第 1 章　行列式及其应用

一、填空题

1. 已知方程组 $\begin{cases} x+y+z=a, \\ x+y-z=b, \\ x-y+z=c \end{cases}$ 有唯一解，且 $x=1$，那么 $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} =$ ____________.

2. 已知四阶行列式中第 3 行的元素依次为 –1，0，2，4，第 4 行的余子式依次为 10，5，a，2，则 $a=$ ____________.

3. 若 D 为 n 阶范德蒙德行列式，A_{ij} 是 D 的代数余子式，则 $\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij} =$ ____________.

4. $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 10 & 0 & 0 \\ 4 & 11 & 0 & 12 & 0 \\ 9 & 8 & 7 & 6 & 5 \end{vmatrix} =$ ____________.

5. 设 $D = \begin{vmatrix} 2x & x & 1 & 2 \\ 1 & x & 1 & -1 \\ 3 & 2 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x \end{vmatrix}$，则 D 的展开式中 x^3 的系数为____________.

二、选择题

1. 方程 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 & x \\ 1 & 4 & 4 & x^2 \\ 1 & -8 & 8 & x^3 \end{vmatrix} = 0$ 的根为 (　　).

   (A) $1,2,3$　　(B) $1,2,-2$　　(C) $0,1,2$　　(D) $1,-1,2$

2. 已知 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a$，那么 $\begin{vmatrix} 2a_{11} & a_{13} & a_{11}+a_{12} \\ 2a_{21} & a_{23} & a_{21}+a_{22} \\ 2a_{31} & a_{33} & a_{31}+a_{32} \end{vmatrix} =$ (　　).

   (A) a　　(B) $-a$　　(C) $2a$　　(D) $-2a$

3. 已知齐次线性方程组$\begin{cases}\lambda x+\ y+z=0,\\ \lambda x+3y-z=0,\\ \quad -y+\lambda z=0\end{cases}$仅有零解，则 (　　).

(A) $\lambda\neq 0$ 且 $\lambda\neq 1$　　(B) $\lambda=0$ 或 $\lambda=1$　　(C) $\lambda=0$　　(D) $\lambda=1$

4. 下列行列式中不一定等于 $\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$ 的是 (　　).

(A) $\begin{vmatrix}\lambda_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ 0 & \lambda_2 & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n\end{vmatrix}$　　(B) $\begin{vmatrix}0 & \cdots & 0 & \lambda_1\\ 0 & \cdots & \lambda_2 & a_{2n}\\ \vdots & & \vdots & \vdots\\ \lambda_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}$

(C) $\begin{vmatrix}\lambda_1 & 0 & \cdots & 0\\ a_{21} & \lambda_2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \lambda_n\end{vmatrix}$　　(D) $\begin{vmatrix}0 & -\lambda_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & -\lambda_2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda_{n-1}\\ \lambda_n & 0 & 0 & 0 & 0\end{vmatrix}$

5. n 阶行列式 $D=\left|a_{ij}\right|$ 展开式中项 $a_{1n}a_{2,n-1}a_{3,n-2}\cdots a_{n-1,2}a_{n1}$ 的符号为 (　　).

(A) –　　(B) +　　(C) $(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}$　　(D) $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$

三、计算题

1. 已知 $D=\begin{vmatrix}1 & 0 & 1 & 2\\ -1 & 1 & 0 & 3\\ 1 & 1 & 1 & 0\\ -1 & 2 & 5 & 4\end{vmatrix}$，计算 $A_{41}+A_{42}+A_{43}+A_{44}$.

2. 计算行列式$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 6 \\ 4 & -1 & 5 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & -5 \\ 1 & 4 & -2 & -2 \end{vmatrix}$.

3. 计算行列式$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 & 2 \\ -3 & 4 & 0 & 9 \\ 2 & -2 & 6 & 2 \\ 3 & -3 & 8 & 3 \end{vmatrix}$.

4. 计算行列式$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & x-1 \\ 1 & -1 & x+1 & -1 \\ 1 & x-1 & 1 & -1 \\ x+1 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$.

5. 计算行列式$\begin{vmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ -1 & 1-a & b & 0 \\ 0 & -1 & 1-b & c \\ 0 & 0 & -1 & 1-c \end{vmatrix}$.

6. 计算行列式$\begin{vmatrix} a_1+b & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2+b & a_3 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n+b \end{vmatrix}$.

7. 计算行列式$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & n \end{vmatrix}$.

四、证明题

1. 设 $f(x)=\begin{vmatrix} 1 & x-1 & 2x-1 \\ 1 & x-2 & 3x-2 \\ 1 & x-3 & 4x-3 \end{vmatrix}$，证明：存在 $\xi\in(0,1)$, 使得 $f'(\xi)=0$.

2. 证明当 $\lambda=1$ 时，行列式 $\begin{vmatrix} \frac{1}{4}-\lambda & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5}-\lambda & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{3}{6}-\lambda & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{7} & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} & \frac{4}{7}-\lambda \end{vmatrix}=0$.

3. 设 a,b,c 是互异的实数，证明 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix}=0$ 的充分必要条件是 $a+b+c=0$.

第 2 章　矩　　阵

一、填空题

1. $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均是 n 阶对称矩阵，则 $\boldsymbol{AB}$ 是对称矩阵的充要条件是____________.

2. $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为 n 阶方阵，$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^2=\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{B}^2$ 成立的充要条件是____________.

3. $\begin{pmatrix}2 & 5\\ 1 & 3\end{pmatrix}\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}7 & 19\\ 4 & 11\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{X}=$____________.

4. 设 $\boldsymbol{A}$ 为三阶可逆矩阵，且 $|\boldsymbol{A}|=2$, 则 $|\boldsymbol{A}^*|=$____________.

5. $\boldsymbol{A}$ 为三阶方阵，$|\boldsymbol{A}|=2$，则 $\big|-|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}\big|=$____________.

6. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3 & 1 & 0 & 2\\ 1 & -1 & 2 & -1\\ 1 & 3 & -4 & 4\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{A})=$____________.

7. 当 $k=$____________时，矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ k & 3 & -1\\ 0 & -5 & 5\end{pmatrix}$ 不可逆.

8. 已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}(ad-bc\neq 0)$，则 $\boldsymbol{A}^{-1}=$____________.

9. 已知 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足方程 $\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}$，则 $\boldsymbol{A}^{-1}=$____________.

10. 设三阶可逆矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $2|\boldsymbol{A}|=|k\boldsymbol{A}|$，$k>0$，则 $k=$____________.

11. 设方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}$，则 $\boldsymbol{A}^{-1}=$____________.

12. 已知 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}5 & 2 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 8 & 3\\ 0 & 0 & 5 & 2\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}^{-1}=$____________.

13. 若 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵且 $\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$，则 $|\boldsymbol{A}|=$____________.

14. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵，且 $|\boldsymbol{A}|=3$, 则 $|\boldsymbol{A}^{-1}|=$____________，$|\boldsymbol{A}^2|=$____________.

15. 已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a & -b\\ b & a\end{pmatrix}$（其中 a,b 均不为 0），则 $|3\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|=$____________.

二、选择题

1. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为 n（$n\geqslant 2$）阶方阵，则必有 (　　).

(A) $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{A}|+|\boldsymbol{B}|$　　(B) $|\boldsymbol{AB}|=|\boldsymbol{BA}|$

(C) $\big||\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B}\big|=\big||\boldsymbol{B}|\boldsymbol{A}\big|$　　(D) $|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A}|$

2. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 都是 n 阶方阵，则下列各式中正确的是 (　　).

(A) 若 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{O}$，则 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$　　(B) 若 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$，则 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$ 或 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$

(C) 若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{AC}$，且 $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{O}$，则 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}$　　(D) 若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$，则 $|\boldsymbol{A}|=0$ 或 $|\boldsymbol{B}|=0$

3. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为 n 阶方阵，则 (　　).

(A) 若 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 可逆，则 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 可逆　　(B) 若 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 可逆，则 $\boldsymbol{AB}$ 可逆

(C) 若 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 可逆，则 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$ 可逆　　(D) 若 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 可逆，则 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 可逆

4. 下列各式中不正确的是 (　　).

(A) $(\lambda\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}}=\lambda\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$　　(B) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$

(C) $(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$　　(D) $(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$

5. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为 n 阶方阵，且 $|\boldsymbol{AB}|=0$，则必有 (　　).

(A) $|\boldsymbol{A}|=0$ 或 $|\boldsymbol{B}|=0$　　(B) 若 $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{O}$，则 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$

(C) $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$ 或 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$　　(D) $|\boldsymbol{A}|+|\boldsymbol{B}|=0$

6. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵，$\boldsymbol{C}$ 是 n 阶可逆矩阵，$\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=r$，$\mathrm{R}(\boldsymbol{AC})=r_1$，则 (　　).

(A) $r>r_1$　　(B) $r<r_1$

(C) $r=r_1$　　(D) r 与 r_1 的关系依 $\boldsymbol{C}$ 而定

7. 设四阶矩阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3,\boldsymbol{\gamma}_4)$，$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3,\boldsymbol{\gamma}_4)$，其中 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3,\boldsymbol{\gamma}_4$ 均为 4 行 1 列矩阵，已知 $|\boldsymbol{A}|=2$，$|\boldsymbol{B}|=3$，则 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|=$ (　　).

(A) 5　　(B) 4　　(C) 5　　(D) 40

8. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} a_{12} & a_{11} & a_{13}+a_{11} \\ a_{22} & a_{21} & a_{23}+a_{21} \\ a_{32} & a_{31} & a_{33}+a_{31} \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{P}_1=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{P}_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，则 (　　) 成立.

(A) $\boldsymbol{AP}_1\boldsymbol{P}_2=\boldsymbol{B}$　　(B) $\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$　　(C) $\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$　　(D) $\boldsymbol{AP}_2\boldsymbol{P}_1=\boldsymbol{B}$

9. $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 都是 n 阶可逆矩阵，且 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$，则 (　　) 不成立.

(A) $\boldsymbol{AB}^{-1}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}$　　(B) $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{BA}^{-1}$

(C) $\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}^{-1}$　　(D) $\boldsymbol{AB}^{-1}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$

10. 以下结论正确的是 (　　).

(A) 若方阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式 $|\boldsymbol{A}|=0$，则 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$　　(B) 若 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{O}$，则 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$

(C) 若 $\boldsymbol{A}$ 为对称矩阵，则 $\boldsymbol{A}^2$ 也为对称矩阵　　(D) 若方阵 $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{O}$，则 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$

11. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵，则 $|\boldsymbol{AA}^*|=$ (　　).

(A) 1　　(B) $|\boldsymbol{A}|$　　(C) $|\boldsymbol{A}|^2$　　(D) $|\boldsymbol{A}|^n$

12. 若 $\boldsymbol{A}$ 为三阶方阵，且 $|\boldsymbol{A}|=-3$，则 $|3\boldsymbol{A}|=$ (　　).

(A) -9　　(B) 9　　(C) -81　　(D) 81

13. 设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 为 n 阶可逆矩阵，则下列正确的是 (　　).

(A) $(\boldsymbol{AB})^{-1}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}^{-1}$　　(B) $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$

(C) $(\boldsymbol{A}^{-1})^*=(\boldsymbol{A}^*)^{-1}$　　(D) $(2\boldsymbol{A})^{-1}=2\boldsymbol{A}^{-1}$

14. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵，则下列结论正确的是 (　　).

(A) 若 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$，则 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$ 或 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$　　(B) $|-\boldsymbol{A}|=-|\boldsymbol{A}|$

(C) $|\boldsymbol{A}^{-1}|=|\boldsymbol{A}|^{-1}$　　(D) 若 $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{O}$，则 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$

15. 若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式等于零，则下列结论正确的是 (　　).

(A) $\boldsymbol{A}^2$ 是非奇异矩阵　　(B) $\boldsymbol{A}$ 是可逆矩阵

(C) $\boldsymbol{A}$ 是零矩阵　　(D) 对任意与 $\boldsymbol{A}$ 同阶的矩阵 $\boldsymbol{B}$，都有 $|\boldsymbol{AB}|=0$

三、计算题

1. 设 $\boldsymbol{A}$ 为四阶可逆矩阵，$|\boldsymbol{A}|=2$，求 $|(3\boldsymbol{A})^{-1}-4\boldsymbol{A}^*|$.

2. 求矩阵$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$的逆矩阵.

3. 当k取何值时，矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$可逆，并求其逆矩阵.

4. 设$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{P\Lambda}$，求$\boldsymbol{A}^{100}$.

5. 解矩阵方程$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

6．设$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$且满足$\boldsymbol{AX}=2\boldsymbol{X}+\boldsymbol{B}$，求$\boldsymbol{X}$.

7. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3 & 4 & 0 & 0\\ 4 & -3 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 4\\ 0 & 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$，求 $\left|\boldsymbol{A}^8\right|$， $\boldsymbol{A}^4$.

8. 用初等变换求矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2 & 2 & 0\\ 2 & 1 & 3\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$ 的逆矩阵.

9. 已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2 & a & 3\\ 2 & 2 & 3 & 1 & 4\\ 1 & 0 & 1 & 1 & 5\\ 2 & 3 & 5 & 5 & 4\end{pmatrix}$ 的秩为 3，求 a 的值.

10. 确定参数 λ，使矩阵 $\begin{pmatrix}1 & 1 & \lambda^2 & -2\\ 1 & -2 & \lambda & 1\\ -2 & 1 & -2 & \lambda\end{pmatrix}$ 的秩最小.