

# 第 1 部分

## 最优控制介绍



# 第 1 章 最优控制基础

大自然总是以最简的方式运转。如果一个物体从一点无障碍地到达另一点，大自然必引导它沿着最短的路径最快地到达。

——Pierre Louis Maupertuis (莫佩尔蒂), 1698—1759

## 本章提要

本章从历史的视角介绍最优控制理论涉及的主要问题。包括早期的变分问题、最优控制问题，以及最优控制数学理论走向成熟后涌现的无确定模型的控制问题。

## 1.1 引言

科学家一直向往用简单的原理解读复杂的现象。本章开始的一段名言出自 18 世纪法国科学家和哲学家 Maupertuis<sup>1</sup> 的著作《作品集》(Oeuvres)。他于 1744 年首次提出最小作用量原理<sup>2</sup> (principle of least action), 认为世界上的物理规律都是以对某个“作用量”取极小值为准则“制定”的。这种最优化的思想在很多领域中都显示出威力。例如, “业余数学家之王” Pierre de Fermat (费马) 早在 1662 年就提出光线总沿着耗时最短的路径传播 (见文献 [1, 2]); 依据最小作用量原理, 可利用变分法推导出牛顿运动定律等力学规律; 经济学中也称最大化个人利益的个体为经济人 (homo economicus), 我们可认为此时他最小化的是其损失或代价; 甚至在社会学领域也有类似的现象, 认为人会天然地选择需要最少努力的路径, 哈佛大学语言学教授 George Kingsley Zipf (齐普夫) 称之为最小努力原则 (principle of least effort, 见文献 [3]), 被广泛应用于设计领域。

代价的具体形式和例子见 1.3 节。

当我们面对一个控制任务时, 总是希望依照事物发展的规律, 在已有条件的约束下, 达到控制目标。本书讨论的最优控制就是研究如何以最小的代价完成这一控制任务的理论。这个代价可能是所需时间、消耗的能量, 也可能是实际与预期的差距等。

设想我们要为一辆无人车设计控制方法, 使其沿着一定的路线, 到达目标位置。要完成这个控制任务, 首要的课题就是要了解这辆车当前的“状态”及其关于“控制”的变化规律: 其中, 我们最关心的状态是车辆当前所处的位置和车速; 可以通过控制油门加速, 也可以通过控制刹车减速; 运行速度又会进一步影响接下来一段时间内车辆位置的改变。与此同时, 还需要确保车速不能过快而违反了交通规则; 假如车上的燃油不多了, 则还需要保证整个行程中油耗不大于现有油量的限额。

<sup>1</sup> 在本书中, 除少量控制学科之外的知名学者外, 一般使用英文称呼国外学者, 以便与文献统一。

<sup>2</sup> 除了 Maupertuis, Leonhard Euler (欧拉) 和 Gottfried Leibniz (莱布尼茨) 对最小作用量原理的提出也有着重要作用。同在 1744 年, Euler 随后给出了类似却更为公式化的提法, 并给出了计算方法。也有一种有争议的观点认为, 早在 1707 年, Leibniz 就已经得知这一原理。

以上描述的是一个典型的控制任务。一位经验丰富的司机可能会有多种控制的方法驶达目的地。然而，如果我们希望以最短的时间自动到达目标，就带来了一些困扰：直观来看，加大油门固然能减少到达目的地所需的时间，却可能引发超速的问题，甚至还可能因加大消耗而提前耗光燃油，最终无法抵达。路途上还可能发生预料之外的情况。这需要合理地设计控制方法，我们可以将其描述为一个最优控制问题。

这个例子中蕴含了最优控制问题的四个基本元素：

(1) 状态方程：描述动态系统。即，关于时间  $t$  的函数控制变量  $u(t)$  对接下来状态变量  $x(t)$  的影响，这一影响一般用常微分方程表示。

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t), \quad t \in [t_0, t_f]. \quad x(t_0) = x_0.$$

(2) 容许控制：控制和状态需满足的约束条件。

$$u \in \mathcal{U}, \quad x \in \mathcal{X}.$$

(3) 目标集：任务结束的  $t_f$  时刻被控对象的状态  $x(t_f)$  应符合的条件。

$$\mathcal{S} = \{x(t_f) : m(x(t_f), t_f) = 0\}.$$

(4) 性能指标：在达到目标集的情况下，用于衡量控制任务完成的优劣。

$$J(u) \stackrel{\text{def}}{=} h(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} g(x(t), u(t), t) dt.$$

从数学的角度，最优控制问题可理解为求解满足状态方程、容许控制，且能达到控制任务目标集的情况下使性能指标最小化的控制变量。本章接下来的各小节将介绍最优控制的基本概念和核心问题，以及上述符号的含义。我们从最优控制的起源——变分问题谈起。

最优控制问题的四个基本元素的介绍见1.3节。

## 1.2 变分问题

### 1.2.1 最速降线问题

变分法是一种经典的数学工具，它的诞生可以追溯至 17 世纪末轰动欧洲的“伯努利兄弟打赌”（见文献 [4]）。1696 年 6 月，法国数学家 Johann

Bernoulli (约翰·伯努利) 在《教师学报》向欧洲数学家, 尤其是自己的哥哥兼导师, Jakob Bernoulli (雅各布·伯努利, 又名 James 或 Jacques) 公开提出挑战: 如图 1.1 所示, 如何选择一条曲线, 让一个小球 (质点) 从较高的一点无摩擦地沿这条曲线最快下滑到达较低的一点, 即著名的“最速降线问题” (brachistochrone curve problem)。最终, Johann Bernoulli 自己、他的哥哥 Jakob Bernoulli、Johann 的学生 Marquis de l'Hôpital (洛必达), 以及数学家 Gottfried Leibniz (莱布尼茨) 和 Isaac Newton (牛顿) 都独立给出了正确的答案——旋轮线, 即圆沿直线滚动, 其上一固定点所经过的轨迹。这些解法都发表在次年 5 月的《教师学报》上。



Johann Bernoulli  
(1667—1748)

法国数学家, 提出并解决  
最速降线问题

**例 1.1** (最速降线问题, brachistochrone curve problem). 质点在重力作用下, 于给定起点  $a$ , 从静止滑至其下方的终点  $b$ , 不计摩擦力, 沿何曲线滑下所需时间最短?

为了分析方便, 如图 1.1 所示, 我们以向下的方向为  $y$  轴正向, 以向右的方向为  $x$  轴正向。设质量为  $m$  的质点在  $(x, y)$  点处的滑动速度为  $v$ 。由能量

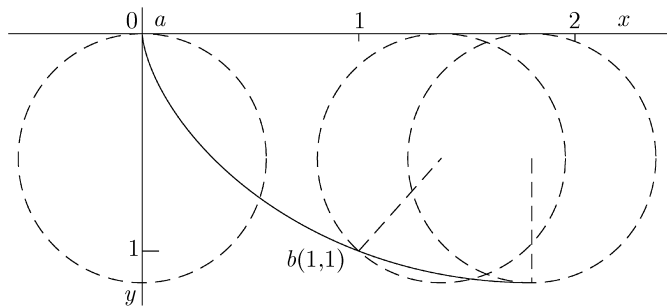


图 1.1 最速降线问题

守恒定律可知,  $mg y = mv^2/2$ , 其中  $g$  是重力加速度, 为常数。于是得到质点位于  $(x, y)$  点时的速度为关于位置的函数:  $v = \sqrt{2gy}$ 。以  $v$  为速度的质点划过单位弧长  $dl = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{1 + (dy/dx)^2} dx$  所需的时间应为弧长除以速度:

$$\frac{dl}{v} = \frac{\sqrt{1 + (dy/dx)^2} dx}{\sqrt{2gy}}.$$

质点从  $a$  沿任意曲线  $y(x)$  滑行到  $b$  所需的时间  $T(y)$  可写为积分形式

$$T(y) = \int_0^1 \frac{\sqrt{1 + (dy/dx)^2}}{\sqrt{2gy}} dx. \quad (1.2.1)$$

最速降线问题就是求一条两端固定的光滑曲线  $y(x)$  使性能指标  $T(y)$  最小。其中  $T(y)$  是一个以函数  $y(x): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  为定义域, 取值于实数  $\mathbb{R}$  的泛函。可解得参数方程形式的最优解为

$$x(\alpha) = r[\alpha - \sin \alpha], \quad y(\alpha) = r[1 - \cos \alpha].$$

其中,  $\alpha$  为参数,  $r$  为待定系数。以如图 1.1 所示的起点为  $a = (0, 0)$ , 终点为  $b = (1, 1)$  计算, 可解得待定系数  $r \approx 0.573$ 。

最速降线问题需要考虑小球的动态系统, 寻求合适的运动轨迹以达到目标, 并以所耗时间为性能指标, 将其最小化。因此控制论专家 Héctor J. Sussmann<sup>[5]</sup> 称之为第一个最优控制问题。事实上, 著名科学家 Galileo Galilei (伽利略) 早在 1630 年和 1638 年就系统地表述过最速降线问题, 然而给出了圆弧的错误结论 (见文献 [6])。因“伯努利兄弟打赌”, 这类“最优曲线”的问题一时间成为欧洲数学界的研究热点, 类似的问题在随后逐渐被提出, 并使用当时刚刚崭露头角的微积分 (calculus) 相似的思路解决。这一系列的工作最终促成了变分问题的提出和变分法 (calculus of variation) 的诞生。其实, 从变分法与微积分的英文即可见二者关系之密切。

不熟悉泛函的读者可暂时将其理解为一个以曲线为自变量的映射。其严格定义以及变分法求解最速降线问题的详细过程, 分别参考 3.2.2 节和 3.2.4 节。

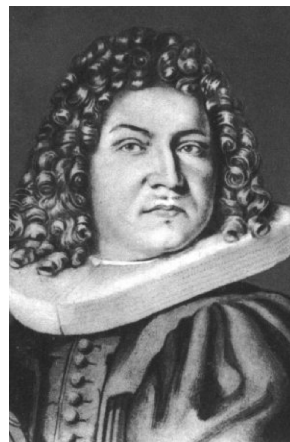
利用微积分解决变分问题的例子见 2.1 节。

### 1.2.2 等周问题

兄弟之间的打赌依然在继续, 这次是哥哥发起挑战, 源自 Dido 女王建立迦太基城传说 (见图 1.2) 的著名问题被解决。传说, 女王在北非岸边向当地

国王购买“一张牛皮之地栖身”，她机智地把一张牛皮做成 4 千米长的细条，在海岸围成了圆弧建立了迦太基城。根据传说，古人的智慧早已想到给定弧长，圆弧围成的面积最大，然而并没有给出严格的数学证明。1697 年 5 月，Jakob Bernoulli 以这一问题同样在《教师学报》向弟弟 Johann Bernoulli 提出挑战，赌资 50 个金币。Johann 最初给出几种解法但都有错误，直到 1701 年，Jakob 给出了正确的答案（见文献 [7]）。1718 年，Johann 大大改进了哥哥的解法，然而此时 Jakob Bernoulli 已经去世了。

数学家们将 Dido 女王的故事抽象为：在一个泛函取给定值（例如，牛皮长为 4 千米）的约束条件下，最小化或最大化另一



Jakob Bernoulli  
(1654—1705)

法国数学家，给出  
等周问题的解答



图 1.2 Erhard Schön 的版画，展现了圆形古城的风貌

个泛函（例如，牛皮围成的面积最大化），称其为等周问题（isoperimetric problem）。等周问题在数学史上占有一席之地，直到 21 世纪还有数学家在研究其变种。与例 1.1 的最速降线问题类似，我们将其建模成约束条件下求解极值的问题。

**例 1.2** (等周问题, isoperimetric problem). 曲线  $y(x)$  经过  $x$  轴上给定两点  $a = (-1, 0)$  和  $b = (1, 0)$ ，象征图 1.2 中海岸线与城墙的两个交点。在曲线长度为  $L$  的约束条件下，确定  $y(x)$  使其与  $x$  轴围成的面积最大。

位于海岸线（即  $x$  轴）上方的曲线  $y(x)$  的参数方程为  $x(t), y(t), t \in [t_0, t_f]$ 。则曲线的长度需要满足约束条件

$$\int_{t_0}^{t_f} \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)} dt = L. \quad (1.2.2)$$

上式中，分别用  $\dot{x}(t)$  和  $\dot{y}(t)$  表示  $x(t)$  和  $y(t)$  关于  $t$  的导数。根据格林公式，曲线与  $x$  轴围成区域的面积为

$$S = \int_{t_0}^{t_f} \frac{1}{2} [x(t)\dot{y}(t) - y(t)\dot{x}(t)] dt. \quad (1.2.3)$$

等周问题与最速降线问题有所不同，在最小化或最大化性能指标  $S$  的同时还需满足约束条件。在此我们同样略去计算过程，与古人的直观相符，最大面积恰好是由经过两给定点  $a$  和  $b$  的圆与  $x$  轴围成：

$$x^2 + (y - b)^2 = r^2, \quad y \geq 0,$$

其中  $b$  和  $r$  为待定系数。若取  $L = 10\pi/3$ ，可解得  $b = \sqrt{3}, r = 2$ 。

### 1.2.3 变分法的诞生

“变分”一词源自大数学家 Leonhard Euler 在 1733 年发表的著作《变分原理》（*Elementa Calculi Variationum*）。Euler 和 Maupertuis 同为 Johann Bernoulli 的学生。1744 年，就在 Maupertuis 的最小作用量原理问世的同一年，Euler 发表了著作《寻求具有某种极大或极小性质的曲线的技巧》（下面简称为《技巧》）。《技巧》不但得到最小作用量原理的更多推论，还列举并计算了一百个求极小或极大曲线的问题。Euler 不再像前辈一样针对特殊的例子

在此我们略过计算过程，格林公式及相关微积分内容可参考文献 [8, 9]。

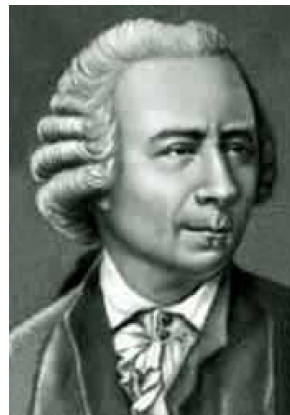
在 3.4.3 节将给出等周问题的详细求解过程。

最小作用量原理见本章引言 1.1 节。

给出特殊解答，而是系统地解决非常一般的问题。可以认为，《技巧》一书标志着“变分法”作为一门数学分支的正式诞生。前文所述的最小作用量原理、最速降线问题、等周问题等问题都可抽象为满足一定约束条件下的变分问题。

在《技巧》中，Euler 提出了一类变分问题，如图 1.3 所示，寻找固定了两个端点，且处于开集中的曲线，使某个性能指标达到最大或最小。对开集概念不熟悉的读者可理解为，对性能指标定义域中的任意曲线施加一个“很小”的扰动后，曲线依然处于定义域中。我们将这类问题称为最简变分问题。

关于开集的讨论详见 3.2.3 节。



Leonhard Euler  
(1707—1783)

瑞士数学家、物理学家，变分法  
创始人之一

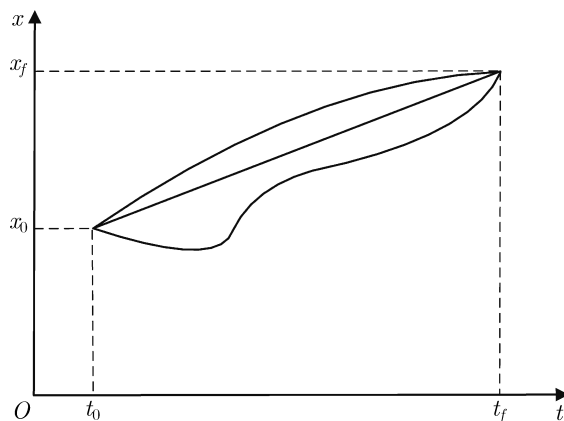


图 1.3 最简变分问题

**问题 1.1** (最简变分问题, the simplest variational problem). 求连续可微函数  $x(t) : [t_0, t_f] \rightarrow \mathbb{R}^n$ , 满足初始条件  $x(t_0) = x_0$ , 在给定的终端时刻  $t_f$ , 达到给定的终端状态  $x(t_f) = x_f$ , 并最小化性能指标:

$$J(x) = \int_{t_0}^{t_f} g(x(t), \dot{x}(t), t) dt, \quad (1.2.4)$$