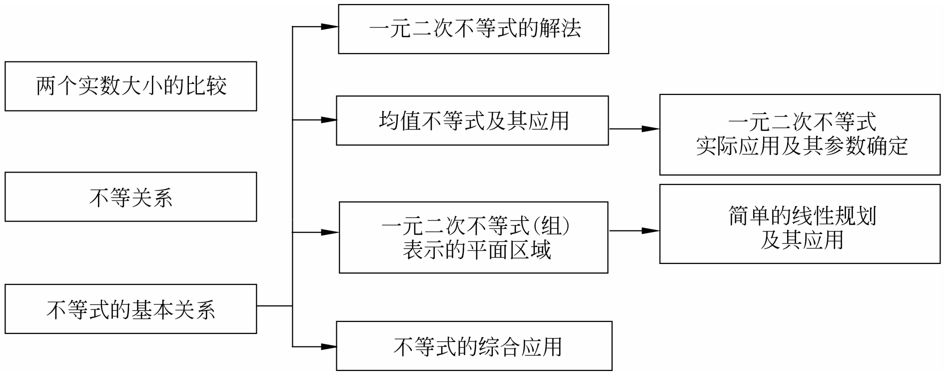
第1讲

不等式基础知识整合

一、知识清单



二、例题选讲

例 1 （1）设 $x>0, y>0$，不等式 $\sqrt{x}+\sqrt{y}\leqslant a\sqrt{x+y}$ 恒成立，求 a 的最小值.

（2）设 $x\in\mathbf{R}$，不等式 $2x^2-a\sqrt{x^2+1}+3>0$ 恒成立，求实数 a 的取值范围.

思路点拨：这两个小问题都与“恒成立”有关，可以考虑把待确定的参数分离到不等式的一端，用最大值或最小值求解.

解：（1）$\because x>0, y>0$，$\therefore$ 不等式 $\sqrt{x}+\sqrt{y}\leqslant a\sqrt{x+y}\Leftrightarrow a\geqslant\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x+y}}$.

由已知 $a\geqslant\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x+y}}$ 恒成立，故 $a\geqslant\left(\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x+y}}\right)_{\max}$.

$\because \left(\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x+y}}\right)^2=\dfrac{x+y+2\sqrt{xy}}{x+y}=1+\dfrac{2\sqrt{xy}}{x+y}\leqslant 1+\dfrac{x+y}{x+y}=2$，当且仅当 $x=y$ 时取等号，

$\therefore \left(\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x+y}}\right)_{\max}=\sqrt{2}$，可得 $a\geqslant\sqrt{2}$，a 的最小值为$\sqrt{2}$.

(2) $2x^2-a\sqrt{x^2+1}+3>0\Leftrightarrow a\sqrt{x^2+1}<2x^2+3\Leftrightarrow a<\dfrac{2x^2+3}{\sqrt{x^2+1}}$，

只需$a<\left(\dfrac{2x^2+3}{\sqrt{x^2+1}}\right)_{\min}$.

$\because \dfrac{2x^2+3}{\sqrt{x^2+1}}=\dfrac{2(x^2+1)+1}{\sqrt{x^2+1}}=2\sqrt{x^2+1}+\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$，$2\sqrt{x^2+1}=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$无解，

$\therefore$令 $\sqrt{x^2+1}=t$，则 $t\geqslant1$. 再令 $g(t)=2t+\dfrac{1}{t}$，$g(t)$在$[1,+\infty)$上是增函数.

故当 $t=1$，$x=0$ 时，$g(t)$取最小值 3，$\therefore a<3$.

技巧提炼：用基本不等式求函数的最大值或最小值，一定要具备“一正、二定、三相等”，定值的条件是一个难点，往往需要在给定的代数式里进行拼凑或构造，用基本不等式取不到等号时可以考虑用导数研究函数单调性.

例 2 设 $f(x)$是定义在 **R** 上的奇函数，当 $x\geqslant0$ 时，$f(x)=x^2$. 若对于任意的 $x\in[t,t+2]$，不等式 $f(x+t)\geqslant2f(x)$恒成立，则实数 t 的取值范围是(　　).

A. $[\sqrt{2},+\infty)$　　B. $[2,+\infty)$　　C. $(0,2]$　　D. $(-\infty,-\sqrt{2}]\cup[2,+\infty)$

思路点拨：遇函数问题，从定义域、值域、单调性、奇偶性对其进行“查体”是常规思路，立足本题题设 $f(x+t)\geqslant2f(x)$，首先应该关注函数 $f(x)$的单调性最自然不过. 若把分段函数 $f(x)$，$f(x+t)$代入，较繁. 求函数的最大(小)值在解决“恒成立”问题中有着重要应用.

解：$\because$当 $x\geqslant0$ 时，$f(x)=x^2$，$\therefore f(x)$在$[0,+\infty)$上是增函数.

又$\because f(x)$是奇函数，

$\therefore f(x)=\begin{cases}x^2 & (x\geqslant0)\\-x^2 & (x<0)\end{cases}$，故 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上是增函数，且 $2f(x)=f(\sqrt{2}x)$，

即 $f(x+t)\geqslant2f(x)\Leftrightarrow f(x+t)\geqslant f(\sqrt{2}x)\Leftrightarrow x+t\geqslant\sqrt{2}x\Leftrightarrow x\leqslant(\sqrt{2}+1)t$.

由已知 $f(x+t)\geqslant2f(x)$恒成立，故 $x\leqslant(\sqrt{2}+1)t$ 恒成立.

$\because x$ 的最大值是 $t+2$，故只需$(\sqrt{2}+1)t\geqslant t+2$，解得 $t\geqslant\sqrt{2}$，故选 A.

技巧提炼：①函数的单调性是把不等式中抽象函数符号转化为具体函数的重要方法. ②有关不等式的综合性试题，历来以“含参数的不等式恒成立”体现之，常规的通法是分离参数，即使得不等式一端只含有参数(不含其他变量)，另一端只含有变量(不含参数)，即将 $F(x,a)>0$ 分离成 $f(x)>g(a)$或 $f(x)<g(a)$的形式，再利用“$f(x)>g(a)$或 $f(x)<g(a)$恒成立$\Leftrightarrow[f(x)]_{\min}>g(a)$或$[f(x)]_{\max}<g(a)$”的基本原理求解.

例 3　求证：对任意 $x,y\in\mathbf{R}$，不等式 $x^2+xy+y^2\geqslant 3(x+y-1)$ 总成立.

思路点拨：证明不等式的一般方法为作差，作差后变形是比较大小的关键一环，待证不等式中出现 x^2,xy,y^2,x,y 元素，可以通过配方将它们联系起来，化成几个完全平方数和的形式或一些易判断符号的因式积的形式.

证明：$x^2+xy+y^2-3(x+y-1)$

$=x^2+(y-3)x+(y^2-3y+3)$

$=\left(x+\dfrac{y-3}{2}\right)^2-\dfrac{(y-3)^2}{4}+(y^2-3y+3)$

$=\left(x+\dfrac{y-3}{2}\right)^2+\left(\dfrac{3}{4}y^2-\dfrac{3}{2}y+\dfrac{3}{4}\right)$

$=\left(x+\dfrac{y-3}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}(y-1)^2\geqslant 0$，

当且仅当 $x+\dfrac{y-3}{2}=0$ 且 $y-1=0$，即 $x=y=1$ 时取等号.

即对任意 $x,y\in\mathbf{R}$，不等式 $x^2+xy+y^2\geqslant 3(x+y-1)$ 总成立.

技巧提炼：作差后将二元二次六项式转化为以 x 为主元的二次三项式后，两次配方获得证明.

例 4　已知关于 x 的不等式 $\dfrac{a(x-1)}{x-2}>2$ 的解集为 A，且 $3\notin A$.

(1) 求实数 a 的取值范围.

(2) 求 A.

思路点拨：①理解 $3\notin A$ 的含义，即当 $x=3$ 时，有 $\dfrac{a(x-1)}{x-2}\leqslant 2$. ②先转化为标准型，再对参数 a 进行分类讨论，注意层次性，先对系数 $a-2$ 的符号进行讨论，再对根 2 和 $\dfrac{a-4}{a-2}$ 的大小进行讨论.

解：(1) $\because 3\notin A$，$\therefore$ 当 $x=3$ 时，有 $\dfrac{a(x-1)}{x-2}\leqslant 2$，即 $\dfrac{2a}{3-2}\leqslant 2$，

$\therefore a\leqslant 1$，故 a 的取值范围是 $\{a\mid a\leqslant 1\}$.

(2) $\dfrac{a(x-1)}{x-2}>2\Leftrightarrow\dfrac{a(x-1)}{x-2}-2>0\Leftrightarrow\dfrac{(a-2)x-(a-4)}{x-2}>0$.

由(1)知 $a-2<0$，故 $\dfrac{x-\dfrac{a-4}{a-2}}{x-2}<0$.

由$\frac{a-4}{a-2}-2=\frac{-a}{a-2}$知：

当$0<a\leqslant 1$时，$\frac{a-4}{a-2}>2$，则原不等式解集$A=\left(2,\frac{a-4}{a-2}\right)$；

当$a=0$时，原不等式解集$A=\varnothing$；

当$a<0$时，$\frac{a-4}{a-2}<2$，原不等式解集$A=\left(\frac{a-4}{a-2},2\right)$.

例5 已知关于x的不等式$\log_a(8-ax)>1$在$[1,2]$上恒成立，求实数a的取值范围.

思路点拨：转化为求某函数的最大值、最小值问题.去掉对数符号时，要利用对数函数的单调性，因此要对底数a分类讨论.

解：(1) 当$a>1$时，

$\log_a(8-ax)>1\Leftrightarrow\log_a(8-ax)>\log_a a\Leftrightarrow 8-ax>a\Leftrightarrow a<\frac{8}{x+1}(x\in[1,2])$.

由已知，不等式$a<\frac{8}{x+1}$对$x\in[1,2]$恒成立.

设$f(x)=\frac{8}{x+1}(x\in[1,2])$，则$f(x)$在$[1,2]$上是减函数，$f(x)_{\min}=f(2)=\frac{8}{3}$.

故$1<a<\frac{8}{3}$.

(2) 当$0<a<1$时，

$\log_a(8-ax)>1\Leftrightarrow\log_a(8-ax)>\log_a a\Leftrightarrow\begin{cases}8-ax<a\\8-ax>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a>\frac{8}{x+1}\\a<\frac{8}{x}\end{cases}(x\in[1,2])$.

由已知，不等式$a>\frac{8}{x+1}$与不等式$a<\frac{8}{x}$对$x\in[1,2]$均恒成立.

设$f_1(x)=\frac{8}{x+1}(x\in[1,2])$，$f_2(x)=\frac{8}{x}(x\in[1,2])$，

则$f_1(x)$，$f_2(x)$在$[1,2]$上均是减函数，

$\therefore f_1(x)_{\max}=f_1(1)=4$，$f_2(x)_{\min}=f_2(2)=4$，$\therefore\begin{cases}a>4\\a<4\end{cases}$，此不等式组无解.

综上所述，实数a的取值范围是$\left(1,\frac{8}{3}\right)$.

技巧提炼：求参数的取值范围时要注意等价转化，在去掉对数符号时，$8-ax>0$容易漏掉，要注意等价转化.

习　题　1

1. 设 $x,y,z\in\mathbf{R}$，比较 $5x^2+y^2+z^2$ 与 $2xy+4x+2z-2$ 的大小.

2. 已知 $x,y,z\in\mathbf{R}^+$，$x-2y+3z=0$，则 $\frac{y^2}{xz}$ 的最小值________.

3. 三个同学对问题“关于 x 的不等式 $x^2+25+|x^3-5x^2|\geqslant ax$ 在 $[1,12]$ 上恒成立，求实数 a 的取值范围”提出各自的解题思路.

甲说：“只需不等式左边的最小值不小于右边的最大值.”

乙说：“把不等式变形为左边含变量 x 的函数，右边仅含常数，求函数的最值.”

丙说：“把不等式两边看成关于 x 的函数，作出函数图象.”

参考上述解题思路，你认为他们所讨论的问题的正确结论，即 a 的取值范围是________.

4. 设 $a>0$，解关于 x 的不等式 $ax^2-(a^2+2)x+2a\leqslant 0$.

5. 已知关于 x 的不等式 $x^2-(a+1)x+a<0$ 的所有整数解之和为 27，求实数 a 的取值范围.

第2讲

均值不等式应用技巧

一、知识清单

均值不等式

$$x_1^n+x_2^n+\cdots+x_n^n\geqslant nx_1x_2\cdots x_n,$$

$$x_1x_2\cdots x_n\leqslant\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right)^n\quad(x_i\geqslant 0,i=1,2,\cdots,n)$$

当且仅当 $x_1=x_2=\cdots=x_n$ 时取等号.

二、例题选讲

技巧一：为了求和的最小值，首先需要通过代数变形，使得各项乘积为定值.

例 1 （第 21 届“希望杯”全国数学邀请赛高一第一试）已知 a,b,c 为非负数，则 $f(a,b,c)=\frac{c}{a}+\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c}$ 的最小值是________.

思路点拨：运用均值不等式求和式的最小值，要求“一正、二定、三相等”，而 $\frac{c}{a}\cdot\frac{a}{b+c}\cdot\frac{b}{c}$ 不是定值，因此要进行代数变形.

解：$f(a,b,c)=\frac{c}{a}+\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c}=\left(\frac{c}{a}+\frac{a}{b+c}+\frac{b+c}{c}\right)-1$

$$\geqslant 3\sqrt[3]{\frac{c}{a}\cdot\frac{a}{b+c}\cdot\frac{b+c}{c}}-1=2.$$

当 $\frac{c}{a}=\frac{a}{b+c}=\frac{b+c}{c}$ 时取等号（如 $a=c=1,b=0$），$\therefore$ 所求最小值为 2.

例 2 （2010 年高考四川理科）设 $a>b>c>0$，则 $2a^2+\frac{1}{ab}+\frac{1}{a(a-b)}-10ac+25c^2$ 的最小值是（　　）.

A. 2　　　　B. 4　　　　C. $2\sqrt{5}$　　　　D. 5

思路点拨：先将 $2a^2+\frac{1}{ab}+\frac{1}{a(a-b)}-10ac+25c^2$ 看成关于 c 的二次函数，经配方求出其最小值为 $a^2+\frac{1}{ab}+\frac{1}{a(a-b)}$，考虑到运用均值不等式求 $a^2+\frac{1}{ab}+\frac{1}{a(a-b)}$ 的最小值时需要"一正、二定、三相等"的条件，而 $a^2\cdot\frac{1}{ab}\cdot\frac{1}{a(a-b)}$ 不是定值，所以要进行代数变形.

解：$2a^2+\frac{1}{ab}+\frac{1}{a(a-b)}-10ac+25c^2=(5c-a)^2+a^2+\frac{1}{ab}+\frac{1}{a(a-b)}$

$$\geqslant 0+a^2+\frac{1}{ab}+\frac{1}{a(a-b)}=a^2-ab+ab+\frac{1}{ab}+\frac{1}{a(a-b)}$$

$$=ab+\frac{1}{ab}+a(a-b)+\frac{1}{a(a-b)}\geqslant 2\sqrt{ab\cdot\frac{1}{ab}}+2\sqrt{a(a-b)\cdot\frac{1}{a(a-b)}}=4.$$

当且仅当 $a-5c=0$，$ab=1$，$a(a-b)=1$ 时等号成立，即 $a=\sqrt{2}$，$b=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$c=\frac{\sqrt{2}}{5}$ 时取等号.

故答案为 B.

技巧二：先通过代数变形，将二元对称代数式变形成关于基本对称多项式 $a+b$，ab 的式子，再利用 $a+b\geqslant 2\sqrt{ab}$ 将三元对称代数式变形成关于基本对称多项式 $a+b+c$，$ab+bc+ca$，abc 的式子，再利用 $a+b+c\geqslant 3\sqrt[3]{abc}$.

例 3　(第 21 届"希望杯"全国数学邀请赛高二第一试)已知 $\lg a+\lg b=0$，则满足不等式 $\frac{a}{a^2+1}+\frac{b}{b^2+1}\leqslant\lambda$ 的实数 λ 的取值范围是________.

思路点拨：关键是求 $f(a,b)=\frac{a}{a^2+1}+\frac{b}{b^2+1}$ 的最大值. 先将二元对称式化成关于 $a+b$，ab 的表达式，再用 $a+b\geqslant 2\sqrt{ab}$.

解：$f(a,b)=\frac{a}{a^2+1}+\frac{b}{b^2+1}=\frac{a(b^2+1)+b(a^2+1)}{(a^2+1)(b^2+1)}$

$$=\frac{(ab+1)(a+b)}{a^2b^2+a^2+b^2+1}=\frac{(ab+1)(a+b)}{(ab)^2+(a+b)^2-2ab+1}.$$

$\because \lg a+\lg b=0$，$\therefore ab=1$，$\therefore f(a,b)=\frac{2}{a+b}\leqslant\frac{2}{2\sqrt{ab}}=1$.

$\therefore$ 实数 λ 的取值范围是 $[1,+\infty)$.

例 4 设 $a,b,c\geqslant 0,a+b+c=1$,求证:

$$2\leqslant(1-a^2)^2+(1-b^2)^2+(1-c^2)^2\leqslant(1+a)(1+b)(1+c).$$

思路点拨:先将不等式表示为关于基本对称多项式 $a+b+c,ab+bc+ca,abc$ 的式子,再利用三个数的均值不等式.

证明:设 $\begin{cases}ab+bc+ca=u\\abc=v\end{cases}$,则

$(1+a)(1+b)(1+c)=1+(a+b+c)+(ab+bc+ca)+abc=2+u+v.$

而 $a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)=1-2u$,

$$\begin{aligned}a^4+b^4+c^4&=(a^2+b^2+c^2)^2-2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)\\&=(1-2u)^2-2[(ab+bc+ca)^2-2abc(a+b+c)]\\&=(1-2u)^2-2(u^2-2v\cdot 1)=2u^2-4u+4v+1,\end{aligned}$$

$\therefore(1-a^2)^2+(1-b^2)^2+(1-c^2)^2$

$=3-2(a^2+b^2+c^2)+(a^4+b^4+c^4)$

$=3-2(1-2u)+(2u^2-4u+4v+1)$

$=2+2u^2+4v$,

$\therefore$ 待证不等式等价于 $2\leqslant 2+2u^2+4v\leqslant 2+u+v$.

$\because u\geqslant 0,v\geqslant 0,\therefore 2+2u^2+4v\geqslant 2$ 显然成立.

而 $2+2u^2+4v\leqslant 2+u+v\Leftrightarrow 3v\leqslant u(1-2u)$.

事实上 $u(1-2u)=(ab+bc+ca)(a^2+b^2+c^2)\geqslant(ab+bc+ca)\cdot\frac{1}{3}(a+b+c)^2$

$$\begin{aligned}&=(ab+bc+ca)\cdot\frac{1}{3}(a+b+c)\geqslant 3\sqrt[3]{(abc)^2}\times\frac{1}{3}\times 3\sqrt[3]{abc}\\&=3abc=3v.\end{aligned}$$

即 $2\leqslant(1-a^2)^2+(1-b^2)^2+(1-c^2)^2\leqslant(1+a)(1+b)(1+c)$.

例 5 设 $a,b,c\in\mathbf{R}^+$,且 $abc=1$.求证:

$$\frac{1}{1+a+b}+\frac{1}{1+b+c}+\frac{1}{1+c+a}\leqslant\frac{1}{2+a}+\frac{1}{2+b}+\frac{1}{2+c}.$$

证明:设 $a+b+c=x,ab+bc+ca=y$,

原不等式 $\Leftrightarrow\dfrac{\sum(1+b+c)(1+c+a)}{(1+a+b)(1+b+c)(1+c+a)}\leqslant\dfrac{\sum(2+a)(2+b)}{(2+a)(2+b)(2+c)}$. ①

又 $(2+a)(2+b)(2+c)=8+4(a+b+c)+2(ab+bc+ca)+abc=8+4x+2y+1$

$=9+4x+2y$.

同理,可以计算得出

$$\sum(1+b+c)(1+c+a)=x^2+y+4x+3,$$

$$\sum(2+a)(2+b)=12+4x+y,$$

$$(1+a+b)(1+b+c)(1+c+a)=x^2+y+2x+xy.$$

$\therefore$只需证$\frac{x^2+y+4x+3}{x^2+y+2x+xy}\leqslant\frac{12+4x+y}{9+4x+2y}$.

上式$\Leftrightarrow\frac{2x+3-xy}{x^2+y+2x+xy}\leqslant\frac{3-y}{9+4x+2y}$

$$\Leftrightarrow 3x^2y+xy^2+12xy-5x^2-y^2-6xy-3y-24x-27\geqslant 0$$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{5}{3}x^2y-5x^2\right)+\left(\frac{1}{3}xy^2-y^2\right)+(xy-3y)+\left(\frac{4}{3}x^2y-4xy\right)$$

$$+\left(\frac{2}{3}xy^2-2xy\right)+(8xy-24x)+(3xy-27)\geqslant 0. \qquad ②$$

由均值不等式得，$x=a+b+c\geqslant 3\sqrt[3]{abc}=3$，$y=ab+bc+ca\geqslant 3\sqrt[3]{(abc)^2}=3$.

$\therefore$②式成立，等号当且仅当 $a=b=c=1$ 时取得.

注：用三元初等对称多项式将①式表示出，这样便于去分母，再根据均值不等式建立起 $a+b+c$，$ab+bc+ca$，abc 之间的关系，从而达到目标.

习　题　2

1. 求证：对任意实数 $a>1$，$b>1$，都有不等式$\frac{a^2}{b-1}+\frac{b^2}{a-1}\geqslant 8$.

2. 已知 $a_1,a_2,\cdots,a_n\in\mathbf{R}^+$，且 $a_1+a_2+\cdots+a_n=1$，求证：

$$\frac{a_1^2}{a_1+a_2}+\frac{a_2^2}{a_2+a_3}+\cdots+\frac{a_n^2}{a_n+a_1}\geqslant\frac{1}{2}.$$

3. 已知 $a_1,a_2,\cdots,a_n\in\mathbf{R}^+$，$b_1,b_2,\cdots,b_n\in\mathbf{R}^+$，且 $\sum_{i=1}^{n}a_i=\sum_{i=1}^{n}b_i(i=1,2,\cdots,n)$，求证：

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^2}{a_i+b_i}\geqslant\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}a_i.$$

4. 已知 $x_1,x_2,\cdots,x_n\in\mathbf{R}^+$，且 $x_1+x_2+\cdots+x_n=1(n\in\mathbf{N}^*,n\geqslant 2)$，求证：

$$\frac{x_1^2}{1-x_1}+\frac{x_2^2}{1-x_2}+\frac{x_3^2}{1-x_3}+\cdots+\frac{x_n^2}{1-x_n}\geqslant\frac{1}{n-1}.$$

5. α,β,γ 为锐角，且$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$，求证：

$$\cot^2\alpha+\cot^2\beta+\cot^2\gamma\geqslant\frac{3}{2}.$$