

# 第 1 章

## 集 合

### 1.1 集合

#### 1.1.1 集合的概念

集合是数学中最为基本的概念. 在通常讨论问题时, 一般只采用描述性的定义. 通常我们把具有某种特性的对象全体看成一个集合, 该集合中的对象称为元素.

关于集合的最基本的一些概念如子集、包含等读者在数学分析甚至高中数学课程中都已见过, 不再赘述.

实际上, 集合有严格的数学定义, 关于集合的研究是基础数学的一个分支——集合论.

通常用大写字母  $A, B, X, Y, \dots$  表示集合, 用小写字母  $a, b, x, y, \dots$  表示集合中的元素.  $\mathbf{N}, \mathbf{Z}, \mathbf{Q}, \mathbf{R}$  分别表示全体自然数、全体整数、全体有理数以及全体实数构成的集合.  $\mathbf{Z}_+, \mathbf{R}_+$  分别表示全体正整数和全体正实数构成的集合. 注意, 按照近年来的习惯, 集合  $\mathbf{N}$  中包含 0.

设  $x$  为对象,  $A$  为集合.  $x \in A$  表示  $x$  为  $A$  中元素, 或称  $x$  属于  $A$ . 而  $x \notin A$  表示  $x$  不是  $A$  中元素.  $x \in A$  或  $x \notin A$  二者必居其一.

设  $P$  为某种性质, 则具有性质  $P$  的元素全体构成的集合  $A$  通常表示如下:

$$A = \{x | x \text{ 具有性质 } P\},$$

其中  $P$  可以是任意性质, 如  $P$  为方程  $x^2 - 1 = 0$ , 则  $A = \{x | x^2 - 1 = 0\}$ . 如果集合  $A$  为有限集且可以明确它的所有元素, 也可以列举出  $A$  的元素. 例如, 上面的集合  $A = \{-1, 1\}$ . 有时为了方便, 也把集合  $\{x | x \in E, x \text{ 有性质 } P\}$  简写为

$E(x$ 有性质 $P)$ . 例如, 设  $f(x)$  是集合  $E$  上的一个函数,  $c$  是一个实数, 则集合  $\{x|x \in E, f(x) \leq c\}$  可简写为  $E(f(x) \leq c)$ .

以后, 若无特别声明, 所有函数均为实值函数.

### 1.1.2 集合运算

#### 1. (任意) 无限交和并运算

设  $\{A_\alpha\}_{\alpha \in \Gamma}$  为集族, 即  $\Gamma$  为集合, 对任意  $\alpha \in \Gamma$ ,  $A_\alpha$  是集合. 集合

$$\bigcup_{\alpha \in \Gamma} A_\alpha = \{x | \text{存在 } \alpha \in \Gamma \text{ 使得 } x \in A_\alpha\}$$

和

$$\bigcap_{\alpha \in \Gamma} A_\alpha = \{x | \text{对任意 } \alpha \in \Gamma, x \in A_\alpha\}$$

分别称为集族  $\{A_\alpha\}_{\alpha \in \Gamma}$  的并和交.

例 1.1.1 设  $f, g$  为定义于集合  $E$  上函数. 对任意  $c \in \mathbf{R}$ ,

$$h(x) = \max\{f(x), g(x)\}, x \in E.$$

则

$$\{x | h(x) > c\} = \{x | f(x) > c\} \bigcup \{x | g(x) > c\}.$$

证明 对任意  $x \in E$ ,

$$\begin{aligned} x \in \{x | h(x) > c\} & \text{ 当且仅当 } h(x) = \max\{f(x), g(x)\} > c \\ & \text{ 当且仅当 } f(x) > c \text{ 或者 } g(x) > c \\ & \text{ 当且仅当 } x \in \{x | f(x) > c\} \text{ 或者 } x \in \{x | g(x) > c\} \\ & \text{ 当且仅当 } x \in \{x | f(x) > c\} \bigcup \{x | g(x) > c\}. \end{aligned}$$

从而结论成立. □

例 1.1.2  $(a, b) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left[a + \frac{1}{n}, b - \frac{1}{n}\right]$ ,  $[a, b] = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(a - \frac{1}{n}, b + \frac{1}{n}\right)$ . 上面两个等式中如果对某个  $n$  出现区间的左端点大于右端点的情况, 就将这一“区间”理解为空集.

证明 设  $x \in (a, b)$ , 则  $a < x < b$ . 从而由

$$a = \inf \left\{ a + \frac{1}{n} \mid n \in \mathbf{Z}_+ \right\} < x,$$

知有  $N_1 \in \mathbf{Z}_+$  使得  $a + \frac{1}{N_1} < x$ . 同理, 有  $N_2 \in \mathbf{Z}_+$  使得  $x < b - \frac{1}{N_2}$ . 令  $N = \max\{N_1, N_2\}$ , 则  $x \in \left[ a + \frac{1}{N}, b - \frac{1}{N} \right]$ , 从而  $x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} \left[ a + \frac{1}{n}, b - \frac{1}{n} \right]$ .

反之, 若  $x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} \left[ a + \frac{1}{n}, b - \frac{1}{n} \right]$ , 设  $x \in \left[ a + \frac{1}{n}, b - \frac{1}{n} \right]$ , 对某个  $n$  成立, 因为  $\left[ a + \frac{1}{n}, b - \frac{1}{n} \right] \subset (a, b)$ , 从而  $x \in (a, b)$ . 这就证明了第一个等式.

对任意  $n$ , 显然,  $[a, b] \subset \left( a - \frac{1}{n}, b + \frac{1}{n} \right)$ , 从而

$$[a, b] \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} \left( a - \frac{1}{n}, b + \frac{1}{n} \right).$$

反之, 设  $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \left( a - \frac{1}{n}, b + \frac{1}{n} \right)$ , 则对任意  $n \in \mathbf{Z}_+$ , 都有

$$a - \frac{1}{n} < x < b + \frac{1}{n},$$

于是, 由

$$a = \sup \left\{ a - \frac{1}{n} \mid n \in \mathbf{Z}_+ \right\} \leq x \leq \inf \left\{ b + \frac{1}{n} \mid n \in \mathbf{Z}_+ \right\}$$

即知  $x \in [a, b]$ . 这就证明了第二个等式. □

**例 1.1.3**  $\{x \mid f(x) > 0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{ x \mid f(x) > \frac{1}{n} \right\}$ .

证明和例 1.1.2 类似, 从略.

## 2. 差集和补集

设  $A, B$  为集合, 令  $A \setminus B = \{x \in A \text{ 且 } x \notin B\}$ , 称为  $A$  和  $B$  的**差集**.

设  $X$  为非空集合,  $A \subset X$ , 则  $X \setminus A$  称为  $A$  在  $X$  中的**补集**. 当不会引起混淆时, 补集  $X \setminus A$  简记为  $A^c$ .

由定义易证下述定理:

**定理 1.1.1 (De Morgan 公式)** 设  $\{A_\alpha | \alpha \in \Gamma\}$  为  $X$  中的子集族. 则

$$(1) \left( \bigcup_{\alpha \in \Gamma} A_\alpha \right)^c = \bigcap_{\alpha \in \Gamma} A_\alpha^c.$$

$$(2) \left( \bigcap_{\alpha \in \Gamma} A_\alpha \right)^c = \bigcup_{\alpha \in \Gamma} A_\alpha^c.$$

**证明** 只证 (1). 对任意  $x \in X$ , 设  $x \in \left( \bigcup_{\alpha \in \Gamma} A_\alpha \right)^c$ , 则  $x \notin \left( \bigcup_{\alpha \in \Gamma} A_\alpha \right)$ , 因此对任意  $\alpha \in \Gamma$ ,  $x \notin A_\alpha$ . 于是  $x \in A_\alpha^c$  对任意  $\alpha \in \Gamma$  成立. 从而  $x \in \bigcap_{\alpha \in \Gamma} A_\alpha^c$ . 这就证明了  $\left( \bigcup_{\alpha \in \Gamma} A_\alpha \right)^c \subset \bigcap_{\alpha \in \Gamma} A_\alpha^c$ .

以上证明过程是可逆的. 因此反面的包含也成立.  $\square$

下面是几个通过已知集合以及集合运算表示待定集合的例子.

**例 1.1.4** 设  $\{f_n\}$  为定义于集合  $E$  上的函数列,  $x \in E$ . 则

$\{f_n(x)\}_{n=1}^\infty$  为有界序列  $\Leftrightarrow$  存在  $M \in \mathbf{R}_+$  使得  $|f_n(x)| \leq M$  对任意  $n$  成立. 从而

$$A = \{x \in E | f_n(x) \text{ 有界} \} = \bigcup_{M \in \mathbf{R}_+} \bigcap_{n=1}^\infty \{x \in E | |f_n(x)| \leq M\},$$

$$A^c = \{x \in E | f_n(x) \text{ 无界} \}.$$

**例 1.1.5** 设  $\{f_n\}_{n=1}^\infty$  为定义于集合  $E$  上的函数列, 同例 1.1.4, 可知  $f_n$  收敛于 0 的点构成的集合为

$$A = \{x \in E | \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0\} = \bigcap_{\varepsilon \in \mathbf{R}_+} \bigcup_{N=1}^\infty \bigcap_{n=N+1}^\infty \{x | |f_n(x)| < \varepsilon\},$$

$$A^c = \bigcup_{\varepsilon \in \mathbf{R}_+} \bigcap_{N=1}^\infty \bigcup_{n=N+1}^\infty \{x \in E | |f_n(x)| \geq \varepsilon\}.$$

**例 1.1.6** 设  $f$  为  $\mathbf{R}$  上的函数. 由连续函数的  $\varepsilon$ - $\delta$  语言可知  $f$  的连续点集合为

$$\begin{aligned} A &= \bigcap_{\varepsilon \in \mathbf{R}_+} \bigcup_{\delta \in \mathbf{R}_+} \{x \in \mathbf{R} | f((x - \delta, x + \delta)) \subset (f(x) - \varepsilon, f(x) + \varepsilon)\} \\ &= \bigcap_{m=1}^\infty \bigcup_{n=1}^\infty \left\{ x \in \mathbf{R} | f\left(\left(x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}\right)\right) \subset \left(f(x) - \frac{1}{m}, f(x) + \frac{1}{m}\right) \right\}. \end{aligned}$$

例 1.1.4~例 1.1.6 的讨论当中, 使用了由已知集合通过集合运算表示待研究集合的方法, 这一方法是实变函数论中的基本研究方法. 由上面几个例子的讨论可以看出, 集合的“并运算”相当于“存在一个”, “交运算”相当于“对所有的”, 而“补运算”相当于“否定”.

### 3. 集合的直积

如果  $A_i (i = 1, 2, \dots, n)$  为集合, 定义  $\prod_{i=1}^n A_i = A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$  为

$$\{(x_1, x_2, \dots, x_n) | x_i \in A_i, i = 1, 2, \dots, n\}.$$

$\prod_{i=1}^n A_i$  称为  $\{A_i\}$  的有限直积(笛卡儿直积).

类似地, 可以定义一系列集合  $A_i (i = 1, 2, \dots)$  的无限直积为

$$\prod_{i=1}^{\infty} A_i = \{(x_1, x_2, \dots) | x_i \in A_i, i = 1, 2, \dots\}.$$

当所有  $A_i$  相等时, 令  $A_i = A$ , 则上述有限和无限直积可分别简记为  $A^n$  以及  $A^\infty$ .

例如,  $\mathbf{R} \times \mathbf{R} = \mathbf{R}^2, \mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \mathbf{R} = \mathbf{R}^3, \mathbf{R}^\infty$  为全体实数序列构成的集合.

### 4. 映射

设  $X, Y$  为非空集合,  $f: X \rightarrow Y$  为一个对应法则, 即  $\forall x \in X$ , 有唯一的  $y = f(x) \in Y$  与之对应, 则称  $f$  为  $X$  到  $Y$  的一个映射.  $X$  到  $Y$  的映射全体用  $Y^X$  表示.

如果  $A \subset X, B \subset Y$ , 则

$$f(A) = \{f(x) | x \in A\} \text{ 和 } f^{-1}(B) = \{x \in X | f(x) \in B\}$$

分别称为  $A$  在  $f$  下的像和  $B$  在  $f$  下的原像(或逆像).  $f(X)$  称为  $f$  的值域.

如果当  $x_1 \neq x_2$  时,  $f(x_1) \neq f(x_2)$ , 则称  $f$  为单射; 如果对每个  $y \in Y$ , 有  $x \in X$  使得  $f(x) = y$ , 则称  $f$  为满射. 既单又满的映射称为双射.

#### 映射的基本性质

**命题 1.1.1** (1)  $A \subset f^{-1}(f(A)), f(f^{-1}(B)) \subset B$ .

(2)  $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2), f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$ .

(3)  $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2), f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$ .

(4)  $f^{-1}(B^c) = (f^{-1}(B))^c$ .

证明 (1) ~ (3) 由定义易证.

(4)  $\forall x \in X, x \in f^{-1}(B^c) \Leftrightarrow f(x) \in B^c \Leftrightarrow f(x) \notin B \Leftrightarrow x \notin f^{-1}(B) \Leftrightarrow x \in (f^{-1}(B))^c$ .

命题 1.1.1 是实变函数论中经常用到的映射性质, 应当熟练掌握.

设  $f: X \rightarrow Y, g: Y \rightarrow Z$  为映射, 则由  $h(x) = g(f(x))$  定义的映射称为  $f$  和  $g$  的复合映射, 记为  $g \circ f$ .

命题 1.1.2 对任意  $C \subset Z$ , 有  $(g \circ f)^{-1}(C) = f^{-1}(g^{-1}(C))$ .

## 5. 幂集和特征函数

设  $X$  为集合,  $\mathcal{P}(X) = \{A | A \subset X\}$  称为  $X$  的幂集, 它是由  $X$  的所有子集构成的集合.

一般地, 当  $X$  为有限集合时, 设  $X$  中有  $n$  个元素, 则  $\mathcal{P}(X)$  中含有  $2^n$  个元素. 例如, 若  $X = \{1, 2\}$ , 则  $\mathcal{P}(X) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, X\}$ .

设  $X$  为非空集合,  $A \subset X$ , 定义映射  $\chi_A$  如下:

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A; \\ 0, & x \notin A. \end{cases}$$

称  $\chi_A$  为  $A$  的特征函数.

令  $2 = \{0, 1\}$ , 则  $\chi_A$  可以看成  $X$  到  $2$  的映射, 用  $2^X$  表示  $X$  到  $2 = \{0, 1\}$  的映射全体构成的集合, 即  $\chi_A \in 2^X$ , 从而  $\rho(A) = \chi_A$  定义了一个映射  $\rho: \mathcal{P}(X) \rightarrow 2^X$ .

命题 1.1.3 对任意集合  $X$ , 上述映射  $\rho$  为双射.

证明 首先, 对任意  $A, B \subset X$ , 若  $A \neq B$ , 不妨设有  $x \in A \setminus B$ , 则  $x \in A, x \notin B$ , 从而  $\chi_A(x) = 1 \neq 0 = \chi_B(x)$ , 即  $\chi_A \neq \chi_B$ ,  $\rho$  为单射.

反之, 任给一个映射  $f: X \rightarrow 2$ , 易知  $f$  是  $A = \{x \in X | f(x) = 1\}$  的特征函数, 从而  $\rho$  为满射.  $\square$

## 6. 集合列的上下极限

设  $\{A_n\}_{n=1}^\infty$  为集合列, 则  $\{A_n\}_{n=1}^\infty$  的上极限定义为

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} A_n = \{x | x \in A_n \text{ 对无限个 } n \text{ 成立}\};$$

其下极限定义为

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} A_n = \{x | x \in A_n \text{ 当 } n \text{ 充分大时成立}\}.$$

由定义易知  $\liminf_{n \rightarrow +\infty} A_n \subset \limsup_{n \rightarrow +\infty} A_n$ .

当上下极限相等时, 称  $\{A_n\}$  收敛, 此时上下极限的公共值称为  $\{A_n\}$  的极限, 记为  $\lim_{n \rightarrow +\infty} A_n$ .

**例 1.1.7** 设  $A_{2n+1} = \left[0, 2 - \frac{1}{2n+1}\right]$ ,  $A_{2n} = \left[0, 1 + \frac{1}{2n}\right]$ ,  $n = 1, 2, \dots$ . 求  $\{A_n\}$  的上下极限.

我们来考察  $\mathbf{R}$  中哪些点在  $\{A_n\}$  的上下极限中.

(1) 当  $x \notin [0, 2)$  时, 因为  $x \notin A_n, n = 1, 2, \dots$ , 因此  $x \notin \limsup_{n \rightarrow +\infty} A_n$ ;

(2) 当  $x \in [0, 1]$  时,  $x \in A_n, n = 1, 2, \dots$ , 故  $x \in \liminf_{n \rightarrow +\infty} A_n$ ;

(3) 当  $x \in (1, 2)$  时, 由  $A_n$  的表达式可知,  $x \in A_{2n+1} = \left[0, 2 - \frac{1}{2n+1}\right]$  对充分大的  $n$  成立, 但是当  $n$  充分大时  $x \notin A_{2n} = \left[0, 1 + \frac{1}{2n}\right]$ , 故  $x \in \limsup_{n \rightarrow +\infty} A_n$  而  $x \notin \liminf_{n \rightarrow +\infty} A_n$ .

综上,  $\limsup_{n \rightarrow +\infty} A_n = [0, 2)$ , 而  $\liminf_{n \rightarrow +\infty} A_n = [0, 1]$ .

由上下极限的定义可知以下定理成立:

### 定理 1.1.2

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} A_m;$$

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m.$$

## 7. 单调集列

设  $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$  为集合列, 若该集合列满足  $A_n \subset A_{n+1}, n = 1, 2, \dots$ , 则称该集合列为单调上升集列. 类似地, 若集合列满足  $A_n \supset A_{n+1}, n = 1, 2, \dots$ , 则称其为单调下降集列.

下面用  $A_n \nearrow A$  表示集合列  $\{A_n\}$  单调上升收敛到集合  $A$ ; 同理,  $A_n \searrow A$  表示集合列  $\{A_n\}$  单调下降收敛到集合  $A$ .

**命题 1.1.4** 单调集列必收敛.

(1) 对单调上升集列,  $A_n \nearrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n (n \rightarrow +\infty)$ ;

(2) 对单调下降集列,  $A_n \searrow \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n (n \rightarrow +\infty)$ .

证明 以第一式为例. 因为  $\{A_n\}$  递增, 由定理 1.1.2, 有

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} A_m = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left( \bigcup_{m=1}^{\infty} A_m \right) = \left( \bigcup_{m=1}^{\infty} A_m \right);$$

同理

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \limsup_{n \rightarrow +\infty} A_n.$$

故结论成立.  $\square$

例 1.1.8 设  $f(x)$  为  $E$  上的有限函数. 令  $F_n = \left\{ x \in E \mid |f(x)| \geq \frac{1}{n} \right\}$ , 则  $\{F_n\}$  单调增加, 且

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} F_n = \{x \in E \mid f(x) \neq 0\} = \{x \in E \mid |f(x)| > 0\}.$$

若令  $E_n = \{x \in E \mid |f(x)| > n\}$ , 则  $\{E_n\}$  单调递减, 且

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} E_n = \emptyset.$$

但是当  $f(x)$  可取  $\pm\infty$  作为值时, 则有

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} E_n = \{x \in E \mid f(x) = \pm\infty\}.$$

例 1.1.8 的结论后文多处用到, 请牢记.

## 1.2 基数的概念

对含有有限个元素的集合而言, 如果想知道该集合的元素个数, 只需要逐个地数集合中的元素即可. 也就是将一个有限集合的元素和某个自然数集合  $\{1, 2, \dots, n\}$  对应起来. 从而任意两个有限集合都可以比较元素多少. 从理论来说这一方法是可行的, 尽管当元素个数很大时这一方法很难实现. 比如一卡车沙子的沙粒个数就无法数清. 另一方面, 给定两个有限集合, 从理论上说, 总可以利用配对 (映射) 的方法确定两个集合是包含元素个数相同还是哪个集合包含的元素更多.

当研究无限集合时, 该如何比较两个无限集合的元素个数, 或者说该如何定义无限集合的元素个数, 从而说明两个不同的无限集合是包含的元素个数相

同, 还是其中一个包含的元素更多? 例如, 自然数集  $\mathbf{N}$ , 整数集  $\mathbf{Z}$ , 有理数集  $\mathbf{Q}$  还有实数集  $\mathbf{R}$  都是无限集, 它们的元素个数有无区别?

需要说明的是, 在数学分析等课程中, 并没有考虑不同无限集合的元素个数问题, 当时只是认为无限集合都包含无限个元素而已.

一个很自然的想法是对两个无限集合  $A$  和  $B$  而言, 如果  $A \subset B$ , 但是  $A \neq B$ , 则称  $A$  比  $B$  包含的元素个数少, 且  $B \setminus A$  中有多少元素就称  $B$  比  $A$  大多少. 这种思想也就是所谓“整体大于部分”. 对有限集合而言这种定义方式毫无问题, 但是对互相不包含的无限集合元素个数问题无法讨论. 因为对无限集合而言, 如果这样定义无限集合元素多少, 就会出现大量因为互不包含而不可比较元素个数的集合.

下面来看一个例子.  $A = \mathbf{Z}_+, B = \{n | n = 2k + 1, k = 0, 1, \dots\}, C = \{n | n = 2k, k = 1, 2, \dots\}$ . 按照上面的观点,  $A$  比  $B$  以及  $C$  元素多应该毫无疑问, 但是  $B$  和  $C$  根本无法比较元素多少, 从集合的表示方式似乎可以认为  $B$  和  $C$  包含元素个数相同. 因为直观上,  $B$  是全体奇数而  $C$  中元素为  $B$  中元素加 1. 也就是  $f(n) = n + 1$  可建立  $B$  和  $C$  之间的双射! 但是, 按照双射的观点,  $A$  和  $B$  的元素之间也可以建立起来双射:  $f(n) = 2n - 1$ . 这样说明  $A$  和  $B$  的元素个数相同! 看来上述观点会引起很大困惑, 难以讨论下去.

事实上, 早在 1638 年, 伽利略就注意到了上述现象, 他注意到  $\mathbf{Z}_+$  与  $S = \{1^2, 2^2, \dots, n^2, \dots\}$  之间存在一有趣现象: 一方面,  $S$  为  $\mathbf{Z}_+$  的真子集, 另一方面, 二者之间存在双射! 这就是历史上著名的“伽利略困惑”.

经过长期摸索, 人们发现通过确定两个集合之间是否存在双射来定义两个集合是否包含元素个数相同最为合理.

**定义 1.2.1** 如果两个集合  $A, B$  之间存在一个双射, 则称它们**对等**, 记为  $A \sim B$ .

**例 1.2.1** 从前面的讨论我们可以看出,  $\mathbf{Z}_+ \sim B = \{n | n = 2k, k = 1, 2, \dots\}$ .

**例 1.2.2** 设  $A$  为有限集, 则  $A = \emptyset$ , 或者  $A$  和某个  $\{1, 2, \dots, n\}$  对等.

**例 1.2.3** 设  $a < b$ , 则  $(0, 1) \sim (a, b)$ ,  $(0, 1) \sim (-\infty, +\infty)$ .

**证明** 只需令  $\varphi_1(x) = a + (b - a)x$ ,  $\varphi_2(x) = \tan\left(\pi x - \frac{\pi}{2}\right)$  即可.  $\square$

**注 1.2.1** 无限集合可以和它的真子集对等. 后面会看到, 这个性质是有限集合和无限集合最本质的差异.

**定理 1.2.1** 集合间的对等有如下性质:

- (1) (自反性)  $A \sim A$ .
- (2) (对称性) 若  $A \sim B$ , 则  $B \sim A$ .
- (3) (传递性) 若  $A \sim B, B \sim C$ , 则  $A \sim C$ .

**证明** 证明是显然的, 从略. □

**定义 1.2.2** 如果两个集合  $A$  和  $B$  对等, 则称  $A$  和  $B$  有相同的**基数**, 记为  $\overline{A} = \overline{B}$ .

**定义 1.2.3** 当  $A \not\sim B$ , 但是有  $B^* \subset B$  使得  $A \sim B^*$ , 则称  $\overline{A}$  小于  $\overline{B}$ , 记为  $\overline{A} < \overline{B}$  或者  $\overline{B} > \overline{A}$ .

和实数的情形相仿,  $\overline{A} \leq \overline{B}$  表示  $\overline{A} = \overline{B}$  或者  $\overline{A} < \overline{B}$ . 同样,  $\overline{A} \geq \overline{B}$  表示  $\overline{A} = \overline{B}$  或者  $\overline{A} > \overline{B}$ .

为了更好地理解下面的定理 1.2.2 的证明, 我们给出集合论中的一条基本公理——选择公理.

**选择公理(Axiom of Choice)** 设  $\{A_\alpha\}_{\alpha \in \Gamma}$  为以  $\Gamma$  为指标集的两两不交的非空集族. 则存在集合  $A \subset \bigcup_{\alpha \in \Gamma} A_\alpha$ , 使得对任意  $\alpha \in \Gamma$ ,  $A \cap A_\alpha$  为单点集.

**注 1.2.2** 选择公理只是说明集合  $A$  的存在性, 它实际上就是从每个非空集合  $A_\alpha$  中选出一个元素来构成一个集合, 由于对一般集族而言, 不存在确定的方法在每一个集合中选出一个元素, 因而这一公理被称为**选择公理**.

**定理 1.2.2** 设  $A, B$  为集合.

- (1) 如果存在单射  $f: A \rightarrow B$ , 则  $\overline{A} \leq \overline{B}$ .
- (2) 如果存在满射  $f: A \rightarrow B$ , 则  $\overline{A} \geq \overline{B}$  (此时称  $B$  为  $A$  的商集).

**证明** (1) 只需令  $B^* = f(A)$  即可.

(2) 对任意  $y \in B$ , 取  $x_y \in A$  使得  $f(x_y) = y$ , 令  $A^* = \{x_y | y \in B\}$ , 则  $A^* \subset A$ , 且易知  $f|_{A^*}: A^* \rightarrow B$ , 其中  $f|_{A^*}$  表示  $f$  在子集  $A^*$  上的限制. 从而  $\overline{A} \geq \overline{B}$ . □

**注 1.2.3** 为了完成定理 1.2.2(2) 的证明, 需要“构造”集合  $A^*$ . 它实际上是在一族两两不交的非空集族  $\{f^{-1}(y) | y \in B\}$  中的每个集合  $f^{-1}(y)$  中“选出一个代表元素来构成一个集合  $A^*$ , 由于找不到一个确定的方法选出代表元素, 因此不可避免的需要用到选择公理.