序与格论基础

姚　卫　路玲霞　编著

清華大学出版社
北　京

内 容 简 介

本书系统介绍序与格论的基本知识，内容涉及序与格基础、Frame 理论、Domain 理论、完全分配格和逻辑代数等。全书共分 7 章: 第 1 章讲解偏序集与格的基础知识，第 2 章是 Galois 伴随和 Galois 连接理论，第 3 章讲述 Heyting 代数，第 4 章介绍 Frame 与拓扑表示定理，第 5 章介绍具有理论计算机背景的 Domain 与连续格理论，第 6 章系统介绍完全分配格理论，第 7 章是具有模糊逻辑背景的剩余格理论。

本书可作为序拓扑、序代数、模糊数学、粗糙集与概念格等数学方向和信息科学相关专业的研究生教材，也可供数学与信息科学等相关专业的高年级本科生、教师与研究人员阅读参考。

图书在版编目（CIP）数据

序与格论基础 / 姚卫, 路玲霞编著.—北京：清华大学出版社，2023.11
ISBN 978-7-302-64341-8

Ⅰ. ①序…　Ⅱ. ①姚… ②路…　Ⅲ. ①格-理论　Ⅳ. ①O153.1

中国国家版本馆 CIP 数据核字（2023）第 144619 号

责任编辑：陈　明
封面设计：傅瑞学
责任校对：欧　洋
责任印制：刘海龙

出版发行：清华大学出版社
网　　址：https://www.tup.com.cn, https://www.wqxuetang.com
地　　址：北京清华大学学研大厦 A 座　　邮　　编：100084
社 总 机：010-83470000　　邮　　购：010-62786544
投稿与读者服务：010-62776969, c-service@tup.tsinghua.edu.cn
质量反馈：010-62772015, zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
印 装 者：三河市铭诚印务有限公司
经　　销：全国新华书店
开　　本：170mm×230mm　　印　张：11　　字　　数：203 千字
版　　次：2023 年 11 月第 1 版　　印　　次：2023 年 11 月第 1 次印刷
定　　价：49.00 元

产品编号：074191-01

序
FOREWORD

世间万物互有差异，同时相关。这种关联，尤其是非对称性，往往可以用某种序关系来表示，比如实数之间的大小关系、整数之间的整除关系、集合之间的包含关系等。序关系广泛存在于物理学、化学、理论计算机科学及人文科学里，在数学各分支里更是到处都有序的踪迹。所以序结构被法国 Bourbaki 学派定为数学的三大母结构之一，这一点的确没有言过其实。

具有一般性且广泛使用的序结构是偏序集。正如拓扑学和代数学那样，一些更特殊的偏序集的提出和研究常常先于一般的偏序集，比如 Boole 代数、分配格、Heyting 代数、完全分配格等。相对于纯粹的一般偏序集的研究，有关特殊的偏序集，及序结构与其他诸如拓扑、逻辑和代数结构关系的研究要深刻丰富得多。由于研究 Hilbert 空间算子的需要，M. Stone 由任一 Boole 代数出发构造了一个拓扑空间，并进一步刻画了这种空间（现在被称作 Stone 空间）；反之，给定一个 Stone 空间，其全体开闭集构成一个 Boole 代数。由此建立了 Boole 代数与 Stone 空间之间的范畴对偶等价，这样每个抽象的 Boole 代数都同构于由某些集合构成的具体的格。当给定了一个任意的拓扑空间，其全体开集构成一个特殊的完备格，这个完备格携带了原空间的很多重要信息。人们发现在某些情况下，起关键作用的就是那些开集，而不只是集合中的点，由此导致了无点化拓扑或 Frame 的提出与研究。另外，对任一偏序集，人们可以定义各种不同的所谓的内蕴拓扑，如区间拓扑、序拓扑、Scott 拓扑和 Lawson 拓扑等。Scott 拓扑是由 Domain 理论创始人 Dana Scott 提出来的，其中一个经典结论是一个偏序集是连续的当且仅当其 Scott 开集格是完全分配的。完全分配格也被用于不变子空间的研究，如 P.R. Halmos 已证明：若 Hilbert 空间的一族闭子空间构成一个原子的 Boole 代数，则它是反射的（即是一族算子的公共不变子空间）。后来，W.E. Longstaff 把这结论推广到了完全分配格。此外，人们还证明了一个拓扑空间是 C-空间当且仅当其开集格是完全分配的。完全分配格也是模糊集理论的基本框架，其作用类似于实数集中的单位区间。基于逼近思想而建立的 Domain 理论是个较新的数学方向，它以序结构为基础，连接计算机科学、拓扑学、代数学、逻辑学和范畴论等枢纽学

科分支。近年来，由于国内更多学者的参与，Domain 理论在数个较新的方向都有了长足发展，有关这方面的研究日新月异，新的结果不断涌现。

序与格是数学中广泛出现的基本结构，了解和掌握序与格理论对理解其他领域及其联系十分重要。本书作者多年来活跃在与序结构相关的研究领域，并作出了重要贡献。本书参考文献列出了国内外已出版的涉及序结构的主要专著，使读者可以更全面地了解序与格论的相关理论知识。作者比较完整地呈现了该领域几个重要方面的基础理论和一些最新的研究成果，涉及面广，视角新颖。序结构及相关理论的研究突飞猛进，需要不断有新的专著出版，为读者及时呈现最前沿的研究成果。本书可为高年级大学生、研究生及相关专业人士提供又一个新的关于序与格理论的重要教科书和参考文献。

撰写数学类专业图书不仅需要对所涉及知识有整体、全面、深刻的理解，更需要极大的耐心、毅力和辛苦的坚持。但如果能让广大读者从中受益，让更多同行学习和了解这方面的知识，作者的辛苦一定是值得的。衷心祝贺作者！

南洋理工大学 赵东升

2022 年 6 月

前　言
PREFACE

法国 Bourbaki 学派认为，数学特别是纯数学是研究抽象结构的理论，现代数学有三大母结构: 代数结构、序结构、拓扑结构。从单结构的初始公理体系出发通过添加公理条件的方式可以得到各种特殊结构，从多种结构出发通过设置公理体系之间的协调性条件可以得到各种多结构系统。

> *At the center of our universe are found the great types of structures, of which the principal ones were called the mother-structures: algebraic structures, ordered structures and topological structures. Each of these types has the smallest number of axioms, and by enriching with supplementary axioms, it comes a harvest of new consequences. Those of multiple structures involve two or more of the great mother-structures simultaneously, combined organically by one or more axioms which set up a connection between them.*①

序结构是带有偏序关系的集合，格结构是带有某种完备性的序结构。序与格论起源于 19 世纪末群论中的一个问题: 设 A, B, C 是 Abel 群 G 的子群，问 A, B, C 通过加法运算和交运算可以生成多少个互不相同的子群? 换成格序术语，即由三个元素生成的自由模格具有多少个元素②？ 1900 年，R. Dedekind 回答了这个问题[12]。20 世纪 30 年代，G. Birkhoff 和 O. Ore 开始系统研究序与格论。由 Birkhoff 撰写的世界上第一部格论专著 *Lattice Theory* 于 1940 年出版，后来又分别在 1948 年和 1967 年再版。序与格论及其相关领域重要的英文书目主要有:

– *Lattice Theory* (Birkhoff, 1940, 1948, 1967) [5]
– *Lattice Theory* (Grätzer, 1971) [27]
– *Distributive Lattices* (Balbes, Dwinger, 1974) [3]
– *General Lattice Theory* (Grätzer, 1978, 1998) [27]
– *A Compendium on Continuous Lattices* (Gierz, et. al., 1980) [23]

---

① 摘自 [Bourbaki N. L’architecture des mathématiques, 1948] 的英文版 [Bourbaki N. The architecture of mathematics. Amer. Math. Monthly, 1950, 57(4): 221–232]。

② 群的正规子群之集构成模格，见文献 [10] 中例 4.6（5）。

- *A Course in Universal Algebra* (Burris, Sankappanavar, 1981) [8]
- *Stone Spaces* (Johnstone, 1982) [40]
- *Introduction to Lattices and Order* (Davey, Priestley, 1990, 2002) [10]
- *Continuous Lattices and Domains* (Gierz, et. al., 2003) [24]
- *Lattices and Ordered Algebraic Structures* (Blyth, 2005) [6]
- *Lattices and Ordered Sets* (Roman, 2008) [68]
- *Frames and Locales* (Picado, Pultr, 2012) [60]
- *Spectral Spaces* (Dickmann, Schwartz, Tressl, 2019) [14]

中文书目主要有 (按年份排序, 同一年份的按作者姓名字母排序):

- 《格论》(中山正(董克诚译), 1964) [101]
- 《格论基础》(胡长流, 宋振明, 1990) [36]
- 《拓扑分子格理论》(王国俊, 1990) [83]
- 《格论初步》(张杰, 1990) [99]
- 《Frame 与连续格》(郑崇友, 樊磊, 崔宏斌, 1994, 2000) [100]
- 《模糊集与剩余格》(方进明, 2012) [19]
- 《一般格论基础》(李海洋, 2012) [47]
- 《格论导引》(方捷, 2014) [18]
- 《Quantale 理论基础》(韩胜伟, 赵彬, 2016) [30]
- 《序与拓扑》(徐晓泉, 2016) [90]
- 《概率计量逻辑及其应用》(周红军, 2016) [102]

中国的序与格论及其相关领域的学术研究发展基本上可分为三个阶段:

第一阶段: 解放初期的萌芽阶段。解放后的中国满目疮痍、百废待兴，学习和研究资料十分匮乏。1964 年，河北大学董克诚教授将日本学者中山正的《格论: 格的代数理论》翻译为中文，成为格论的第一部中文书籍。

第二阶段: 20 世纪 90 年代的发展阶段。这是改革开放的十余年后，离第一部中文格论书籍的出版已过去近三十年。伴随着各种新思潮的涌入，Bourbaki 学派的结构主义思想深深地影响了中国数学工作者，20 世纪 60 年代末 70 年代初提出的 Domain 理论中格序结构与拓扑结构相融合的内容及研究方法更是引起了中国学者极大的兴趣。1990 年全国共出版了三部格论著作，1994 年 Frame 和 Domain 理论方面的专著《Frame 与连续格》的出版将中国序与格论研究推向一个高度，该书在 2000 年进行了修订，添加了很多国内学者的重要工作。格论领域内的数学工作者从此拥有了开展学习和研究的丰富资料，为后续发展奠定了坚实的基础。

第三阶段: 21 世纪的繁荣阶段。20 世纪 90 年代后，中国学者学习和积淀了二十多年，逐步形成了若干个在国际上具有一定影响力的研究团队，研究水平和成果得到了全面发展和提升。这一阶段的特征是，各研究团队结合自身特点和优

势，将格序结构作为基础结构进行了不同方面、不同层面和不同方向的深入研究，期间共有五部专著出版，特别是 2016 年就有三部，从此格论研究达到了一个新的高度。

编写本书的目的是:（1）阐述序与格等相关内容，加强相关概念和结论的代数性的表述，为国内学者和研究生的学习和研究提供素材；（2）细致处理诸多细节，使得理论体系更具严密性①；（3）强调格论在其他方向的应用，加入部分与粗糙集理论、形式概念分析相关的格论知识；（4）将完全分配格和剩余格列为重要内容，单独成章，为模糊数学理论的研究者提供全面的基础知识；（5）将作者近年来的相关研究成果纳入其中，充实格论内容。读者可能会注意到本书在结构和内容的安排上与 B.A. Davey 和 H. Priestley 的 *Introduction to Lattices and Order* 具有一定的相似性，此书也是我们非常推崇的序与格论著作，建议初学者将此书选为入门学习的英文读本。

现代数学发展到今天，任何一个单一结构的数学理论在纵向方面的发展都已经相对比较完善，所以逐步向多结构交叉，或者与其他数学分支甚至与其他领域进行横向交叉研究将是今后数学研究的主旋律。本书以格序结构为主体，将它与代数结构、拓扑结构的内在联系作为主线贯穿全书，逐步展开序与格论的相关基础理论知识的讲述。下面分章节介绍全书内容。

第 1 章给出偏序集、格与完备格等基本结构的定义，介绍序同态与格同态等保结构映射、分配格与 Boole 代数等常见格结构、理想与滤子等重要子结构，以及交素元与并素元等特殊元素。

第 2 章介绍 Galois 伴随和 Galois 连接。Galois 伴随和 Galois 连接都可以看作互逆映射对的一种泛化或推广，但这两个名词在许多文献中存在混用现象，实际上它们是两个不同的概念。Galois 连接是一种逆序的映射对，其历史渊源可以追溯到法国数学家 E. Galois 开创的 Galois 理论，其偏序集框架下的确切定义是由 O. Ore 在 1944 年提出的[55]。而 Galois 伴随则是一种保序的映射对，首先由 J. Schmidt 在 1953 年提出[71]。特别指出，由 T.S. Blyth 和 M.F. Janowitz 发展的剩余理论[7] 是 Galois 伴随的另一种表现形式。无论是 Galois 伴随还是 Galois 连接，都在代数学、序与格论、Domain 理论、形式概念分析和逻辑学等学科分支中具有重要的应用[13]。

第 3 章是 Heyting 代数，它由荷兰数学家 A. Heyting 在 1930 年引入[32]，是经典命题演算的 Tarski-Lindenbaum 代数的推广，或直觉主义演算的 Tarski-

① 如诸表示定理中的分配格范畴实际上是指有界分配格和保界格同态构成的范畴，这一点大部分格论著作都没有指出。

Lindenbaum 代数。在数学方面，Heyting 代数是 Boole 代数的一般化，曾被称作伪 Boole 代数或 Brouwer 格[44]。从范畴论的角度来看，一个偏序集是 Heyting 代数当且仅当它作为范畴是笛卡儿闭的[52]。本章介绍 Heyting 代数的基本性质及其与 Boole 代数的关系、滤子与同余关系之间的一一对应、相对极大滤子等特殊滤子，以及 Heyting 代数的同态和直积等内容。

第 4 章介绍 Frame 与拓扑表示定理。拓扑结构和格序结构之间有着非常自然的联系，从拓扑结构出发，如果我们“忘掉”基础集，则开集族构成一个特殊的完备格，另外还可以利用开集族诱导基础集上的预序关系（即特殊化序）；反过来，从格序结构出发，我们可以在上面定义很多内蕴拓扑，如序拓扑、Alexandrov 拓扑和 Scott 拓扑等。20 世纪 30 年代末期，M.H. Stone 关于 Boole 代数与分配格的拓扑表示定理出现后[75-77]，人们开始广泛关注和重视这方面内容的研究。1938 年，H. Walman 提出可以利用格论方法来研究拓扑空间的性质[80]；1957 年，C. Ehresmann 认为具有某种分配性的格本身就可以作为一种广义拓扑空间来研究[15]，其中 frame 是替代拓扑空间的开集格的较直接而有效的格结构。后来的研究表明，这种融合拓扑结构和格序结构于一体的研究是极具特色的，并逐步形成了“序与拓扑”的稳定研究方向。P.T. Johnstone 的著作 *Stone Spaces* 是对该领域的研究工作的系统总结[40]，郑崇友、樊磊和崔宏斌的专著《Frame 与连续格》则是该领域内国内学生和研究人员的必读书目[100]，徐晓泉的专著《序与拓扑》侧重论述该领域的一些最新进展[90]。

第 5 章介绍基本的 Domain 结构和连续格理论。Domain 理论由图灵奖得主 D.S. Scott 于 20 世纪 70 年代开创[72,73]，来源于两个不同的背景: 一个是理论计算机中的函数式语言的研究；另一个是纯数学方面的研究。在理论计算机科学的语义学特别是指称语义学的研究中，基本思想是在输入集和输出集上基于所含信息量的多少赋予序结构，构成定向完备偏序集；而作为程序的映射则是 Scott 连续映射，Scott 拓扑恰是使得映射的 Scott 连续性和拓扑连续性等价的那个拓扑结构。在纯数学方面，20 世纪 70 年代中期，J.D. Lawson，K.H. Hofmann 和 A.R. Stralka 等人发现，连续格等价于紧的 Lawson 交半格，从而可以从拓扑代数的角度研究 Domain 理论[34,45]。1980 年，Scott 等 6 位作者共同撰写了 Domain 理论的第一部专著 *A Compendium of Continuous Lattices*，2003 年再版的 *Continuous Lattices and Domains* 一书将后来 20 多年的许多研究成果收入其中。J. Goubault-Larrecq 的专著 *Non-Hausdorff Topology and Domain Theory* 以广义度量空间为基本结构对 Domain 理论进行了专题式研究[26]。现如今，Domain 理论已被广泛应用到拓扑学、逻辑学、积分理论、动力系统等研究领域中。

第 6 章全面讲述完全分配格及等价刻画。完全分配格是集代数特征、序特征和拓扑特征于一体的一种数学结构。其早期研究主要集中在代数结构和序结构方面[4,64-66]，后来随着 Domain 理论的兴起，人们发现完全分配格实际上是连续 dcpo 上的 Scott 拓扑的开集格[33,46]，再后来王国俊先生更是把完全分配格当作一种特殊的无点化的拓扑结构，直接将它作为研究对象，创立了拓扑分子格理论[83]。另外，在模糊数学中，完全分配格通常被选作赋值格[48,82]，它在一些概念的表述过程和一些结论的证明方法中所起的作用类似于单位区间 [0,1]，因此以 [0,1] 为赋值格的模糊数学结构的相关内容和结论大多可以被推广到以完全分配格为赋值格的框架下。本章讲述完全分配格的基本概念和各种刻画方法，包括三角小于刻画、极小集刻画、Domain 式刻画、拓扑式刻画和关系型刻画等。

第 7 章介绍模糊逻辑的公共代数结构——剩余格。剩余格是由 M. Ward 和 R.P. Dilworth 在 1939 年为研究交换环的理想格而引入的一种代数结构[86]，它是子结构命题逻辑的语义代数[20]。模糊逻辑的语义代数，如 MTL-代数、BL-代数、MV-代数、R_0-代数和 Heyting 代数等都是特殊的剩余格。关于剩余格的名称在很多文献中不太统一，本书指最狭义的剩余格，即有界的整的交换的剩余格。剩余格和完备剩余格因其完善的逻辑背景和丰富的演算能力，被广泛应用到模糊数学等相关领域的研究中。本章介绍剩余格基本理论及 MTL-代数、可除剩余格、正则剩余格和 MV-代数等特殊剩余格。

本书中常有一些结论被“显然”和“容易证明”等词一笔带过，主要目的是要给读者留下发挥的空间。但我们也建议读者将更多的精力放在这些地方，不要轻易“放过”它们，同时争取把每章后面的习题都做一遍。如此，会收到非同一般的学习效果.

本书的成稿离不开作者学习和科研道路上的三位导师: 陕西师范大学李生刚教授、赵彬教授、北京理工大学史福贵教授，特别是 2002 年赵彬教授在担任副校长期间，百忙之中每周抽出固定时间系统地完整地讲授了格论和 Domain 理论，引领作者进入了这绚丽多彩的格论世界。特别感谢新加坡南洋理工大学赵东升教授为本书作序，为本书增色添彩。本书写作过程中得到了湖南大学李庆国教授、扬州大学徐罗山教授、广州大学李海洋教授、中国海洋大学岳跃利教授、盐城师范学院奚小勇教授、北京理工大学庞斌副教授、北京邮电大学沈冲博士、烟台大学王凯博士等的支持和帮助，他们在阅读书稿时提出了很多建设性的意见和建议。本书部分内容作为讲义在河北科技大学和南京信息工程大学格论学习班上讲授过，感谢王荣欣老师、赵蕾老师，博士后石毅，博士生张光旭、吴国俊，硕士生陶久鑫、陈晓庆、陈烨、杨俊、韩新月、孙佳、张亚宁，本科生任蜚白和张珊等，感谢北

京理工大学教师和学生团队，他们在学习过程中发现了书稿中的很多错误。特别感谢吴国俊同学详细地通读了全书，指出了书中各种类型的问题。感谢南京信息工程大学数学与统计学院学院办公室宋润琦老师在我们查找和阅读法文材料时给予的帮助。同时也非常感谢清华大学出版社高效而细致的工作。

感谢国家自然科学基金项目 (12231007，11871189) 对本书的资助。本书近一半内容是第一作者任职于河北科技大学期间完成的，在此感谢河北科技大学特别是理学院领导、同事和学生多年来的支持与帮助，感谢南京信息工程大学数学与统计学院的领导和同事的支持与鼓励，本书成果可由两校共享。

限于作者的水平，书中的不妥之处乃至谬误在所难免，希望各位专家与读者提出宝贵意见。有任何问题可发送邮件至作者邮箱[①]，作者不胜感激。

作　者

2022 年 1 月

① yaowei@nuist.edu.cn。

目　录
CONTENTS

第 1 章
CHAPTER 1
偏序集与格

“序”，顾名思义是“次序、顺序”的意思，它存在于我们生活中的方方面面，诸如 $1, 2, 3, \cdots$，大与小，高与低，胖与瘦，美与丑等。通俗来讲，序描述的是对象之间的某种大小关系，在数学上可以用满足一定条件的二元关系来表示。偏序集，又称为部分序集，是与全序集相对应的一个概念，指只有部分元素之间才有次序或顺序关系的集合；而格则是指具有某种完备性的偏序集。

本章我们给出偏序集、格与完备格等基本结构的定义，介绍序同态与格同态等保结构映射、分配格与 Boole 代数等常见格结构、理想与滤子等重要子结构，以及交素元与并素元等特殊元素。

1.1　偏序集

定义 1.1.1　设 P 是一个非空集合，$\leqslant$ 是 P 上的一个（二元）关系。如果 $\leqslant$ 满足

（O1） **自反性**（reflexivity）：$\forall x \in P,\ x \leqslant x$；

（O2） **传递性**（transitivity）：$\forall x, y, z \in P$，若 $x \leqslant y$，$y \leqslant z$，则 $x \leqslant z$，

则称 $\leqslant$ 为 P 上的一个**预序**（preorder）或**拟序**（quasi-order），称偶对 $(P, \leqslant)$ 为**预序集**（preordered set）或**拟序集**（quasi-ordered set）。

如果 P 上的预序 $\leqslant$ 还满足

（O3） **反对称性**（anti-symmetry）：$\forall x, y \in P$，若 $x \leqslant y$ 且 $y \leqslant x$，则 $x = y$，

则称 $\leqslant$ 为 P 上的一个**偏序**（partial order），称偶对 $(P, \leqslant)$ 为**偏序集**（partially ordered set, 简写为poset）。

本书以偏序集为基本研究对象，即使有些定义和结论可以建立在更一般的预序集的框架下，一般也不再特别指出。

例 1.1.1　（1）实数集 $\mathbb{R}$、有理数集 $\mathbb{Q}$、整数集 $\mathbb{Z}$、自然数集 $\mathbb{N}$ 和非负整数集 $\mathbb{N}^*$ 在通常的小于等于关系下都构成偏序集。

（2）用 $|$ 表示自然数集 $\mathbb{N}$ 上的整除关系，即 $m|n$ 表示 m 整除 n，则 $(\mathbb{N}, |)$

是一个偏序集。

（3）在实数集 $\mathbb{R}$ 上定义二元关系 $\preceq$ 如下: $x \preceq y \Longleftrightarrow [x] \leqslant [y]$ ($[\cdot]$ 表示实数的整数部分)，则 $(\mathbb{R}, \preceq)$ 是一个预序集，但不是偏序集。

（4）设 X 是一个非空集合，$\varnothing \neq \mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(X)$，则 $(\mathcal{S}, \subseteq)$ 是一个偏序集。

（5）设 G 是一个群，$\mathrm{Sub}(G)$ 是 G 的所有子群的全体，则 $(\mathrm{Sub}(G), \subseteq)$ 是一个偏序集。

（6）设 Σ^* 是由 $0,1$ 构成的有限字符串的全体，定义 $a \leqslant b$ 当且仅当 a 是 b 的前缀 ($\forall a, b \in \Sigma^*$)，则 $(\Sigma^*, \leqslant)$ 是一个偏序集。

（7）设 P 是一个偏序集，X 是一个非空集合。定义 P^X 上的二元关系 $\leqslant$ 为: $f \leqslant g \Longleftrightarrow f(x) \leqslant g(x)$ $(\forall x \in X)$，则 $\leqslant$ 是一个偏序，称为 P^X 上的**逐点序**（pointwise order）。

（8）设 $I(\mathbb{R}) = \{[a,b] \mid a \leqslant b,\ a, b \in \mathbb{R}\}$，定义

$$[a_1, b_1] \sqsubseteq [a_2, b_2] \Longleftrightarrow [a_2, b_2] \subseteq [a_1, b_1],$$

则 $(I(\mathbb{R}), \sqsubseteq)$ 是一个偏序集，称 $\sqsubseteq$ 为 $\mathbb{R}$ 上的**区间序**（interval order）或**信息序**（information order）。

（9）设 $(X, \mathcal{O}(X))$ 是一个拓扑空间，定义

$$\leqslant_{\mathcal{O}(X)} = \{(x,y) \in X \times X \mid x \in \{y\}^-\},$$

则 $\leqslant_{\mathcal{O}(X)}$ 是 X 上的一个预序，称为 X 的**特殊化序**（specialization order）。记 $\Theta(X, \mathcal{O}(X)) = (X, \leqslant_{\mathcal{O}(X)})$，或简记为 $\Theta(X)$。容易证明，$\leqslant_{\mathcal{O}(X)}$ 是偏序当且仅当 X 是 T_0 空间。

设 $(P, \leqslant)$ 是一个偏序集，Q 是 P 的一个非空子集。记

$$\leqslant_Q = \{(x,y) \in Q \times Q \mid x \leqslant y\},$$

则 $\leqslant_Q$ 是 Q 上的偏序，称为 Q 在 P 中的**继承序**（induced order）或**限制序**（restricted order），称 $(Q, \leqslant_Q)$ 为 $(P, \leqslant)$ 的**子偏序集**（subposet）。比如，$[0,1]$ 是 $\mathbb{R}$ 的子偏序集；设 $n \in \mathbb{N}$，记 $\boldsymbol{n} = \{0, 1, 2, \cdots, n-1\}$ 为 $\mathbb{N}^*$ 的子偏序集，如 $\mathbf{2} = \{0, 1\}$。

在偏序集中，我们经常将 $x \leqslant y$ 写作 $y \geqslant x$；如果 $x \leqslant y$ 不成立，则记作 $x \not\leqslant y$ 或 $y \not\geqslant x$；如果 $x \leqslant y$ 但 $x \neq y$，则记作 $x < y$ 或 $y > x$，称 x 小于 y 或 y 大于 x；如果既有 $x \not\leqslant y$ 又有 $y \not\leqslant x$，则称 x 和 y 互相**平行**（parallel），记作 $x \parallel y$。

在偏序集 P 中，若对于任意两个元素 x, y 都有 $x \leqslant y$ 或 $y \leqslant x$ 成立，则称 P 为一个**链**（chain）或**全序集**（totally ordered set）；如果任意两个元素 x, y 都有 $x \leqslant y$ 蕴含 $x = y$，则称 P 是一个**反链**（antichain）。

设 $(P, \leqslant)$ 是一个偏序集，定义

$$\leqslant^{op} = \{(x, y) \in P \times P \mid y \leqslant x\},$$

则 $(P, \leqslant^{op})$ 也是一个偏序集，记作 $(P, \leqslant)^{op}$ 或 P^{op}，称为 $(P, \leqslant)$ 的**对偶偏序集**（dual poset）。

给定一个关于偏序集的陈述 Φ，其对偶陈述 Φ^{op} 是将 Φ 中的 $\leqslant$ 和 $\geqslant$ 互换的陈述。如果 Φ 是一个概念（结论），则称 Φ^{op} 为 Φ 的对偶概念（结论）。

对偶原理（duality principle）　如果陈述 Φ 对所有偏序集都成立，那么其对偶陈述 Φ^{op} 也对所有偏序集都成立。

定义 1.1.2　设 P 是一个偏序集，$A \subseteq P$。

（1）如果对于任意的 $x \in A, y \in P$ 都有 $x \leqslant y$ 蕴含 $y \in A$，则称 A 为**上集**（upper set）；

（2）如果对于任意的 $x \in A, y \in P$ 都有 $y \leqslant x$ 蕴含 $y \in A$，则称 A 为**下集**（lower set）。

分别记 P 的所有下集和上集为 $\mathcal{D}(P)$ 和 $\mathcal{U}(P)$，它们都是 P 上的 Alexandrov 拓扑。

设 P 是一个偏序集，$A \subseteq P$。令

$$\uparrow A = \{x \in P \mid \exists a \in A \text{ s.t. } a \leqslant x\},$$

$$\downarrow A = \{x \in P \mid \exists a \in A \text{ s.t. } x \leqslant a\}。$$

则 $\uparrow A$（相应地，$\downarrow A$）是包含 A 的最小的上集（相应地，下集）。当 A 是单点集 $\{x\}$ 时，分别将 $\uparrow\{x\}$ 和 $\downarrow\{x\}$ 简记为 $\uparrow x$ 和 $\downarrow x$。集族 $\{\downarrow x \mid x \in P\}$（相应地，$\{\uparrow x \mid x \in P\}$）是拓扑 $\mathcal{D}(P)$（相应地，$\mathcal{U}(P)$）的最小基。

定义 1.1.3　设 P 是一个偏序集，$x, y \in P$。如果 $x < y$，且对于任意的 $z \in P$，$x \leqslant z \leqslant y$ 蕴含 $z = x$ 或 $z = y$，则称 y **覆盖**（cover）x，或 x 被 y 覆盖，或 y 是 x 的一个覆盖，记作 $x \prec y$。

一般来说，偏序集可以用 **Hasse 图**（Hasse graph）来描述: 对于某偏序集，我们用点表示其元素，将具有覆盖关系的两个点用直线段或曲线段连接起来，较小的元素对应的点位于低处，较大的元素对应的点位于高处，互相平行的元素对应

的点尽可能地处于同一高度。如偏序集 $\mathbb{N}$, $(\{1,2,3,4,6,12\},|)$，$(\mathcal{P}(\{x,y,z\}),\subseteq)$, $M_n=\{0,a_1,a_2,\cdots,a_n,1\}$ 的 Hasse 图如图 1.1 所示。

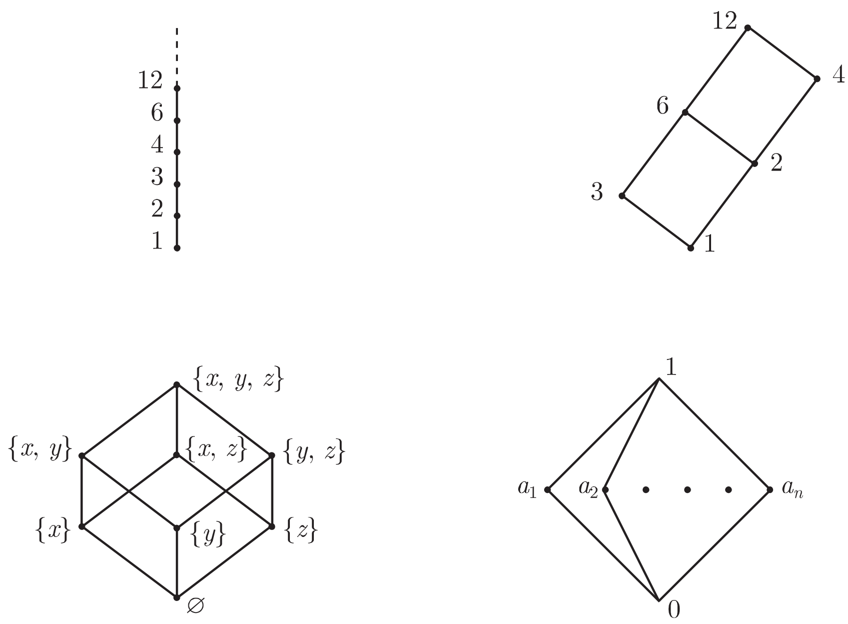

图 1.1　四个偏序集的 Hasse 图

设 P 是一个偏序集，$a\in P$。若 a 小于任意其他的元素，则称 a 为 P 的**最小元**（the smallest/least element）或**底元**（bottom element），记作 0_P 或简写为 0；若 a 大于任意其他的元素，则称 a 为 P 的**最大元**（the greatest/largest element）或**顶元**（top element），记作 1_P 或简写为 1。有最大元和最小元的偏序集称为**有界偏序集**（bounded poset）。若对于任意的 $x\in P$ 都有 $a\leqslant x$ 蕴含 $a=x$，则称 a 为 P 的**极大元**（maximal element）；若对于任意的 $x\in P$ 都有 $x\leqslant a$ 蕴含 $a=x$，则称 a 为 P 的**极小元**（minimal element）。显然，最大元（相应地，最小元）一定是极大元（相应地，极小元），但反之不然。设 S 是 P 的一个子偏序集，将 S 的极大元（相应地，极小元）之集记作 $\max(S)$（相应地，$\min(S)$）。注意，$\max(S)$（相应地，$\min(S)$）有可能是空集。如果 S 有最大元（相应地，最小元），则将该最大元（相应地，最小元）记作 $\mathrm{Max}(S)$（相应地，$\mathrm{Min}(S)$），此时有 $\mathrm{Max}(S)\subseteq\max(S)$（相应地，$\mathrm{Min}(S)\subseteq\min(S)$）。

例 1.1.2　在图 1.2 表示的两个偏序集中，偏序集 P 有极大元 b_1,b_2，有极小元 a_1,a_2，但没有最大元和最小元；偏序集 Q 有最大元 d，有极小元 c_1,c_2,c_3，但没有最小元。

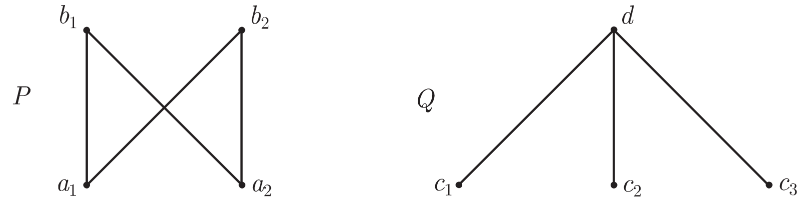

图 1.2　偏序集中的最大（小）元和极大（小）元

定义 1.1.4　设 $\{(P_i, \leqslant_i)\}_{i\in I}$ 是一族偏序集，在笛卡儿积 $\prod_i P_i$ 上定义关系 $\leqslant$ 如下:

$$(x_i)_{i\in I} \leqslant (y_i)_{i\in I} \iff x_i \leqslant_i y_i \ (\forall i \in I)。$$

易证 $\leqslant$ 是 $\prod_i P_i$ 上的一个偏序，称为其上的**逐点序**（pointwise order）[①]，偶对 $(\prod_i P_i, \leqslant)$ 称为 $\{(P_i, \leqslant_i)\}_{i\in I}$ 的**直积**（direct product）。

例 1.1.3　图 1.3 是两组偏序集的直积。

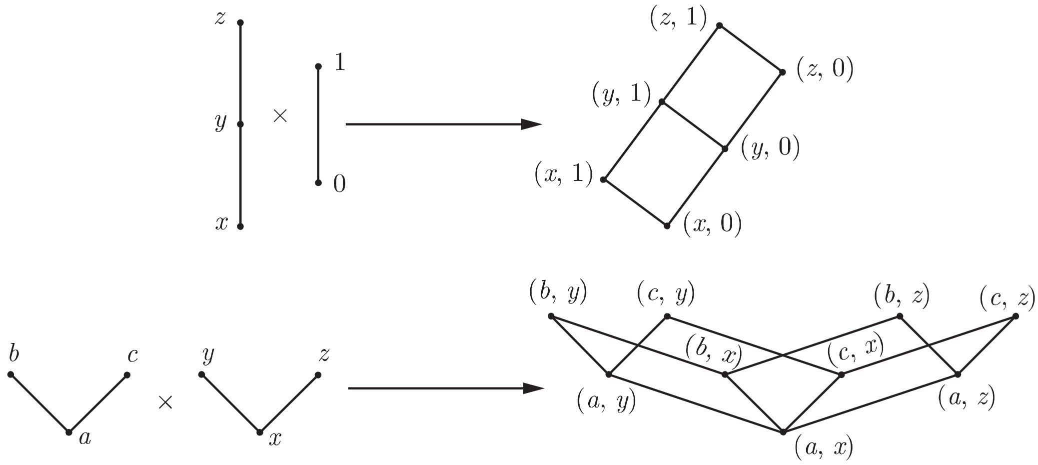

图 1.3　偏序集的直积

设 P 是一个偏序集，$A \subseteq P$。定义

$$A^u = \{x \in P \mid A \subseteq \downarrow x\},$$

$$A^l = \{x \in P \mid A \subseteq \uparrow x\}。$$

① 此处名称同例 1.1.1（7）中的逐点序，理由见定理 1.3.2和定理 1.3.3。

称 A^u 为 A 的**上界集**（upper bound set），其元素称为 A 的**上界**（upper bound）；称 A^l 为 A 的**下界集**（lower bound set），其元素称为 A 的**下界**（lower bound）。请注意，$\varnothing^u = \varnothing^l = P$。

下面的定理证明比较直接，留给读者。

定理 1.1.1 设 P 是一个偏序集，$A, B \subseteq P$，则

（1） $A \subseteq B \Longrightarrow B^u \subseteq A^u$，$B^l \subseteq A^l$；

（2） $A \subseteq A^{ul} \cap A^{lu}$；

（3） $A^u = A^{ulu}$，$A^l = A^{lul}$。

本节最后我们来看格论中非常重要的“Zorn 引理”，它和选择公理相互等价。因其证明需要用到超限归纳法，有一定难度，这里只进行陈述而不给出证明。

Zorn 引理 设 P 是一个偏序集，如果 P 中每个非空链都有上界，则 P 必有极大元。

1.2 格与完备格

实数集 $\mathbb{R}$ 中子集的上、下确界的概念可以被推广到一般的偏序集的框架下。

定义 1.2.1 设 P 是一个偏序集，$S \subseteq P$，$a \in P$。

（1）如果 a 是 S 的最小的上界，即 a 是 S^u 中的最小元，则称 a 为 S 的**上确界**（least upper bound）或**并**（join），记作 $a = \sup S$ 或 $a = \bigvee S$。

（2）如果 a 是 S 的最大的下界，即 a 是 S^l 中的最大元，则称 a 为 S 的**下确界**（greatest lower bound）或**交**（meet），记作 $a = \inf S$ 或 $a = \bigwedge S$。

可以验证，偏序集中子集的上、下确界如果存在，则它们都是唯一的。特别地，如果空集 $\varnothing$ 有上确界（相应地，下确界），则其上确界（相应地，下确界）是最小元 0（相应地，最大元 1）。

注 1.2.1 设 P 是一个偏序集，$S \subseteq P$，$a \in P$。

（1） $a \in S^u$ 等价于 a 是 S 的上界，$a \in S^{ul}$ 等价于 a 小于等于 S 的任意上界，故 $\bigvee S$ 存在当且仅当 $S^u \cap S^{ul}$ 恰为单点集 $\{\bigvee S\}$。

（2） $a \in S^l$ 等价于 a 是 S 的下界，$a \in S^{lu}$ 等价于 a 大于等于 S 的任意下界，故 $\bigwedge S$ 存在当且仅当 $S^l \cap S^{lu}$ 恰为单点集 $\{\bigwedge S\}$。

定义 1.2.2 设 L 是一个偏序集。

（1）如果对于任意的 $x, y \in L$ 都有 $\bigvee\{x, y\}$ 存在，则称 L 为**并半格**（join-semilattice）。

（2）如果对于任意的 $x,y\in L$ 都有 $\bigwedge\{x,y\}$ 存在，则称 L 为**交半格**（meet-semilattice）。

（3）如果 L 既是并半格又是交半格，则称 L 为**格**（lattice）。

在偏序集 L 中，当子集 $\{x,y\}\subseteq L$ 有上确界（相应地，下确界）时，我们常将其记作 $x\vee y$（相应地，$x\wedge y$）。请注意，定义 1.2.2 中允许 x 与 y 为同一个元素，显然 $\bigvee\{x,x\}=x=\bigwedge\{x,x\}$。

定理 1.2.1　设 L 是一个格，则对于任意的 $a,b,c\in L$，运算 $\vee$ 和 $\wedge$ 满足

（L1）幂等律: $a\vee a=a$, $a\wedge a=a$;

（L2）交换律: $a\vee b=b\vee a$, $a\wedge b=b\wedge a$;

（L3）结合律: $(a\vee b)\vee c=a\vee(b\vee c)$，$(a\wedge b)\wedge c=a\wedge(b\wedge c)$;

（L4）吸收律: $a\vee(a\wedge b)=a$, $a\wedge(a\vee b)=a$。

换言之，$\wedge$ 和 $\vee$ 是 L 上的满足吸收律的两个交换幂等半群运算。

例 1.2.1　（1）每个链都是格，比如实数集、有理数集和自然数集等。

（2）设 $(X,\mathcal{O}(X))$ 是一个拓扑空间，则 $(\mathcal{O}(X),\subseteq)$ 是一个格；幂集 $\mathcal{P}(X)$ 作为 X 上的离散拓扑也是一个格。

（3）$(\mathbb{N},|)$ 是一个格，对于任意的 $m,n\in\mathbb{N}$，$m\vee n$ 是 m,n 的最小公倍数，$m\wedge n$ 是 m,n 的最大公约数。

定理 1.2.2　设 L 是一个偏序集，则

（1）L 是格当且仅当 L 的任意非空有限子集有上确界和下确界；

（2）L 是格当且仅当 L^{op} 是格。

定理 1.2.3　非空集合 L 可作为一个格当且仅当存在 L 的两个运算 $\otimes,\oplus$ 使得

（1）$(L,\otimes)$ 和 $(L,\oplus)$ 都是交换幂等半群；

（2）L 满足吸收律: $x\otimes(x\oplus y)=x=x\oplus(x\otimes y)$ $(\forall x,y\in L)$。

证明　必要性: 令 $\otimes=\wedge$，$\oplus=\vee$，即为定理 1.2.1。

充分性: 定义序关系 $\leqslant$ 为: $x\leqslant y$ 当且仅当 $x=x\otimes y$（当且仅当 $y=x\oplus y$，由（2）易得）。由 $\otimes$ 的幂等性，自反性成立；如果 $x\leqslant y\leqslant z$，则 $x=x\otimes y=x\otimes(y\otimes z)=(x\otimes y)\otimes z=x\otimes z$，传递性成立；如果 $x\leqslant y\leqslant x$，则 $y=x\oplus y=y\oplus x=x$，反对称性成立。故 $(L,\leqslant)$ 是一个偏序集。

下证 $x\otimes y=x\wedge y$, $x\oplus y=x\vee y$。事实上，由（2）易证 $x\otimes y$ 是 $\{x,y\}$ 的一个下界；设 z 也是 $\{x,y\}$ 的一个下界，即 $z=z\otimes x=z\otimes y$，则 $z=z\otimes z=(z\otimes x)\otimes(z\otimes y)=(z\otimes z)\otimes(x\otimes y)=z\otimes(x\otimes y)$，从而 $z\leqslant x\otimes y$。这说明 $x\otimes y$ 是 $\{x,y\}$ 的下确界。类似方法可证，$x\oplus y$ 是 $\{x,y\}$ 的上确界。□

定理 1.2.3 说明除了序的方式外，我们还可以用代数的方式描述格结构，将其看作代数系统来研究。

定义 1.2.3 设 L 是一个格，S 是 L 的一个非空子集。

（1）如果对于任意的 $x, y \in S$ 都有 $x \wedge y$, $x \vee y \in S$，则称 S 为 L 的**子格**（sublattice）。

（2）如果 L 是有界格，S 是 L 的子格且 $0, 1 \in S$，则称 S 为 L 的**保界子格**（bound-inherited sublattice）。

这里要避免采用"S 的有限子集的上确界和下确界都含于 S"的方式定义子格，因为空子集可看作一个特殊的有限子集，但是推理过程中常常被人"遗忘"，从而导致论述不严密。

例 1.2.2 如图 1.4，在格 $L = \{0, a, b, c, d, e, f, 1\}$ 中，$S_1 = \{0, b, e, 1\}$ 是 L 的保界子格，$S_2 = \{0, a, c, e\}$ 是 L 的子格但不是保界子格，$S_3 = \{0, a, c, 1\}$ 在继承序下是一个格，但不是 L 的子格。

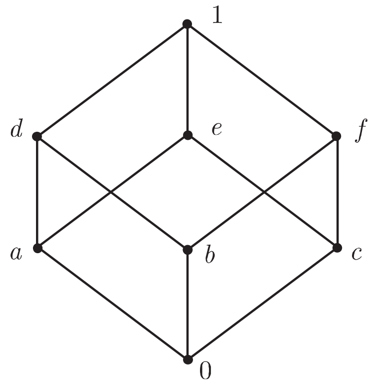

图 1.4 格 $L = \{0, a, b, c, d, e, f, 1\}$

定义 1.2.4 设 L 是一个偏序集，如果 L 的每个子集（包括空集）都有上确界和下确界，则称 L 为一个**完备格**（complete lattice）。

例如，$[0, 1]$ 和任意非空集合的幂集都是完备格，但实数集 $\mathbb{R}$ 不是。显然，在一个完备格 L 中，L 本身作为子集具有上、下确界，其上确界为最大元 1，下确界为最小元 0。再次强调，空子集 $\varnothing$ 也有上、下确界，其上确界为 0，下确界为 1。

定理 1.2.4 设 L 是一个偏序集，则下列条件等价:

（11） L 是完备格；

（12） L^{op} 是完备格；

（21） L 的每个子集都有上确界；

（22） L 有最小元 0 且每个非空子集都有上确界；

（31） L 的每个子集都有下确界；

（32） L 有最大元 1 且每个非空子集都有下确界。

证明　显然，（K1）等价于（K2）（$K=1,2,3$），且如果（11）和（22）相互等价，那么由对偶原理，（12）和（32）也相互等价。由于（11）$\Longleftrightarrow$（22）+（32），下面只需证（22）蕴含（32）。

（22）$\Longrightarrow$（32）: L 的上确界即为 L 的最大元 1。如果 A 是 L 的一个非空子集，由于 L 有最小元 0，A^l 是非空集，从而存在上确界 $a=\bigvee A^l$。下证 $a=\bigwedge A$。事实上，对于任意的 $x\in A$，x 是 A^l 的一个上界，从而 $a\leqslant x$。由 x 的任意性，a 是 A 的一个下界，从而 $a\in A^l$，故 $a=\mathrm{Max}(A^l)=\bigwedge A$。 □

推论 1.2.1　在偏序集 P 中，对于子集 A，如果 $\bigvee A$ 存在，则 $\bigwedge A^u$ 也存在，且 $\bigvee A=\bigwedge A^u=\mathrm{Min}(A^u)$；如果 $\bigwedge A$ 存在，则 $\bigvee A^l$ 也存在，且 $\bigwedge A=\bigvee A^l=\mathrm{Max}(A^l)$。

定义 1.2.5　设 P,Q 是两个偏序集，$f:P\longrightarrow Q$ 是一个映射。

（1）如果对于任意的 $x,y\in P$ 都有 $x\leqslant y$ 蕴含 $f(x)\leqslant f(y)$，则称 f 为**保序的**（order-preserving 或 monotone 或 isotone），或称 f 为从 P 到 Q 的**序同态**（order-homomorphism）；

（2）如果对于任意的 $x,y\in P$ 都有 $x\leqslant y$ 蕴含 $f(y)\leqslant f(x)$，则称 f 为**逆序的**（order-inversing 或 antitone）。

定理 1.2.5（Knaster-Taski 不动点定理）　设 L 是一个完备格。若 $f:L\longrightarrow L$ 是一个保序映射，则 f 有最大和最小不动点。

证明　令

$$A=\{x\in L\mid x\leqslant f(x)\},$$

则 $A\neq\varnothing$（因为 $0\in A$）。记 $a=\bigvee A$。对于任意的 $x\in A$，有 $x\leqslant a$，从而 $x\leqslant f(x)\leqslant f(a)$。由 x 的任意性，$a\leqslant f(a)$。由 f 的保序性，$f(a)\leqslant f(f(a))$，故 $f(a)\in A$，从而 $f(a)\leqslant a$。因此，$f(a)=a$。如果 $f(y)=y$，则 $y\in A$，从而 $y\leqslant a$，这说明 a 是 f 的最大不动点。由对偶原理，f 有最小不动点 $b=\bigwedge\{x\in L\mid f(x)\leqslant x\}$。 □

定义 1.2.6　设 P 是一个偏序集，$f:P\longrightarrow P$ 是一个自映射。如果

（C1） **保序性**（monotonicity）: $x\leqslant y$ 蕴含 $f(x)\leqslant f(y)$ $(\forall x,y\in P)$；

（C2） **增值性**（increasement）: $x\leqslant f(x)$ $(\forall x\in P)$；

（C3） **幂等性**（idempotency）: $f(f(x))=f(x)$ $(\forall x\in P)$，

则称 f 为 P 上的一个**闭包算子**（closure operator）。

定义 1.2.7 设 P 是一个偏序集，$g: P \longrightarrow P$ 是一个自映射。如果

（I1）保序性: $x \leqslant y$ 蕴含 $g(x) \leqslant g(y)$ $(\forall x, y \in P)$;

（I2）**减值性**（decreasement）: $g(x) \leqslant x$ $(\forall x \in P)$;

（I3）幂等性: $g(g(x)) = g(x)$ $(\forall x \in P)$,

则称 g 为 P 上的一个**内部算子**（interior operator）。

设 $h: P \longrightarrow P$ 是偏序集 P 上的一个自映射，记 $\mathrm{Im}h = \{h(x) \mid x \in P\}$，则当 h 满足幂等性时，$\mathrm{Im}h$ 恰是 h 的不动点构成的集合。满足幂等性的保序自映射有时也称为**投射**（projection）。

定理 1.2.6 设 L 是一个完备格，$f: L \longrightarrow L$ 是一个闭包算子，则 $\mathrm{Im}f$ 也是完备格，其中对于 $\mathrm{Im}f$ 的任意非空子集 A，都有 $\bigwedge_f A = \bigwedge A$, $\bigvee_f A = f(\bigvee A)$，这里 $\bigvee_f, \bigwedge_f$ 分别表示 $\mathrm{Im}f$ 中子集的并和交。

证明 由 f 的幂等性知 $\mathrm{Im}f$ 是 f 的不动点集，由定理 1.2.5 知，$\mathrm{Im}f$ 是一个有界偏序集。设 A 是 $\mathrm{Im}f$ 的一个非空子集，令 $a = \bigwedge A$，若 $a \in \mathrm{Im}f$，则 $\bigwedge_f A = \bigwedge A$，从而由定理 1.2.4 知 $\mathrm{Im}f$ 是完备格，下证之。实际上，我们有

$$f(a) = f\left(\bigwedge A\right) \leqslant \bigwedge\{f(x) \mid x \in A\} = \bigwedge A = a。$$

由 f 是闭包算子知，$a = f(a)$，从而 $a \in \mathrm{Im}f$。下证 $f(\bigvee A)$ 是 A 在 $\mathrm{Im}f$ 中的上确界。显然，$f(\bigvee A)$ 是 A 在 $\mathrm{Im}f$ 中的一个上界。设 b 也是 A 在 $\mathrm{Im}f$ 中的一个上界，则 $\bigvee A \leqslant b$，从而 $f(\bigvee A) \leqslant f(b) = b$。 □

推论 1.2.2 设 L 是一个完备格，$g: L \longrightarrow L$ 是一个内部算子，则 $\mathrm{Im}g$ 也是完备格，其中对于 $\mathrm{Im}g$ 的任意非空子集 A，都有 $\bigvee_g A = \bigvee A$, $\bigwedge_g A = g(\bigwedge A)$。

定义 1.2.8 设 P 是一个偏序集，$S \subseteq P$。

（1）如果对任意的 $x \in P$ 都有 $x = \bigvee(S \cap {\downarrow}x)$，则称 S 为 P 的**并生成集**（join-generating subset），或称 P **可由**S **并生成**（join-generated by S），或称 S 为 P 的**并稠密子集**（join-dense subset）。

（2）如果对任意的 $x \in P$ 都有 $x = \bigwedge(S \cap {\uparrow}x)$，则称 S 为 P 的**交生成集**（meet-generating subset），或称 P **可由**S **交生成**（meet-generated by S），或称 S 为 P 的**交稠密子集**（meet-dense subset）。

（3）如果 S 在 P 中既是并稠密子集又是交稠密子集，则称 S 为 P 的**稠密子集**（dense subset）。

例 1.2.3　（1） $\mathbb{Q}$ 同时是 $\mathbb{R}$ 的并生成集和交生成集。

（2）在图 1.4 中，$\{a,b,c\}$ 是 L 的并生成集，$\{d,e,f\}$ 是 L 的交生成集。

1.3　序同构与格同构

定义 1.3.1　设 P,Q 是两个偏序集，$f:P\longrightarrow Q$ 是一个映射。

（1）如果对于任意的 $x,y\in P$ 都有 $x\leqslant y$ 当且仅当 $f(x)\leqslant f(y)$，则称 f 为从 P 到 Q 的**序嵌入**（order-embedding），记作 $f:P\hookrightarrow Q$；

（2）如果 f 是一个序嵌入的满射，则称 f 为一个**序同构**（order-isomorphism）或称 P 与 Q 序同构，记作 $P\cong Q$。

注 1.3.1　（1）每一个序嵌入都是单射，故在定义序嵌入和序同构时没有专门强调“单射”这一条件。

（2）一般地，一个保序映射 $f:P\longrightarrow Q$ 即使是双射，它的逆映射 $f^{-1}:Q\longrightarrow P$ 也未必保序，如图 1.5 所示。

（3）如果 $f:P\longrightarrow Q$ 是一个序同构，则其逆映射 $f^{-1}:Q\longrightarrow P$ 也是一个序同构。

（4）偏序集 P,Q 是序同构的当且仅当存在保序映射 $\varphi:P\longrightarrow Q$ 和 $\psi:Q\longrightarrow P$ 使得 $\varphi\circ\psi=\mathrm{id}_Q$，$\psi\circ\varphi=\mathrm{id}_P$。

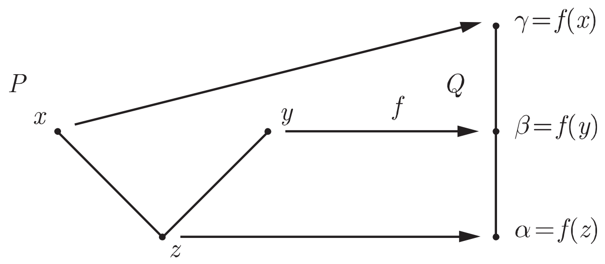

图 1.5　f 保序但 f^{-1} 不保序

定理 1.3.1　设 P,Q 是两个有限偏序集，$f:P\longrightarrow Q$ 是双射，则下列条件等价:

（1） f 是一个序同构；

（2） $x<y$ 当且仅当 $f(x)<f(y)$；

（3） $x\prec y$ 当且仅当 $f(x)\prec f(y)$。

证明　（1）$\Longrightarrow$（2）: 如果 $x<y$，则必有 $f(x)<f(y)$；否则 $f(x)=f(y)$，从而 $x=y$，矛盾。由于 f^{-1} 也是序同构，同样方法，如果 $f(x)<f(y)$，那么

$x < y$。

(2)$\Longrightarrow$(3): 如果 $x \prec y$,则 $f(x) < f(y)$。设存在 $c \in Q$ 使得 $f(x) \leqslant c \leqslant f(y)$,则 $x \leqslant f^{-1}(c) \leqslant y$,由 $x \prec y$ 知 $x = f^{-1}(c)$ 或 $y = f^{-1}(c)$,于是 $f(x) = c$ 或 $f(y) = c$,这说明 $f(x) \prec f(y)$。同样方法,如果 $f(x) \prec f(y)$,那么 $x \prec y$。

(3)$\Longrightarrow$(1): 设 $x \leqslant y$。如果 $x = y$,则 $f(x) = f(y) \leqslant f(y)$;如果 $x < y$,则存在 $z_1, \cdots, z_n$ 使得 $x \prec z_1 \prec \cdots \prec z_n \prec y$,从而 $f(x) \prec f(z_1) \prec \cdots \prec f(z_n) \prec f(y)$,故 $f(x) \leqslant f(y)$。同样方法,如果 $f(x) \leqslant f(y)$,那么 $x \leqslant y$。 □

推论 1.3.1 两个有限偏序集是序同构的当且仅当它们具有相同的 Hasse 图。

很多时候,我们常把幂集 $\mathcal{P}(X)$ 写成 2^X,然而从严格的角度来说这是有问题的。实际上,$\mathcal{P}(X)$ 是 X 的所有子集的全体,而 2^X 应该写成 $\mathbf{2}^X$,它是从 X 到偏序集 $\mathbf{2} = \{0, 1\}$ 的映射的全体。而 $\mathcal{P}(X)$ 和 $\mathbf{2}^X$ 并不直接相等,应是序同构的两个偏序集。

定理 1.3.2 设 X 是一个集合。定义 $\varphi : \mathcal{P}(X) \longrightarrow \mathbf{2}^X$ 为: $\forall x \in X$,

$$\varphi(A)(x) = \begin{cases} 1, & x \in A; \\ 0, & x \notin A, \end{cases}$$

则 φ 是序同构。

证明 设 $A, B \subseteq X$,则

$$\begin{aligned} \varphi(A) \leqslant \varphi(B) &\Longleftrightarrow \varphi(A)(x) \leqslant \varphi(B)(x)\ (\forall x \in X) \\ &\Longleftrightarrow x \in A \text{ 蕴含 } x \in B\ (\forall x \in X) \\ &\Longleftrightarrow A \subseteq B, \end{aligned}$$

这说明 φ 是序嵌入。另外,对于任意的 $p \in \mathbf{2}^X$,令 $A_p = \{x \in X \mid p(x) = 1\}$,则 $\varphi(A_p) = p$,故 φ 是满射。因此,φ 是序同构。 □

实际上,$\mathbf{2}^X$ 中的元素也可以理解为由 0 和 1 构成的 $|X|$ 维向量,用 $\mathbf{2}^{|X|}$ 来表示,于是有下面定理。

定理 1.3.3 设 X 是一个集合,定义 $\psi : \mathbf{2}^X \longrightarrow \mathbf{2}^{|X|}$ 为: $\forall p \in \mathbf{2}^X$,

$$(\psi(p))_x = p(x)\ (\forall x \in X),$$

则 ψ 是序同构。

证明 设 $p, q \in \mathbf{2}^X$,

$$\begin{aligned} \psi(p) \leqslant \psi(q) &\Longleftrightarrow (\psi(p))_x \leqslant (\psi(q))_x\ (\forall x \in X) \\ &\Longleftrightarrow p(x) \leqslant q(x)\ (\forall x \in X) \\ &\Longleftrightarrow p \leqslant q, \end{aligned}$$

这说明 ψ 是序嵌入。又显然 ψ 是满射，因此 ψ 是序同构。 $\square$

定义 1.3.2　设 $f: L \longrightarrow M$ 是两个格之间的一个映射。

（1）如果对于任意的 $x, y \in L$ 都有

$$f(x \vee y)=f(x) \vee f(y),\ f(x \wedge y)=f(x) \wedge f(y),$$

则称 f 为**格同态**（lattice homomorphism）。

（2）如果 $f: L \longrightarrow M$ 是有界格之间的一个格同态，且 $f(0)=0,\ f(1)=1$，则称 f 为**保界格同态**（bound-preserving lattice homomorphism）。

定义 1.3.3　设 $f: L \longrightarrow M$ 是两个完备格之间的一个映射。

（1）如果对于任意的 $S \subseteq L$ 都有 $f(\bigvee S)=\bigvee f(S)$，则称 f 为**保并映射**（join-preserving mapping）。

（2）如果对于任意的 $S \subseteq L$ 都有 $f(\bigwedge S)=\bigwedge f(S)$，则称 f 为**保交映射**（meet-preserving mapping）。

（3）如果 f 既保并又保交，则称 f 为**完备格同态**（complete lattice homomorphism）。

显然，如果 $f: L \longrightarrow M$ 是完备格同态，那么 $f(0)=0,\ f(1)=1$，从而完备格同态一定是保界格同态。

注 1.3.2　设 $f: L \longrightarrow M$ 是一个格同态，如果 f 还是双射，则称 f 为**格同构**（lattice isomorphism）；同样，设 $f: L \longrightarrow M$ 是一个完备格同态，如果 f 还是双射，则称 f 为**完备格同构**（complete lattice isomorphism）。虽然有格同构和完备格同构的概念，但是这里我们并不将它们单独列为定义，因为当 L, M 都是格时，$f: L \longrightarrow M$ 是格同构等价于 f 是序同构；当 L, M 都是完备格时，$f: L \longrightarrow M$ 是完备格同构等价于 f 是序同构。

1.4　分配格与 Boole 代数

定理 1.4.1　设 L 是一个格，则下面两个有限分配律相互等价:

（D1） $\forall x, y, z \in L$，$x \wedge(y \vee z)=(x \wedge y) \vee(x \wedge z)$；

（D2） $\forall x, y, z \in L$，$x \vee(y \wedge z)=(x \vee y) \wedge(x \vee z)$。

证明　（D1）$\Longrightarrow$（D2）：设 $x, y, z \in L$，则

$$\begin{aligned}(x\vee y)\wedge(x\vee z)&=[(x\vee y)\wedge x]\vee[(x\vee y)\wedge z]\\&=x\vee[(x\wedge z)\vee(y\wedge z)]\\&=[x\vee(x\wedge z)]\vee(y\wedge z)\\&=x\vee(y\wedge z)。\end{aligned}$$

同理可证 (D2)$\Longrightarrow$(D1)。 □

定义 1.4.1 设 L 是一个格。如果 L 满足定理 1.4.1 中（D1）或（D2），则称 L 为**分配格**（distributive lattice）。

例 1.4.1 （1）每个链都是分配格。

（2） $(\mathbb{N},|)$ 是分配格。

（3）设 $(X,\mathcal{O}(X))$ 是一个拓扑空间，则 $(\mathcal{O}(X),\subseteq)$ 是分配格。

定理 1.4.2（Birkhoff 判别定理） 设 L 是一个格，则 L 是分配格当且仅当 L 不含有形如 M_3 或 N_5 的子格。

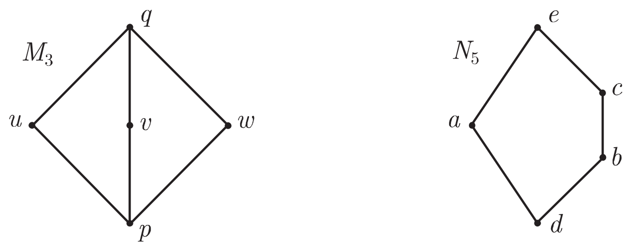

图 1.6 M_3 和 N_5

证明 由于 M_3 和 N_5 都不满足分配律，故必要性是显然的。充分性的证明过程较复杂，具体证明过程可参见文献 [18]。这里罗列一下基本思路。

第一步: 证明 L 是**模格**（modular lattice），即 L 满足

（**模律**）$x\leqslant z$ 蕴含 $x\vee(y\wedge z)=(x\vee y)\wedge z\ (\forall x,y,z\in L)$。

否则，存在 $x\leqslant z$ 使得 $x\vee(y\wedge z)<(x\vee y)\wedge z$。令

$$a=y,\ b=x\vee(y\wedge z),\ c=(x\vee y)\wedge z,\ d=y\wedge z,\ e=x\vee y,$$

则 $\{d,a,b,c,e\}$ 构成形如 N_5 的子格。

第二步: 证明 L 是分配格，否则可假设 L 是一个非分配的模格，则存在 $x,y,z\in L$ 使得 $(x\wedge y)\vee(x\wedge z)<x\wedge(y\vee z)$。令

$$\begin{aligned} p &= (x \wedge y) \vee (y \wedge z) \vee (z \wedge x), \\ u &= [x \wedge (y \vee z)] \vee (y \wedge z), \\ v &= [y \wedge (z \vee x)] \vee (z \wedge x), \\ w &= [z \wedge (x \vee y)] \vee (x \wedge y), \\ q &= (x \vee y) \wedge (y \vee z) \wedge (z \vee x), \end{aligned}$$

则 $\{p,u,v,w,q\}$ 构成形如 M_3 的子格。 □

定理 1.4.3 设 L 是一个格，则 L 是分配格当且仅当

$$z \wedge x = z \wedge y,\ z \vee x = z \vee y \Longrightarrow x = y\ (\forall x,y,z \in L)。$$

证明 必要性: 设 $x,y,z \in L$ 满足 $z \wedge x = z \wedge y$, $z \vee x = z \vee y$，则

$$\begin{aligned} x &= x \wedge (x \vee z) = x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z) \\ &= (x \wedge y) \vee (y \wedge z) = y \wedge (x \vee z) = y \wedge (y \vee z) = y。 \end{aligned}$$

充分性: 如果 L 不是分配格，则由 Birkhoff 判别定理，L 含有形如 M_3 或 N_5 的子格。如图 1.6 所示，在 M_3 中，$u \wedge v = p = u \wedge w$，$u \vee v = q = u \vee w$，但 $v \neq w$；在 N_5 中，$a \wedge b = d = a \wedge c$，$a \vee b = e = a \vee c$，但 $b \neq c$，都与假设矛盾。因此，L 是分配格。 □

定义 1.4.2 设 L 是一个有界格，$x \in L$。如果存在 $y \in L$ 使得

$$x \wedge y = 0,\ x \vee y = 1,$$

则称 y 为 x 的**补元**（complement）。如果 L 中的每个元素都有补元，则称 L 为**有补格** （complemental lattice）。

注 1.4.1 补元是相互的，但不一定唯一，图 1.6 的格 M_3 中，u,v,w 互为补元。

定理 1.4.4 如果 L 是一个有界分配格，则 L 中元素的补元（如果存在）唯一。

证明 设 b,c 是 a 的补元，则

$$b = b \wedge 1 = b \wedge (a \vee c) = (b \wedge a) \vee (b \wedge c) = 0 \vee (b \wedge c) = b \wedge c,$$

这说明 $b \leqslant c$。同理，$c \leqslant b$。因此，$b = c$。 □

定理 1.4.5 设 L 是一个有界分配格，a',b' 分别为 a,b 的补元，则

$$(a \vee b)' = a' \wedge b',\ (a \wedge b)' = a' \vee b'。$$

证明

$$(a \vee b) \vee (a' \wedge b') = [(a \vee b) \vee a'] \wedge [(a \vee b) \vee b'] = 1 \wedge 1 = 1,$$

$$(a \vee b) \wedge (a' \wedge b') = [a \wedge (a' \wedge b')] \vee [b \wedge (a' \wedge b')] = 0 \vee 0 = 0,$$

则 $a' \wedge b'$ 是 $a \vee b$ 的一个补元。由补元的唯一性，$(a \vee b)' = a' \wedge b'$。同样方法可证，$(a \wedge b)' = a' \vee b'$。 □

定义 1.4.3 有补分配格称为 **Boole 代数**（Boolean algebra）或 **Boole 格**（Boolean lattice），常记作 $(B;')$。

例 1.4.2 （1）集合 X 的幂集格 $\mathcal{P}(X)$ 是一个 Boole 代数，子集 A 的补元就是其补集。

（2）设 X 是一个非空集合，则集族

$$\mathrm{FC}(X) = \{A \subseteq X \mid A\text{有限或}A'\text{有限}\}$$

是一个 Boole 代数。

（3）设 $(X, \mathcal{O}(X))$ 是一个拓扑空间，则其既开又闭的子集构成的集族在包含序下是一个 Boole 代数。

定理 1.4.6 设 $(B;')$ 是一个 Boole 代数，则对于任意的 $x, y \in B$，有

（1） $1' = 0$，$0' = 1$；

（2） $x'' = x$；

（3） $x \leqslant y \Longleftrightarrow y' \leqslant x'$；

（4） $x \wedge y = 0 \Longleftrightarrow x \leqslant y'$；

（5） $x \vee y = 1 \Longleftrightarrow x' \leqslant y$。

证明 （1）显然。

（2）由于 x' 是 x 的补元，x'' 是 x' 的补元，由补元的相互性和唯一性知，$x'' = x$。

（3）如果 $x \leqslant y$，则 $y' = (x \vee y)' = x' \wedge y'$，从而 $y' \leqslant x'$。如果 $y' \leqslant x'$，则 $x = x'' \leqslant y'' = y$。

（4）若 $x \wedge y = 0$，则 $y' = y' \vee 0 = y' \vee (x \wedge y) = (y' \vee x) \wedge (y' \vee y) = (y' \vee x) \wedge 1 \geqslant x$；若 $x \leqslant y'$，则 $x \wedge y \leqslant y' \wedge y = 0$。

（5）$x \vee y = 1$ 当且仅当 $x' \wedge y' = 0$ 当且仅当 $x' \leqslant y'' = y$。 □

Boole 代数之所以被称为代数，是因为它可以用纯代数语言来描述。

定义 1.4.4 设 $(R; \cdot, +)$ 是一个有单位元 1 的环。如果 R 的每个元素都是幂等元，则称 R 为一个 **Boole 环**（Boolean ring）。

定理 1.4.7　设 R 是一个 Boole 环，则 R 是交换的，且 $x+x=0\ (\forall x\in R)$。

证明　对于任意的 $x,y\in R$，有 $x+y=(x+y)^2=x^2+y^2+xy+yx=x+y+xy+yx$，从而 $xy+yx=0$。令 $y=1$ 即得 $x+x=0$，从而 $xy=-yx=yx$。□

定理 1.4.8　设 $(B;')$ 是一个 Boole 代数，定义 B 上的乘法和加法运算如下:

$$x\cdot y=x\wedge y,\ x+y=(x\wedge y')\vee(x'\wedge y)\ (\forall x,y\in B),$$

则 $(B;\cdot,+)$ 是一个 Boole 环。

证明　显然，乘法运算和加法运算是封闭的，并且 $x\cdot x=x\wedge x=x$, $1\cdot x=1\wedge x=x$，因此 $(B;\cdot)$ 是一个幂等幺半群。

现证 $(B;+)$ 是一个 Abel 群。易见，$x+y=y+x$，且

$$\begin{aligned}(x+y)+z&=[(x\wedge y')\vee(x'\wedge y)]+z\\&=\{[(x\wedge y')\vee(x'\wedge y)]\wedge z'\}\vee\{[(x\wedge y')\vee(x'\wedge y)]'\wedge z\},\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}&[(x\wedge y')\vee(x'\wedge y)]\wedge z'=(x\wedge y'\wedge z')\vee(x'\wedge y\wedge z'),\\&[(x\wedge y')\vee(x'\wedge y)]'\wedge z=[(x'\vee y)\wedge(x\vee y')]\wedge z\\&\qquad=[(x'\wedge x)\vee(x'\wedge y')\vee(x\wedge y)\vee(y\wedge y')]\wedge z\\&\qquad=(x'\wedge y'\wedge z)\vee(x\wedge y\wedge z)。\end{aligned}$$

故 $(x+y)+z=(x\wedge y'\wedge z')\vee(x'\wedge y\wedge z')\vee(x'\wedge y'\wedge z)\vee(x\wedge y\wedge z)$。由加法交换律和上式的对称性得，$(x+y)+z=x+(y+z)$。因此，加法满足结合律。

又因为

$$x+0=(x\wedge 0')\vee(x'\wedge 0)=x\vee 0=x,$$

$$x+x=(x\wedge x')\vee(x'\wedge x)=0\vee 0=0,$$

可知 $(B;+)$ 是一个 Abel 群，且 $-x=x\ (\forall x\in B)$。

最后，对于任意的 $x,y,z\in B$，我们有

$$\begin{aligned}x\cdot y+x\cdot z&=[(x\wedge y)\wedge(x\wedge z)']\vee[(x\wedge y)'\wedge(x\wedge z)]\\&=[x\wedge y\wedge(x'\vee z')]\vee[(x'\vee y')\wedge x\wedge z]\\&=(x\wedge y\wedge z')\vee(y'\wedge x\wedge z)\\&=x\wedge[(y\wedge z')\vee(y'\wedge z)]\\&=x\cdot(y+z)。\end{aligned}$$

因此，$(B;\cdot,+)$ 是一个 Boole 环。 $\square$

定理 1.4.9 设 $(R;\cdot,+)$ 是一个 Boole 环，定义 R 上的二元关系 $\leqslant$ 为

$$x \leqslant y \Longleftrightarrow x \cdot y = x \ (\forall x, y \in R),$$

则 $(R,\leqslant)$ 是有界格，其中

$$x \wedge y = xy,\ x \vee y = x + y + xy \ (\forall x, y \in R)。$$

令

$$x' = 1 + x \ (\forall x \in R),$$

则 $(R;')$ 是一个 Boole 代数。

证明 第一步: $(R,\leqslant)$ 是有界偏序集，$0, 1$ 分别为最小元和最大元。

设 $x, y, z \in R$。由 $xx = x$ 知，$x \leqslant x$，自反性成立；如果 $x \leqslant y \leqslant z$，则 $xy = x$，$yz = y$，从而 $xz = (xy)z = x(yz) = xy = x$，故 $x \leqslant z$，传递性成立；设 $x \leqslant y \leqslant x$，则 $x = xy = yx = y$，反对称性成立。因此，$(R,\leqslant)$ 是一个偏序集。另外，由 $0x = 0$ 和 $x1 = x$ 得 $0 \leqslant x \leqslant 1$，故 $(R,\leqslant)$ 有界。

第二步: $x \wedge y = xy$，$x \vee y = x + y + xy \ (\forall x, y, z \in R)$。

一方面，由于 $(xy)y = x(yy) = xy$，$(xy)x = (xx)y = xy$，得 $xy \leqslant x$，$xy \leqslant y$，即 xy 是 x, y 的一个下界；设 z 也是 x, y 的一个下界，则 $z \leqslant x$，$z \leqslant y$，从而 $z(xy) = (zx)y = zy = z$，于是 $z \leqslant xy$。因此，$xy = x \wedge y$。

另一方面，$x(x + y + xy) = xx + xy + xxy = x + (xy + xy) = x + 0 = x$，从而 $x \leqslant x + y + xy$，同理 $y \leqslant x + y + xy$，即 $x + y + xy$ 是 x, y 的一个上界；设 z 也是 x, y 的一个上界，则 $x \leqslant z$，$y \leqslant z$，从而 $(x + y + xy)z = xz + yz + (xy)z = x + y + x(yz) = x + y + xy$，于是 $x + y + xy \leqslant z$。因此，$x + y + xy = x \vee y$。

第三步: $(R;\wedge,\vee)$ 是分配格。事实上，对于任意的 $x, y, z \in R$，有

$$\begin{aligned}(x \wedge y) \vee (x \wedge z) &= xy + xz + (xy)(xz)\\ &= xy + xz + xyz\\ &= x(y + z + yz)\\ &= x \wedge (y \vee z)。\end{aligned}$$

第四步: $(R;\wedge,\vee)$ 是有补格。事实上，

$$x \wedge x' = x(1 + x) = x + x = 0,$$

$$x \vee x' = x + (1 + x) + x(1 + x) = 1 + x + x = 1。$$

因此，$(R;\wedge,\vee,')$ 是一个 Boole 代数。 $\square$