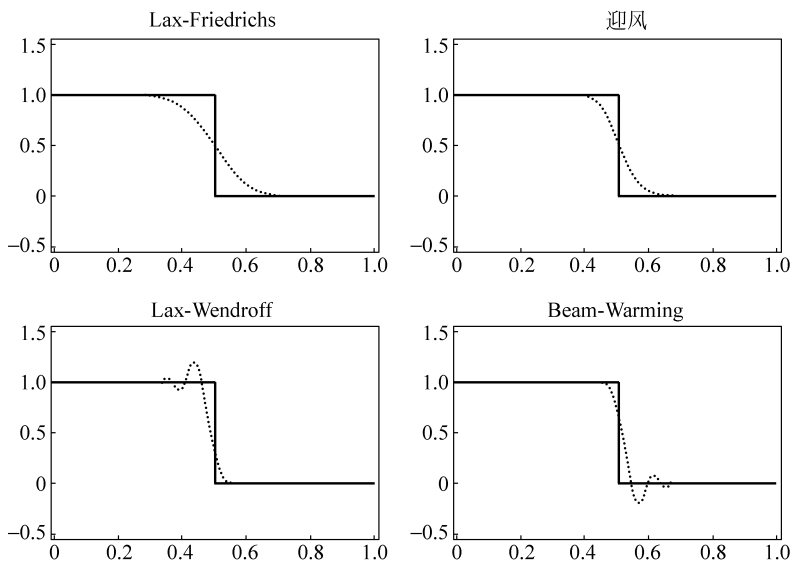


图 3.7

2 一阶线性常系数方程组

考虑一阶线性常系数方程组

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} = \mathbf{0}, \quad (2.1)$$

其中 $\mathbf{u} = \mathbf{u}(x, t) = [u_1(x, t), u_2(x, t), \dots, u_p(x, t)]^T$, $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{p \times p}$ 为常系数矩阵.

定义 2.1 称方程组(2.1)是双曲型方程组, 如果 $\mathbf{A}$ 的特征值是实的, 并存在非奇异矩阵 $\mathbf{S}$ 使得

$$\mathbf{A} = \mathbf{S}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{S} = \text{diag}[\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p],$$

其中 $\lambda_i (i=1, 2, \dots, p)$ 为 $\mathbf{A}$ 的特征值, 如果 $\mathbf{A}$ 是对称阵, 则称(2.1)式为对称双曲型方程组, 如果 $\mathbf{A}$ 的特征值是实的且互不相同, 则称 $\mathbf{A}$ 为严格双曲型方程组.

对于方程组(2.1), 给定初始条件

$$\mathbf{u}(x, 0) = \mathbf{u}_0(x), \quad (2.2)$$

那么(2.1)式和(2.2)式就构成了初值问题. 第1节中的差分格式可以推广到方程组上来, 下面仅用例子进行讨论.

2.1 Lax-Friedrichs 格式

对流方程(1.1)的 Lax-Friedrichs 格式的直接推广有